GIS3 — Calcul Numérique — Épreuve d'avril 2014
Durée 2 heures — Aucun document autorisé

---

1 Petits exercices et questions de cours (7 points)

Question 1 [2 pts]. Appliquer l'algorithme de Cholesky à la matrice A suivante (tous les nombres apparaissant lors des calculs sont des entiers). Expliquer en quelques mots la factorisation de A ainsi obtenue.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 2 & 10 & -4 \\ -8 & -4 & 41 \end{pmatrix}.$$

Question 2 [2 pts]. Résoudre le système d'équations linéaires $A\,x = b$ suivant, en utilisant le fait que la matrice A est factorisée. Expliquer en quelques mots la démarche avant de mener les calculs (tous les nombres apparaissant lors des calculs sont des entiers).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Question 3 [3 pts]. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Appliquer une itération de l'algorithme de Householder. Détailler les calculs. À une étape, en particulier, on est amené à ajouter ou à soustraire un certain nombre. Numériquement, quel choix est préférable ? La matrice résultat a des coefficients entiers mais des fractions simples peuvent apparaître dans une matrice intermédiaire.

2 Programmation FORTRAN (3 points)

Soient A une matrice $m \times n$, deux indices de lignes i, j et deux scalaires c, s. Notons L_i et L_j la $i$ème et la $j$ème lignes de A. On souhaite modifier A ainsi :

$$\begin{pmatrix} L_i \\ L_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_i \\ L_j \end{pmatrix}$$

ce qui revient à remplacer L_i par $c\,L_i - s\,L_j$ et, simultanément, L_j par $s\,L_i + c\,L_j$.

Question 4 [3 pts]. Écrire une action (*subroutine*) FORTRAN qui effectue cette opération, sans utiliser de BLAS, en double précision. L'entête de l'action doit être le suivant. À quoi sert le paramètre `LDA` ?

```
SUBROUTINE ROTATION (M, N, A, LDA, I, J, C, S)
```

3 Problème (10 points)

Question 5 [1 pt]. Montrer que la matrice G de dimension 2×2 est orthogonale.

3.1 Première application

Question 6 [1 pt]. Quelle factorisation obtient-on ? Expliquer comment on obtient les facteurs à partir des matrices calculées. Si certains facteurs sont censés avoir des propriétés particulières (d'orthogonalité, par exemple), justifier.

Question 7 [1 pt]. La matrice de l'exemple est carrée. Y aurait-il un intérêt à appliquer la méthode sur une matrice rectangulaire ? Si oui, pour quel type d'application ? Si non, pourquoi ?

Question 8 [2 pts]. Décrire en pseudo-langage un algorithme qui applique la méthode présentée dans l'exemple sur une matrice $m \times m$ quelconque. Bien préciser l'ordre dans lequel les coefficients de la matrice sont traités.

Question 9 [1 pt]. La méthode basée sur les rotations de Givens est à peu près 50% plus coûteuse que l'algorithme étudié en cours, sur des matrices pleines. Peut-elle être intéressante sur des matrices creuses ? Si oui, justifier.

3.2 Deuxième application

Question 10 [1 pt]. Comment appelle-t-on la relation qui lie A et $G_1\, A\, G_1^T$? Qu'est-ce que cette relation implique entre ces deux matrices ?

Question 11 [1 pt]. Montrer que le fait que $G_1\, A\, G_1^T$ est symétrique n'est pas un hasard dû au choix des valeurs numériques de A.

Question 12 [1 pt]. Sous quelle forme étudiée en cours peut-on ainsi mettre une matrice A symétrique, de dimension $m \times m$, grâce aux rotations de Givens ?

Question 13 [1 pt]. Soit A une matrice symétrique, de dimension $m \times m$. Peut-on, en multipliant la matrice courante à chaque itération à la fois, à gauche par une matrice G_i, et à droite par G_i^T, transformer A en une matrice diagonale ? Justifier en une phrase ou deux.

Considérons les deux matrices 2×2 suivantes :

$$F = \begin{pmatrix} -c & s \\ s & c \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

où $s = \sin\theta$ et $c = \cos\theta$, pour un certain angle θ. La première matrice vérifie $\det F = -1$; c'est un cas particulier de matrice de réflexion. La seconde vérifie $\det G = 1$; c'est une *matrice de rotation*, plus précisément, une matrice de *rotation de Givens*.

Ces matrices sont toutes les deux orthogonales.

Les matrices de rotation de Givens permettent d'introduire des zéros dans des vecteurs ou des matrices. Leurs coefficients peuvent se calculer sans expliciter l'angle θ. Le principe est le suivant : étant donné un vecteur

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

on cherche c et s tels que

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r = \|x\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve :

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad c = x_1/r, \quad s = -x_2/r.$$

4 Première application

les rotations de Givens peuvent être utilisées pour obtenir une des factorisations étudiées en cours. Voici l'idée, illustrée sur une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 10 & 2 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche à placer un zéro en a_{21}. On utilise pour cela la matrice de rotation suivante (on a incorporé une matrice de rotation de Givens dans une matrice identité 3×3) :

$$G_1 = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

définie par :

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad c = 4/5, \quad s = -3/5.$$

En multipliant A à gauche par G_1, on obtient :

$$A_1 = G_1\, A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 6/5 \\ 0 & 5 & 8/5 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant à placer un zéro en a_{32}. On utilise pour cela la matrice de rotation suivante :

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix},$$

définie par :

$$r = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13\,, \quad c = 5/13\,, \quad s = 12/13\,.$$

En multipliant A_1 à gauche par G_2, on obtient :

$$A_2 = G_2\,A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 6/5 \\ 0 & 13 & -4/13 \\ 0 & 0 & 121/65 \end{pmatrix}.$$

5 Deuxième application

Les rotations de Givens peuvent être utilisées dans un autre contexte étudié, lui-aussi, en cours. Voici l'idée, illustrée sur une matrice symétrique 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans le but de placer un zéro en a_{31}, on utilise une matrice de la forme

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

définie par :

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,, \quad c = 3/5\,, \quad s = -4/5\,.$$

En multipliant A à gauche par G_1 on obtient :

$$G_1\,A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 19/5 & -1/5 \\ 0 & -17/5 & -7/5 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice A est symétrique, on peut, en multipliant A à droite par G_1^T, placer un zéro en a_{13}. Effectivement :

$$A\,G_1^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 19/5 & -17/5 \\ 4 & -1/5 & -7/5 \end{pmatrix}.$$

La tentation de multiplier A à la fois, à gauche par G_1, et à droite par G_1^T est irrésistible :

$$G_1\,A\,G_1^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 53/25 & -79/25 \\ 0 & -79/25 & 47/25 \end{pmatrix}.$$

6 Complément calculatoire

Soient $1 \leq i, j \leq m$ deux indices de ligne et $1 \leq k \leq n$ un indice de colonne dans une matrice A de dimension $m \times n$.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & k & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ & a_{ik} & \cdots \\ & & \\ & a_{jk} & \cdots \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

On souhaite se servir de a_{ik} pour placer un zéro en a_{jk} par une rotation de Givens. La matrice G s'obtient ainsi : partir de la matrice identité, placer les coefficients c sur la diagonale aux lignes i et j. Placer les coefficients $\pm s$ aux autres coins du « carré ». Il suffit ensuite d'appliquer la formule donnée en début de feuille, avec a_{ik} dans le rôle de x_1 et a_{jk} dans le rôle de x_2.

$$G = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & i & & j & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \vdots & & \vdots & \\ & c & & -s & \cdots \\ & & 1 & & \\ & s & & c & \cdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$