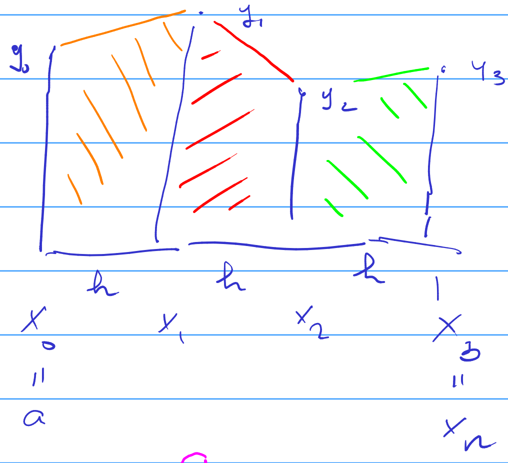
Méthode composite

1 trapèze :



aire du 1° trapèze : $h\left(\frac{y_0}{2} + \frac{y_1}{2}\right)$

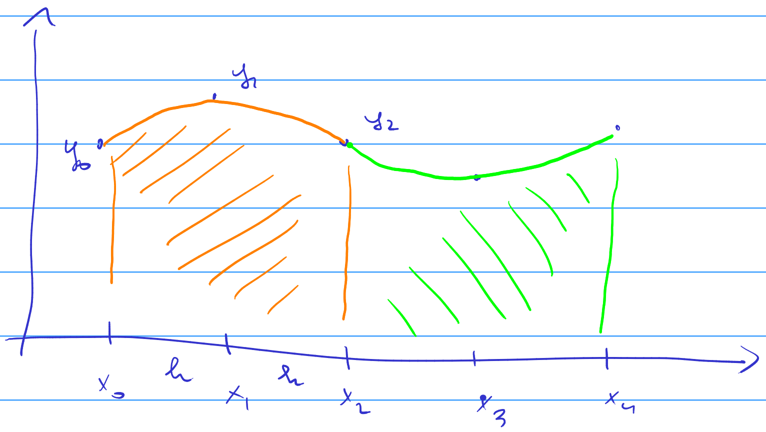
\+ 2° trapèze : $h\left(\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}\right)$

\+ 3° trapèze : $h\left(\frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{2}\right)$

Formule composite : $h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2}\right)$

$$h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

Simpson



Aire sous la parabole $= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) = \int_{x_0}^{x_0+2h}$ parabole d'interp.

(formule à 3 étages) $= 2h\left(\frac{y_0}{6} + \frac{2y_1}{6} + \frac{y_2}{6}\right)$

↳ nb de points

$\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ poids

Aire 1° parabole $= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$

2° parabole $= \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$

Formule composite : $\frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right)$

$$\frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

Formule de quadrature d'ordre p (trap $p=2$, Simpson $p=4$)

Applique la formule composite

Pas de longueur h

Thm : erreur $\simeq h^p$

Et alors ?!

1° calcul pas $h_0 \rightarrow$ erreur err_0

$h_0 \qquad err_0 \simeq h_0^p$

$h_1 = \frac{h_0}{10} \qquad err_1 \simeq h_1^p = \frac{h_0^p}{10^p} = \frac{err_0}{10^p}$

erreur divisée par 10^p

ça veut dire qu'on gagne p décimales exactes

Si au lieu de diviser h par 10, on la divise par 2

on gagne p bits exacts

Pour aller + loin :

Faire la même erreur que ds scipy :

- $n = 2^k + 1$
- Simpson pour les 2^k premiers points et terminer avec 1 trapèze

Question : quel est l'ordre (expérimental) de la méthode obtenue ?

Faire la même chose mais en utilisant la formule de Newton d'ordre 4 à la place de la formule des trapèzes ⟶ Vérifier ordre 4

Dernière question amusante :

Si on intègre une spline cubique, que se passe-t-il ?

Pourquoi cette question ?

Ds le théorème on suppose $f(x)$ p fois dérivable

Spline cubique dérivable 2 fois

Intégration Numérique des Equations Différentielles

Eq Diff ?

↳ la solution attendue c'est une fonction $y(x)$

Souvent, je vais omettre la variable indépendante x et écrire y au lieu de $y(x)$ pour la fonction inconnue

Notation y' dérivée de y (c'est aussi 1 fonction $y'(x)$)

$\dot{y}$ autre notation

$\frac{d}{dx} y(x) = \frac{dy}{dx}$ encore une autre notation

Lien avec la thématique IS

→ Epidémiologie $S \to I \to R$

↳ 3 éq. diff ordinaires EDO

ordinary diff equation ODE

1 seule dérivation $\frac{d}{dx}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} s(x) & \text{la pop présente ds le compt } S \text{ à l'instant } x \quad (x = \text{temps}) \\ i(x) & \text{— } I \\ r(x) & \text{— } (r) \end{array} \right.$$

Quelques exemples de résolutions d'éq diff avec Maple.

```
> eq := diff(y(x),x) = y(x);
```

$$eq := \frac{d}{dx}\, y(x) = y(x) \quad (1)$$

```
> eq;
```

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = y(x) \quad (2)$$

On cherche une fonction y(x) telle que : la dérivée de la fonction y(x) doit être égale à la fonction y(x).

```
> dsolve (eq, y(x));
```

$$y(x) = \_C1\, e^{x} \quad (3)$$

Le symbole _C1 désigne une constante arbitraire.
Ici, la solution est une famille de fonctions, dépendant d'une constante arbitraire notée _C1

```
> dsolve ( { eq, y(0)=1 }, y(x) );
```

$$y(x) = e^{x} \quad (4)$$

Pour fixer une des fonctions de la famille, il suffit de rajouter une condition (appelée condition initiale).
Ici, j'ai demandé la fonction y(x) de la famille telle que y(0) = 1.

```
> eq := diff(y(x),x) = y(x)**2;
```

$$eq := \frac{d}{dx}\, y(x) = y(x)^{2} \quad (5)$$

```
> dsolve ( { eq, y(0)=2 }, y(x) );
```

$$y(x) = -\frac{2}{2\,x-1} \quad (6)$$

Ce qu'on vient de faire, c'est de la résolution symbolique. On cherche une formule pour la solution.
Une formule qui dépend d'un certain nombre de fonctions "connues" telles que exp (x), sin(x), des fonctions d'Airy, ...

En général, une équation différentielle a bien des solutions mais il n'y a aucune raison que ces solutions puissent se noter par des formules finies ne faisant intervenir les fonctions "connues" (connues en fait pour des raisons historiques).

Par contre on peut toujours faire de la résolution numérique.

```
> eq;
```

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = y(x)^{2} \quad (7)$$

```
> soln := dsolve ( { eq, y(0)=2 }, y(x), numeric);
```

$$soln := \mathbf{proc}(x\_rkf45)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc} \quad (8)$$

La solution est une fonction au sens informatique du terme, avec un paramètre formel x (c'est soln(x)).

```
> soln(0);
```

$$[x = 0.,\ y(x) = 2.] \quad (9)$$

```
> soln(0.2);
```

$$[x = 0.2, y(x) = 3.33333334266478] \tag{10}$$

La solution numérique est une fonction informatique capable d'évaluer une approximation de la solution mathématique. Très important : la fonction informatique ne contient pas la formule -2/(2x-1). Les deux méthodes : résolution symbolique et résolution numérique s'appuient sur des techniques complètement différentes.