25 octobre 2019

Échantillonnage

Cours [Segard] §4.1 - §4.3 :

- Définitions de « signal analogique » ; « signal échantillonné » ; « signal reconstitué/reconstruit »
- Acquisition analogique d'un signal vs. Acquisition numérique d'un signal
- Rappel, peigne de Dirac ; TF d'une peigne de Dirac
- Échantillonnage par impulsions de Dirac
- Spectre d'un signal réconstitué à partir d'un signal échantillonné (Exercice 1)
- Repliements (aliasing) dans le spectre
- Critère de Shannon
- Formule d'interpolation de Shannon
- Reconstitution fidèle du signal analogique à partir du signal échantillonné ; Filtrage passe-bas
- Sous-échantillonnage
- Reconstitution fidèle du signal analogique à partir du signal sous-échantillonné ; Filtrage passe-bande
- Échantillonnage par portes de durée finie (Exercice 2, 3)
- Effets de la durée d'échantillonnage (Exercice 2, 3)

Exercice 1 : Échantillonnage d'un signal sinusoïdal

Soit le signal analogique $x(t) = A \cos(2\pi \nu_0 t)$, $\nu_0 = 1/T_0$.

a) Calculer son spectre $X(\nu)$
b) Esquisser $X(\nu)$

On échantillonne le signal analogique $x(t)$ à des instants nT_e ($T_e = 1/\nu_e$) pour obtenir le signal échantillonné x_n. On reconstruit ensuite un signal analogique $x_r(t)$ à partir de x_n. (par des impulsions de Dirac)

c) Trouver le signal reconstitué $x_r(t)$ et son spectre $X_r(\nu)$
d) Esquisser $X_r(\nu)$

On filtre $x_r(t)$ avec une filtre passe-bas idéal

$$G(\nu)=T_e\,\Pi(\nu)=\begin{cases} T_e & ,-\frac{\nu_e}{2}\leq\nu\leq\frac{\nu_e}{2} \\ 0 & ,sinon \end{cases}$$

pour obtenir le signal $y(t)$

e) Trouver son spectre $Y(\nu)$
f) Esquisser $Y(\nu)$
g) Pour quelles valeurs de ν_e le signal originale $x(t)$ est-il parfaitement reconstruit par $y(t)$?

Exercice 2 : Échantillonnage sur une durée finie

Soit le signal analogique $x(t) = A \cos(2 \pi \nu_0 t)$ pour $0 \leq t \leq T_{obs}$, et $x(t) = 0$ sinon $(\nu_0 = 1/T_0)$.
$x(t)$ represente donc un signal de durée finie qui est, donc, physiquement réalisable.

a) Calculer et esquisser son spectre $X(\nu)$

On échantillonne le signal analogique $x(t)$ à des instants nT_e ($T_e = 1/\nu_e$) pour obtenir le signal échantillonné x_n. On reconstruit ensuite un signal analogique $x_r(t)$ à partir de x_n. (par des impulsions de Dirac)

b) Trouver le signal échantillonné $x_r(t)$ et son spectre $X_r(\nu)$
c) Esquisser $X_r(\nu)$

On filtre $x_r(t)$ avec une filtre passe-bas idéal

$$G(\nu) = T_e \Pi(\nu) = \begin{cases} T_e & , -\frac{\nu_e}{2} \leq \nu \leq \frac{\nu_e}{2} \\ 0 & , sinon \end{cases}$$

d) Trouver le spectre du signal filtré $Y(\nu)$
e) Pour quelles valeurs de T_{obs} le signal originale $x(t)$ est-il parfaitement réconstruit par $y(t)$?
f) Argumenter que les deux cas suivant sont équivalents : (i) Signal de durée T_{obs} échantillonné sur une durée infinie ; (ii) signal de durée infinie échantillonnée sur une durée T_{obs}.

Exercice 3 : Échantillonnage avec apodisation

Soit le signal analogique $y(t) = x(t) \cdot \Lambda(t)$ où $x(t) = A \cos(2 \pi \nu_0 t)$;
et la « fonction d'apodisation» $\Lambda(t) = 1 - | (t - T_{obs}/2) / (T_{obs}/2) |$ pour $-T_{obs}/2 \leq t \leq T_{obs}/2$ et $\Lambda(t) = 0$ sinon.

a) Trouver et esquisser $Y(\nu)$ la transformée de Fourier de y(t). [Astuce : Exprimer $\Lambda(t)$ comme une convolution]
b) On échantillonne y(t) avec pas d'échantillonage T_e , puis on restitue le signal par impulsions de Dirac. Trouver et esquisser le signal restitué $Y_r(\nu)$.