

Master Sciences de la Matière
Physique Chimie
TDSM

Traitement du Signal

Bernard SEGARD

2009

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 Définitions

Le concept de signal recouvre des réalités très diverses. Il peut être associé à des grandeurs physiques telles qu'une pression (acoustique), un champ électromagnétique (optique, onde radio ...), une luminance (imagerie optique) ou plus simplement à une tension électrique. Dans tous les cas le signal est le support d'une information. Il devra être véhiculé et analysé de façon à extraire l'information qu'il contient.

Le traitement du signal consiste à conditionner le signal de façon à l'adapter aux moyens de transmission, d'extraction et de restitution de l'information (amplification, modulation, démodulation, échantillonnage, conversion analogique-digital (CAD) et digital-analogique (CDA)...). Toutes ces opérations doivent être effectuées sans que l'information soit dégradée ou à défaut que la dégradation soit la plus faible possible.

1.2 Classement des signaux

1.2.1 Classement phénoménologique

Un critère possible de classement des signaux consiste à les regrouper en deux types distincts : les signaux déterministes (ou certains) et les signaux aléatoires. Un signal déterministe est un signal dont l'évolution temporelle peut être décrite par un modèle mathématique approprié. Pour une grande majorité des signaux, cette évolution est alors parfaitement prédictible. Ce n'est toutefois pas le cas des signaux chaotiques. Ces signaux déterministes sont générés par des systèmes non linéaires très sensibles aux conditions initiales. Leur évolution est difficilement prédictible (imprédictible à long terme) faute d'une connaissance suffisamment précise de l'état initial du système. Par la suite on considérera que les signaux utiles (porteurs d'informations) sont déterministes ou sont assimilables à des signaux déterministes. A l'inverse, un signal aléatoire est un signal dont le comportement temporel est régi par le hasard et, de ce fait, est imprédictible. Ces signaux aléatoires seront alors décrits à partir d'observations statistiques. Cette catégorie de signaux regroupe l'ensemble des bruits (signaux parasites aléatoires) qui très souvent masquent le signal utile et dont il convient de se prémunir. Comme tout classement celui-ci a ses limites, ainsi un signal aléatoire peut être porteur d'information et nombre de signaux parasites sont déterministes.

Les signaux déterministes se classent en deux catégories :

- les signaux périodiques (théoriques parce que de durée ∞)
- les signaux non périodiques qui se subdivisent en signaux permanents de durée ∞ (théoriques) et en signaux transitoires de durée finie (ou tendant rapidement vers 0 quand le temps tend vers l'infini).

Parmi les signaux aléatoires on peut distinguer :

- les signaux stationnaires dont les caractéristiques statistiques sont permanentes (théoriques)

- les signaux non stationnaires

1.2.2 Classement énergétique

Les caractéristiques énergétiques des signaux permettent de définir deux grandes classes de signaux :

- *Les signaux à énergie totale finie*, pour lesquels la puissance moyenne totale (définie sur un temps infini) est nulle. Cette classe comprend l'ensemble des signaux transitoires.

- *Les signaux à puissance moyenne totale finie non nulle*. Ces signaux sont de nature théorique puisqu'ils transportent une énergie infinie. Cette définition recouvre l'ensemble des signaux permanents, périodiques et aléatoires stationnaires à l'exclusion du bruit blanc dont nous verrons qu'il est associé à une puissance moyenne totale infinie. Pour comprendre cette classification, il est nécessaire de préciser les notions d'énergie et de puissance associées au signal.

1.2.2.1 Puissance instantanée

Pour définir la puissance instantanée d'un signal on peut s'appuyer sur la définition de la puissance instantanée en électricité. Considérons un dipôle électrique parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. La puissance instantanée dissipée dans ce dipôle est :

$P(t) = u(t) \cdot i(t)$ où $u(t)$ est la différence de potentiel aux bornes du dipôle.

Si le dipôle est une résistance cette puissance s'écrit $P(t) = \frac{1}{R} u^2(t) = R i^2(t)$, expression qui se réduit à $P(t) = u^2(t) = i^2(t)$ si $R = 1\Omega$. Par analogie on définit la puissance instantanée normalisée (ou généralisée) d'un signal $x(t)$, représentant une grandeur physique quelconque par la relation suivante :

$$P(t) = x^2(t) \quad (1.1)$$

1.2.2.2 Énergie totale

L'énergie $\mathbb{E}(t_1, t_2)$ transportée par le signal $x(t)$ pendant un intervalle de temps T entre les instants t_1 et t_2 ($T = t_2 - t_1$) est une quantité positive définie par la relation :

$$\mathbb{E}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{+t_2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

L'énergie totale \mathbb{E}_{Totale} est la limite quand T tend vers l'infini de $\mathbb{E}(t_1, t_2)$ encore notée :

$$\mathbb{E}_{Totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{T \rightarrow \infty} x^2(t) dt \quad (1.2)$$

Notons que pour qu'un signal soit physique il est nécessaire que l'énergie totale transportée soit finie ce qui suppose que sa durée soit finie (signal transitoire). La fonction réelle représentative de son évolution $x(t)$ doit être de carré sommable. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$ doit donc être définie.

1.2.2.3 Puissance moyenne totale

On définit la puissance moyenne sur l'intervalle de temps T entre les instants t_1 et t_2 par la relation :

$$P_m(t_1, t_2) = \frac{1}{T} \mathbb{E}(t_1, t_2) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

La puissance moyenne totale $P_{mTotale}$ est la limite quand $T \rightarrow \infty$ de $P_m(t_1, t_2)$ soit :

$$P_{mTotale} = \frac{1}{T \rightarrow \infty} \int_T x^2(t) dt \quad (1.3)$$

Si l'énergie totale est finie, comme c'est le cas pour les signaux transitoires, la puissance moyenne totale est nulle. Pour que la puissance moyenne totale soit finie non nulle, l'énergie totale doit être infinie. C'est le cas pour les signaux permanents et les signaux périodiques.

Ces derniers signaux peuvent être caractérisé par leur valeur efficace définie par :

$$x_{eff} = \sqrt{P_{mTotal}}$$

valeur efficace souvent désignée sous le vocable anglo-saxon de valeur RMS (root mean square)

Chapitre 2

ANALYSE DE FOURIER DES SIGNAUX DÉTERMINISTES

2.1 Principe fondamental et définitions

L'analyse de Fourier (ou analyse harmonique) des signaux repose sur le principe suivant : Tout signal physique temporel, représenté par une grandeur réelle $x(t)$, peut toujours se décomposer en une somme discrète ou continue de signaux élémentaires sinusoïdaux de la forme $a \cos(2\pi\nu t + \varphi)$ où a est l'amplitude et φ la phase. ν est la fréquence qui est une grandeur essentiellement positive égale à l'inverse de la période T (ν s'exprime en Hz). On peut également caractériser ces signaux élémentaires sinusoïdaux par leur pulsation $\omega=2\pi\nu$.

Si le signal $x(t)$ est périodique de période T_0 , il peut s'écrire sous la forme d'une somme discrète de signaux sinusoïdaux dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale ν_0 ($\nu_0 = \frac{1}{T_0}$). Le signal $x(t)$ s'écrit alors :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos(2\pi n\nu_0 t + \varphi_n) \quad (2.1)$$

a_0 représente la partie continue du signal, les signaux élémentaires de fréquence $n\nu_0$ ($n > 1$) sont appelés harmoniques. La connaissance des a_n et φ_n permet de définir complètement le signal et donc de le reconstruire.

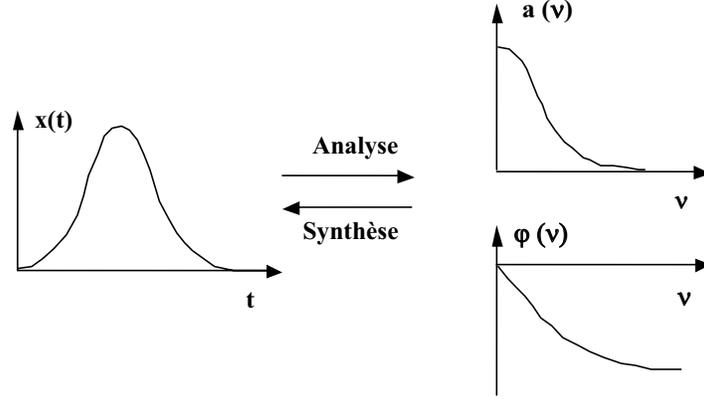
Si le signal $x(t)$ n'est pas périodique, cette décomposition discrète n'est plus possible et le signal est alors représenté par une intégrale (Intégrale de Fourier). Le signal $x(t)$ s'écrit alors :

$$x(t) = \int_0^{\infty} a(\nu) \cos(2\pi\nu t + \varphi(\nu)) d\nu \text{ avec } \varphi(0) = 0 \quad (2.2)$$

L'amplitude $a(\nu)$ et la phase $\varphi(\nu)$ sont des fonctions réelles continues de la fréquence ν qui définissent complètement le signal $x(t)$. L'analyse de Fourier consiste à rechercher l'expression des fonctions $a(\nu)$ et $\varphi(\nu)$ pour un signal $x(t)$ donné. A partir de $a(\nu)$ et $\varphi(\nu)$ on peut effectuer la synthèse du signal $x(t)$. Représentations temporelle et fréquentielle sont deux aspects d'une même réalité physique : Le signal. La représentation fréquentielle, et en particulier la courbe donnant l'évolution de l'amplitude $a(\nu)$, permet de comprendre la classification " haute, basse... fréquence " introduite précédemment. Dans le cas de la Figure 2.1, le signal $x(t)$ est un signal basse fréquence.

2.2 Forme complexe de l'intégrale de Fourier

L'intégrale de Fourier, telle que nous venons de la définir, a l'avantage d'être physiquement très claire, malheureusement elle s'avère souvent peu commode du point de vue du calcul proprement dit. Aussi a-t-on pris l'habitude d'utiliser une forme complexe pour les signaux élémentaires

FIGURE 2.1 – Exemple de représentation fréquentielle d'un signal temporel $x(t)$.

sinusoïdaux. Ces signaux peuvent en effet s'écrire :

$$a(\nu) \cos(2\pi\nu t + \varphi(\nu)) = \frac{a(\nu)}{2} e^{j(2\pi\nu t + \varphi(\nu))} + \frac{a(\nu)}{2} e^{-j(2\pi\nu t + \varphi(\nu))}$$

soit

$$a(\nu) \cos(2\pi\nu t + \varphi(\nu)) = \frac{a(\nu)}{2} e^{j\varphi(\nu)} e^{j2\pi\nu t} + \frac{a(\nu)}{2} e^{-j\varphi(\nu)} e^{-j2\pi\nu t} \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) peut encore s'écrire sous la forme :

$$a(\nu) \cos(2\pi\nu t + \varphi(\nu)) = X(\nu) e^{j2\pi\nu t} + X^*(\nu) e^{-j2\pi\nu t} \quad (2.4)$$

où $X(\nu)$ est une fonction complexe de la fréquence ν appelée amplitude complexe du signal élémentaire et $X^*(\nu)$ est son complexe conjugué. Le module de $X(\nu)$, noté $|X(\nu)|$, représente à un facteur près l'amplitude du signal sinusoïdal élémentaire ($|X(\nu)| = \frac{a(\nu)}{2}$), l'argument de $X(\nu)$, noté $\Phi(\nu)$, représente sa phase ($\Phi(\nu) = \arg[X(\nu)] = \varphi(\nu)$).

A ce niveau on est amené à introduire la notion de fréquence négative, qui n'a aucun sens physique, mais permet de simplifier l'expression de l'intégrale de Fourier. On définit l'amplitude complexe associée à une fréquence négative $\nu' = -\nu$ ($\nu > 0$) par la relation :

$$X(-\nu) = X^*(\nu) \quad (2.5)$$

Compte tenu des relations 2.4 et 2.5, l'intégrale de Fourier (2.2) peut s'écrire :

$$x(t) = \int_0^{\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu + \int_0^{\infty} X(-\nu) e^{j2\pi(-\nu)t} d\nu$$

si l'on pose $\nu' = -\nu$ dans la seconde intégrale on obtient :

$$x(t) = \int_0^{\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu - \int_0^{-\infty} X(\nu') e^{j2\pi(\nu')t} d\nu'$$

$$x(t) = \int_0^{\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu + \int_{-\infty}^0 X(\nu') e^{j2\pi(\nu')t} d\nu'$$

On aboutit ainsi à la forme complexe de l'intégrale de Fourier :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad (2.6)$$

Cette relation conduit à une expression simple de $X(\nu)$ qui permet de restituer $a(\nu)$ et $\varphi(\nu)$. Fourier a montré que dans ces conditions $X(\nu)$ s'écrit :

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (2.7)$$

$X(\nu)$ est la Transformée de Fourier de $x(t)$, réciproquement $x(t)$ est la Transformée de Fourier inverse de $X(\nu)$. $X(\nu)$ et $x(t)$ sont deux expressions qui décrivent une même réalité physique : le signal. Si sa représentation temporelle $x(t)$ est une fonction réelle du temps $X(\nu)$ est en général, une fonction complexe de la fréquence. $X(\nu)$ est également appelée *Densité Spectrale du signal* $x(t)$, son module $|X(\nu)|$ est appelé *Densité Spectrale d'Amplitude* du signal et son argument $\Phi(\nu) = \arg[X(\nu)]$ est appelé *Densité Spectrale de Phase* du signal. Plus couramment on parlera de spectre d'amplitude et de phase du signal ou plus généralement de spectre du signal.

Les propriétés de symétrie du spectre d'un signal physique (réel) résultent de la relation de définition (eq. 2.5). En effet si on met $X(\nu)$ sous la forme :

$$X(\nu) = |X(\nu)| e^{j\Phi(\nu)}$$

L'égalité 2.5 s'écrit encore :

$$|X(-\nu)| e^{j\Phi(-\nu)} = |X(\nu)| e^{-j\Phi(\nu)}$$

Ce qui entraîne que :

$$|X(-\nu)| = |X(\nu)|$$

Le Spectre d'amplitude est une fonction paire (symétrique) de la fréquence.

$$\Phi(-\nu) = -\Phi(\nu)$$

Le Spectre de phase est une fonction impaire (antisymétrique) de la fréquence

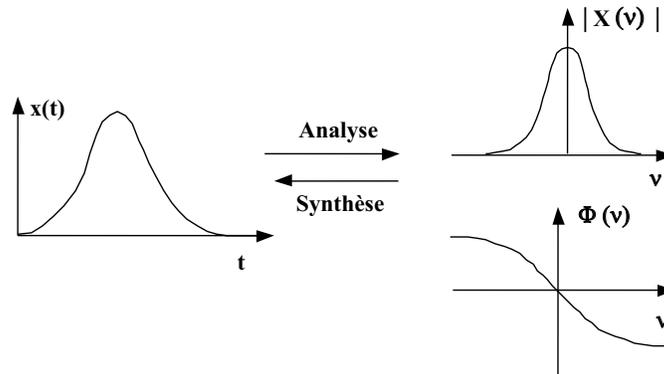


FIGURE 2.2 – Représentation complexe du spectre d'un signal temporel réel $x(t)$.

Remarque : Dans ce qui précède nous n'avons envisagé que le cas où $x(t)$ est une fonction réelle de la variable temps associée à un signal physique; en fait les équations de définition de la Transformée de Fourier (2.6 et 2.7) sont également valables lorsque $x(t)$ est une fonction complexe de t . Les propriétés de symétrie du spectre que nous venons d'énoncer ne sont évidemment plus satisfaites.

Dans ce qui précède, la Transformation de Fourier fait intervenir les variables temps t et fréquence ν appelées variables conjuguées. L'utilisation de la TF ne se limite pas à ce seul type de variables. Le temps peut, par exemple, être remplacé par une variable position; la variable conjuguée est alors un nombre d'onde ($\frac{1}{\lambda}$). Les phénomènes de diffraction peuvent ainsi s'analyser en termes de transformée de Fourier, la figure de diffraction étant la TF de l'objet diffractant.

2.3 Propriétés essentielles de la Transformation de Fourier

2.3.1 Linéarité

La Transformation de Fourier (TF) est une opération linéaire : si

$$x(t) \Leftarrow TF \Rightarrow X(\nu) \quad \text{et} \quad y(t) \Leftarrow TF \Rightarrow Y(\nu)$$

alors

$$ax(t) + by(t) \Leftarrow TF \Rightarrow aX(\nu) + bY(\nu) \quad (2.8)$$

où a et b sont des constantes qui peuvent être complexes.

Le symbole $x(t) \Leftarrow TF \Rightarrow X(\nu)$ indique que les deux grandeurs $x(t)$ et $X(\nu)$ se correspondent par Transformation de Fourier.

2.3.2 Propriétés liées à la parité du signal temporel

Si $x(t)$ est une fonction réelle paire ($x(-t) = x(t)$), alors son spectre $X(\nu)$ est réel ($\arg[X(\nu)] = 0$ ou π) et pair. Inversement, si $x(t)$ est une fonction réelle impaire ($x(-t) = -x(t)$), son spectre $X(\nu)$ est imaginaire pur ($\arg[X(\nu)] = \pm \frac{\pi}{2}$) et impaire. La démonstration sera faite en travaux dirigés.

2.3.3 Propriétés relatives à une compression et une dilatation temporelle

Soit un signal dépendant du temps $x(t)$, dont la TF est $X(\nu)$, on envisage la transformation qui à $x(t)$ associe le signal $y(t)$ défini par la relation $y(t) = x(at)$ où a est un réel positif. Cette transformation correspond à une dilatation temporelle si $a < 1$ et à une compression temporelle si $a > 1$. En effet si $x(t)$ a pour durée τ , $y(t)$ a une durée τ' définie par $a\tau' = \tau$ ($\tau' = \frac{\tau}{a}$). Si $a < 1$, $\tau' > \tau$ ce qui correspond bien à une dilatation.

Le spectre de $y(t)$ est donné par

$$Y(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

si l'on pose $t' = at$ ($t = \frac{t'}{a}$), $Y(\nu)$ s'écrit alors :

$$Y(\nu) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi\frac{\nu}{a}t'} dt'$$

compte tenu de la relation de définition de $X(\nu)$ (équation 2.7) on obtient :

$$y(t) = x(at) \Leftarrow TF \Rightarrow Y(\nu) = \frac{1}{a} X\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad (2.9)$$

Si la demi-largeur du spectre $X(\nu)$ du signal $x(t)$ est ν_m , celle de $Y(\nu)$ sera ν'_m , telle que $\frac{\nu'_m}{a} = \nu_m$ soit $\nu'_m = a\nu_m$. Ceci correspond à une compression fréquentielle si $a < 1$ ($\nu'_m < \nu$), alors qu'il y a une dilatation temporelle. En résumé une *dilatation temporelle* est toujours associée à une *compression fréquentielle*, inversement une compression temporelle entraîne une dilatation fréquentielle, comme le montre la Figure 2.3 pour laquelle $a = 2$.

En d'autres termes, plus un signal est temporellement long, plus son spectre est étroit. Pour fixer les idées, la largeur du spectre d'un signal temporel est typiquement de l'ordre de grandeur de l'inverse de la durée de ce signal :

$$\Delta\nu \simeq \frac{1}{\Delta t} \quad (2.10)$$

Remarque : Pour étudier l'évolution d'une grandeur physique en fonction d'un paramètre p , il est commode de balayer p linéairement en fonction du temps. L'appareil de mesure délivre alors un signal dépendant du temps. En modifiant la vitesse de balayage, on peut ajuster la largeur du spectre de ce signal.

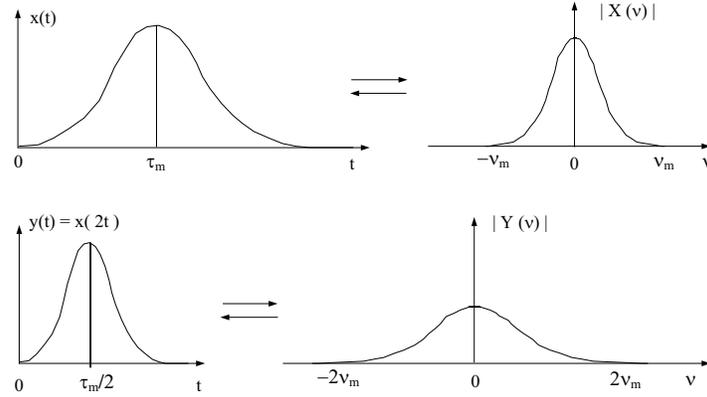


FIGURE 2.3 – Dilatation fréquentielle induite par une compression temporelle.

2.3.4 Propriétés relatives à une translation dans l'espace des temps

On envisage maintenant la transformation qui à $x(t)$ associe le signal $y(t)$ défini par la relation $y(t) = x(t - t_0)$ où $t_0 \in \mathbb{R}$. Cette transformation qui correspond à l'introduction d'un retard t_0 (si $t_0 > 0$) est illustrée sur la Figure 2.4.

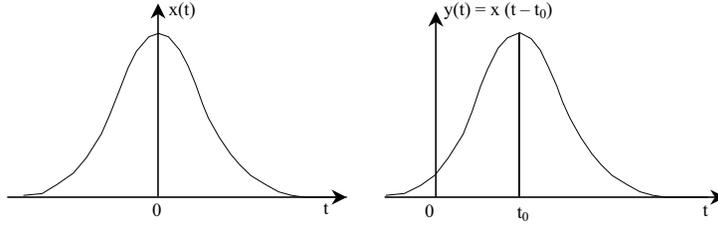


FIGURE 2.4 – Retard temporel.

On remarquera que puisque $x(t)$ atteint son maximum à l'instant $t = 0$, $y(t)$ l'atteint lorsque l'argument de $x(t - t_0)$ est nul, c'est à dire lorsque $t = t_0$. Le spectre de $y(t)$ est donné par

$$Y(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

si l'on pose $t' = t - t_0$, soit $t = t' + t_0$ et $dt = dt'$, $Y(\nu)$ s'écrit alors :

$$Y(\nu) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi\nu t'} dt' \right) e^{-j2\pi\nu t_0}$$

compte tenu de la relation de définition de $X(\nu)$ (2.7) on obtient

$$y(t) = x(t - t_0) \Leftrightarrow TF \Rightarrow Y(\nu) = X(\nu) e^{-j2\pi\nu t_0} \quad (2.11)$$

Remarquons que, si on pose $X(\nu) = |X(\nu)| e^{j\Phi_x(\nu)}$ alors $Y(\nu)$ s'écrit :

$$Y(\nu) = |X(\nu)| e^{j[\Phi_x(\nu) - 2\pi\nu t_0]} = |X(\nu)| e^{j\Phi_y(\nu)}$$

L'introduction d'un retard temporel t_0 n'entraîne qu'une modification du spectre de phase du signal qui s'écrit alors :

$$\Phi_y(\nu) = \Phi_x(\nu) - 2\pi\nu t_0$$

On ajoute une droite de pente $-2\pi\nu t_0$ à la courbe représentant le spectre de phase du signal. Par contre, la densité spectrale d'amplitude est inchangée et il n'y a donc pas de modification de la bande de fréquence occupée par le signal.

2.3.5 Propriétés relatives à une translation dans l'espace des fréquences

On considère de nouveau un signal réel $x(t)$ dont le spectre est $X(\nu)$. On effectue une translation de ce spectre d'une quantité ν_0 ($\nu_0 > 0$). On obtient le spectre $Y(\nu) = X(\nu \mp \nu_0)$ qui est alors associé au signal $y(t)$. Notons que, à l'issue de cette translation le spectre perd ses propriétés de symétrie et ne peut donc correspondre à un signal physique réel ($y(t) \in \mathbb{R}$). $y(t)$ s'écrit (voir équation 2.6) :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu \mp \nu_0) e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

En posant $\nu' = \nu \mp \nu_0$, soit $\nu = \nu' \pm \nu_0$ et $d\nu = d\nu'$, on obtient :

$$y(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\nu') e^{j2\pi\nu' t} d\nu' \right) e^{\pm j2\pi\nu_0 t}$$

soit encore

$$Y(\nu) = X(\nu \mp \nu_0) \Leftrightarrow TF \Rightarrow y(t) = x(t) e^{\pm j2\pi\nu_0 t} \quad y(t) \in \mathbb{C} \quad (2.12)$$

Une translation dans l'espace des fréquences, d'une quantité ν_0 , induit sur le signal, l'apparition d'un terme de phase complexe évoluant au cours du temps à la fréquence ν_0 .

On peut rétablir la symétrie du spectre en décomposant le spectre initial en deux éléments identiques, d'amplitude moitié, puis en traduisant ces deux éléments respectivement d'une quantité $+\nu_0$ et $-\nu_0$. Le spectre obtenu est alors :

$$Y(\nu) = \frac{1}{2} [X(\nu - \nu_0) + X(\nu + \nu_0)]$$

La Transformation de Fourier étant linéaire on obtient :

$$y(t) = \frac{1}{2} [x(t) e^{+j2\pi\nu_0 t} + x(t) e^{-j2\pi\nu_0 t}]$$

$$y(t) = x(t) \left[\frac{e^{+j2\pi\nu_0 t} + e^{-j2\pi\nu_0 t}}{2} \right] = x(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$$

La "double translation", décrite si dessus, aboutit à :

$$Y(\nu) = \frac{1}{2} [X(\nu - \nu_0) + X(\nu + \nu_0)] \Leftrightarrow TF \Rightarrow y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi\nu_0 t) \quad (2.13)$$

ce qui, comme le montre la Figure 2.5, correspond à une modulation du signal $x(t)$ par une sinusoïde de fréquence ν_0 ou, ce qui revient au même, à une modulation de l'amplitude d'un signal sinusoïdal par le signal $x(t)$.

2.3.6 Transformée de Fourier des dérivées d'un signal

On démontre facilement que :

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow TF \Rightarrow Y(\nu) = (j2\pi\nu)X(\nu) \quad (2.14)$$

En effet : $y(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \frac{d}{dt} (e^{j2\pi\nu t}) d\nu$

Soit : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) (j2\pi\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu$.

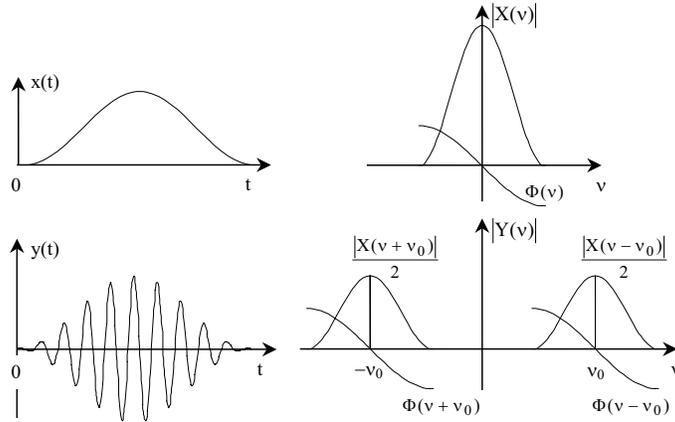


FIGURE 2.5 – Translation dans l'espace des fréquences et modulation d'amplitude.

Tout aussi aisément, on démontre, par récurrence, la propriété suivante, relative à la dérivée d'ordre n :

$$y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow TF \Rightarrow Y(\nu) = (j2\pi\nu)^n X(\nu) \quad (2.15)$$

Remarque : Les relations 2.14 et 2.15 peuvent s'utiliser pour analyser une situation où, par exemple, deux signaux sont liés par une équation différentielle à coefficients constants. C'est le cas des systèmes linéaires invariants que nous aborderons au chapitre suivant. On obtient alors une relation liant les spectres des deux signaux qui permettra de calculer le gain du système. Envisageons le cas où $x(t)$ et $y(t)$ sont liés par la relation :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) - x(t) = 0$$

On notera au passage que $x(t)$ et $y(t)$ doivent avoir même dimension et donc que τ a la dimension d'un temps. Cette durée τ est caractéristique de l'évolution temporelle du système décrit par l'équation différentielle. La TF du terme de gauche de l'équation est nulle (fonction du temps identiquement nulle), ce que l'on écrira sous la forme suivante :

$$TF \left[\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) - x(t) \right] = 0$$

Les propriétés de linéarité de la TF entraînent

$$TF \left[\tau \frac{dy(t)}{dt} \right] + TF [y(t)] - TF [x(t)] = 0$$

soit $j2\pi\nu\tau Y(\nu) + Y(\nu) - X(\nu)$ ou encore $Y(\nu) = \frac{1}{1+j2\pi\nu\tau} X(\nu)$

2.3.7 Spectre d'un produit de convolution de deux signaux

Nous verrons par la suite que le produit de convolution permet de décrire la façon dont un signal peut être déformé au passage d'un système de traitement du signal. En fait, ce produit particulier joue un rôle essentiel en traitement du signal, ne serait ce que lorsqu'on analyse le spectre des signaux modulés en amplitude. Aussi est-il important de définir ses caractéristiques et de préciser ses propriétés.

2.3.7.1 Définition du produit de convolution de deux fonctions $f(u)$ et $g(u)$

Le produit de convolution sera noté par le symbole \otimes par opposition au produit simple noté $*$ (facultatif). Le produit de convolution de $f(u)$ et $g(u)$ est une fonction de la variable u défini par la relation

$$f(u) \otimes g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u') g(u - u') du' \quad (2.16)$$

Le produit de convolution est commutatif, en effet si l'on effectue le changement de variable $v = u - u'$ soit $u' = u - v$ et $du' = -dv$ on obtient :

$$f(u) \otimes g(u) = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(u - v) g(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) f(u - v) dv$$

Soit

$$f(u) \otimes g(u) = g(u) \otimes f(u) \quad (2.17)$$

2.3.7.2 Transformée de Fourier du produit de convolution de deux signaux

On considère un signal temporel $y(t)$ égal au produit de convolution de deux signaux $x(t)$ et $w(t)$ (soit $y(t) = x(t) \otimes w(t)$). On désigne par $X(\nu)$, $Y(\nu)$ et $W(\nu)$ les TF respectives de $x(t)$, $y(t)$ et $w(t)$.

$$Y(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) w(t - \theta) d\theta \right) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

En intervertissant l'ordre des intégrations on obtient l'équation suivante :

$$Y(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} w(t - \theta) e^{-j2\pi\nu t} dt \right) d\theta$$

dans laquelle le terme entre parenthèses représente la TF de $w(t - \theta)$ égale à $W(\nu)e^{-j2\pi\nu\theta}$ (voir équation 2.11), on obtient donc :

$$Y(\nu) = W(\nu) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) e^{-j2\pi\nu\theta} d\theta \right) = W(\nu) * X(\nu)$$

Le spectre (TF) du produit de convolution de deux signaux temporels est égal au produit simple des spectres (TF) de ces deux signaux (Théorème de Plancherel). Cette propriété se résume par

$$y(t) = x(t) \otimes w(t) \Leftarrow TF \Rightarrow Y(\nu) = X(\nu) * W(\nu) \quad (2.18)$$

2.3.8 Spectre du produit simple de deux signaux

Par une démonstration analogue à celle du paragraphe précédent, on montre que le spectre (TF) du produit simple de deux signaux temporels est égal au produit de convolution des spectres (TF) de ces deux signaux.

$$y(t) = x(t) * w(t) \Leftarrow TF \Rightarrow Y(\nu) = X(\nu) \otimes W(\nu) \quad (2.19)$$

(Il suffit de calculer la transformée inverse du produit de convolution des spectres).

2.4 Transformée de Fourier de signaux élémentaires

2.4.1 Impulsion (distribution) de Dirac

Bien qu'elle n'ait pas de réalité physique, l'impulsion de Dirac est un outil mathématique couramment utilisé en traitement du signal. Il ne nous appartient pas de développer un cours complet sur ce que les mathématiciens qualifient de distribution de Dirac, nous nous contenterons de définir ses caractéristiques et préciser quelques-unes de ses propriétés essentielles.

2.4.1.1 Définition

Une impulsion de Dirac, dépendant de la variable réelle u , sera notée $\delta(u)$ et pourra être définie par les relations :

$$\begin{aligned} \delta(u) &= 0 \quad \text{si } u \neq 0 \\ \delta(u) &\rightarrow \infty \quad \text{si } u = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) du = 1$$

L'impulsion de Dirac est nulle partout, sauf pour la valeur de la variable qui annule son argument, auquel cas elle tend vers l'infini. De plus son aire est égale à l'unité.

2.4.1.2 Propriétés

L'impulsion de Dirac est paire (symétrique) :

$$\delta(-u) = \delta(u) \quad (2.21)$$

Le produit de convolution d'une fonction par une impulsion de Dirac est égal à cette première fonction. On montre (voir TD) que, si $f(u)$ est une fonction réelle ou complexe de la variable réelle u , continue et à dérivées successives continues, alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u') \cdot \delta(u' - u_0) du' = f(u_0) \quad (2.22)$$

Notons qu'une telle fonction $f(u)$ ne peut correspondre à un signal physique qui possède un début et une fin tous deux caractérisés par une discontinuité du signal et/ou d'une de ses dérivées. Toutefois on admettra qu'il est toujours possible d'approximer un signal physique par une fonction analytique qui possède les propriétés énoncées ci dessus. La propriété 2.22 est valable quelle que soit la valeur de u_0 , compte tenu de la symétrie de l'impulsion de Dirac (2.21), elle peut se réécrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u') \cdot \delta(u - u') du' = f(u)$$

soit encore :

$$f(u) \otimes \delta(u) = \delta(u) \otimes f(u) = f(u) \quad (2.23)$$

Cette dernière propriété peut être réécrite sous la forme plus générale suivante :

$$f(u) \otimes \delta(u - u_0) = \delta(u - u_0) \otimes f(u) = f(u - u_0) \quad (2.24)$$

Le produit de convolution par l'impulsion $\delta(u - u_0)$ permet ainsi de réaliser une translation de l'ensemble du signal autour de la variable u_0 . Cette propriété pourra être utilisée aussi bien dans l'espace des temps que dans l'espace des fréquences.

2.4.1.3 Représentation

Par convention l'impulsion de Dirac $\delta(u)$ et plus généralement $\delta(u - u_0)$ sera représentée par un vecteur de longueur unité, comme il est indiqué sur la Figure 2.6.

2.4.1.4 Réalisation

Comme nous l'avons déjà signalé, une impulsion de Dirac n'est pas réalisable physiquement, elle peut toutefois être considérée comme la limite, lorsque leur largeur tend vers zéro, de signaux impulsionnels réalisables avec une bonne approximation. On peut citer, par exemple, l'impulsion rectangulaire de largeur Δ et d'amplitude $\frac{1}{\Delta}$ et l'impulsion triangulaire de largeur 2Δ et de même amplitude $\frac{1}{\Delta}$ toutes deux représentées sur la Figure 2.7, ou encore l'impulsion décrite par $\frac{1}{\Delta} \text{sinc}(\frac{\pi u}{\Delta})$ où $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ (sinus cardinal). On notera que toutes ces impulsions sont d'aire unité.

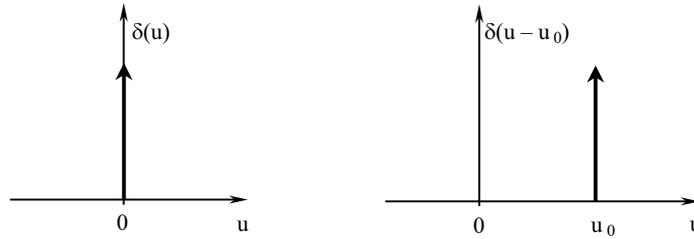


FIGURE 2.6 – Mode de représentation d'une impulsion de Dirac.

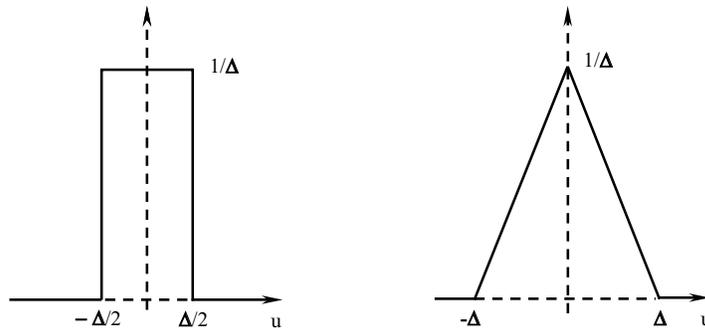


FIGURE 2.7 – Exemple d'impulsions approximant l'impulsion de Dirac.

2.4.1.5 Poids d'une impulsion

L'impulsion $a\delta(u - u_0)$ est nulle partout, sauf en $u = u_0$ où elle tend vers l'infini, mais son aire vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a\delta(u) du = a$$

Cette impulsion sera dite impulsion de Dirac de poids a . a peut être réel ou complexe. Nous serons amenés à utiliser des impulsions de Dirac temporelles et fréquentielles, ces dernières étant, nous allons le voir, utilisées dans l'écriture des spectres des signaux périodiques.

2.4.1.6 Spectre d'une impulsion de Dirac

Si $x(t) = \delta(t)$, la TF de $x(t)$ s'écrit :

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi\nu t} dt = 1 \text{ valeur prise par } e^{-j2\pi\nu t} \text{ en } t = 0 \text{ (voir 2.22).}$$

On a donc :

$$\delta(t) \Leftarrow TF \Rightarrow 1 \quad \text{et de même} \quad a\delta(t) \Leftarrow TF \Rightarrow a \quad (2.25)$$

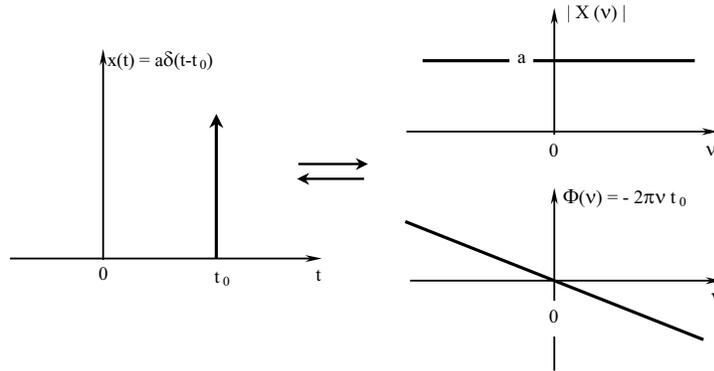


FIGURE 2.8 – Spectre de l'impulsion de Dirac $a\delta(t - t_0)$.

De façon plus générale, les propriétés de la TF relatives à la translation temporelle permettent décrire :

$$a\delta(t - t_0) \Leftarrow TF \Rightarrow a e^{-j2\pi\nu t_0} \tag{2.26}$$

Le spectre de l'impulsion de Dirac couvre toutes les fréquences de (voir Figure 2.8) ; on parle alors de spectre blanc par analogie avec la lumière blanche dont le spectre couvre toute la gamme du visible. Notons que ce spectre de largeur infinie correspond bien à une impulsion de durée nulle (voir 2.10). Compte tenu de la définition de l'intégrale de Fourier (2.6), la relation (2.25) permet décrire :

$$\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\nu t_0} e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

soit

$$\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu(t-t_0)} d\nu \tag{2.27}$$

2.4.2 Spectre d'un signal constant

On vérifie aisément que le spectre d'un signal constant $x(t) = A$ est une impulsion de Dirac de poids A. (voir Figure 2.9)

$$x(t) = A \Leftarrow TF \Rightarrow X(\nu) = A\delta(\nu) \tag{2.28}$$

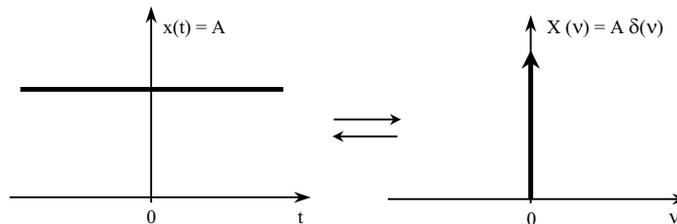


FIGURE 2.9 – Spectre d'un signal constant.

Les propriétés de la TF relatives à la translation dans l'espace des fréquences permettent alors décrire :

$$A e^{\pm j2\pi\nu_0 t} \Leftarrow TF \Rightarrow A \delta(\nu \mp \nu_0) \tag{2.29}$$

Ces deux dernières propriétés vont permettre de déterminer le spectre des signaux périodiques.

2.4.3 Spectre d'un signal sinusoïdal

Rappelons qu'un signal sinusoïdal $x(t) = a \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi)$, de période T_0 (fréquence $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$) peut toujours se mettre sous la forme :

$$x(t) = \frac{a}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi\nu_0 t} + \frac{a}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi\nu_0 t}$$

Compte tenu des relations (2.29) le spectre s'écrit

$$X(\nu) = \frac{a}{2} e^{j\varphi} \delta(\nu - \nu_0) + \frac{a}{2} e^{-j\varphi} \delta(\nu + \nu_0) \quad (2.30)$$

Comme le montre la Figure 2.10, le spectre d'amplitude est composé de deux impulsions de Dirac de poids $\frac{a}{2}$, respectivement centrées sur $\nu = \nu_0$ et $\nu = -\nu_0$. Le spectre de phase, quant à lui, se réduit à deux valeurs $\Phi(-\nu_0) = -\varphi$ et $\Phi(\nu_0) = \varphi$.

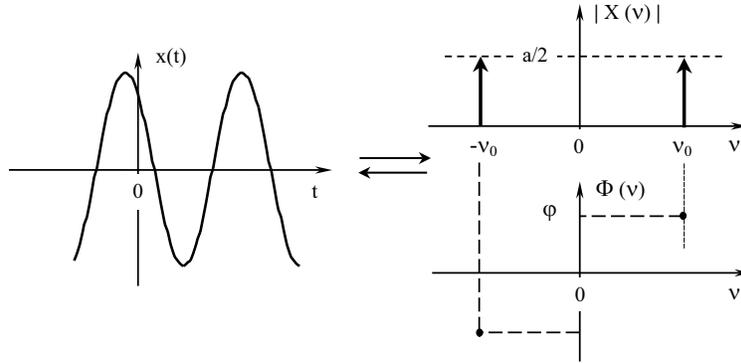


FIGURE 2.10 – Spectre d'un signal sinusoïdal.

2.4.4 Spectre d'un signal périodique

Nous avons vu qu'un signal périodique $x(t)$ de période T_0 ($\nu_0 = \frac{1}{T_0}$) peut s'écrire sous la forme de la série de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos(2\pi n\nu_0 t + \varphi_n)$$

La TF étant linéaire, le spectre de $x(t)$ sera obtenu en effectuant la somme des TF de chacun des éléments de la série de Fourier. Ce spectre s'écrit :

$$X(\nu) = a_0 \delta(\nu) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{2} e^{j\varphi_n} \delta(\nu - n\nu_0) + \frac{a_n}{2} e^{-j\varphi_n} \delta(\nu + n\nu_0)$$

Le spectre d'un signal périodique est constitué d'une série infinie d'impulsions de Dirac associées respectivement aux composantes du signal de fréquences $0, \pm\nu_0, \pm 2\nu_0, \dots, \pm n\nu_0$ (fig 2.11).

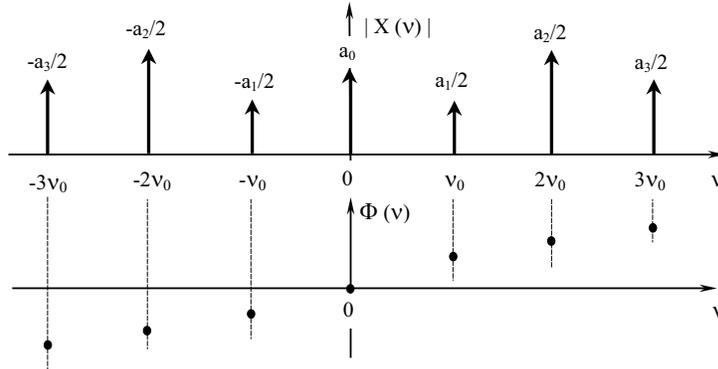


FIGURE 2.11 – Allure du spectre d'un signal périodique.

Dans la pratique, le nombre de composantes à prendre en compte pour restituer le signal est fini. Il faut toute fois noter que, lorsque le signal présente des zones d'évolution rapide (telles que des discontinuités) ce nombre peut devenir très grand, d'autant plus grand que les variations du signal sont rapides.

Par commodité, il est préférable décrire la série de Fourier sous une forme complexe, pour introduire cette notation on utilise une méthode identique à celle employée pour l'écriture de l'intégrale de Fourier. On pose

$$X_n = \frac{a_n}{2} e^{j\varphi_n}$$

Son complexe conjugué qui apparaît dans le second terme de la somme est posé égal à X_{-n} soit :

$$\frac{a_n}{2} e^{j\varphi_n} = X_n^* = X_{-n}$$

Le signal s'écrit alors :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_n e^{j2\pi n\nu_0 t} \tag{2.31}$$

où $X_0 = a_0$, $|X_{\pm n}| = \frac{a_n}{2}$ et $\arg(X_{\pm n}) = \pm\varphi_n$

X_n est appelé composante de Fourier d'ordre n du signal, on peut montrer que cette composante est égale à :

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n\nu_0 t} dt \tag{2.32}$$

Notons que dans l'équation 2.32 on intègre une fonction périodique sur une période, le résultat est donc indépendant du choix des bornes que l'on peut adapter à la symétrie de la fonction $x(t)$. La composante d'ordre zéro s'écrit : $X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) dt$ et représente la valeur moyenne temporelle du signal que l'on notera par la suite $\langle x(t) \rangle$. Finalement les équations (2.29) et (2.31) conduisent à l'expression du spectre suivante :

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_n \delta(\nu - n\nu_0) \tag{2.33}$$

2.4.5 Cas particulier de signal périodique : Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac (temporel) est constitué par une succession d'impulsion de Dirac répartie périodiquement dans le temps avec une période que l'on notera T_0 . On conviendra de noter ce

peigne de Dirac par le symbole suivant $\sqcup_{T_0}(t)$ (le symbole en indice indiquant la période). Le peigne de Dirac s'écrira :

$$\sqcup_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_0) \quad (2.34)$$

signal qui est bien caractérisé par une infinité d'impulsions de Dirac centrées sur les instants $t = nT_0$. Le spectre $X(\nu)$ du peigne est donné par l'équation 2.33 avec

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_0) e^{-j2\pi n\nu_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \delta(t - nT_0) e^{-j2\pi n\nu_0 t} dt$$

dans cette dernière somme seule l'intégrale $\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi\nu_0 t} dt$ est non nulle. Elle est égale à $\frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\nu_0 t} dt$ et vaut $\frac{1}{T_0}$.

On a donc $X_n = \frac{1}{T_0}$ et $X(\nu) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu - n\nu_0)$ où $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$. Le spectre d'un peigne de Dirac temporel de période T_0 est au poids $\frac{1}{T_0}$ près un peigne de Dirac fréquentiel de période $\frac{1}{T_0}$.

$$\sqcup_{T_0}(t) \Leftarrow TF \Rightarrow \frac{1}{T_0} \sqcup_{\nu_0}(\nu) \quad (2.35)$$

2.5 Spectre de puissance ou d'énergie

2.5.1 Spectre de puissance des signaux périodiques

Dans la mesure où les signaux périodiques ont une énergie infinie, on ne pourra les caractériser que par leur spectre de puissance. Rappelons que la puissance moyenne totale d'un signal $x(t)$ de période T_0 s'écrit :

$$P_{mTotal} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt$$

Elle peut s'exprimer en fonction des composantes X_n du signal. En effet :

$$P_{mTotal} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_n e^{j2\pi n\nu_0 t} \right\} dt$$

En permutant l'ordre des sommations on obtient :

$$P_{mTotal} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_n \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{j2\pi n\nu_0 t} dt \right\}$$

où le terme placé entre accolades représente X_{-n} (voir 2.32) qui par définition est égal à X_n^* . La puissance moyenne totale s'écrit alors :

$$P_{mTotal} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_n X_n^* \quad (2.36)$$

La puissance moyenne totale d'un signal est égale à la somme des carrés des modules de ses composantes. $|X_0|^2$ représente la puissance transportée par la partie continue du signal. Dans le cas d'un signal sinusoïdal d'amplitude a le spectre se réduit deux composantes X_1 et X_{-1} dont les modules valent tous deux $\frac{a}{2}$. La puissance moyenne totale s'écrit : $P_{mTotal} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$, résultat bien connu !

Pour rendre compte de la distribution de la puissance dans l'espace des fréquences, on introduit la notion de densité spectrale de puissance ou de spectre de puissance du signal. La densité spectrale de puissance du signal $x(t)$ (cf. Figure 2.12) est définie par la relation :

$$P_x(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |X_n|^2 \delta(\nu - n\nu_0) \quad (2.37)$$

(Attention $P_x(\nu)$ n'est pas la TF de la puissance moyenne totale de $x(t)$) On remarquera que l'aire sous la courbe représentant l'évolution de la densité spectrale de puissance en fonction de la fréquence est égale à la puissance moyenne totale du signal. En effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(\nu) d\nu = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\{ |X_n|^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n\nu_0) d\nu \right) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |X_n|^2 = P_{mTotale}$$

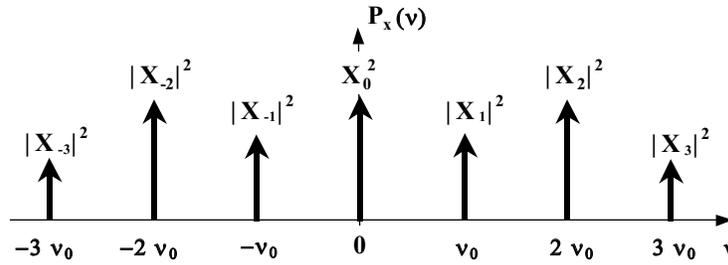


FIGURE 2.12 – Allure du spectre de puissance d'un signal périodique.

2.5.2 Spectre d'énergie des signaux transitoires

Dans le cas des signaux transitoires, la puissance moyenne totale du signal étant nulle, le spectre de puissance n'a pas de signification et le signal sera représenté par son spectre d'énergie. Rappelons que l'énergie totale du signal s'écrit (voir équation 1.2) :

$$\mathbb{E}_{Totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

Elle peut encore s'exprimer en fonction de la densité spectrale de signal. En effet :

$$\mathbb{E}_{Totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \right\} dt$$

Ce qui après changement de l'ordre des intégrations s'écrit :

$$\mathbb{E}_{Totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi\nu t} dt \right\} d\nu$$

où le terme placé entre accolades représente $X(-\nu)$ (voir 2.7), qui par définition est égal à $X^*(\nu)$. On aboutit à l'expression suivante :

$$\mathbb{E}_{Totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) X^*(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu \quad (2.38)$$

$|X(\nu)|^2$ représente la densité spectrale d'énergie du signal $E_x(\nu)$. La relation (2.38) indique que l'aire placée sous la courbe représentative de la densité spectrale d'énergie est égale à l'énergie totale transportée par le signal.

Remarquons que $P_x(\nu)$ et $E_x(\nu)$ sont des fonctions réelles dont l'aire est positive, puisque celle-ci représente la puissance moyenne totale ou l'énergie totale du signal qui sont des grandeurs physiques essentiellement positives.

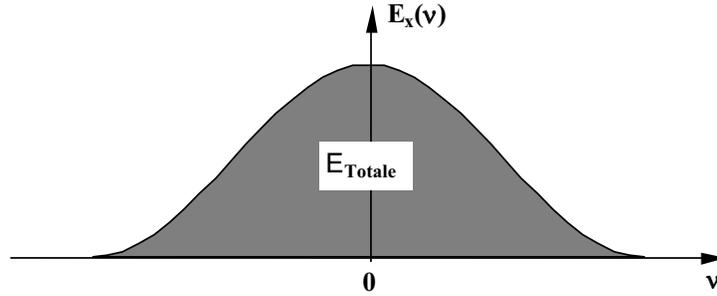


FIGURE 2.13 – Densité spectrale d'énergie et Énergie totale.

2.5.3 Modèle pour le spectre d'un signal « périodique » expérimental

Nous avons vu qu'un signal périodique est, au sens strict du terme, de durée infinie. Toute réalisation expérimentale d'un tel signal, de durée nécessairement finie, ne sera donc qu'une approximation. On se propose d'étudier le spectre d'une réalisation de durée totale T ($T \gg T_0$ où T_0 est la période du signal périodique). Notons que, même si la durée totale du signal est très grande, on sera amené, pour mesurer son spectre, à l'observer pendant un laps de temps relativement court. Ceci revient à réduire la durée du signal à celle de l'observation. Pour simplifier nous nous limiterons au cas d'un signal « sinusoïdal » de durée T , tel qu'il est représenté sur la Figure 2.14.

Le signal est le produit d'une sinusoïde $a \cos 2\pi\nu_0 t$ par une fenêtre rectangulaire de durée T notée $C_T(t)$ et définie par :

$$C_T(t) = 1 \text{ si } t \in \left] -\frac{T}{2}, +\frac{T}{2} \right[\text{ et } C_T(t) = 0 \text{ ailleurs}$$

Le signal $x(t) = a \cos 2\pi\nu_0 t \cdot C_T(t)$ peut être vu comme une impulsion rectangulaire modulée par une sinusoïde de fréquence ν_0 . Son spectre est alors obtenu à partir de celui de $C_T(t)$ en effectuant une double translation (voir relation 2.13), ce qui donne :

$$X(\nu) = \frac{a}{2}(C_T(\nu - \nu_0) + C_T(\nu + \nu_0))$$

où $C_T(\nu)$ est le spectre de $C_T(t)$. On montre, sans grandes difficultés (voir TD), que ce spectre vaut $C_T(\nu) = T \text{sinc}(\pi\nu T)$. Le spectre de $x(t)$ est donc constitué de deux impulsions sinus cardinal centrées respectivement sur $-\nu_0$ et $+\nu_0$ (voir Figure 2.14). La largeur de ces composantes est inversement proportionnelle à la durée T d'observation. Plus l'observation sera longue et plus les composantes seront étroites. Lorsque $T \rightarrow \infty$, l'impulsion sinus cardinal tend vers un pic de Dirac et on retrouve alors le spectre de la sinusoïde.

Remarque : Le spectre peut être calculé en utilisant les propriétés de la TF relatives au produit (voir 2.19), on obtient :

$$X(\nu) = \frac{a}{2}(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)) \otimes C_T(\nu)$$

$$X(\nu) = \frac{a}{2}(\delta(\nu - \nu_0) \otimes C_T(\nu) + \delta(\nu + \nu_0) \otimes C_T(\nu))$$

On obtient le même résultat que précédemment en remarquant que (cf 2.24) :

$$\delta(\nu \pm \nu_0) \otimes C_T(\nu) = C_T(\nu \pm \nu_0)$$

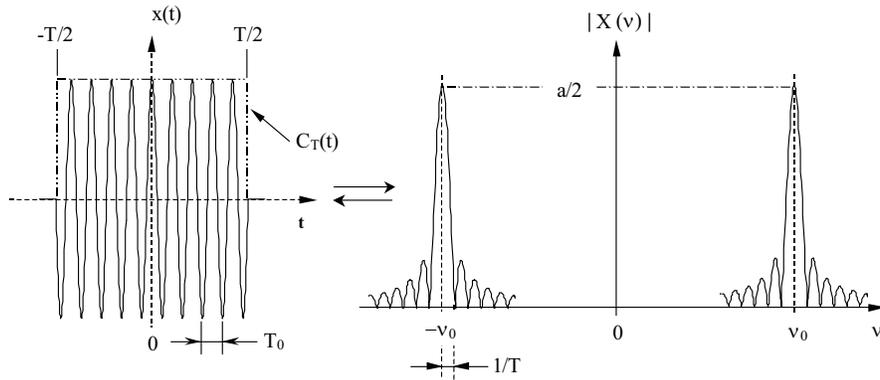


FIGURE 2.14 – Spectre d'un signal "sinusoïdal" expérimental.

2.6 Annexe : Transformées de Fourier usuelles

Fonction $x(t)$	Transformée de Fourier $X(\nu)$
Fonction Échelon Unité $x(t) = u(t)$ ($u(t) = 0$ si $t < 0$, $u(t) = 1$ si $t > 0$)	$X(\nu) = \frac{\delta(\nu)}{2} + \frac{1}{j2\pi\nu}$
$x(t) = e^{-t/\tau}u(t)$	$X(\nu) = \frac{1}{1/\tau + j2\pi\nu}$
Fonction porte de durée τ : $x(t) = u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})$	$X(\nu) = \tau \operatorname{sinc}(\pi\nu\tau)$
Impulsion Gaussienne $x(t) = e^{-(t/\tau)^2}$	$X(\nu) = \tau\sqrt{\pi}e^{-(\pi\nu\tau)^2}$
Impulsion Lorentzienne $x(t) = \frac{1}{1+(t/\tau)^2}$	$X(\nu) = \pi\tau e^{-2\pi \nu \tau}$

Chapitre 3

SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS

3.1 Définitions

L'objet de cette étude est beaucoup moins limitatif qu'il peut paraître a priori dans la mesure que bon nombre de systèmes peuvent être modélisés par un Système Linéaire Invariant ou stationnaire (SLI). Pour les systèmes de transmission de l'information on aura tendance à rechercher ces propriétés de linéarité et d'invariance temporelle pour ne pas introduire de distorsion sur le signal et provoquer des pertes d'information. D'autre part la grande majorité des systèmes physiques ont des comportements linéaires dans une plage plus ou moins limitée de valeurs de paramètres. Ainsi, par exemple, lorsqu'on étudie la propagation de la lumière dans un milieu matériel, le milieu est linéaire en champ pour les faibles valeurs de l'intensité lumineuse. Au cours de la propagation, le champ verra son amplitude varier (absorption) ainsi que sa phase (dispersion). Ces deux phénomènes pourront être étudiés à l'aide des outils que nous allons développer. Dans tout ce qui suit, on désignera par $x(t)$ le signal appliqué sur l'entrée du Système Linéaire Invariant et par $y(t)$ le signal obtenu en sortie (ou encore réponse) suivant le schéma ci dessous.

$$x(t) \longrightarrow \text{S.L.I.} \longrightarrow y(t)$$

3.1.1 Propriété de linéarité

La propriété de linéarité d'un système s'exprime par la relation suivante : si $y_i(t)$ est la réponse du système au signal d'entrée $x_i(t)$, alors la réponse à $x(t) = \sum_i a_i x_i(t)$ est $y(t) = \sum_i a_i y_i(t)$, soit :

$$\sum_i a_i x_i(t) \longrightarrow \text{S.L.I.} \longrightarrow \sum_i a_i y_i(t) \quad (3.1)$$

Les paramètres a_i sont indépendants du temps et peuvent être complexes. Les fonctions $x_i(t)$ et $y_i(t)$ peuvent également être complexes. Par contre si $x_i(t)$ est un signal physique réel, $y_i(t)$ doit l'être également.

3.1.2 Invariance temporelle (ou stationnarité)

La propriété d'invariance temporelle du système exprime le fait que la réponse du système ne dépend pas de l'instant où le signal d'entrée est appliqué, ou encore que cette réponse ne dépend pas de l'origine des temps choisie. Cette propriété est résumée par la relation suivante :

$$x(t - \theta) \longrightarrow \text{S.L.I.} \longrightarrow y(t - \theta) \quad (3.2)$$

Les propriétés de linéarité et d'invariance dans le temps peuvent s'exprimer simultanément sous la forme générale suivante : si un signal $x(t, \alpha)$, dépendant d'un paramètre α (qui pourra être un décalage temporel), a pour réponse $y(t, \alpha)$, la réponse au signal $x(t)$ défini par : $x(t) = \int_{\alpha} a(\alpha) x(t, \alpha) d\alpha$ sera $y(t) = \int_{\alpha} a(\alpha) y(t, \alpha) d\alpha$

$a(\alpha)$ est une fonction réelle ou complexe de α . Le paramètre α peut lui même être complexe, dans ce cas l'intégration se fait sur un contour défini du plan complexe. Les propriétés de linéarité et d'invariance des S.L.I. vont permettre d'établir des relations liant le signal de sortie au signal d'entrée. Avant de passer en revue ces relations il convient de préciser les caractéristiques des S.L.I. qui peuvent être décrites par un modèle mathématique simple.

3.1.3 Modélisation

Le comportement d'un système linéaire invariant pourra en général être complètement décrit par une équation différentielle à coefficients constants faisant intervenir $x(t)$ et $y(t)$ ainsi que leurs dérivées temporelles successives. Cette équation pourra se mettre sous la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} x(t) \quad (3.3)$$

où a_i et b_j sont indépendants du temps.

Si l'équation ne contient pas d'autres dérivées que les dérivées du premier ordre de $x(t)$ ou de $y(t)$ par rapport au temps le système sera dit *du premier ordre*. Si des dérivées du second ordre apparaissent le système sera dit *du second ordre*. Les circuits électriques de type RC ou RLC constituent des prototypes de systèmes du premier et second ordre (voir figure 3.1).

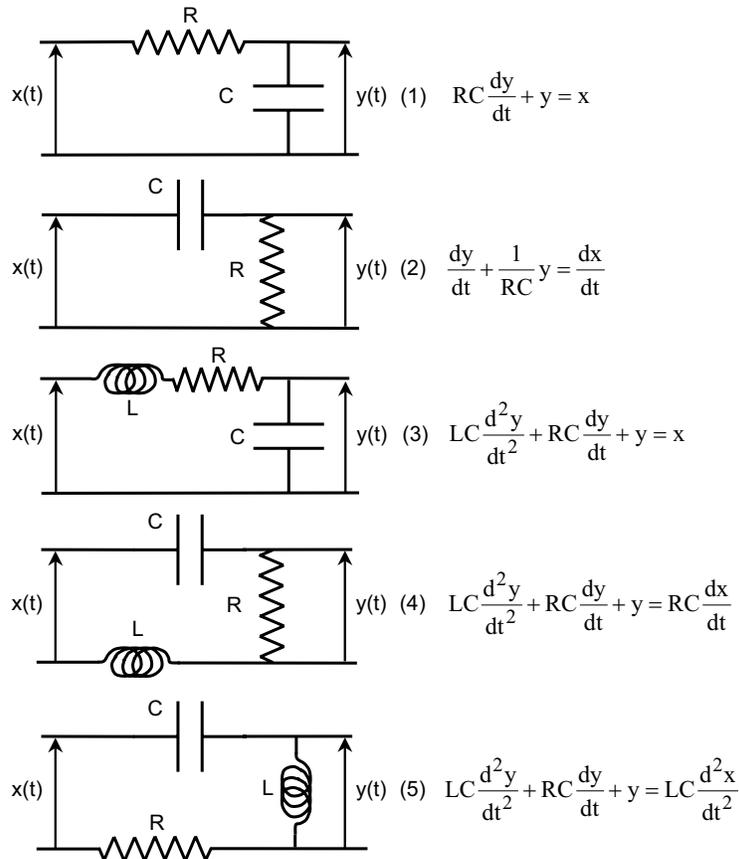


FIGURE 3.1 – Exemple de systèmes du premier et du second ordre

On considère un signal $x(t)$ démarrant à l'instant $t = 0$ il est donc tel que $x(t) = 0$ si $t < 0$. Un tel signal est dit *causal*.

Si on applique ce signal sur l'entrée d'un système linéaire invariant le signal de sortie est également causal. Cette réponse contient deux termes :

1. Le premier est une réponse transitoire (de durée finie) qui d'un point de vue mathématique correspond à la solution générale de l'équation (eq. 3.3) sans second membre.
2. Le second terme est la réponse forcée qui correspond à une solution particulière de l'équation (eq. 3.3) avec second membre. Aux temps longs (\gg durée du transitoire qui est une caractéristique du système) seule subsiste la réponse forcée. C'est en particulier le cas pour les signaux $x(t)$ périodiques de durée infinie et pour lesquels le transitoire n'a pas de raison d'exister.

Pour analyser la réponse du système on peut décomposer le signal d'entrée $x(t)$ en série ou en intégrale de Fourier. Si on applique à l'entrée du système un signal élémentaire sinusoïdal de la forme $a \cos(2\pi\nu t + \varphi)$ la solution de l'équation différentielle 3.3 est également un signal sinusoïdal de même fréquence ν mais d'amplitude et de phase différentes. La connaissance des modifications d'amplitude et de phase associées à chaque composante élémentaire de $x(t)$ permet de reconstituer le signal de sortie $y(t)$. Dans ce type d'analyse on est amené à introduire la notion de gain (plus précisément de gain complexe) qui décrit la variation d'amplitude et le déphasage introduits par le système pour tout signal sinusoïdal.

Bien que parfaitement utilisable, cette technique s'avère parfois laborieuse pour décrire la réponse transitoire du système. Il est alors plus commode d'utiliser des signaux élémentaires de type e^{pt} ($p = \sigma + j2\pi\nu$) qui généralisent les signaux $e^{j2\pi\nu t}$ de la transformée de Fourier. La décomposition des signaux sur une base de signaux élémentaires de type e^{pt} correspond à la Transformation de Laplace.

3.2 Relation de convolution

3.2.1 Réponse impulsionnelle et représentation du signal de sortie

Nous avons vu dans le chapitre précédent que tout signal $x(t)$ peut se mettre sous la forme $x(t) = x(t) \otimes \delta(t)$ soit encore :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \delta(t - \theta) d\theta \quad (3.4)$$

Le signal $x(t)$ apparaît comme une superposition linéaire d'impulsions de Dirac centrées sur des instants θ et ayant pour poids les valeurs de $x(t)$ à ces différents instants θ . Si l'on désigne par $h(t)$ la réponse du système à l'impulsion de Dirac $\delta(t)$, le système étant invariant on aura

$$\delta(t - \theta) \longrightarrow \text{S.L.I.} \longrightarrow h(t - \theta)$$

La réponse $y(t)$ du système linéaire au signal $x(t)$ sera une superposition linéaire des signaux $h(t - \theta)$ et s'écrira :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) h(t - \theta) d\theta \quad (3.5)$$

soit encore

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes x(t) \quad (3.6)$$

$h(t)$ est appelé la *réponse impulsionnelle* du système. La réponse du S.L.I à un signal d'entrée donné est le produit de convolution de ce signal avec la réponse impulsionnelle du système.

Dans la mesure où la connaissance de $h(t)$ permet de calculer la réponse du système à n'importe quel signal d'entrée, la réponse impulsionnelle caractérise complètement le système.

Remarque importante : $h(t)$ est un signal causal ($h(t) = 0$ si $t < 0$). En effet $\forall t < 0, \delta(t) = 0$ aucun signal n'est donc appliqué sur l'entrée du S.L.I. pour les temps négatifs, selon le principe

de causalité, il ne peut donc y avoir de signal à la sortie du système ($h(t) = 0$). Compte tenu de cette remarque, $h(t - \theta) \neq 0$ si $t - \theta > 0$ soit $\theta < t$, $y(t)$ s'écrit alors

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) h(t - \theta) d\theta$$

La réponse du S.L.I. à l'instant t dépend de l'ensemble des valeurs que prend le signal d'entrée aux instants inférieurs ou égaux à t . $y(t)$ dépend de l'"histoire" (passée et présente) de $x(t)$.

Notons enfin que si $x(t)$ est causal ($x(t) = 0$ si $t < 0$) $y(t)$ est également causal et pour $t > 0$ s'écrit :

$$y(t) = \int_0^t x(\theta) h(t - \theta) d\theta$$

3.2.2 Approche Qualitative

Pour se faire une image de la représentation de $y(t)$ en terme du produit de convolution de $x(t)$ par $h(t)$, nous allons remplacer $x(t)$ par un signal très voisin $\hat{x}(t)$ obtenu à partir de $x(t)$ à l'aide d'un échantillonneur bloqueur de pas ΔT . Cet échantillonneur mesure le signal à un instant t et maintient le signal mesuré à sa sortie pendant un intervalle de temps ΔT , il effectue ensuite une nouvelle mesure (la durée de la mesure est très faible par rapport au pas ΔT). Comme le montre la figure 3.2, le signal ainsi obtenu présente une succession de paliers de durée ΔT dont les amplitudes sont égales aux valeurs que prend $x(t)$ aux instants de mesure ($t = n\Delta T$). Ce signal peut être vu comme la superposition d'impulsions rectangulaires de largeurs ΔT et d'amplitude $x(n\Delta T)$ centrées sur les instants $n\Delta T + \Delta T/2$.

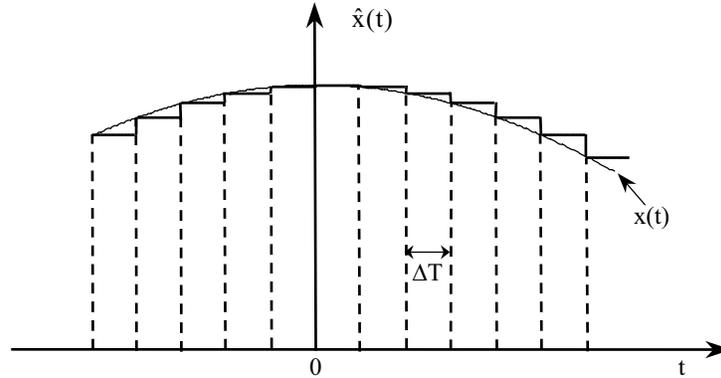


FIGURE 3.2 – Signal obtenu à partir de $x(t)$ à l'aide d'un échantillonneur bloqueur

Si l'on désigne par $\Pi_{\Delta T}(t)$ l'impulsion rectangulaire de largeur ΔT et d'amplitude $1/\Delta T$ représentative de l'impulsion de Dirac (voir figure) le signal $\hat{x}(t)$ s'écrit :

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\Delta T) \Pi_{\Delta T} \left(t - \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta T \right) \Delta T \quad (3.7)$$

Si l'on désigne par $H_{\Delta T}(t)$ la réponse de système à l'impulsion $\Pi_{\Delta T}(t)$, par linéarité et invariance temporelle la réponse du système au signal $\hat{x}(t)$ sera :

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\Delta T) H_{\Delta T} \left(t - \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta T \right) \Delta T \quad (3.8)$$

Lorsque $\Delta T \rightarrow 0$, $\Pi_{\Delta T}(t) \rightarrow \delta(t)$ et $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$; de même $H_{\Delta T}(t) \rightarrow h(t)$ et les équations 3.7 et 3.8 tendent respectivement vers les équations 3.4 et 3.5 (on a alors $n\Delta T = (n + \frac{1}{2})\Delta T = \theta$ et $\Delta T = d\theta$).

3.3 Analyse harmonique

3.3.1 Gain d'un système linéaire invariant

Nous avons vu que pour un signal d'entrée sinusoïdal $x(t) = a_x \cos(2\pi\nu t + \varphi_x)$ la réponse du système est un signal sinusoïdal de même fréquence. Le passage dans le système se traduit par une modification de l'amplitude et l'introduction d'un déphasage qui tous deux dépendent de la fréquence du signal. Le signal de sortie s'écrit : $y(t) = a_y \cos(2\pi\nu t + \varphi_y)$.

On appelle gain du système $|G(\nu)|$ le rapport des amplitudes $\frac{a_y}{a_x}$ ($|G(\nu)| = \frac{a_y}{a_x}$)

$\varphi_y - \varphi_x = \Delta\Phi(\nu)$ est le déphasage.

Gain et déphasage ne sont définis que pour des signaux d'entrée et de sortie sinusoïdaux. Ce sont des grandeurs réelles dépendant de la fréquence.

3.3.2 Gain complexe

Comme pour la transformation de Fourier, il est commode de représenter le système par une unique grandeur complexe qui rend compte à la fois du gain et du déphasage. En adoptant une démarche analogue à celle utilisée au paragraphe 2.2, on montre que si on applique à l'entrée du S.L.I. un signal $x(t) = e^{j2\pi\nu t}$ le signal de sortie s'écrira :

$$y(t) = |G(\nu)| e^{j\Delta\Phi(\nu)} e^{j2\pi\nu t}$$

On définit le gain complexe $G(\nu)$ du système par la relation :

$$G(\nu) = |G(\nu)| e^{j\Delta\Phi(\nu)}$$

Le passage à la formulation complexe nécessite l'introduction de fréquences négatives ce qui impose au gain complexe les propriétés de symétrie suivantes :

$$G(-\nu) = G^*(\nu) \text{ soit } |G(-\nu)| = |G(\nu)| \text{ et } \Delta\Phi(-\nu) = -\Delta\Phi(\nu) \quad (3.9)$$

Le module du gain est une fonction paire de la fréquence alors que le déphasage est une fonction impaire.

Toujours pour un signal d'entrée $x(t) = e^{j2\pi\nu t}$ le signal de sortie $y(t)$ peut s'écrire :

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) x(t - \theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) e^{j2\pi\nu(t-\theta)} d\theta$$

soit

$$y(t) = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) e^{-j2\pi\nu\theta} d\theta \right\} e^{j2\pi\nu t} = TF[h(t)] e^{j2\pi\nu t}$$

Les fonctions $e^{j2\pi\nu t}$ apparaissent comme des fonctions propres pour les Systèmes Linéaires Invariants ce qui justifie leur emploi ainsi que celui de l'intégrale de Fourier pour l'étude de ces systèmes. Le résultat ci dessus montre également que le gain complexe est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

$$h(t) \Leftarrow TF \Rightarrow G(\nu) \quad (3.10)$$

$h(t)$ et $G(\nu)$ sont deux représentations équivalentes du S.L.I. et chacune le décrit entièrement.

3.3.3 Propriétés du Gain et de la Réponse impulsionnelle

Pour un système physique réalisable la réponse impulsionnelle doit être d'énergie finie. C'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = \mathbb{E} < \infty$$

Ce qui impose au gain complexe d'être également de carré sommable (cf paragraphe 2.5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\nu)|^2 d\nu = \mathbb{E} < \infty$$

De plus le fait que $h(t)$ doit être causal impose des contraintes sur $G(\nu)$ qui se manifestent par l'existence de relations liant partie réelle et partie imaginaire du gain (relations de Kramers-Kronig)

3.3.4 Détermination du gain complexe

Nous venons de voir que la réponse d'un S.L.I. au signal élémentaire $e^{j2\pi\nu t}$ est $G(\nu)e^{j2\pi\nu t}$, pour obtenir l'expression du gain on introduit cette propriété dans l'équation différentielle 3.3 décrivant le système. On obtient :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} (G(\nu)e^{j2\pi\nu t}) = G(\nu) \sum_{i=0}^n a_i (j2\pi\nu)^i e^{j2\pi\nu t} = \sum_{k=0}^m b_k (j2\pi\nu)^k e^{j2\pi\nu t}$$

Le gain se présente sous la forme d'un quotient de deux polynômes en ν et s'écrit :

$$G(\nu) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (j2\pi\nu)^k}{\sum_{i=0}^n a_i (j2\pi\nu)^i} = \frac{N(\nu)}{D(\nu)} \quad (3.11)$$

Comme exemple on peut prendre le cas du circuit 3 de la figure 3.1 pour lequel l'équation différentielle s'écrit :

$$LC \frac{d^2 y}{dt^2} + RC \frac{dy}{dt} + y = x \quad (3.12)$$

Elle est caractérisée par les paramètres $a_2 = LC$, $a_1 = RC$ et $a_0 = b_0 = 1$ est le gain est égal à :

$$G(\nu) = \frac{1}{1 - 4\pi^2 LC\nu^2 + j2\pi RC\nu}$$

3.3.5 Spectre du signal de sortie

La réponse du système à $e^{j2\pi\nu t}$ étant $G(\nu)e^{j2\pi\nu t}$, le signal de sortie $y(t)$ associé à $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu$ sera (par linéarité de la T.F.) :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) G(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

Le spectre du signal de sortie est le produit simple du Gain par le spectre du signal d'entrée, soit :

$$Y(\nu) = G(\nu) \cdot X(\nu) \quad (3.13)$$

expression qui est, rappelons-le, le pendant en fréquence du produit de convolution temporel $y(t) = h(t) \otimes x(t)$

Au passage dans le système la densité spectrale d'amplitude est multipliée par le module du gain ($|Y(\nu)| = |G(\nu)| \cdot |X(\nu)|$) alors que le spectre de phase s'accroît du déphasage introduit par le système ($\Phi_y(\nu) = \Delta\Phi(\nu) + \Phi_x(\nu)$).

Pour un signal d'entrée d'énergie finie (signal transitoire), la densité spectrale d'énergie en sortie s'écrit :

$$E_y(\nu) = |G(\nu)X(\nu)|^2 = |G(\nu)|^2 |X(\nu)|^2 = |G(\nu)|^2 E_x(\nu) \quad (3.14)$$

elle est égale à la densité spectrale d'énergie en entrée multipliée par le gain en puissance $|G(\nu)|^2$

La notion de gain est particulièrement bien adaptée à l'analyse de la réponse à un signal d'entrée périodique. Considérons un signal périodique de période T_0 ($\nu_0 = 1/T_0$) ; ce signal et son spectre s'écrivent respectivement :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_n e^{j2\pi n\nu_0 t} \text{ et } X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_n \delta(\nu - n\nu_0)$$

Le spectre du signal de sortie s'écrit :

$$Y(\nu) = G(\nu) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_n \delta(\nu - n\nu_0)$$

Le signal de sortie peut être calculé de la façon suivante :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_n \delta(\nu - n\nu_0) e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

soit

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_n \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu) e^{j2\pi\nu t} \delta(\nu - n\nu_0) d\nu$$

l'intégrale figurant dans la somme est égale à $G(n\nu_0) e^{j2\pi n\nu_0 t}$ ce qui conduit à l'expression suivante du signal de sortie :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G(n\nu_0) X_n e^{j2\pi n\nu_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} Y_n e^{j2\pi n\nu_0 t} \quad (3.15)$$

Le spectre du signal de sortie s'écrit :

$$Y(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G(n\nu_0) X_n \delta(\nu - n\nu_0) \quad (3.16)$$

On notera l'équivalence entre

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G(n\nu_0) X_n \delta(\nu - n\nu_0) \text{ et } G(\nu) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X_n \delta(\nu - n\nu_0) \quad (3.17)$$

$y(t)$ est un signal périodique de période T_0 dont les composantes sont :

$$Y_n = G(n\nu_0) X_n \text{ soit } |Y_n| = |G(n\nu_0)| |X_n| \text{ et } \Phi_{Y_n} = \Delta\Phi(n\nu_0) + \Phi_{X_n} \quad (3.18)$$

Au passage dans le système la composante de fréquence $n\nu_0$ (fondamentale, harmonique ou partie continue) est multipliée par le gain à cette fréquence ce qui introduit une modification de son amplitude (atténuation, amplification) ainsi qu'un déphasage qui tous deux varient d'une composante à l'autre. Si le signal d'entrée se met sous la forme réelle suivante :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n \cos(2\pi n\nu_0 t + \varphi_n) \text{ avec } \varphi_0 = 0$$

Le signal de sortie sera égal à :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n |G(n\nu_0)| \cos(2\pi n\nu_0 t + \varphi_n + \Delta\Phi(n\nu_0))$$

où la composante continue est soit nulle soit de phase nulle ($\Rightarrow \Delta\Phi(0) = 0$ ou $G(0) = 0$). Par rapport au signal d'entrée l'aspect du signal de sortie peut être profondément modifié. Si, par exemple, le système est très sélectif en fréquence, le signal de sortie peut se limiter à une simple sinusoïde.

Si la densité spectrale de puissance d'entrée s'écrit :

$$P_X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |X_n|^2 \delta(\nu - n\nu_0)$$

La densité spectrale de puissance de sortie s'écrira :

$$P_Y(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |G(n\nu_0)|^2 |X_n|^2 \delta(\nu - n\nu_0) \quad (3.19)$$

ce qui correspond à une puissance moyenne totale de sortie égale à :

$$P_{mY} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |G(n\nu_0)|^2 |X_n|^2 \quad (3.20)$$

Suivant la valeur du gain aux différentes fréquences $n\nu_0$ la puissance moyenne totale peut être fortement affectée par le passage à travers le S.L.I..

3.3.6 Classification des systèmes linéaires invariants

Suivant la façon dont le signal est affecté par son passage dans le système, on peut classer les S.L.I. en trois grandes catégories :

3.3.6.1 Systèmes Passe-Bas

Pour ces systèmes le gain $G(\nu)$ est tel que les composantes de fréquences supérieures à une fréquence de coupure ν_C sont fortement affaiblies voir annulées (voir figure 3.3). Par convention la fréquence de coupure ν_C est définie par :

$$|G(\nu_C)| = \frac{G(0)}{\sqrt{2}}$$

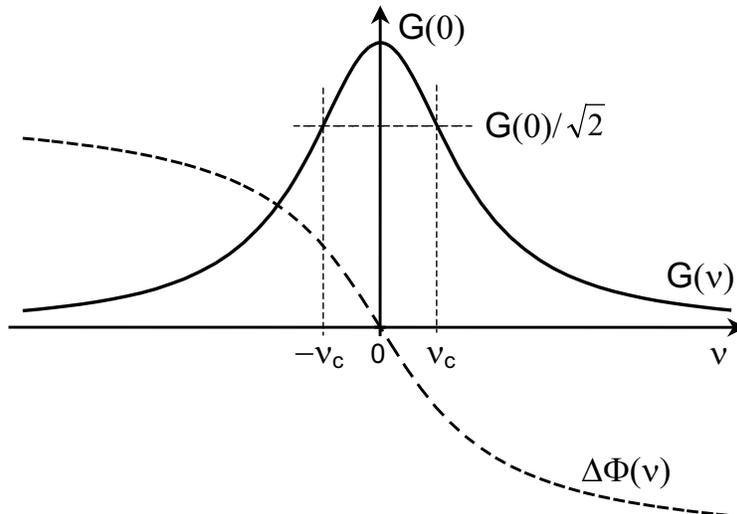


FIGURE 3.3 – Système Passe-Bas

3.3.6.2 Systèmes Passe-Haut

A l'opposé des précédents ces systèmes sont tels que ce sont les composantes de fréquences inférieures à la fréquence de coupure ν_C qui sont fortement affaiblies voir annulées (voir figure 3.4). La fréquence de coupure ν_C est alors définie par :

$$|G(\nu_C)| = \frac{|G(\infty)|}{\sqrt{2}}$$

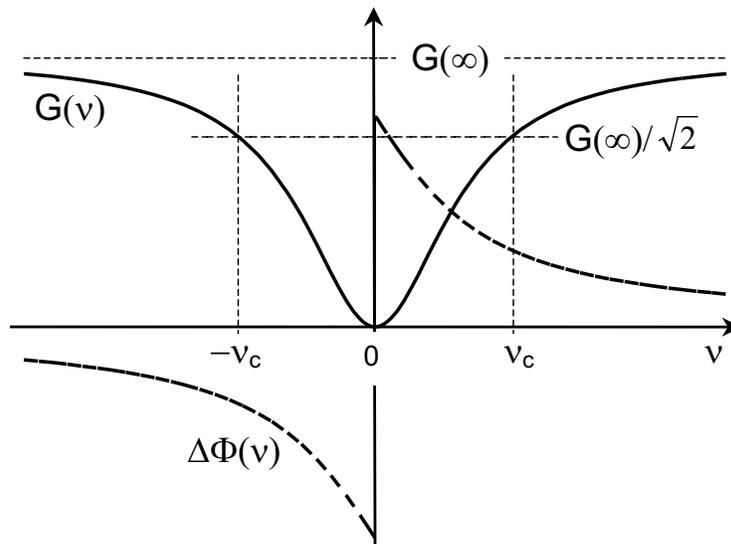


FIGURE 3.4 – Système Passe Haut

3.3.6.3 Systèmes Passe-Bande

Ils sont caractérisés par 2 fréquences de coupure ν_{C1} (fréquence de coupure basse) et ν_{C2} (fréquence de coupure haute; $\nu_{C1} < \nu_{C2}$). Le gain est très faible (ou $\rightarrow 0$) pour les fréquences $< \nu_{C1}$ ou $> \nu_{C2}$ (voir figure 3.5). ν_{C1} et ν_{C2} sont définies par

$$|G(\nu_{C1})| = |G(\nu_{C2})| = \frac{G(\nu_0)}{\sqrt{2}}$$

où ν_0 est la fréquence centrale définie par $|G(\nu_0)| = \text{Max}(|G(\nu)|)$. L'intervalle de fréquence $\Delta\nu = \nu_{C2} - \nu_{C1}$ est appelé Bande-Passante du système.

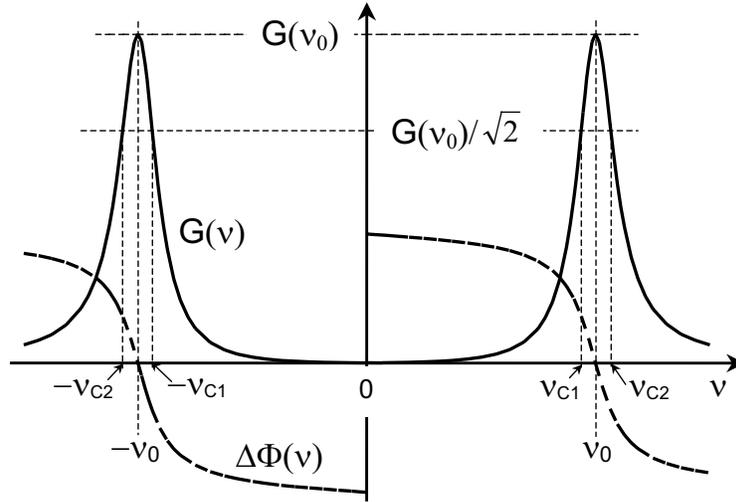


FIGURE 3.5 – Système Passe Bande

3.3.6.4 Systèmes Coupe-Bande

Ce sont des systèmes complémentaires des Passe-Bande pour lesquels le Gain a des valeurs très faibles (voir nulle) pour les fréquences ν appartenant à l'intervalle $[\nu_{C1}, \nu_{C2}]$.

3.3.7 Modes de représentation du gain

Dans le paragraphe précédent le module du gain à la fréquence de coupure est en fait défini par rapport à sa valeur maximale. Une façon de représenter le système est d'exprimer la valeur relative du module du gain $\frac{|G(\nu)|}{|G(\nu)|_{Max}}$ en décibel (dB). Le gain relatif est alors défini par la relation :

$$G_{dB}(\nu) = 10 \log_{10} \frac{|G(\nu)|^2}{|G(\nu)|_{Max}^2}$$

où $|G(\nu)|^2$ est le gain en puissance. L'évolution en fréquence de $|G(\nu)|_{dB}$ est tracée en fonction de $\log_{10}\nu$ (seules les fréquences positives sont représentées). Cette représentation, couramment utilisée en électronique est connue sous le nom de *Diagramme de Bode*. On représente également l'évolution du déphasage $\Delta\Phi(\nu)$ en fonction de $\log_{10}\nu$.

Les fréquences de coupure correspondent à :

$$G_{dB}(\nu_C) = 10 \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = -10 \log_{10}(2) = -3 \text{ dB}$$

Fréquences de coupure et Bande Passante, telles que nous les avons définies, correspondent à une réduction de gain de 3dB. Notons que l'on peut choisir d'autres conventions pour définir la bande passante. En HiFi certains constructeurs utilisent la bande passante à -1dB. Mais en absence de précision sur le choix de la convention l'indication correspond à la bande passante à -3dB.

On représente souvent le gain absolu en décibel au lieu du gain relatif. Dans ce cas le gain en dB s'écrit :

$$G_{dB}(\nu) = 10 \log_{10}(|G(\nu)|^2) = 20 \log_{10}(|G(\nu)|) \quad (3.21)$$

Cette modification de définition se traduit par un simple décalage d'ordonnée (le gain maximum n'est plus à 0dB)

Avantages du diagramme de Bode

– Pour certaines valeurs de la fréquence le gain $|G(\nu)|$ prend une forme asymptotique de type

$$|G(\nu)| \cong K \nu^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \text{ (entiers relatifs)}$$

Le gain en dB tend alors vers la forme asymptotique :

$$G_{dB}(\nu) = 20 \log_{10}(K \nu^n) = \text{const} + 20 n \log_{10} \nu$$

qui dans le diagramme de Bode correspond à une droite de pente $20n$ dB/décade. On précise qu'une décade correspond à un accroissement d'un facteur 10 pour la fréquence. Dans cette opération l'abscisse varie de $\log_{10} \nu$ à la valeur $\log_{10}(10\nu) = \log_{10} \nu + 1$, soit une augmentation d'une unité, ce qui correspond à une variation du gain de $20n$ dB.

On exprime également la pente des droites asymptotes en dB/octave. L'octave correspond à un doublement de la fréquence, la variation du gain est alors de $20 n \log_{10} 2 \simeq 20n * 0,3$, ce qui conduit à une pente de $6n$ dB/octave.

– Le gain peut souvent se mettre sous la forme :

$$G(\nu) = G_1(\nu).G_2(\nu)....G_n(\nu) = \prod_k G_k(\nu)$$

Ce qui en terme de modules et de déphasages s'écrit :

$$G(\nu) = \prod_k |G_k(\nu)| e^{j(\sum_k \Delta\Phi_k(\nu))} = |G(\nu)| e^{j\Delta\Phi(\nu)}$$

Le gain en dB s'écrit :

$$G_{dB}(\nu) = 20 \log_{10} |G(\nu)| = 20 \log_{10} \left(\prod_k |G_k(\nu)| \right) = \sum_k (20 \log_{10} |G_k(\nu)|)$$

On a donc

$$G_{dB}(\nu) = \sum_k G_{k,dB}(\nu) \text{ et } \Delta\Phi(\nu) = \sum_k \Delta\Phi_k(\nu)$$

Modules du gain et déphasages s'ajoutent dans les diagrammes de Bode ce qui facilite la représentation du gain des systèmes complexes.

Nota bene

Pour des raisons similaires à celles qui ont conduit à l'introduction du gain en **dB**, on représente également les puissances en échelle logarithmique, celles ci sont alors exprimées en **dBm** (décibel par rapport au milliwatt). La puissance en dBm est égale à $10 \ln_{10}(\text{puissance exprimée en mW})$.

3.4 Exemples de systèmes linéaires invariants

3.4.1 Filtre Passe Bas idéal

Les propriétés que doit posséder un filtre Passe Bas idéal sont les suivantes :

1. Le module de son gain doit être constant sur la majeure partie de sa bande passante ($[0, \nu_C]$)
2. Le gain doit être nul en dehors de la bande passante. La transition entre gain maximum et gain nul doit être très brutale.

On peut à priori envisager un filtre de gain $G_a(\nu) = A$ si $|\nu| < \nu_C$ et $G_a(\nu) = 0$ si $|\nu| > \nu_C$. Un tel filtre aurait une réponse impulsionnelle égale à $h_a(t) = 2A\nu_C \text{sinc}(2\pi\nu_C t)$. Cette réponse n'est pas causale ($h(t) \neq 0$ pour $t < 0$) et le filtre de gain $G_a(\nu)$ n'est donc pas physiquement réalisable. On peut toutefois remarquer que si l'on retarde $h_a(t)$ avec un délai θ suffisamment grand, la fonction obtenue $h(t) = h_a(t - \theta)$ devient négligeable pour les instants négatifs ($h(t) \ll 2A\nu_C$ pour $t < 0$). Le filtre correspondant devient réalisable (du moins approximativement).

Le filtre Passe-Bas idéal sera caractérisé (voir figure 3.6) par la réponse impulsionnelle :

$$h(t) = 2A\nu_C \operatorname{sinc}[2\pi\nu_C(t - \theta)]$$

ce qui correspond au gain :

$$G(\nu) = A e^{-j2\pi\nu\theta} = A e^{j\Delta\Phi(\nu)} \text{ si } |\nu| < \nu_C \text{ et } G(\nu) = 0 \text{ si } |\nu| > \nu_C$$

La condition pour que $h(t)$ soit négligeable aux instants négatifs est que $\theta \gg \frac{1}{2\nu_C}$ soit encore que $|\Delta\Phi(\nu_C)| \gg \pi$.

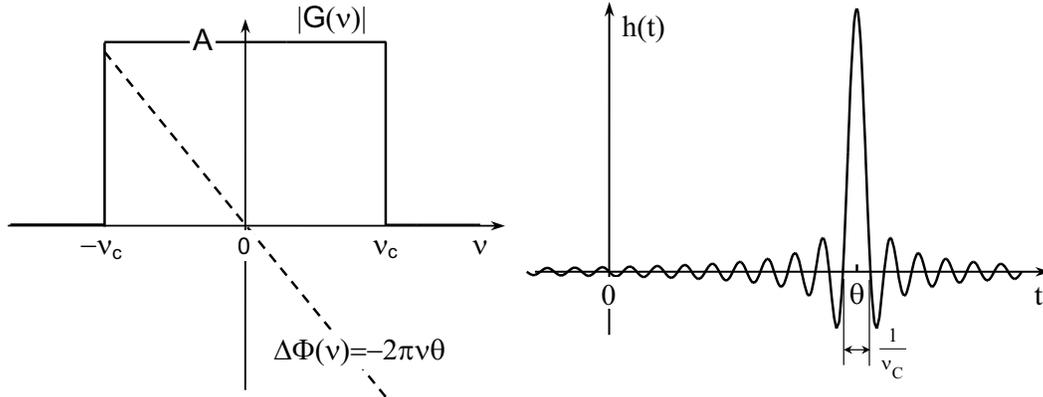


FIGURE 3.6 – Filtre Passe-Bas idéal (Gain et Réponse impulsionnelle)

Pour un signal d'entrée de la forme $x(t) = a\cos(2\pi\nu_0 t)$ avec $\nu_0 < \nu_C$, le signal de sortie $y(t)$ aura pour amplitude aA et pour phase $-2\pi\nu_0\theta$. $y(t)$ peut alors s'écrire : $y(t) = aA\cos(2\pi\nu_0(t - \theta))$. Quelle que soit la valeur de ν_0 ($\nu_0 < \nu_C$), $y(t)$ voit son amplitude multipliée par A et subit un retard égal à θ .

Si le signal d'entrée $x(t)$ est quelconque mais avec un spectre $X(\nu)$ négligeable pour $\nu > \nu_C$, le spectre du signal de sortie $y(t)$ s'écrira :

$$Y(\nu) = A X(\nu) e^{-j2\pi\nu\theta}$$

Compte de tenu de linéarité de la T.F. et de ses propriétés relatives à la translation dans le temps, le signal de sortie s'écrit :

$$y(t) = A x(t - \theta)$$

Après passage dans le filtre le signal est amplifié (ou atténué) et retardé mais il conserve sa forme.

3.4.2 Filtre Passe-Bas du 1° ordre

Le prototype du filtre Passe-Bas du 1° ordre est le circuit RC (circuit 1 figure 3.1). Il est caractérisé par l'équation différentielle :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

où τ est la constante de temps caractéristique du filtre ($\tau = RC$ dans le cas du circuit RC). En prenant comme fonction d'entrée $x(t) = e^{j2\pi\nu t}$ on obtient aisément l'expression du gain complexe.

$$G(\nu) = \frac{1}{1 + j2\pi\nu\tau}$$

En calculant la TF du gain on obtient la réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

où $u(t)$ est la fonction échelon unité ($u(t) = 0$ si $t < 0$ et $u(t) = 1$ si $t > 0$).

Le carré du module du gain et le déphasage sont donnés par les relations :

$$|G(\nu)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi\nu\tau)^2} \quad \text{et} \quad \text{tg}(\Delta\Phi(\nu)) = -2\pi\nu\tau$$

Le maximum du gain est atteint pour $\nu = 0$ et vaut 1. La fréquence de coupure correspond à $2\pi\nu_C\tau = 1$ soit $\nu_C = \frac{1}{2\pi\tau}$.

Pour obtenir une représentation indépendante de la réalisation particulière du filtre, il est commode d'introduire la variable $u = \frac{\nu}{\nu_C}$ (fréquence réduite). Le gain, son module et son déphasage s'écrivent alors :

$$G(u) = \frac{1}{1 + ju} \quad , \quad |G(u)| = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \quad \text{et} \quad \text{tg}(\Delta\Phi(u)) = -u$$

L'évolution du module du gain et celle du déphasage en fonction de la fréquence réduite sont représentées sur la figure 3.7. On remarquera que lorsque $u \rightarrow \pm\infty$ le gain tend vers la forme asymptotique $-j\frac{1}{u}$ et $\Delta\Phi(u) \rightarrow \mp\frac{\pi}{2}$. A la coupure ($u = \pm 1$) le gain vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et le déphasage vaut $\mp\frac{\pi}{4}$.

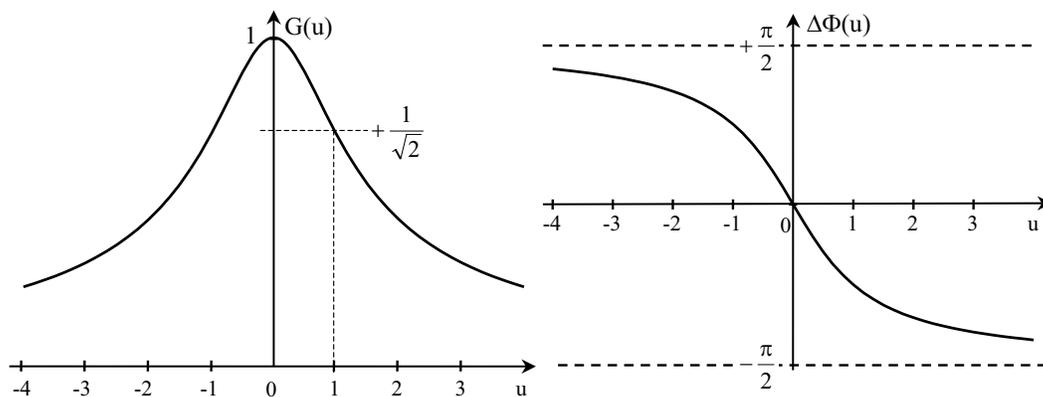


FIGURE 3.7 – Filtre Passe-Bas du 1^o ordre : Évolution du Gain en fonction de la fréquence réduite $u = \frac{\nu}{\nu_C}$

Pour le diagramme de Bode (voir figure 3.8) on représentera le gain en décibel et le déphasage en fonction de $\log_{10}u$. Le gain en décibel à pour expression :

$$|G(\nu)|_{dB} = -10 \log_{10}(1 + u^2)$$

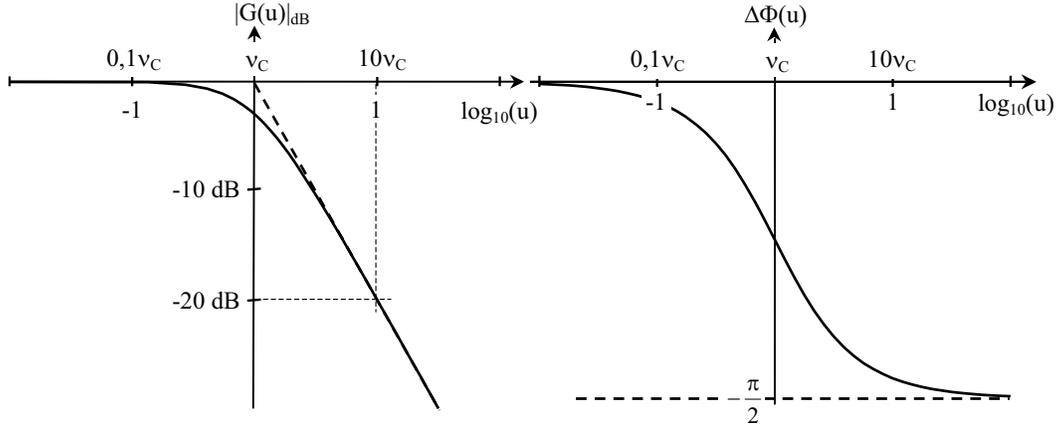


FIGURE 3.8 – Filtre Passe-Bas du 1° ordre : Diagramme de Bode

Les comportements asymptotiques s'observent dans les conditions suivantes :

- $u \rightarrow 0$, ($\nu \ll \nu_C$) pour laquelle $G(\nu) \rightarrow 1$ et $|G(\nu)|_{dB} \rightarrow 0$ dB
- $u \rightarrow \infty$, ($\nu \gg \nu_C$) pour laquelle $|G(\nu)| \cong \frac{1}{u}$ et $|G(\nu)|_{dB} \cong -20 \log_{10} u$ ce qui correspond à une pente de -20 dB/décade (ou de -6 dB/octave)

Si on applique à l'entrée du filtre un signal $x(t) = a \cos(2\pi\nu_0 t)$, le signal de sortie s'écrira :

$$y(t) = \frac{a}{\sqrt{1 + (\frac{\nu_0}{\nu_C})^2}} \cos(2\pi\nu_0 t + \Delta\Phi(\nu_0)) \quad \text{avec} \quad \text{tg}[\Delta\Phi(\nu_0)] = -\frac{\nu_0}{\nu_C}$$

On peut envisager les cas particuliers suivant :

- Si $\nu_0 \ll \nu_C$ ($u \ll 1$) on peut développer le gain au 1° ordre en $\frac{\nu_0}{\nu_C}$ (valable dès que $\frac{\nu_0}{\nu_C} \lesssim 0,1$), on obtient alors $|G(\nu)| \cong 1$ et $\Delta\Phi(\nu_0) = -\frac{\nu_0}{\nu_C}$ et la signal de sortie s'écrit :

$$y(t) = a \cos(2\pi\nu_0 t - \frac{\nu_0}{\nu_C}) = a \cos(2\pi\nu_0(t - \tau))$$

Le filtre se comporte comme un filtre idéal et tous les signaux dont la fréquence maximum du spectre ν_m satisfait à la condition $\nu_m \ll \nu_C$ seront simplement retardés de la quantité τ .

- Si $\nu_0 = \nu_C$ ($u = 1$) on obtient $y(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(2\pi\nu_0 t - \frac{\pi}{4})$.
- Si $\nu_0 \gg \nu_C$ ($u \gg 1$) on obtient $y(t) \cong 0$.

Chapitre 4

ÉCHANTILLONNAGE

On considère un signal $x(t)$ dont le spectre $X(\nu)$ est supposé limité en hautes fréquences à la fréquence ν_m ($|X(\nu)| \cong 0$ si $\nu > \nu_m$) (voir figure 4.1). Ce signal est continu dans le temps, si on veut utiliser des moyens numériques pour traiter ce signal on est amené à prélever une suite discrète de valeurs que prend le signal. En général ces valeurs sont prélevées à des instants t régulièrement espacés $t = nT_e$ où $n \in \mathbf{Z}$. Cette opération s'appelle l'échantillonnage. T_e est appelée période d'échantillonnage et $\nu_e = 1/T_e$ la fréquence d'échantillonnage (exprimée en échantillons/seconde).

Après échantillonnage on dispose d'une suite discrète (a priori infinie) de valeurs $x(nT_e)$ dont il convient de savoir si elle est ou non représentative du signal analogique initial $x(t)$ et de l'information qu'il contient. En d'autres termes, est-il possible à partir de la suite $x(nT_e)$ de reconstruire le signal $x(t)$ et à quelles conditions cette reconstruction est-elle possible ?

4.1 Représentation temporelle d'un signal échantillonné

Pour pouvoir utiliser les outils introduits dans les chapitres précédents il est nécessaire de construire un signal analogique à partir de la suite $x(nT_e)$. On introduit une représentation analogique à celle utilisée pour écrire le spectre d'un signal périodique qui, rappelons le, s'écrit

$$C(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(\nu - n\nu_0)$$

où les C_n sont les coefficients de la série de Fourier complexe associée au signal $c(t)$

La suite $x(nT_e)$ sera donc représentée par un signal analogique $x_e(t)$ dont l'expression est :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) \quad (4.1)$$

$x_e(t)$ peut encore s'écrire sous la forme (voir eq 3.17)

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) = x(t) \cdot \sqcup_{T_e}(t) \quad (4.2)$$

qui est le produit du signal $x(t)$ par un peigne de Dirac de période T_e . L'échantillonnage apparaît comme une forme particulière de modulation ($x(t)$ est modulé par un peigne de Dirac).

4.2 Spectre du signal échantillonné. Critère de Shannon

L'analyse du spectre $X_e(\nu)$ du signal échantillonné $x_e(t)$ va permettre de définir dans quelles conditions il est possible de restituer le spectre $X(\nu)$ du signal $x(t)$ et donc de reconstruire le signal

$x(t)$. Compte tenu de l'expression de $x_e(t)$ (eq 4.2) son spectre $X_e(\nu)$ est le produit de convolution de $X(\nu)$ par la TF du peigne de Dirac; il s'écrit donc :

$$X_e(\nu) = X(\nu) \otimes \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n\nu_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\nu) \otimes \delta(\nu - n\nu_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\nu - n\nu_e) \quad (4.3)$$

Le spectre de $x(t)$ est répliqué et transposé autour de toutes les fréquences $n\nu_e$ harmoniques de la fréquence d'échantillonnage et, comme le montre la figure 4.1, le spectre $X_e(\nu)$ est la somme de toutes les composantes ainsi obtenues. Le spectre qui en résulte est périodique de période $\nu_e = 1/T_e$.

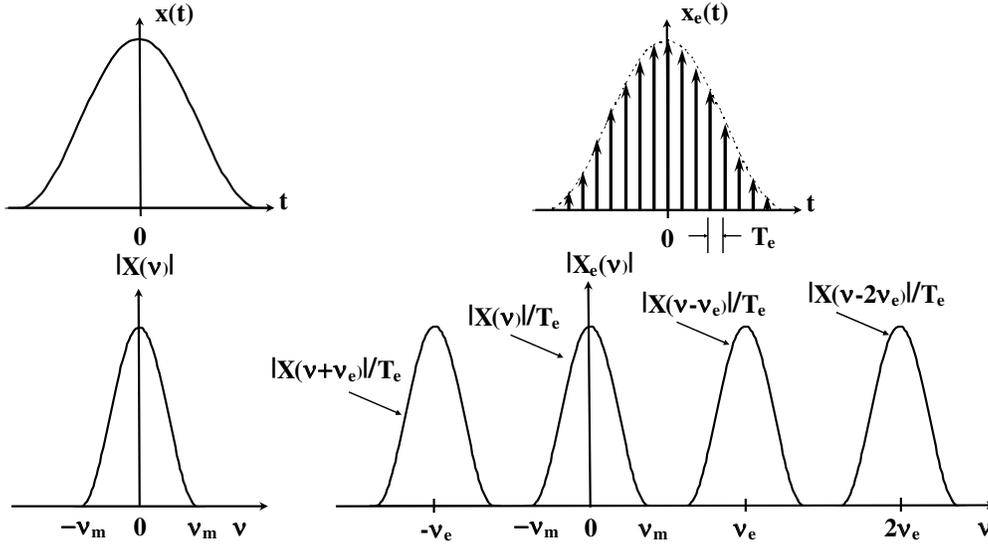


FIGURE 4.1 – Exemple de signal analogique ($x(t)$) et de son signal échantillonné associé ($x_e(t)$). Allure des spectres correspondants

On pourra isoler le spectre $X(\nu)$ par filtrage si deux composantes (ou lobes) successives du spectre ne se recouvrent pas (voir par exemple les composantes $\frac{X(\nu)}{T_e}$ et $\frac{X(\nu-\nu_e)}{T_e}$ sur la figure 4.1). Cette condition sera réalisée si :

$$\nu_e \geq 2\nu_m \quad (\nu_e = \frac{1}{T_e}) \quad (4.4)$$

Cette condition constitue une des formes du *Critère de Shannon*. Ainsi pour les signaux audio-numériques (CD Audio) la fréquence d'échantillonnage est de 44,1 kilo-échantillons. s^{-1} alors que la fréquence maximum audible est par convention de 20 kHz (norme HiFi). Ce critère s'écrit encore sous la forme :

$$T_e \leq \frac{1}{2\nu_m} \quad (4.5)$$

qui lie la période maximum d'échantillonnage à la fréquence maximum du spectre du signal à échantillonner. Dans le cas d'un signal sinusoïdal de période T_0 , le critère s'écrit $T_e \leq \frac{1}{2\nu_0}$ soit $T_e \leq \frac{T_0}{2}$. Pour échantillonner un signal sinusoïdal il est nécessaire de prélever au moins deux valeurs par période. Une autre forme du *Critère de Shannon* lie la fréquence maximum du spectre du signal à la période d'échantillonnage et s'écrit :

$$\nu_m \leq \frac{1}{2T_e} = \frac{\nu_e}{2} \quad (4.6)$$

où $\frac{\nu_e}{2}$ est appelée fréquence de Nyquist. Quelle que soit sa forme le *Critère de Shannon* doit impérativement être satisfait si l'on veut que l'information transportée par le signal ne soit pas dégradée.

Lorsque le critère de Shannon n'est pas respecté, il y a recouvrement des différentes composantes du spectre, en particulier une partie des composantes $\frac{1}{T_e} X(\nu \pm \nu_e)$ pénètre à l'intérieur de la composante centrale $\frac{1}{T_e} X(\nu)$. Ce phénomène, appelé repliement du spectre, peut engendrer des modifications notables du signal reconstruit à partir de la partie du spectre $X_e(\nu)$ comprise entre $-\frac{\nu_e}{2}$ et $\frac{\nu_e}{2}$.

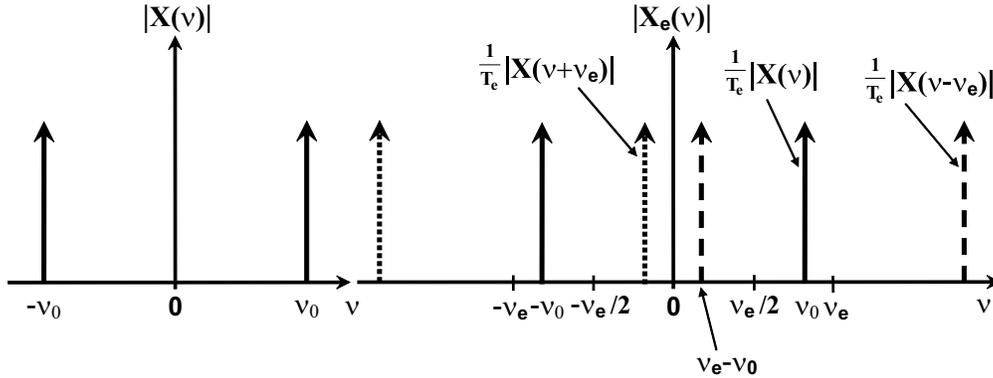


FIGURE 4.2 – Exemple de repliement de spectre dans le cas d'un signal sinusoïdal de fréquence légèrement inférieure à la fréquence d'échantillonnage. Spectres du signal et du signal échantillonné

Ce repliement de spectre est illustré sur les figures 4.2 et 4.3 dans le cas simple d'un signal sinusoïdal de fréquence ν_0 . Dans le cas envisagé, où le critère de Shannon fixe la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage à $2\nu_0$, le signal est échantillonné à une fréquence ν_e légèrement supérieure à ν_0 ($\nu_e = 1,1 \cdot \nu_0$). Dans l'intervalle $[-\frac{\nu_e}{2}, \frac{\nu_e}{2}]$ le spectre $X_e(\nu)$ comporte deux impulsions de Dirac provenant des composantes $\frac{1}{T_e} X(\nu - \nu_e)$ (tirets) et $\frac{1}{T_e} X(\nu + \nu_e)$ (pointillés) et dont les fréquences sont respectivement $\nu_e - \nu_0$ et $-(\nu_e - \nu_0)$.

Le signal restitué, en isolant cette partie du spectre est un signal sinusoïdal de fréquence $\nu_e - \nu_0 = 0,1 \cdot \nu_0$ comme le montre la figure 4.3.

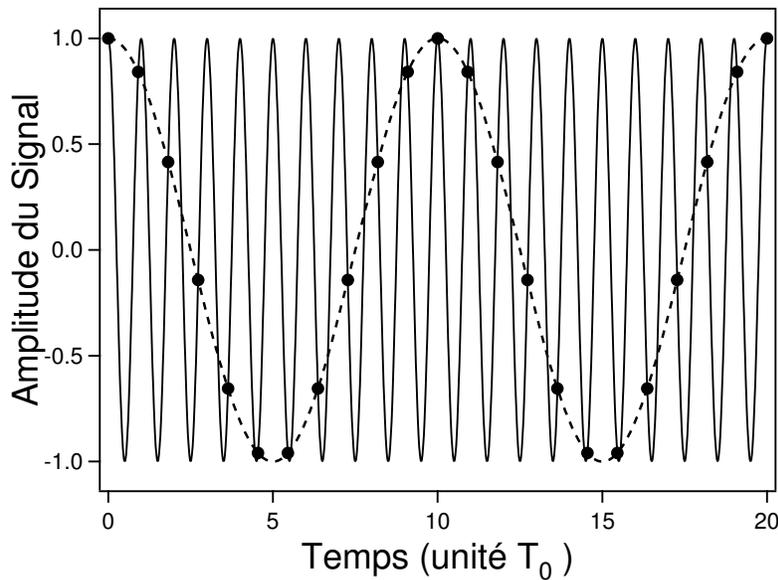


FIGURE 4.3 – Restitution d'un signal sinusoïdal échantillonné en dessous de la fréquence limite de Shannon. (trait plein) Signal initial de période T_0 , (•) valeurs des échantillons ($T_e = \frac{10}{11} T_0$) et (tirets) signal restitué de période $10T_0$.

Pour des signaux plus complexes ce phénomène se caractérise par un repliement de la partie du spectre telle que $\nu > \nu_e/2$ (resp $\nu < -\nu_e/2$) autour de l'axe $\nu = \nu_e/2$ (resp $\nu = -\nu_e/2$). Il peut entraîner une forte dénaturation du signal (telle que le changement de période observé dans le cas précédent). Pour préserver autant que possible les caractéristiques du signal on place à l'entrée de l'échantillonneur un filtre passe-bas de fréquence de coupure $\nu_c = \nu_e/2$ (filtre antirepliement) qui élimine la partie haute fréquence du signal à échantillonner. Si la fréquence maximum du spectre de ce signal est supérieure à $\nu_e/2$, il y a évidemment perte d'information mais celle sera beaucoup moins importante que si l'on tolérait le repliement du spectre.

4.3 Restitution du signal original

Si le critère de Shannon est respecté l'information transportée par $x(t)$, entièrement contenue dans la composante centrale du spectre de $X_e(\nu)$ (autour de $\nu = 0$), peut être restituée par filtrage. Pour reconstruire $x(t)$ on utilise un filtre "théorique" dont le gain est $G(\nu) = T_e$ si $|\nu| \leq \nu_e/2$ et $G(\nu) = 0$ si $|\nu| > \nu_e/2$. Le spectre du signal ainsi obtenu est :

$$X_e(\nu) \cdot G(\nu) = X(\nu)$$

Le signal $x(t)$ apparaît comme le produit de convolution de $x_e(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre ($x(t) = h(t) \otimes x_e(t)$). On montre facilement que

$$h(t) = T_e \nu_e \operatorname{sinc}(\pi \nu_e t) = \operatorname{sinc}(\pi \nu_e t)$$

$x(t)$ s'écrit :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) \otimes \operatorname{sinc}(\pi \nu_e t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e) \operatorname{sinc}(\pi \nu_e t) \otimes \delta(t - nT_e)$$

Soit encore

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e) \operatorname{sinc}(\pi \nu_e (t - nT_e)) \quad (4.7)$$

Cette relation est appelée formule d'interpolation de Shannon. Elle montre qu'il est possible de restituer sans déformation un signal quelconque $x(t)$ à partir de la connaissance d'une suite discrète de valeurs $x(nT_e)$ pour peu que le critère de Shannon soit respecté ($T_e \leq 1/2\nu_m$). La formule d'interpolation de Shannon justifie l'emploi de l'échantillonnage et de la conversion analogique-numérique pour le traitement et le stockage des informations. Il est à noter que d'un point de vue pratique cette formule n'est pas utilisée dans la mesure où la série à mettre en oeuvre converge très lentement.

Chapitre 5

TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

Le problème est, dans un premier temps, de calculer, à partir de la suite des $x(nT_e)$ associée à un signal échantillonné, une grandeur qui soit la plus proche possible de la Transformée de Fourier du signal original $x(t)$. Dans un second temps on se posera le problème de restituer le signal à partir du spectre ainsi calculé. Le signal et son spectre seront alors calculés pour un nombre fini de valeurs du temps et de la fréquence et la transformation qui permet le passage de l'un à l'autre est appelée Transformation de Fourier Discrète (directe ou inverse).

Pour simplifier l'écriture des équations et donc favoriser la clarté de l'exposé, on supposera que le signal $x(t)$ est causal ($x(t) = 0$ si $t < 0$), mais cela n'est pas une nécessité. Comme précédemment, on supposera que son spectre $X(\nu)$ est limité en hautes fréquences et que la fréquence maximale est ν_m ($|X(\nu)| \cong 0$ si $\nu > \nu_m$). Ce signal et son spectre sont représentés sur la figure 5.1 .

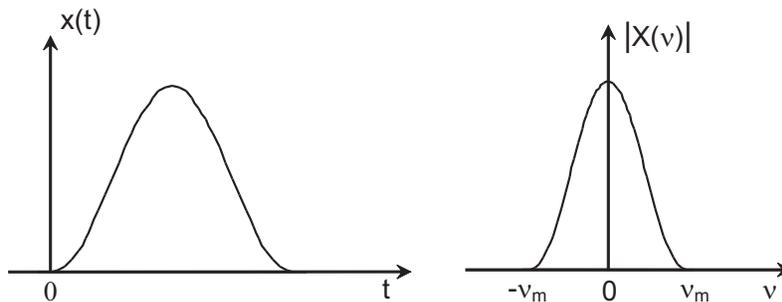


FIGURE 5.1 – Aspect du signal $x(t)$ et de son spectre $X(\nu)$

Rappelons que le signal échantillonné associé à $x(t)$ s'écrit (cf eq. 4.1)

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

On obtient sans difficulté l'expression du spectre $X_e(\nu)$ de ce signal en utilisant l'équation 2.26 donnant la TF d'une impulsion de Dirac :

$$X_e(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT_e) e^{-j2n\pi\nu T_e}$$

La première condition pour que la Transformée de Fourier Discrète (TFD) puisse représenter la Transformée de Fourier du signal est évidemment que *le critère de Shannon soit respecté* ($\nu_m \leq \frac{1}{2T_e}$). Dans ces conditions, dans l'intervalle de fréquences $\left[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}\right]$, le spectre du signal échantillonné $X_e(\nu)$ est lié à $X(\nu)$ par la relation

$$X(\nu) = T_e X_e(\nu)$$

Il en résulte l'expression suivante pour le spectre du signal $x(t)$

$$X(\nu) = T_e \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT_e) e^{-j2n\pi\nu T_e} \quad (5.1)$$

Dans le cas que nous envisageons, où $x(t)$ est causal, la sommation se limite aux seuls indices n positifs ou nuls. Il n'en demeure pas moins que le calcul exact de $X(\nu)$ requiert la sommation d'un nombre infini de termes. Pour calculer la TFD de $x(t)$ on est contraint de limiter la sommation à un nombre N fini de termes (n varie de 0 à $N-1$). Cette troncature revient à multiplier le signal échantillonné $x_e(t)$ par une fenêtre rectangulaire $f(t)$ de durée $T = NT_e$ et d'amplitude égale à 1 pour $-\frac{T_e}{2} < t < T - \frac{T_e}{2}$ et nulle ailleurs (cf figure 5.2). Le signal ainsi obtenu sera noté $x_f(t)$ et vaut :

$$x_f(t) = x_e(t) \cdot f(t) = x(t) \cdot \sqcup_{T_e}(t) \cdot f(t) = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(nT_e) \delta(t - nT_e) \cdot f(t)$$

où $\sqcup_{T_e}(t)$ est un peigne de Dirac de période T_e .

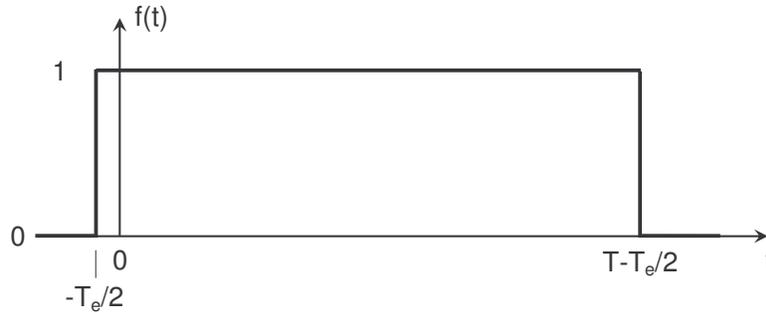


FIGURE 5.2 – Caractéristiques de la fenêtre rectangulaire de troncature

Le spectre de $x_f(t)$ s'écrit :

$$X_f(\nu) = \frac{1}{T_e} X(\nu) \otimes \sqcup_e(\nu) \otimes F(\nu) = \frac{1}{T_e} X(\nu) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\nu - n\nu_e)$$

où $F(\nu)$ est la TF de la fenêtre ($F(\nu) = T \cdot \text{sinc}(\pi\nu T) \cdot \exp[-j\pi\nu(N-1)T_e]$). On obtient $X_f(\nu)$ en convoluant $X(\nu)$ avec un peigne constitué d'impulsions "sinuscardinal" d'amplitude T et de largeur $1/T$ (demi-largeur du lobe central).

Comme $X_e(\nu)$, le spectre $X_f(\nu)$ est périodique de période $1/T_e$ (voir figure 5.3) mais le fait d'avoir remplacé les impulsions de Dirac du peigne par des impulsions "sinuscardinal" modifie l'aspect de $X_f(\nu)$ par rapport à $X_e(\nu)$.

La troncature ne pose toutefois pas de problème tant que le signal $x(t)$ est nul ou négligeable à l'extérieur de l'intervalle $[-\frac{T_e}{2}, T - \frac{T_e}{2}]$ puisque le signal n'est pas modifié au cours de l'opération. Pour les signaux périodiques cette réduction n'introduit qu'un élargissement des composantes (lobe

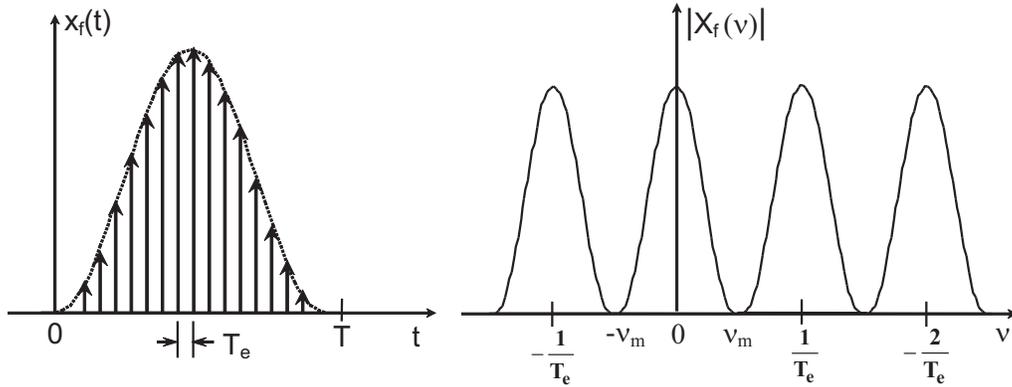


FIGURE 5.3 – Aspect du signal et de son spectre après échantillonnage et troncature.

central de largeur $2/T$ d'un sinus cardinal) lorsque la durée T de la fenêtre est égale à un nombre entier de périodes du signal.

Dans le cas contraire, $x_f(t)$ ne représente plus de façon fidèle le signal $x(t)$ et le spectre obtenu après calcul diffère du spectre $X(\nu)$ de $x(t)$, avec en particulier l'apparition de composantes supplémentaires dans le cas des signaux périodiques.

Dans la suite on admettra que la condition $x(t) \cong 0$ en dehors de l'intervalle $[-\frac{T_e}{2}, T - \frac{T_e}{2}]$ est vérifiée. Dans l'intervalle de fréquences $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$, le spectre $X(\nu)$ s'écrit alors

$$X(\nu) = T_e X_f(\nu) = T_e \sum_{n=0}^{n=N-1} x(nT_e) e^{-j2n\pi\nu T_e} \quad (5.2)$$

On peut, à ce niveau, calculer le spectre $X(\nu)$ pour n'importe quelle valeur de la fréquence prise dans l'intervalle $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$.

Toutefois, pour pouvoir restituer le signal à partir du spectre par transformation de Fourier inverse, il est nécessaire d'échantillonner ce dernier. Bien que cela ne soit pas indispensable, on utilise le même nombre N d'échantillons que dans l'espace des temps. Ces échantillons sont répartis uniformément sur l'intervalle $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$ et la période d'échantillonnage correspondante (pas en fréquence) est $\Delta\nu = \frac{1}{T_e}/N = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T}$ (rappelons que $T = NT_e$). Dans ces conditions le pas en fréquence est égal à l'inverse de la durée totale du signal pris en compte dans le calcul.

Le spectre échantillonné s'écrit :

$$\bar{X}(\nu) = X_f(\nu) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(\nu - k\frac{1}{T}) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X_f(k\frac{1}{T}) \cdot \delta(\nu - k\frac{1}{T})$$

et correspond au signal

$$\bar{x}(t) = x_f(t) \otimes T \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta(t - mT) = T \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x_f(t - mT)$$

L'échantillonnage du spectre revient à périodiser le signal. Comme le montre la figure 5.4, le signal $\bar{x}(t)$ et son spectre $\bar{X}(\nu)$ sont tous deux échantillonnés et périodiques, le premier est de période T avec un pas en temps T_e , le second de période (en fréquence) $1/T_e$ avec un pas en fréquence $1/T$.

Sachant que $T = NT_e$ les différentes composantes du spectre échantillonné ont pour valeur

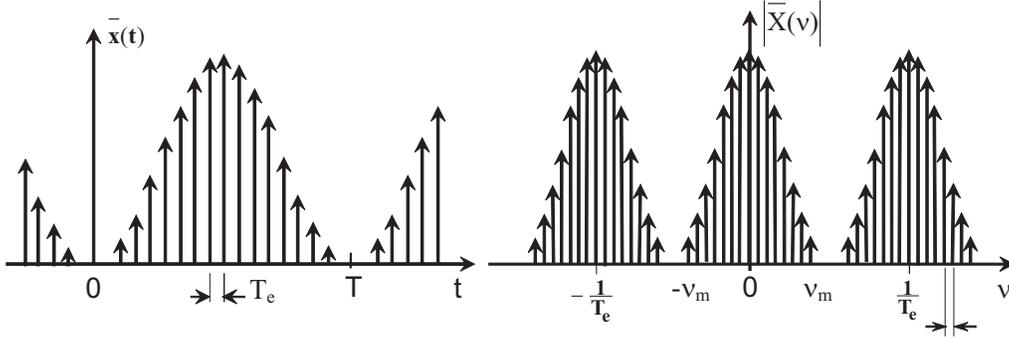


FIGURE 5.4 – Signal et spectre après échantillonnage du spectre

$$X\left(\frac{k}{T}\right) = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(nT_e) e^{-j2n\pi k \frac{1}{NT_e} T_e}$$

soit

$$X\left(\frac{k}{T}\right) = T_e \sum_{n=0}^{n=N-1} x(nT_e) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (5.3)$$

L'équation 5.3 donne l'expression de la Transformée de Fourier Discrète directe du signal $x(t)$. Dans la pratique, le spectre est calculé dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{T_e}\right]$ ($k \in [0, N-1]$). Pour restituer les valeurs du spectre pour les fréquences comprises entre 0 et $-\frac{1}{T_e}$, on prend en compte la périodicité du spectre du signal donné par l'équation 5.3 ($X\left(\frac{k}{T}\right) = X\left(\frac{k+N}{T}\right)$).

L'expression donnant la Transformée de Fourier Discrète inverse s'obtient en effectuant une démarche analogue à celle que nous venons de décrire. Dans un premier temps on échantillonne le spectre $X(\nu)$ avec un pas en fréquence égal à $1/T$, le spectre obtenu s'écrit :

$$\widehat{X}(\nu) = X(\nu) \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X\left(k\frac{1}{T}\right) \cdot \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right) \quad (5.4)$$

Le signal correspondant $\widehat{x}(t)$ est périodique de période T et s'écrit :

$$\widehat{x}(t) = x(t) \otimes T \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - kT) = T \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(t - kT)$$

Si $x(t)$ est négligeable en dehors de l'intervalle $[0, T[$, $\widehat{x}(t) = T \cdot x(t)$ sur cet intervalle (les termes $x(t - kT)$ de la somme ne se recouvrent pas).

Comme le spectre $X(\nu)$ est supposé négligeable en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}\right]$, la sommation sur k dans l'équation 5.4 se limite aux N termes de cet intervalle et le spectre s'écrit :

$$\widehat{X}(\nu) = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{k=\frac{N}{2}} X\left(\frac{k}{T}\right) \cdot \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right) \quad \text{où } N \text{ est pair}$$

Par transformation de Fourier on obtient alors l'expression de $\widehat{x}(t)$ suivante :

$$\widehat{x}(t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{k=\frac{N}{2}} X\left(\frac{k}{T}\right) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \quad \text{soit } x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{k=\frac{N}{2}} X\left(\frac{k}{T}\right) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

Il ne reste plus qu'à échantillonner le signal $x(t)$ ($t = nT_e$) ce qui a pour effet de périodiser son spectre. On obtient

$$x(nT_e) = \frac{1}{NT_e} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{k=\frac{N}{2}} X\left(\frac{k}{T}\right) \cdot e^{j2\pi \frac{k n T_e}{NT_e}}$$

soit

$$x(nT_e) = \frac{1}{NT_e} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{k=\frac{N}{2}} X\left(\frac{k}{T}\right) \cdot e^{j2\pi \frac{k n}{N}}$$

En tenant compte de la périodicité de $X\left(\frac{k}{T}\right)$ et de celle de l'exponentielle $e^{j2\pi \frac{k n}{N}}$ on obtient

$$x(nT_e) = \frac{1}{NT_e} \sum_{k=0}^{k=N-1} X\left(\frac{k}{T}\right) \cdot e^{j2\pi \frac{k n}{N}} \quad (5.5)$$

De façon à obtenir une expression aussi générale que possible on normalise le temps à la période d'échantillonnage T_e ($t_{norm} = t/T_e$), les fréquences sont alors normalisées à la fréquence d'échantillonnage $1/T_e$, l'expression de la Transformée de Fourier Discrète devient :

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi \frac{n k}{N}} \\ x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} X(k) \cdot e^{+j2\pi \frac{k n}{N}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

où $x(n)$ et $X(k)$ sont les échantillons du signal et de son spectre. Dans cette expression normalisée de la Transformation de Fourier Discrète le pas en temps vaut 1 tandis que le pas en fréquence est égal à $\frac{1}{N}$. A l'inverse la durée utile du signal est N et la largeur utile du spectre vaut 1.

Table des matières

1	INTRODUCTION	3
1.1	Définitions	3
1.2	Classement des signaux	3
1.2.1	Classement phénoménologique	3
1.2.2	Classement énergétique	4
1.2.2.1	Puissance instantanée	4
1.2.2.2	Énergie totale	4
1.2.2.3	Puissance moyenne totale	4
2	ANALYSE DE FOURIER DES SIGNAUX DÉTERMINISTES	7
2.1	Principe fondamental et définitions	7
2.2	Forme complexe de l'intégrale de Fourier	7
2.3	Propriétés essentielles de la Transformation de Fourier	10
2.3.1	Linéarité	10
2.3.2	Propriétés liées à la parité du signal temporel	10
2.3.3	Propriétés relatives à une compression et une dilatation temporelle	10
2.3.4	Propriétés relatives à une translation dans l'espace des temps	11
2.3.5	Propriétés relatives à une translation dans l'espace des fréquences	12
2.3.6	Transformée de Fourier des dérivées d'un signal	12
2.3.7	Spectre d'un produit de convolution de deux signaux	13
2.3.7.1	Définition du produit de convolution de deux fonctions $f(u)$ et $g(u)$	14
2.3.7.2	Transformée de Fourier du produit de convolution de deux signaux	14
2.3.8	Spectre du produit simple de deux signaux	14
2.4	Transformée de Fourier de signaux élémentaires	14
2.4.1	Impulsion (distribution) de Dirac	14
2.4.1.1	Définition	15
2.4.1.2	Propriétés	15
2.4.1.3	Représentation	15
2.4.1.4	Réalisation	15
2.4.1.5	Poids d'une impulsion	16
2.4.1.6	Spectre d'une impulsion de Dirac	16
2.4.2	Spectre d'un signal constant	17
2.4.3	Spectre d'un signal sinusoïdal	18
2.4.4	Spectre d'un signal périodique	18
2.4.5	Cas particulier de signal périodique : Peigne de Dirac	19
2.5	Spectre de puissance ou d'énergie	20
2.5.1	Spectre de puissance des signaux périodiques	20
2.5.2	Spectre d'énergie des signaux transitoires	21
2.5.3	Modèle pour le spectre d'un signal « périodique » expérimental	22
2.6	Annexe : Transformées de Fourier usuelles	23

3	<i>SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS</i>	25
3.1	Définitions	25
3.1.1	Propriété de linéarité	25
3.1.2	Invariance temporelle (ou stationnarité)	25
3.1.3	Modélisation	26
3.2	Relation de convolution	27
3.2.1	Réponse impulsionnelle et représentation du signal de sortie	27
3.2.2	Approche Qualitative	28
3.3	Analyse harmonique	29
3.3.1	Gain d'un système linéaire invariant	29
3.3.2	Gain complexe	29
3.3.3	Propriétés du Gain et de la Réponse impulsionnelle	29
3.3.4	Détermination du gain complexe	30
3.3.5	Spectre du signal de sortie	30
3.3.6	Classification des systèmes linéaires invariants	32
3.3.6.1	Systèmes Passe-Bas	32
3.3.6.2	Systèmes Passe-Haut	33
3.3.6.3	Systèmes Passe-Bande	33
3.3.6.4	Systèmes Coupe-Bande	34
3.3.7	Modes de représentation du gain	34
3.4	Exemples de systèmes linéaires invariants	35
3.4.1	Filtre Passe Bas idéal	35
3.4.2	Filtre Passe-Bas du 1° ordre	36
4	<i>ÉCHANTILLONNAGE</i>	39
4.1	Représentation temporelle d'un signal échantillonné	39
4.2	Spectre du signal échantillonné. Critère de Shannon	39
4.3	Restitution du signal original	42
5	<i>TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE</i>	43