

1 Intégrales et Interpolation (10 points)

Question 1 [2 pts]. Approximer l'aire définie par les points suivants par la formule des trapèzes composites et celle de Simpson composite.

x_i	1	1.5	2	2.5	3
y_i	2	4	-5	2	1

Question 2 [2 pts]. Donner une expression du polynôme d'interpolation passant par les trois premiers points de la question précédente, en utilisant la formule de Lagrange. Ne pas pousser les calculs jusqu'au bout.

Question 3 [2 pts]. Le développement limité d'une fonction $u(x_0 + h)$ au voisinage d'un point x_0 est de la forme suivante (les coefficients $u_0, u_1, \dots, u_n$ sont des nombres) :

$$u(x_0 + h) \simeq u_0 + u_1 (x_0 + h) + u_2 (x_0 + h)^2 + u_3 (x_0 + h)^3 + \dots + u_n (x_0 + h)^n.$$

En utilisant le schéma de Horner-Ruffini, donner une formule permettant de calculer l'expression ci-dessus.

Problème

On considère une grille dans un plan horizontal, formée de $n \times m$ points (x_i, y_j) pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. On associe une hauteur z_{ij} à chaque point (x_i, y_j) de la grille, ce qui nous donne $n \times m$ points (x_i, y_j, z_{ij}) dans $\mathbb{R}^3$.

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on définit le polynôme

$$L_i(x) = \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

Pour tout $1 \leq j \leq m$, on définit le polynôme

$$M_j(y) = \prod_{k \neq j} \frac{y - y_k}{y_j - y_k} = \frac{(y - y_1) \cdots (y - y_{j-1})(y - y_{j+1}) \cdots (y - y_m)}{(y_j - y_1) \cdots (y_j - y_{j-1})(y_j - y_{j+1}) \cdots (y_j - y_m)}.$$

À partir de ces $n + m$ polynômes, on construit

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ij} L_i(x) M_j(y).$$

Question 4 [4 pts]. Que peut-on dire du graphe $z = f(x, y)$ du polynôme $f(x, y)$? Justifier.

2 Programmation en FORTRAN (4 points)

On rappelle la formule des différences divisées. Supposons donnés $n + 1$ points de coordonnées (x_i, y_i) , pour $0 \leq i \leq n$. Alors,

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= y_i & (0 \leq i \leq n), \\ c_{i,j} &= \frac{c_{i+1,j-1} - c_{i,j-1}}{x_{i+j} - x_i} & (1 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq n-j). \end{aligned}$$

Question 5 [3 pts]. On suppose que l'indice N et les tableaux TX (tableau des x_i), TY (tableau des y_i) sont initialisés avec les coordonnées des points à interpoler. On souhaite remplir la matrice C en utilisant la formule des différences divisées. Compléter le code suivant.

```
SUBROUTINE DIFFDIV (N, TX, TY, C)
  INTEGER N
  DOUBLE PRECISION TX(0:N), TY(0:N), C(0:N,0:N)
```

Question 6 [1 pt]. Expliquer à quoi servent ces différences divisées (quelle théorie, quelle méthode, comment s'en sert-on ?).

3 Équations Différentielles (6 points)

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\dot{y}(x) = y(x) - \frac{x}{y(x)^2}, \quad y(x_0) = 2.$$

Question 7 [1 pt]. Intégrer ce système avec la méthode d'Euler, en $N = 1$ pas, sur l'intervalle $[x_0, x_{\text{end}}] = [0, 2]$.

Question 8 [1 pt]. Même question mais en $N = 2$ pas.

Question 9 [2 pts]. Même question, avec la méthode de Runge, en $N = 1$ pas.

Question 10 [2 pts]. Le tableau suivant correspond au schéma de Heun. Donner la suite de formules qui permet de calculer y_1 à partir de x_0, y_0 et du pas h en appliquant ce schéma.

0			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$