Polytech'Lille — GIS 3 — Calcul Numérique
Épreuve de Mai 2016 — Aucune calculatrice, aucun document autorisé

---

1 Questions de cours (7 points)

Question 1 [1 pt]. Laquelle de ces deux instructions donne le résultat le plus précis ? Justifier.

```
WRITE (*,*) '0.1234 = ', (1E7 + 25.1234) - 10000025
WRITE (*,*) '0.1234 = ', (1E7 - 10000025) + 25.1234
```

Question 2 [1 pt]. Mettre sous forme matricielle le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4\,x_1 + 6\,x_2 & = & 1 \\ 9\,x_1 - 5\,x_2 & = & 6 \\ x_1 - x_2 & = & 8 \end{array}\right.$$

Question 3 [2 pts]. Appliquer à la main l'algorithme de Cholesky si c'est possible et l'algorithme du pivot de Gauss si ça ne l'est pas. Donner la factorisation de matrice calculée par l'algorithme.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 17 & 13 \\ 6 & 13 & 61 \end{pmatrix}.$$

Question 4 [1 pt]. On souhaite résoudre un système $A\,x = b$ avec $\kappa(A) \simeq 10$. Que peut-on dire au sujet de la précision du résultat ?

Question 5 [2 pts]. On considère la matrice suivante, obtenue à la fin de la première itération de l'algorithme de Householder. Effectuer la deuxième itération uniquement. Détailler les vecteurs et les matrices intermédiaires. Préciser les détails qui ont une importance numériquement. Pour la matrice finale (et uniquement elle), donner les valeurs numériques connues à l'avance (au signe près) et mettre une croix pour les autres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

2 Problème (13 points)

Toutes les questions se rapportent à la préparation à l'épreuve écrite (section A). Dans tous les raisonnements, en plus des hypothèses de la section A, on suppose pour simplifier que les valeurs propres sont distinctes deux-à-deux et non nulles.

Question 6 [1 pt]. Est-ce qu'il ne serait pas nécessaire de supposer, en plus, que les valeurs propres de A sont réelles ? Justifier.

Question 7 [2 pts]. En utilisant une propriété du polynôme caractéristique, montrer que le déterminant de A est le produit des valeurs propres de A.

Question 8 [2 pts]. Supposons $\det(A) < 0$. Que peut-on en déduire au sujet du nombre de valeurs propres négatives de A (utiliser la question précédente) ? Et dans le cas $\det(A) > 0$?

Question 9 [2 pts]. On veut montrer que, si $\det(A_{k-1})$ et $\det(A_k)$ sont de signes différents, alors A_k admet une valeur propre négative de plus que A_{k-1} (on suppose $2 \leq k \leq m$). On décompose le raisonnement en plusieurs étapes :

1. La propriété d'interlacement (Figure 1) implique une relation entre le nombre de valeurs propres négatives de A_{k-1} et celui de A_k. Quelle relation ? Ne pas hésiter à faire un dessin.
2. Compléter le raisonnement ci-dessus dans le cas où les deux déterminants sont de même signe.
3. Compléter le raisonnement dans le cas où les deux déterminants sont de signes différents.

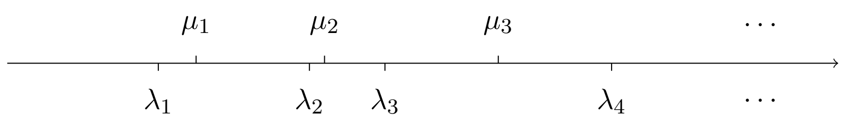

Figure 1 – Illustration graphique de la propriété d'interlacement des valeurs propres de la suite (A_k) : entre deux valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ de A_k, on trouve une valeur propre $\mu_1 < \mu_2 < \cdots$ de A_{k-1} et donc $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \lambda_3 < \cdots$

Question 10 [1 pt]. Il est écrit : « si x est quelconque, le nombre de variations de signe dans la suite (D_k) donne le nombre de valeurs propres de A inférieures à x ». Justifier cette affirmation.

Question 11 [1 pt]. Supposons qu'on ait obtenu des approximations des valeurs propres de A par la méthode de section A. Est-il possible de poursuivre les calculs pour obtenir une factorisation de Schur de A ? Justifier.

Question 12 [1 pt]. Si A est symétrique mais pas tridiagonale, est-il possible d'appliquer la méthode de la section A pour calculer ses valeurs propres ? Justifier.

Question 13 [3 pts]. Écrire un sous-programme (ou une fonction) FORTRAN paramétré par un réel x, une matrice A, de dimension $m \times m$, supposée tridiagonale et symétrique, qui retourne (d'une façon ou d'une autre) le nombre de variations de signe dans la suite (D_k).

Le sous-programme (ou la fonction) peut comporter plus de deux paramètres. Penser en particulier que la matrice peut-être une sous-matrice d'une matrice surdimensionnée.

Commencer par calculer la suite (D_k) dans un tableau (si vous le souhaitez, vous pouvez supposer que les indices de certains tableaux commencent à zéro comme en C).

Déterminer ensuite le nombre de variations de signe.

A Préparation à l'épreuve écrite

On considère une matrice réelle A de dimension $m \times m$, symétrique et tridiagonale, c'est-à-dire une matrice $A = A_m$ avec

$$A_k = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{k-1} & b_{k-1} \\ & & & b_{k-1} & a_k \end{pmatrix}.$$

On admet la proposition suivante :

Proposition 1 *Le nombre de valeurs propres négatives de la matrice tridiagonale symétrique A est égal au nombre de variations*[1] *de signe dans la suite :*

$$1, \det(A_1), \det(A_2), \ldots, \det(A_m)\,. \tag{1}$$

Soit x un réel quelconque. Notons $D_k = \det(A_k - x\,I)$ pour $1 \leq k \leq m$. On admet que les déterminants D_k sont liés entre eux par la relation de récurrence d'ordre deux suivante :

$$\begin{aligned} D_0 &= 1\,, \\ D_1 &= a_1 - x\,, \\ D_k &= (a_k - x)\,D_{k-1} - b_{k-1}^2\,D_{k-2}\,, \quad (2 \leq k \leq m)\,. \end{aligned}$$

En choisissant $x = 0$, on voit qu'il est facile de calculer la suite de déterminants (1). Il suffit ensuite de calculer le nombre de variations de signe dans cette suite pour déterminer le nombre de valeurs propres négatives de A.

Plus généralement, si x est quelconque, le nombre de variations de signe dans la suite (D_k) donne le nombre de valeurs propres de A inférieures à x. Cette remarque, combinée à la méthode dichotomique, conduit à un algorithme de calcul de valeurs propres appelé *méthode de la bisection* [1, Lecture 30, Bisection].

Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres $1+\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1-\sqrt{3}$. La suite (1) est égale à

$$1\,,\ \det(A_1) = 1\,,\ \det(A_2) = -1\,,\ \det(A_3) = -3\,,\ \det(A) = 4\,.$$

Le nombre de variations de signe de cette suite est égal à 2. Le nombre de valeurs propres négatives est lui-aussi égal à 2.

Références

[1] Lloyd Nicholas Trefethen and David Bau. *Numerical Linear Algebra.* SIAM, 1997.

1. Pour simplifier, on suppose qu'aucun déterminant n'est nul.