27 septembre & 4 octobre 2019

La transformée de Fourier continue II

Cours [Segard] §1.1 - §2.6 :

- Produit de convolution
- Propriété de convolution de la TF
- Exemple : Convolution de 2 fonctions rectangulaires (Exercice 1)
- Exemple : Convolution de 2 Gaussiennes (Exercice 2)
- Exemple : Élevation au carré d'un signal sinusoïdal (Exercice 3)
- Signaux périodiques (Exercice 4)
- La fonction « peigne de Dirac » $Ш_{T_0}(t)$ et sa TF
- Signal périodique comme convolution d'un signal transitoire et une peigne de Dirac
- Exemple : Utiliser le peigne de Dirac pour décrire un signal périodique (Exercice 5)
- Troncation d'un signal périodique (Exercice 6)

Exercice 1 : Convolution de 2 fonctions portes

a) Calculer $f(t)=\Pi_{\tau_1}(t)\otimes\Pi_{\tau_2}(t)$ [Astuce : utiliser la méthode visuelle]
b) Utiliser la propriété de convolution pour calculer $F(\nu)$ la TF de $f(t)$.
c) Calculer $g(t)=\Pi_{\tau}(t)\otimes\Pi_{\tau}(t)$ [Astuce : utiliser la méthode visuelle]
d) Utiliser la propriété de convolution pour calculer $G(\nu)$ la TF de $g(t)$.

Exercice 2 : Convolution de 2 fonctions gaussiennes

Soit $f(t)=\exp(-t^2/\tau_1^2)$ et $g(t)=\exp(-t^2/\tau_2^2)$.

a) Calculer $f(t)\otimes g(t)$ [Astuce : calculer d'abord $F(\nu)$ et $G(\nu)$ puis utiliser la propriété de convolution]
b) Calculer $f(t)\otimes f(t)$.

Exercice 3 : Élevation au carré d'un signal sinusoïdal

Soit un circuit électronique qui réalise l'élévation au carré du signal d'entrée $x(t)$. Le signal en sortie est alors $y(t)=[x(t)]^2$. On injecte à l'entrée de ce circuit le signal

$$x(t)=1+2\cos(2\pi\nu_0 t)$$.

a) Exprimer et représenter graphiquement le spectre de $y(t)$

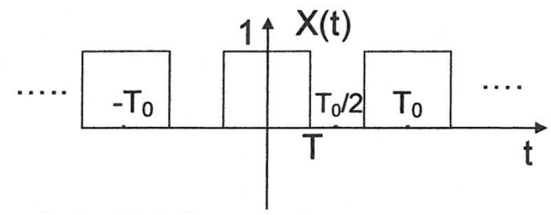
Exercice 4 : Transformée de Fourier de signaux périodiques

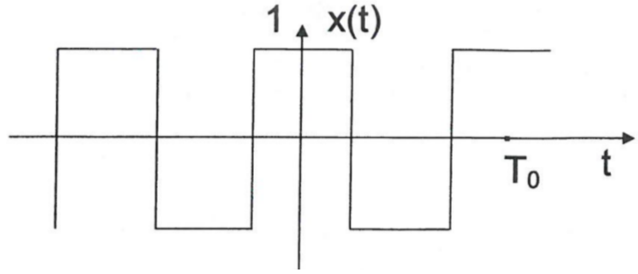
a) Rappeler que le spectre $X(\nu)$ d'un signal périodique $x(t)$ de période $T_0=1/\nu_0$ peut se mettre sous la forme :

$$X(\nu)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\delta(\nu-n\nu_0)$$

et donner l'expression de X_n .

b) Calculer la transformée de Fourier du signal périodique rectangulaire représenté sur la Figure suivante :

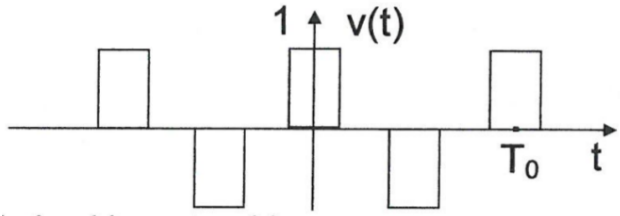




c) Calculer le spectre du signal périodique de la Figure ci-dessus.

d) Vérifier graphiquement que le signal $v(t)$ de la Figure ci-dessous peut se mettre sous la forme :

$$v(t)=\frac{1}{2}\left[x(t-\frac{T_0}{8})+x(t+\frac{T_0}{8})\right]$$



e) Préciser la durée des impulsions rectangulaires

f) En déduire le spectre $V(\nu)$ de $v(t)$

Exercice 5 : Produit de convolution et peigne de Dirac

a) Rappeler la définition du peigne de Dirac $Ш_{T_0}(t)$ et sa transformée de Fourier.

b) Soit un signal formé de la répétition périodique d'une fonction $f(t)$ de période T_0 :

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT_0)$$

c) Connaissant la transformée de Fourier $F(\nu)$ de $f(t)$ et la transformée de Fourier de $Ш_{T_0}(t)$, exprimer la transformée de Fourier $X(\nu)$ de $x(t)$.

d) Retrouver le résultat de l'Exercice 4(b) en utilisant le peigne de Dirac

Exercice 6 : Troncation d'un signal périodique

Soit un signal de la forme $x(t)=\begin{cases} A[1+\sin(\frac{2\pi t}{T_0})] & ,-\frac{T_0}{2}\leq t\leq\frac{T_0}{2} \\ 0 & ,sinon \end{cases}$.

a) Calculer sa transformée de fourier.

b) Faire la représentation graphique.