N^O d'ordre : 2138 bis.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

PAR **Emmanuel FRICAIN**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

Propriétés géométriques des suites de noyaux reproduisants dans les espaces modèles

---

Soutenue le 6 décembre 1999.

Après avis de :

Mme A. BONAMI, Professeur	Université d'Orléans
M. K. DYAKONOV, Professeur	Universitat de Barcelona (Espagne)

Devant la commission d'examen formée de :

M. E. AMAR, Professeur	Université Bordeaux I	Président
Mme A. BONAMI, Professeur	Université d'Orléans	Rapporteurs
M. K. DYAKONOV , Professeur	Universitat de Barcelona	
M. G. CASSIER, Chargé de Recherche CNRS	Université Bernard Lyon I	Examinateurs
M. N. NIKOLSKI, Professeur	Université de Bordeaux I	
M. P. THOMAS, Maitre de Conférence	Université P. Sabatier Toulouse	
M. A. YGER, Professeur	Université Bordeaux I	

– 1999 –

A mes parents,

A mon frère et toute sa famille,

A ma grand-mère.

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens a remercier Nikolai Nikolski qui avec beaucoup d'enthousiasme et de patience a guidé mes premiers pas en recherche. Sa culture mathématique et ses idées ont été pour moi une grande source d'inspiration. Il a su m'orienter vers un domaine, à la croisée de l'analyse complexe et de l'analyse fonctionnelle, dont je ne cesse de découvrir la richesse. Je lui en serai toujours profondément reconnaissant.

Aline Bonami et Konstantin Dyakonov m'ont fait l'honneur d'accepter d'examiner ma thèse. Je les remercie pour le sérieux avec lequel ils se sont acquités de cette tâche ingrate et pour leur participation au jury.

Je suis heureux et honoré que Eric Amar ait accepté de présider ce jury. Je le remercie grandement de l'attention qu'il m'a porté durant ces trois années de thèse.

C'est un immense plaisir pour moi que Gilles Cassier ait accepté de se joindre à mon jury. Je lui suis profondément reconnaissant de son soutien et de l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail.

Je remercie Pascal Thomas d'avoir bien voulu faire partie de ce jury. Ses commentaires lors de la lecture de cette thèse ont grandement contribué à l'amélioration de la rédaction.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Alain Yger d'avoir accepté de se joindre à ce jury. Par son enthousiasme et sa gentillesse, il a su, quand j'étais étudiant de Licence et Maitrise, me donner l'envie de continuer dans cette voie.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Ahmed Sebbar pour sa disponibilité et sa compétence lors de mon TER libre de Maitrise. Il a su me donner le virus de la recherche et je suis vraiment heureux de le remercier à cette occasion.

Je voudrais également remercier tout particulièrement Roger Gay pour ses nombreux conseils et son attention.

Je tiens aussi à remercier toute l'équipe d'analyse pour son soutien et l'ambiance chaleureuse qu'elle génére.

J'ai également plaisir à remercier à cette occasion tous mes amis et notamment Stéphane et Mélanie, Sarah, Olivier et Thi Hahn, Mathieu, Christelle, Dom et Cédric, ma cousine Nathalie. Leurs amitiés et soutien ont été pour moi essentiels.

Je pense aussi à Margaux, Loulou, Talahassee, Clémentine et Nolwenn qui sont pour moi une source de bonheur constant.

Une pensée va également vers tous mes copains de la fac. Je tiens à remercier tout particulièrement Carine. Tu avais l'impossible défi de remplacer Isabelle dans le bureau 155. Ton amitié et les longues conversations philosophiques (...) que nous avons pu avoir ont souvent été pour moi une source de réconfort. Je ne peux également pas oublier Hugo, la rock star de Royal Ambré, qui lui, j'espère, ne m'oubliera pas quand il fera l'Olympia! Je pense également à Niels et Hakim, mes compagnons d'infortune du mois d'août, qui ont contribué à rendre plutôt agréable la période de rédaction de cette thèse.

Une pensée toute particulière va aussi vers Isabelle, Andréas et Fred, mes grands fréres et soeur de thèse, vers Stas, Thomas, Pascale et mon coach Nicolas! Leurs amitiés, soutien et conseils ont vraiment beaucoup compté pour moi.

Ceux qui se sentent oubliés ne le sont pas! Je pense à vous sincérement!

Enfin, je remercie Mauricette Jaubert qui s'est acquitté de la réalisation matérielle de cette thèse avec beaucoup de gentillesse et Joëlle Pargade pour sa disponibilité et son efficacité au sein du secrétariat de l'école doctorale.

Table des matières

Introduction

0.1 Un aperçu des systèmes d'exponentielles et de noyaux reproduisants

Si l'on considère une fonction $f \in L^2(-\pi, \pi)$, on peut la développer en série de Fourier L^2-convergente :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \exp(int) \,, \qquad t \in (-\pi, \pi) \,,$$

où

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-int) \, dt \,.$$

La question naturelle qui se pose alors est de savoir ce qui se passe si on remplace le système trigonométrique $(\exp(int))_{n \in \mathbb{Z}}$ classique par un système d'exponentielles complexes $(\exp(i\mu_n t))_{n \in \mathbb{Z}}$ quelconques. Cette question trouve son origine dans les travaux de R.E. Paley et N. Wiener [57] et ceux de N. Levinson [48]. En fait, deux problèmes majeurs se posent :

(Pb 0.1) Le problème de la description des familles de fréquences $(\mu_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui engendrent de "bonnes bases" $(\exp(i\mu_n t))_{n \in \mathbb{Z}}$, dans un sens à préciser.

(Pb 0.2) Le problème de la complétude des systèmes $(\exp(i\mu_n t))_{n \in \mathbb{Z}}$.

Ces questions ont donné naissance à la théorie des séries de Fourier non-harmoniques qui s'est développée autour des travaux de Paley-Wiener et Levinson. Dans les années 80, en réponse au développement de l'analyse fonctionnelle et, en particulier, à l'intérêt croissant pour les bases dans les espaces de Banach, la recherche dans ce domaine s'est fortement accrue. De nouvelles approches à d'anciens problèmes ont amené d'importantes avancées dans la théorie.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite minimale et complète dans un espace de Banach $\mathcal{X}$, on peut associer à chaque $x \in \mathcal{X}$ sa série de Fourier formelle

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle x, x'_n \rangle x_n \,, \tag{0.1}$$

où $(x'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la famille biorthogonale à $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire l'unique famille de vecteurs du dual $\mathcal{X}^*$ telle que

$$\langle x_n, x'_k\rangle = \delta_{nk}\,.$$

Rappelons que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite *complète* dans $\mathcal{X}$ si

$$\operatorname{span}\{x_n\,:\,n\in\mathbb{Z}\} = \mathcal{X}\,,$$

où $\operatorname{span}\{x_n\,:\,n\in\mathbb{Z}\}$ désigne l'enveloppe linéaire fermée engendrée par $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est *minimale* dans $\mathcal{X}$ si

$$x_n \notin \operatorname{span}\{x_k\,:\,k\neq n\}\,,\quad n\in\mathbb{Z}\,.$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach, il est facile de voir que la minimalité est équivalente à l'existence d'une famille biorthogonale $(x'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{X}^*$, qui est uniquement déterminée si $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est complète. Dans le cas où $\mathcal{X} = H$ est un espace de Hilbert, si, de plus, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale dans H, la biorthogonale $(x'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ coincide avec la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et le problème de la convergence de la série (0.1) a été résolu par le théorème classique de V.A. Steklov: pour tout $x\in H$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle x, x_n\rangle x_n$ converge dans H vers x. De plus, le système $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant orthonormal, la série converge de façon inconditionnelle, c'est-à-dire converge vers la même somme après n'importe quelle permutation des termes. En général, la famille d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas orthogonale dans l'espace $L^2(-\pi,\pi)$. Cependant, la convergence inconditionnelle de la série (0.1) reste valable pour tout système $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui est obtenu à partir du système $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par une transformation linéaire, continue et inversible dans H. De tels systèmes sont appelés *bases de Riesz*. Plus généralement, si $\mathcal{X}$ est un espace de Banach, on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une *suite basique inconditionnelle* dans $\mathcal{X}$ si pour tout $x\in\mathcal{X}_0 := \operatorname{span}\{x_n\,:\,n\in\mathbb{Z}\}$, il existe une unique décomposition en série

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x_n\,,$$

où la convergence de la série dans $\mathcal{X}$ est inconditionnelle. Si de plus, la suite est complète dans $\mathcal{X}$, alors on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une *base inconditionnelle* de $\mathcal{X}$. Depuis le théorème de Köthe-Toeplitz (voir [53]), il est connu que, dans le cas Hilbertien, les notions de base de Riesz et de base inconditionnelle coincident pour des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ presque normées, c'est-à-dire, telles que $c\leqslant\|x_n\|\leqslant C$, $n\in\mathbb{Z}$.

La question naturelle qui se pose alors est de décrire les familles de fréquences $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$ telles que $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base inconditionnelle de $L^2(I)$, où I est un intervalle fini de $\mathbb{R}$. Le premier progrès fondamental dans cette direction a été obtenu par Paley et Wiener [57], en 1934. Ils ont prouvé que si $\mu_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ et si $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |n - \mu_n| < \pi^{-2}$ alors le système $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base inconditionnelle de $L^2(0, 2\pi)$. Différentes améliorations furent alors apportées par la suite. Le théorème final est donné, en 1964, par M.I. Kadeč [38] : si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ et si $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |n - \mu_n| < \dfrac{1}{4}$ alors le système $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base inconditionnelle de $L^2(0, 2\pi)$. En fait, en 1937, A.E. Ingham avait prouvé que la constante $\frac{1}{4}$ est optimale [36]. Cependant, ce théorème ne s'applique que si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite réelle. La meilleure constante, jusqu'à présent, dans le cas complexe, a été obtenu par R.J. Duffin et J.J. Eachus et vaut $\dfrac{\log 2}{\pi}$ (voir [19]). La question de savoir si, même dans le cas complexe, on peut remplacer $\dfrac{\log 2}{\pi}$ par $\dfrac{1}{4}$ reste ouverte. En fait, l'idée directrice de tous ces théorèmes repose sur un résultat de Paley et Wiener: pour former une base inconditionnelle de $L^2(0, 2\pi)$, il est suffisant que la famille $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ soit "suffisamment proche" du système trigonométrique classique [57].

Un autre point de vue, qui trouve également son origine dans le travail de Paley et Wiener, a été proposé par B.Ja. Levin. Dans cette méthode, un rôle naturel est joué par une fonction entière de type exponentiel fini qui s'annule aux points μ_n, $n \in \mathbb{Z}$, et dont la longueur du diagramme indicateur coïncide avec la longueur de l'intervalle où nous considérons notre système $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$. Une telle fonction est appelée "fonction génératrice" pour la famille $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$. Pour toutes les définitions et propriétés sur les fonctions entières, nous renvoyons le lecteur à [10] ou [47]. B.Ja. Levin et V.D. Golovin [2] ont alors montré que si la fonction génératrice est une fonction de type sinus dont la longueur du diagramme indicateur est égale à $a > 0$, alors $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base inconditionnelle de $L^2(I)$, pour tout intervalle I de longueur $|I| = a$.

En 1981, dans [34], S. Hruscev, N. Nikolski et B. Pavlov ont développé un troisième point de vue, plus géométrique, qui a permis d'obtenir un critère pour le problème des bases d'exponentielles dans $L^2(0, a)$ (voir théorème 0.1.1). Ils ont remarqué que ce problème est, en fait, équivalent au problème des bases de noyaux reproduisants dans les espaces modèles K_Θ. Le cadre est le suivant : on considère l'espace de Hardy $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ du disque et l'adjoint du shift

$$\begin{array}{rccl} S^* : & H^2 & \to & H^2 \\ & f & \mapsto & \dfrac{f - f(0)}{z} = P_+ \overline{z} f \, , \end{array}$$

où P_+ désigne la projection de Riesz sur H^2. Il est alors bien connu que, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$,

$$S^* k_\lambda = \overline{\lambda} k_\lambda \,,$$

où $k_\lambda = \dfrac{1}{1-\overline{\lambda} z}$ est le noyau reproduisant de H^2, c'est-à-dire l'unique fonction de H^2 vérifiant

$$\langle f, k_\lambda \rangle = f(\lambda)\,, \qquad \lambda \in \mathbb{D}\,,\ f \in H^2\,.$$

D'autre part, considérons

$$\begin{array}{rccc} \omega\ : & \mathbb{D} & \to & \mathbb{C}_+ \\ & z & \mapsto & i\,\dfrac{1+z}{1-z}\,, \end{array}$$

et U l'application de H^2 dans H^2_+ définie par

$$(Uf)(\mu) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\mu + i} (f \circ \omega^{-1})(\mu)\,, \quad f \in H^2\,, \Im m\, \mu > 0\,,$$

où $\mathbb{C}_+$ désigne le demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C}\ :\ \Im m\, z > 0\}$ et H^2_+ désigne l'espace de Hardy sur $\mathbb{C}_+$

$$H^2_+ := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}_+)\ :\ \sup_{y>0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2\, dx < +\infty \right\}.$$

Il est facile de voir que U est une transformation unitaire de H^2 sur H^2_+. Notons alors $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier définie de H^2_+ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ par

$$(\mathcal{F}g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(t) \exp(-itx)\, dx\,, \qquad g \in H^2_+\,.$$

Un théorème classique de Paley et Wiener affirme que $\mathcal{F}^{-1} L^2(\mathbb{R}_+) = H^2_+$. En outre, si $|\lambda| < 1$, un calcul explicite élémentaire montre que

$$\mathcal{F} U k_\lambda = c(\lambda) \exp(-i\overline{\omega(\lambda)}t)\,,$$

où $c(\lambda) \in \mathbb{C}$. Donc, puisque $\mathcal{F}U$ est unitaire, toutes les propriétés géométriques Hilbertiennes (complétude, minimalité, être une base, une base inconditionnelle,....) des exponentielles $\exp(i\mu t)$, $\mu = -\overline{\omega(\lambda)}$, sont les mêmes que celles des noyaux reproduisants k_λ. D'autre part, si on considère une famille d'exponentielles $\exp(i\mu_n t)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec $\Im m \mu_n > 0$, sur $L^2(0,a)$, on observe facilement que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} L^2(0,a) &= \mathcal{F}^{-1}(L^2(0,\infty) \ominus S_a L^2(0,\infty)) \\ &= H^2_+ \ominus \exp(iaz) H^2_+ \\ &= U(H^2 \ominus \Theta_a H^2) \\ &= U K_{\Theta_a}\,, \end{aligned}$$

où $\Theta_a(z) := \exp\left(-a\frac{1+z}{1-z}\right)$ et S_a est la translation à droite définie par $(S_a f)(x) := f(x-a)$, $f \in L^2(0,\infty)$. Donc l'espace $L^2(0,a)$ est l'image de l'espace modèle $K_{\Theta_a} := H^2 \ominus \Theta_a H^2$ par la transformation unitaire $\mathcal{F}U$. En outre,

$$\exp(i\mu_n t)\chi_{(0,a)} = P_{L^2(0,a)} \exp(i\mu_n t)\chi_{\mathbb{R}_+} ,$$

où $P_{L^2(0,a)}$ est la projection orthogonale sur le sous-espace $L^2(0,a)$, et par suite, si $\mu_n = -\overline{\omega(\lambda_n)}$,

$$\begin{aligned} U^{-1}\mathcal{F}^{-1}\exp(i\mu_n t)\chi_{(0,a)} &= U^{-1}\mathcal{F}^{-1}P_{L^2(0,a)}\mathcal{F}UU^{-1}\mathcal{F}^{-1}\exp(i\mu_n t)\chi_{\mathbb{R}_+} \\ &= U^{-1}\mathcal{F}^{-1}P_{L^2(0,a)}\mathcal{F}U\frac{c(\lambda_n)^{-1}}{1-\overline{\lambda_n}z} \\ &= P_{\Theta_a}\frac{c(\lambda_n)^{-1}}{1-\overline{\lambda_n}z} \\ &= c(\lambda_n)^{-1}k_{\Theta_a}(.,\lambda_n) , \end{aligned}$$

où $c(\lambda_n) \in \mathbb{C}$, , P_{Θ_a} désigne la projection orthogonale sur le sous-espace K_{Θ_a} et

$$k_{\Theta_a}(.,\lambda) := P_{\Theta_a}k_\lambda = \frac{1-\overline{\Theta_a(\lambda)}\Theta_a}{1-\overline{\lambda}z}$$

représente le noyau reproduisant de K_{Θ_a}. Par conséquent, on voit que les propriétés géométriques Hilbertiennes des exponentielles $(\exp(i\mu_n t)\chi_{(0,a)})_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $L^2(0,a)$ sont les mêmes que celles des noyaux reproduisants $(k_{\Theta_a}(.,\lambda_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ dans l'espace modèle K_{Θ_a}. Pour tous ces liens entre les systèmes d'exponentielles et de noyaux reproduisants, nous renvoyons le lecteur à [34], [53] et [55]. On peut donc considérer les problèmes (Pb 0.1) et (Pb 0.2) précédents comme un cas particulier du problème plus général suivant : soit Θ une fonction intérieure dans $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$, c'est-à-dire une fonction holomorphe et bornée dans $\mathbb{D}$ telle que $|\Theta(\zeta)| = 1$, pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$. Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{D}$. Le problème est donc de trouver un critère pour que la famille de noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ soit complète ou forme une base inconditionnelle dans K_Θ.

Cette question a une grande importance dans la théorie des opérateurs modèles initiée par B. Sz.-Nagy et C. Foias [66]. Si H est un espace de Hilbert, on désigne par $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires et bornés sur H. Considérons alors $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction complètement non unitaire et $C_{.0}$ sur H : T n'a pas de partie unitaire et $\forall h \in H$, $T^{*n}h \to 0$. Désignons par

$$D_T := (I - T^*T)^{1/2} , \quad D_{T^*} := (I - TT^*)^{1/2}$$

les opérateurs de défaut de T, et par

$$E := \text{clos}\,(D_T H) , \quad E_* := \text{clos}\,(D_{T^*} H)$$

les espaces de défaut de T, où clos $(\dots)$ est la fermeture pour la norme Hilbertienne dans H de $(\dots)$. Sz.-Nagy et Foias ont alors introduit la notion de fonction caractéristique associée à T, c'est-à-dire la fonction Θ_T définie par

$$\begin{array}{rcll}\Theta_T : & \mathbb{D} & \to & \mathcal{L}(E,E_*) \\ & \lambda & \mapsto & \Theta_T(\lambda) := [-T+\lambda D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}D_T]_{|E}\,.\end{array}$$

où $\mathcal{L}(E,E_*)$ désigne l'algèbre des opérateurs linéaires bornés de E dans E_*. Comme T est $C_{.0}$, Θ_T est un fonction intérieure, c'est-à-dire que

$$\Theta_T(\zeta) := \lim_{\substack{r\to 1\\ <}} \Theta_T(r\zeta)$$

est une isométrie, pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. De plus, la théorie de Sz.-Nagy et Foias [66] permet d'affirmer que la contraction T est unitairement équivalente à son opérateur modèle M_{Θ_T} défini sur $K_{\Theta_T} := H^2(E_*) \ominus \Theta_T H^2(E)$ par

$$M_{\Theta_T} f := P_{\Theta_T}(zf)\,, \quad f \in K_{\Theta_T}\,,$$

où

$$H^2(X) := \left\{ f\,:\, \mathbb{D} \longrightarrow X \text{ analytique} : \, \|f\|_2^2 := \sup_{0\leqslant r<1} \int_{\mathbb{T}} \|f(r\zeta)\|_X^2\, dm(\zeta) < \ +\ \infty \right\}\,,$$

et P_{Θ_T} est la projection orthogonale sur K_{Θ_T}. Ce modèle s'est avéré fort utile dans l'étude des contractions complètement non unitaires. La théorie spectrale de T peut s'exprimer dans le langage de son modèle M_{Θ_T} et dépend beaucoup de la géométrie des noyaux reproduisants de K_{Θ_T}, c'est-à-dire de la fonction k_{Θ_T},

$$k_{\Theta_T}(z,\lambda) = \frac{1-\Theta_T(z)\Theta_T(\lambda)^*}{1-\overline{\lambda} z}\,, \qquad z,\,\lambda \in \mathbb{D}\,,$$

satisfaisant

$$\langle f(\lambda), e\rangle = \langle f, k_{\Theta_T}(.,\lambda)e\rangle_{H^2(E)}\,,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $e \in E$ et $f \in K_{\Theta_T}$. En particulier, dans [34], S. Hruschev, N. Nikolski et B. Pavlov ont montré le résultat suivant qui souligne l'importance des propriétés géométriques des noyaux reproduisants dans la théorie spectrale de M_{Θ_T} et donc de T : dans le cas scalaire ($\dim E = \dim E_* = 1$), si $\Theta = SB$ est la décomposition de Θ en facteur intérieur singulier S et produit de Blaschke B associé à une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, alors la réunion des vecteurs propres de M_Θ et ceux de M_Θ^* forme une base inconditionnelle de K_Θ si et seulement si $(k_S(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ forme une base inconditionnelle de K_S et $\sup_{n\geqslant 1} |S(\lambda_n)| < 1$.

Nous allons maintenant donner plusieurs applications qui illustrent l'importance de toutes ces questions. Tout d'abord, le problème des exponentielles sur un intervalle fini apparaît dans les équations aux convolutions. Soit $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbb{R})$ une mesure complexe finie et à support compact, supp$\mu = [0, a]$ sur $\mathbb{R}$. Considérons l'équation

$$(0.2) \qquad (f * \mu)(s) := \int_0^a f(s-t)\, d\mu(t) = 0\,, \qquad f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})\,.$$

A cette équation, on associe l'équation caractéristique

$$\hat{\mu}(\lambda) := \int_0^a \exp(-i\lambda x)\, d\mu(x) = 0\,.$$

Dans ce cas, si on parvient à résoudre l'équation caractéristique et si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ sont les solutions de cette équation, il est facile de voir que les exponentielles $(\exp(i\lambda_n x))_{n\geqslant 1}$ constituent un système de solutions élémentaires de l'équation (0.2). Il se pose alors le problème de savoir si ce système est un système complet de solutions. Pour $a := 2\pi$ et $\mu := \delta_0 - \delta_{2\pi}$, on trouve $\lambda_n = n \in \mathbb{Z}$ et on retombe sur les problèmes de l'analyse harmonique classique.
La deuxième application concerne le problème de Sturm-Liouville qui consiste à étudier l'équation différentielle suivante :

$$(0.3) \qquad \begin{cases} -y''(x) = k^2\rho^2(x)y(x) \\ \text{et} \\ y'(0) = 0,\ y'(a) + iky(a) = 0\,. \end{cases}$$

Il existe une théorie basée sur les opérateurs modèles qui ramène l'étude du système de solutions $(y_k)_{k\in\sigma}$ de (0.3) dans l'espace à poids $L^2_\rho(0, a)$ à une étude d'un système d'exponentielles sur un intervalle fini (pour les liens existants entre le problème de Sturm-Liouville et l'étude des propriétés géométriques des noyaux reproduisants dans les espaces modèles, voir [34] ou [54]).

Nous donnons maintenant le critère évoqué ci-dessus et qui permet de résoudre le problème des bases inconditionnelles de noyaux reproduisants dans les espaces modèles, sous l'hypothèse que $\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| < 1$.

Théorème 0.1.1 (N. Nikolski, [52]) *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure de H^∞ telle que*

$$(0.4) \qquad \sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| < 1\,.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est une base inconditionnelle de* K_Θ.

(ii) *(a)* $\Lambda \in (C)$

et

(b) dist $(\Theta\overline{B}, H^\infty) < 1$ *et dist* $(\overline{\Theta}B, H^\infty) < 1$,

où B *est le produit de Blaschke associé à la suite* Λ,

$$B := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n} \,,$$

$b_{\lambda_n} := \dfrac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\dfrac{\lambda_n - z}{1-\overline{\lambda_n}z}$.

D'après le théorème de Nehari, la condition (b) est équivalente au fait que l'opérateur de Toeplitz $T_{\overline{\Theta}B}$ est inversible. Cependant, ce critère n'est pas entièrement satisfaisant dans le sens où la condition (b) est difficile à vérifier et à interpréter géométriquement. Dans le cas où $\Theta := \Theta_a$ (qui correspond aux systèmes d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ dans $L^2(0,a)$), il est facile de voir que la condition (0.4) est équivalente à

$$\inf_{n\geqslant 1} \Im m\, \mu_n > 0 \,. \tag{0.5}$$

Dans le cas des exponentielles, M. Minkin [51] a réussi à éliminer l'hypothèse (0.5) sur les fréquences.

La deuxième grande question abordée dans cette thèse concerne la complétude des familles de noyaux reproduisants dans les espaces modèles. En fait, comme pour la propriété de base inconditionnelle, il existe un lien très étroit entre la complétude d'un système d'exponentielles et la théorie des fonctions entières. En effet, par dualité, le système $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ est incomplet dans $L^p(-a,a)$, $1\leqslant p < +\infty$, si et seulement si il existe une fonction $\phi \in L^q(-a,a)$, $\phi \not\equiv 0$, telle que

$$\int_{-a}^{a} \exp(i\mu_n t)\phi(t)\,dt = 0\,, \qquad n\in\mathbb{Z}\,,$$

où q est l'exposant conjugué de p. Si l'on considère

$$f(z) := \int_{-a}^{a} \exp(izt)\phi(t)\,dt\,,$$

alors il est facile de voir que f est une fonction entière, $f \not\equiv 0$, de type exponentiel fini, bornée sur l'axe réel et qui s'annulle aux points μ_n, $n\in\mathbb{Z}$. Ainsi, l'étude de la complétude d'un système d'exponentielles se réduit à l'étude des zéros d'une certaine classe de fonctions entières. Cette remarque a donné lieu à de nombreux résultats de complétude. Citons, par exemple, le très joli théorème de N. Levinson. Pour cela, nous devons introduire une certaine distribution. Si $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}$, on notera par $n_{\mathcal{M}}(s)$, $s>0$, la fonction définie par

$$n_{\mathcal{M}}(s) := \text{card}\ \{\mu\in\mathcal{M}\ :\ |\mu|\leqslant s\}\,.$$

On a alors un critère suffisant de complétude

Théorème 0.1.2 (Levinson, [48]) *Soit* $1 < p \leqslant +\infty$ *et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ *tel que*

$$\int_1^t \frac{n_{\mathcal{M}}(s)}{s}\, ds > \frac{|I|}{\pi} t - \frac{1}{p} \log t - C\,,$$

pour une certaine constante $C > 0$ *et* $\forall t > 0$. *Alors la famille* $(\exp(i\mu x)\chi_I(x))_{\mu\in\mathcal{M}}$ *est complète dans* $L^p(I)$ *(faible∗ complète, si* $p = \infty$*).*

Signalons que, jusqu'à présent, le problème de trouver un critère géométrique qui s'exprime en terme d'une “densité” appropriée associée à la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ pour que la famille d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t)\chi_{(0,a)})_{n\in\mathbb{Z}}$ soit complète dans $L^2(0,a)$ reste ouvert. Les travaux les plus avancés sont peut-être ceux de A. Beurling et P. Malliavin (voir [8] et [9]). Si $M = (\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$, on définit le rayon de complétude $R(M)$ de la suite M par

$$R(M) := \sup\left\{ a \,/ (\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}} \text{ est complète dans } L^2(-a,a) \right\}.$$

Pour une suite Λ réelle, Beurling et Malliavin ont introduit une densité $\widetilde{D}_\Lambda$, appelée densité effective de la suite Λ, qui convient mieux que la densité maximum de Polya employée jusqu' alors, par N. Levinson notamment. Ils ont alors montré que

$$R(M) = \pi \widetilde{D}_{M'}\,,$$

où M' est la suite associée à M par

$$M' := \left\{ \mu'_k := \frac{1}{\Re e \frac{1}{\mu_k}} \;:\; \mu_k \in M \text{ et } \Re e \mu_k \neq 0 \right\}.$$

Outre que cette densité effective est difficile à calculer dans les applications, ce résultat est loin de clore la question dans le sens où on ne sait pas ce qui se passe sur $L^2(-R(M), R(M))$. Par conséquent, que ce soit pour le problème des bases inconditionnelles ou de la complétude, les lacunes existantes, dans les différents résultats visant à donner un critère caractérisant ces deux propriétés, ont relancé l'intérêt pour les problèmes de stabilité.

0.2 Questions principales de la thèse et résumé des résultats.

Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure de H^∞. On suppose que la famille $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complète ou forme une base inconditionnelle dans K_Θ. Le problème est de caractériser les perturbations $(k_\Theta(.,\lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ qui conservent les mêmes propriétés géométriques que la suite initiale. Comme nous l'avons déjà remarqué, ce problème a été initialement posé par R. Paley et N. Wiener pour le système trigonométrique $(\exp(int))_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $L^2(0,2\pi)$ et a été totalement résolu, dans le cas de perturbations réelles, par A. Ingham et M. Kadeč. Dans cette thèse, nous donnerons différents résultats de stabilité pour les noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ dans K_Θ, aussi bien pour la propriété de base inconditionnelle que pour celle de complétude.

Nous nous intéresserons également à deux autres questions liées au problème de complétude. La première concerne la notion de complétude de la biorthogonale. Nous avons déjà vu que si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite minimale et complète dans un espace de Hilbert H, on peut associer à chaque $x \in H$ sa série de Fourier formelle

$$\sum_{n\geqslant 1} \langle x, x'_n\rangle x_n\,,$$

où $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ est la famille biorthogonale à $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Il est important de pouvoir reconstituer x d'après ses coefficients de Fourier $(\langle x, x'_n\rangle)_{n\geqslant 1}$. La propriété la plus faible qui permet de le faire est celle de la complétude héréditaire. Rappelons que la famille $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est dite héréditairement complète (HC) si

$$x \in \operatorname{span}\{\langle x, x'_n\rangle x_n \,:\, n\geqslant 1\}\,, \qquad \forall x \in H\,.$$

Il est facile de vérifier que cette propriété est équivalente à l'égalité suivante :

$$H = \operatorname{span}\{x_n,\, x'_k \,:\, n \in \sigma,\, k \in \mathbb{N}\setminus\sigma\}\,, \qquad \forall \sigma \subset \mathbb{N}\,. \tag{0.6}$$

D'autre part, on voit que l'application qui à x associe sa série de Fourier formelle $\sum_{n\geqslant 1}\langle x, x'_n\rangle x_n$ est injective si et seulement si $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans H. En outre, il est clair d'après (0.6) que si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est (HC) alors $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans H. La question de la complétude de la biorthogonale est donc très liée au problème de la complétude héréditaire. Dans le chapitre 3, nous nous proposons d'étudier cette question de complétude de la biorthogonale pour les noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ dans l'espace K_Θ.
Quand on s'intéresse à la question de la complétude d'une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans un espace de Banach $\mathcal{X}$, deux questions naturelles se posent :

1. <u>La complétude à défaut fini :</u>

$$\operatorname{span}\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\setminus\sigma\} = H\,, \qquad \forall \sigma \subset \mathbb{N},\ \operatorname{card}\sigma < +\infty\,.$$

2. <u>La complétude à défaut infini ou surcomplétude:</u>

$$\operatorname{span}\{x_{n_k} \,:\, k\geqslant 1\} = H\,, \qquad \text{pour toute sous-suite infinie } (x_{n_k})_{k\geqslant 1}\,.$$

Dans le chapitre 4 de cette thèse, nous nous proposons d'étudier cette question de surcomplétude pour les noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ de K_Θ.

Les résultats principaux de cette thèse s'organisent de la façon suivante. Les résultats du premier chapitre ont fait l'objet d'un article soumis au Journal of Operator Theory. Dans ce chapitre, nous traitons principalement de questions relatives au problème des bases inconditionnelles de noyaux reproduisants à valeurs vectorielles $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$. Notre but est de séparer, autant que possible, les influences des trois paramètres d'une telle famille, à savoir, la suite des fréquences $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, les directions spatiales e_n, $n\geqslant 1$, et la fonction intérieure Θ définissant l'espace modèle K_Θ. En particulier, si E est un espace de Hilbert de dimension finie, on prouve, dans le théorème 1.2.1, l'analogue vectoriel du critère 0.1.1, pour que la famille $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ soit une base de Riesz de K_Θ. En utilisant ce critère, nous donnons des généralisations au cas vectoriel de faits bien connus pour les noyaux reproduisants à valeurs scalaires. En particulier, nous prouvons le théorème suivant (voir théorème 1.2.6) :

Théorème A *Si*
$$\sup_{n\geqslant 1} r(\Theta(\lambda_n)) < 1$$
où $r(\Theta(\lambda_n))$ désigne le rayon spectral de l'opérateur $\Theta(\lambda_n)$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Il existe une suite de vecteurs unitaires $(e_n)_{n\geqslant 1}$ dans E telle que pour tout m entier suffisamment grand, la famille $(k_{\Theta^m}(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite basique inconditionnelle.*

2. *Λ est une réunion finie de suites de Carleson.*

Pour le cas particulier où $\Theta = \Theta_1^a = \exp\left(a\dfrac{z+1}{z-1}\right)$, cela se traduit, dans le langage des exponentielles, par l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. Il existe un réel $a > 0$ et une suite de vecteurs unitaires $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dans E telle que la famille d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t)u_n)_{n\geqslant 1}$ soit une suite basique inconditionnelle dans $L^2(0,a;E)$.

2. $M = (\mu_n)_{n\geqslant 1}$ est une réunion finie de suites de Carleson.

Ce fait peut être particulièrement utile dans les applications et notamment en théorie du contrôle. Nous montrons aussi, dans le théorème 1.2.10, que sous l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} \|\Theta(\lambda_n)^* e_n\| = 0$, les propriétés de base inconditionnelle et d'uniforme minimalité pour la famille $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ sont équivalentes (voir [11] pour la version scalaire de ce résultat). Dans ce chapitre, nous étudions également le problème de stabilité pour la propriété de base inconditionnelle. On établit le résultat suivant (voir théorème 1.3.2) :

Théorème B *Soient* $1 < p < +\infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ *et* Θ *est une fonction intérieure telle que* $\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| < 1$ *et telle que* $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *forme une base inconditionnelle dans* $K^p_\Theta = H^p \cap \Theta \overline{zH^p}$*. Alors il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $(k_\Theta(.,\lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ *forme une base inconditionnelle dans* K^p_Θ*, quel que soit* $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ *satisfaisant*

$$\sup_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| < \varepsilon\,.$$

Nous donnons, de plus, une estimation sur ε. Dans le théorème 1.3.5, nous établissons un analogue vectoriel de ce résultat de stabilité. Enfin, pour le cas des suites asymptotiquement orthogonales $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ (voir §1.3.2, pour la définition), nous donnons une borne numérique sur ε et comparons notre résultat avec celui du théorème de Kadets.

Dans le chapitre 2, nous étudions divers problèmes liés à la stabilité de la complétude pour les noyaux reproduisants de K^p_Θ, $1 < p < \infty$. Le résultat principal de ce chapitre est le suivant (voir théorème 2.3.1) :

Théorème C *Soient* $1 < p < \infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ *et* Θ *une fonction intérieure dans* H^∞ *telle que* $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *soit complète dans* K^p_Θ*. Soit* $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ *telle que*

$$\sum_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| < +\infty\,.$$

Alors $(k_\Theta(.,\lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ *est aussi complète dans* K^p_Θ*.*

Nous donnons plusieurs applications de ce résultat et notamment nous retrouvons comme corollaire le résultat suivant de R. Redheffer :

Corollaire 0.2.1 (R. Redheffer [59]) *Soient* $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$, $(\mu'_n)_{n\geqslant 1}$ *deux suites réelles telles que*

$$\sum_{n\geqslant 1} |\mu_n - \mu'_n| < \infty\,.$$

Si $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ *est complète dans* $L^2(-a,a)$ *alors* $(\exp(i\mu'_n t))_{n\geqslant 1}$ *l'est aussi.*

Nous étudions également le problème de stabilité si on perturbe la fonction intérieure Θ et nous obtenons le résultat suivant (voir théorème 2.4.2) : soient $1 < p < +\infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ_1 une fonction intérieure dans H^∞. Supposons que l'opérateur de Toeplitz $T_{\overline{\Theta_1 B_\Lambda}}$ soit Fredholm dans H^q, où q est l'exposant conjugué de p. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute suite $\Lambda' = (\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et toute fonction intérieure Θ_2 satisfaisant $\|B_\Lambda - B_{\Lambda'}\|_\infty < \varepsilon$ et $\|\Theta_1 - \Theta_2\|_\infty < \varepsilon$, on a

$$\mathrm{codim}_{K^p_{\Theta_1}}(\mathrm{span}\,\{k_{\Theta_1}(.,\lambda_n) : n\geqslant 1\}) = \mathrm{codim}_{K^p_{\Theta_2}}(\mathrm{span}\,\{k_{\Theta_2}(.,\lambda'_n) : n\geqslant 1\})\,.$$

Si B_Λ et $B_{\Lambda'}$ sont les transformées de Frostmann d'une même fonction intérieure alors on montre (voir théorème 2.4.7) que pour toute fonction intérieure Θ, on a

$$\operatorname{codim}_{K^p_\Theta} \left(\operatorname{span}\, \{k_\Theta(.,\lambda_n) : n \geqslant 1\}\right) = \operatorname{codim}_{K^p_\Theta} \left(\operatorname{span}\, \{k_\Theta(.,\lambda'_n) : n \geqslant 1\}\right) .$$

Dans le chapitre 3, nous étudions le problème de la complétude de la biorthogonale pour les noyaux reproduisants de K_Θ. Tout d'abord, nous donnons deux nouvelles preuves du résultat bien connu suivant (voir théorème 3.1.3) :
soit B un produit de Blaschke associé à une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$. Alors la famille biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est complète dans K_B.
Puis, dans le théorème 3.2.1, nous prouvons le résultat suivant pour les noyaux reproduisants de l'espace $K^+_\Theta := H^2_+ \ominus \Theta H^2_+$, sous l'hypothèse que $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que

$$\Theta'(x) := \lim_{\substack{z\to x \\ \Im m\, z>0}} \Theta'(z)$$

existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et, de plus,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\Theta'(x)| < +\infty .$$

Théorème D *Soit Θ une fonction intérieure dans H^∞_+ telle que $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $M = (\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}_+$ telle que $(k_\Theta(.,\mu_n))_{n\geqslant 1}$ est complète et minimale dans K^+_Θ. Alors, sa biorthogonale, $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$, est aussi complète dans K^+_Θ.*

Dans le cas où $\inf_{n\geqslant 1} \Im m \mu_n > 0$, ce résultat nous permet de retrouver celui de Young obtenu pour les systèmes d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$.

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons au problème de la surcomplétude. Après avoir présenté quelques résultats généraux, nous donnons une condition suffisante et deux conditions nécessaires pour que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ soit surcomplète dans K^p_Θ, $1 < p < +\infty$ (théorème 4.2.8). Puis dans le cas où $\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| < 1$, nous montrons, dans le théorème 4.2.10, que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est surcomplète dans K^p_Θ si et seulement si

$$\inf_{n\geqslant 1} (1 - |\lambda_n|^2) > 0 . \tag{0.7}$$

Dans deux cas particuliers (si Θ est un produit de Blaschke dont les zéros vérifient la condition de Stolz ou si Θ est une fonction intérieure singulière dont la mesure singulière associée est à support fini), nous montrons que la condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ soit surcomplète dans K_Θ est

$$\inf_{n\geqslant 1} \operatorname{dist}\, (\lambda_n, \sigma(\Theta)) > 0 ,$$

(voir théorèmes 4.2.14 et 4.2.15).

Pour le confort de la lecture, certaines démonstrations techniques de résultats auxiliaires sont reportées en appendice .

0.3 Quelques notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :
$\mathbb{C}$: le plan complexe,
$\mathbb{C}_+$: le demi-plan supérieur, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \Im m z > 0\}$,
$\mathbb{D}$: le disque unité, $\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, |\lambda| < 1\}$,
$\mathbb{T}$: le cercle unité, $\mathbb{T} := \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, |\lambda| = 1\}$,
m : la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle $\mathbb{T}$.
Si $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, alors q sera l'exposant conjugué

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke de $\mathbb{D}$, on notera par B_Λ le produit de Blaschke correspondant défini par

$$B_\Lambda := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}\,,$$

où $b_{\lambda_n} := \dfrac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\dfrac{\lambda_n - z}{1 - \overline{\lambda_n} z}$.
Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, $r > 0$, $\Omega(\lambda, r)$: le disque pseudo-hyperbolique de centre λ et de rayon r, $\Omega(\lambda, r) := \{z \in \mathbb{D} \,:\, |b_\lambda(z)| < r\}$.
Pour des suites $M = (\mu_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathbb{C}_+$, on notera par B_M^+ et $b_{\mu_n}^+$ le produit de Blaschke et les facteurs de Blaschke élémentaires correspondants, c'est-à-dire

$$B_M^+ := \prod_{n\geqslant 1} b_{\mu_n}^+\,,$$

où $b_{\mu_n}^+ := \varepsilon_n \dfrac{z - \mu_n}{z - \overline{\mu_n}}$, et $\varepsilon_n \in \mathbb{C}$ est un facteur de normalisation tel que $|\varepsilon_n| = 1$, $\varepsilon_n \dfrac{i - \mu_n}{i - \overline{\mu_n}} > 0$, $n \geqslant 1$.
E désignera toujours un espace de Hilbert complexe. Le symbole P_+ (respectivement P_-) désignera la projection orthogonale de Riesz de $L^2(E)$ sur $H^2(E)$ (respectivement sur $L^2(E) \ominus H^2(E)$). L'espace des opérateurs linéaires, bornés agissant de E dans E sera noté par $\mathcal{L}(E)$. On écrira
$L^\infty(\mathcal{L}(E)) := \{\, f \,:\, \mathbb{T} \to \mathcal{L}(E)$ tel que f est mesurable et bornée$\}$.
et
$H^\infty(\mathcal{L}(E)) := \{\, f \,:\, \mathbb{D} \to \mathcal{L}(E)$ tel que f est analytique et bornée$\}$.

Une fonction $\Theta \in H^\infty(\mathcal{L}(E))$ sera dite intérieure si l'opérateur $\Theta(\zeta)$ est une isométrie pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$. Pour une fonction $\varphi \in L^\infty(\mathcal{L}(E))$, le symbole H_φ désignera l'opérateur de Hankel défini sur $H^2(E)$ par

$$H_\varphi f := P_-(\varphi f)\,,$$

et T_φ désignera l'opérateur de Toeplitz défini sur $H^2(E)$ par

$$T_\varphi f := P_+(\varphi f)\,.$$

Pour une fonction intérieure scalaire Θ, nous noterons par K^p_Θ le sous espace de H^p invariant par S^* défini par

$$K^p_\Theta := H^p \cap \Theta\overline{H^p_0}\,,$$

où $H^p_0 := zH^p$. Pour $p = 2$, il est facile de voir que cette définition coïncide avec celle donnée initialement.
Enfin, si (a_n) et (b_n) sont deux suites réelles, on écrira $(a_n) \asymp (b_n)$ s'il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que

$$ca_n \leqslant b_n \leqslant Ca_n \quad \forall n \geqslant 1\,.$$

Chapitre 1

Bases de noyaux reproduisants dans les espaces modèles

1.1 Introduction.

Ce chapitre est consacré aux propriétés géométriques des suites de noyaux reproduisants dans les espaces modèles et plus particulièrement à des questions relatives aux bases inconditionnelles. Rappelons le cadre de notre étude. Si on considère T une contraction complètement non unitaire et $C_{.0}$ sur un espace de Hilbert H, alors, d'après la théorie développée par B. Sz-Nagy et C. Foias [66], T est unitairement équivalente à son modèle canonique M_Θ défini par

$$M_\Theta f := P_\Theta(zf), \;\; f \in K_\Theta \,.$$

Ici K_Θ est l'espace modèle

$$K_\Theta := H^2(E) \ominus \Theta H^2(E_*)\,,$$

E et E_* sont deux espaces de Hilbert auxiliaires, $H^2(E)$ (respectivement $H^2(E_*)$) désigne l'espace de Hardy du disque unité $\mathbb{D}$, à valeurs vectorielles dans E (respectivement dans E_*), Θ est la fonction caractéristique de T et P_Θ est la projection orthogonale sur K_Θ (voir introduction générale et [66] pour toutes les définitions et détails). La théorie spectrale de M_Θ dans le langage de la fonction caractéristique Θ (voir [66], [53] ou [56]) dépend de la géométrie des noyaux reproduisants de K_Θ, c'est-à-dire de la fonction k_Θ,

$$k_\Theta(z,\lambda) := \frac{1-\Theta(z)\Theta(\lambda)^*}{1-\overline{\lambda}z} \;\; z,\lambda \in \mathbb{D}\,,$$

satisfaisant

$$\langle f(\lambda), e\rangle = \langle f, k_\Theta(.,\lambda)e\rangle_{H^2(E)}\,,$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{D}$, $e \in E$ et $f \in K_\Theta$. De plus, pour certaines approches, les noyaux $k_\Theta(z,\lambda)$ et d'autres similaires, sont le point de départ de la théorie modèle et de ses applications, spécialement aux problèmes d'interpolation; voir [13], [5] et [26]. Notre but dans ce chapitre est d'étendre au cas vectoriel certains faits basiques bien connus pour les noyaux reproduisants à valeurs scalaires ($E = \mathbb{C}$, voir [53] et [34]). Rappelons, d'autre part, que toute fonction intérieure scalaire ϑ peut se factoriser sous la forme $\vartheta = SB$, où S est le facteur intérieur singulier de ϑ,

$$S(z) = \exp\left(- \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta) \right),$$

la mesure $d\mu$ étant positive et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue dm, et B est le produit de Blaschke correspondant

$$B = \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}\,,$$

$b_{\lambda_n} := \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\frac{\lambda_n - z}{1-\overline{\lambda_n}z}$. Il est connu (voir [53]) que $\frac{\vartheta}{z-\lambda_n} \in K_\vartheta$ sont les vecteurs propres de M_ϑ, et $k_{\lambda_n} := \frac{1}{1-\overline{\lambda_n}z} \in K_\vartheta$ ceux de l'opérateur adjoint M_ϑ^* :

$$M_\vartheta \left(\frac{\vartheta}{z-\lambda_n} \right) = \lambda_n \frac{\vartheta}{z-\lambda_n}\,, \quad M_\vartheta^* k_{\lambda_n} = \overline{\lambda_n} k_{\lambda_n}\,.$$

De plus, il est prouvé dans [34] que le système $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1} \bigcup \left(\frac{\vartheta}{z-\lambda_n} \right)_{n\geqslant 1}$ forme une base inconditionnelle dans K_ϑ si et seulement si $\sup\limits_{n\geqslant 1} |S(\lambda_n)| < 1$ et $(k_S(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ forme une base de la même qualité dans K_S. La dernière propriété est, par conséquent, importante dans certaines applications comme, par exemple, en théorie des cordes vibrantes, voir [34] et [54] pour les détails.

La seconde motivation provient de la théorie du contrôle et du signal. Dans le cas particulier où $\Theta = \Theta_a := \exp(a\frac{z+1}{z-1})$, la famille de noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda))_{\lambda\in\mathbb{D}}$ de l'espace modèle K_Θ est l'image par une transformation unitaire de la famille d'exponentielles $(\exp(-i\overline{\mu}\omega)\chi_{(0,a)})_{\mathrm{Im}\ (\mu)>0}$ dans $L^2(0,a)$, où $\mu := i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ (voir introduction générale). La propriété pour une famille d'exponentielles (et donc pour les noyaux reproduisants k_{Θ_a}) d'être une base de Riesz est importante en théorie du contrôle. En effet, sous certaines hypothèses supplémentaires, la contrôlabilité d'un système dynamique

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)\,,\ t\geqslant 0\,, \qquad x(0) = x_0\,,$$

dépend des propriétés géométriques du système d'exponentielles $(\exp(-\overline{\mu}_n t)B^*\psi_n)_{n\geqslant 1}$, où $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite de vecteurs propres de A^*, associée à la suite de valeurs propres $(\overline{\mu}_n)_{n\geqslant 1}$. Pour plus de détails sur les relations entre les problèmes de contrôlabilité et la géométrie des familles d'exponentielles, nous renvoyons le lecteur à [2] et [55].

La troisième raison pour étudier les propriétés géométriques des suites de noyaux reproduisants est juste d'avoir une meilleure compréhension des exponentielles, $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$, qui apparaissent fréquemment, par exemple, dans l'analyse des équations aux convolutions (voir par exemple [34] et [73]).

Pour étudier cette propriété de bases de Riesz pour les familles $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ dans les espaces modèles scalaires K_Θ, S.V. Hruschev, N.K. Nikolski et B.S. Pavlov ont proposé dans [34] une nouvelle méthode (voir aussi [53]). Ils ont donné un critère qui fait intervenir la condition de Carleson et l'inversibilité d'un certain opérateur de Toeplitz (voir théorème 0.1.1). Dans la section 1.2, en utilisant la méthode opératorielle initiée par ces trois auteurs, nous donnons des généralisations vectorielles de plusieurs de leur résultats.

La section 1.3 concerne les propriétés de stabilité des bases de noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ sous certaines perturbations des pôles λ_n. Une motivation pour étudier ces propriétés de stabilité est que le critère, mentionné ci-dessus, implique certaines propriétés de la famille donnée $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ qui sont difficiles à vérifier. De plus, dans beaucoup de cas, la famille donnée est une petite perturbation d'une autre famille $(k_\Theta(.,\lambda'_n)e'_n)_{n\geqslant 1}$ qu'on sait, par ailleurs, être une base de Riesz. Cela donne donc lieu au problème de stabilité dont on trouvera la formulation exacte dans la section 1.3. Sommairement, étant donné une base de Riesz $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ dans K_Θ, le problème est de caractériser les perturbations de $(k_\Theta(.,\lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ qui conservent la propriété de base inconditionnelle. En fait, ce problème a été initialement posé par R. E. A. C. Paley and N. Wiener pour la base orthonormale $(\exp(int),\, n\in\mathbb{Z})$ dans $L^2(0,2\pi)$. Une condition suffisante pour une telle stabilité a été donnée dans [57]. Pour ce cas, le problème de l'uniforme stabilité (voir section 1.3) a été entièrement résolu par A. Ingham et M. Kadeč (voir [38] and [36]). En 1990, A. Avdonin et I. Joo ont donné une condition suffisante de stabilité pour une famille générale d'exponentielles. Dans la section 1.3, nous donnons une généralisation de ce résultat pour les noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$.

1.2 Bases inconditionnelles de noyaux reproduisants.

1.2.1 Quelques faits bien connus

Rappelons quelques faits standarts concernant les suites de vecteurs et de sous espaces dans un espace de Banach. Soit $(K_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de sous espaces d'un espace de Banach $\mathcal{X}$. Cette suite est dite *minimale* (respectivement *uniformément* *minimale*) si, pour tout n, les opérateurs

$$\mathcal{P}_n x = \mathcal{P}_n\left(\sum_j x_j\right) = x_n\,, \tag{1.1}$$

définis sur l'ensemble des sommes finies $x = \sum_j x_j$, $(x_j \in K_j)$, sont continus (respectivement uniformément bornés, i.e. $\sup_n \|\mathcal{P}_n\| < \infty$). Pour le cas unidimensionnel, $K_n = \mathbb{C}\cdot e_n$, $e_n \in \mathcal{X}$, on a $\mathcal{P}_n = \langle .,\phi_n^*\rangle e_n$, où $(\phi_n^*)_{n\geqslant 1}$ est une suite biorthogonale associée à $(e_n)_{n\geqslant 1}$, c'est-à-dire une suite de formes linéaires continues sur $\mathcal{X}$ telles que

$$\langle e_n, \phi_k^*\rangle = \delta_{nk}\,.$$

Donc la définition ci-dessus est équivalente à la définition usuelle. Une suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est appelée *base inconditionnelle* de $\mathcal{X}$ si, pour tout $x \in \mathcal{X}$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\mathcal{P}_n x$ converge inconditionnellement vers x. Nous dirons que $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est une *suite basique inconditionnelle* si c'est une base inconditionnelle de son enveloppe linéaire fermée. Il est bien connu (voir par exemple [53]) que $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite basique inconditionnelle si et seulement si elle est uniformément minimale et

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{F}} \|\mathcal{P}_\sigma\| < \infty\,,$$

où $\mathcal{F} := \{\sigma \subset \mathbb{N} \,:\, \sigma \text{ fini}\}$ et $\mathcal{P}_\sigma := \sum_{n\in\sigma}\mathcal{P}_n$. Soit H un espace de Hilbert, $(K_n)_{n\geqslant 1}$ une famille de sous espaces, minimale et complète dans H et telle que sa famille de projections spectrales $(\mathcal{P}_n)_{n\geqslant 1}$ soit complète dans H, alors, d'après le théorème de Köthe-Toeplitz, $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle si et seulement si elle est une *base de Riesz*, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{1}{c}\sum_j \|x_j\|^2 \leqslant \left\|\sum_j x_j\right\|^2 \leqslant c\sum_j \|x_j\|^2\,,$$

pour toute famille finie $x_j \in K_j$, $j\geqslant 1$. La dernière propriété est clairement équivalente à l'existence d'un isomorphisme V défini sur Span $(K_j \,:\, j\geqslant 1)$ tel que les sous espaces VK_n, $n\geqslant 1$, soient deux à deux orthogonaux. Notons que les définitions ci-dessus sont bien sûr valables pour des suites finies $(K_j)_{j\geqslant 1}$, et en particulier, pour une paire de sous espaces K_1, K_2 d'un espace de Hilbert H. Alors *l'angle*, $\alpha(K_1, K_2)$, entre K_1 et K_2 peut être défini par les conditions suivantes :

$$\alpha(K_1, K_2) \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \cos(\alpha(K_1, K_2)) = \sup_{\substack{x\in K_1,\, y\in K_2\\ \|x\|=1,\, \|y\|=1}} |\langle x, y\rangle|, .$$

Il suit de la définition que

$$\cos(\alpha(K_1, K_2)) = \|P_{K_1}P_{K_2}\|\,,$$
$$\sin(\alpha(K_1, K_2)) = \|\mathcal{P}_1\|^{-1}\,,$$

où P_{K_i} sont les projections orthogonales correspondantes, $i = 1, 2$, et $\mathcal{P}_1$ est définie dans (1.1).

Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, Θ une fonction intérieure dans $H^\infty(\mathcal{L}(E))$ et $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de vecteurs unitaires de E. Dans cette section, on cherche une condition nécessaire et suffisante portant sur Θ, Λ et $(e_n)_{n\geqslant 1}$ pour que la famille $(k_\Theta(., \lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ soit une suite basique inconditionnelle dans K_Θ. Rappelons que, dans le cas scalaire $\dim E = 1$, le critère suivant a été prouvé dans [34] : si $\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| < 1$, alors $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite basique inconditionnelle dans K_Θ si et seulement si $\Lambda \in (C)$ et $P_\Theta|K_B$ est un isomorphisme sur son image (ce qui est aussi équivalent au fait que l'opérateur $T_{\overline{B}\Theta}$ est inversible à gauche). Ici $\Lambda \in (C)$ signifie que $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ satisfait la condition de Carleson :

$$\delta(\Lambda) := \inf_{n\geqslant 1} |B_{\lambda_n}(\lambda_n)| > 0\,,$$

où $B_{\lambda_n} := \frac{B}{b_{\lambda_n}}$. La constante $\delta(\Lambda)$ est appelée *constante de Carleson* de la suite Λ.

1.2.2 Quelques propriétés géométriques des noyaux reproduisants à valeurs vectorielles.

Ici, nous faisons une liste de propriétés générales pour les noyaux reproduisants à valeurs vectorielles. (Aussi, dans ce qui suit, **P** est utilisé pour "propriété").

(P 1.1) *Si E est un espace de Hilbert de dimension finie, alors $(k_{\lambda_n}e_n)_{n\geqslant 1}$ est minimale dans $H^2(E)$ si et seulement si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke* (voir par exemple [2]).

(P 1.2) *Si $(k_\Theta(., \lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ est minimale, alors $(k_{\lambda_n}e_n)_{n\geqslant 1}$ est aussi minimale. Plus généralement, si T est un opérateur borné dans E et si $(Tx_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille minimale alors $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est aussi minimale et sa biorthogonale est donnée par $(T^*\psi_n)_{n\geqslant 1}$, où $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ est la biorthogonale associée à $(Tx_n)_{n\geqslant 1}$.* $\square$

Pour obtenir un résultat similaire pour l'uniforme minimalité, nous avons besoin de la propriété suivante.

(P 1.3) *Soient $\Lambda \subset \mathbb{D}$, $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de vecteurs unitaires de E. Alors*

$$\|k_\Theta(., \lambda)e_\lambda\| \asymp \|k_\lambda e_\lambda\| \Longleftrightarrow \sup_{\lambda\in\Lambda} \|\Theta(\lambda)^* e_\lambda\| < 1$$

En effet, puisque

$$k_\Theta(\cdot, \lambda)e_\lambda = (1 - \overline{\lambda}\cdot)^{-1}(1 - \Theta\Theta(\lambda)^*)e_\lambda\,,$$

nous avons

$$\|k_\Theta(.,\lambda)e_\lambda\|^2 = \frac{1-\|\Theta(\lambda)^*e_\lambda\|^2}{1-|\lambda|^2}\,, \qquad \|k_\lambda e_\lambda\|^2 = \frac{1}{1-|\lambda|^2}\,,$$

et le résultat suit. □

La propriété suivante est une conséquence immédiate de (P 1.3) et d'un lemme de S. Hruschev et N. Nikolski (voir [54], lemme 120, page 173).

(P 1.4) *Si* $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ *est uniformément minimale et*

$$\sup_{n\geqslant 1}\|\Theta(\lambda_n)^*e_n\| < 1\,,$$

alors $(k_{\lambda_n}e_n)_{n\geqslant 1}$ *est aussi uniformément minimale.* □

(P 1.5) *Si* $(e_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite relativement compacte de* E*, alors* $(k_{\lambda_n}e_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite basique inconditionnelle si et seulement si elle est uniformément minimale* (voir [68]). □

(P 1.6) *Si dim* $E = N < \infty$*, et* $(k_{\lambda_n}e_n)_{n\geqslant 1}$ *est uniformément minimale alors* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *est la réunion d'au plus* N*-suites de Carleson. Dans ce cas, nous dirons que* Λ *est* N*-Carleson* (voir, par exemple, le corollaire 2 page 164 dans [53]). □

Pour les suites N-Carleson, une condition nécessaire et suffisante a été trouvée, par A. Ivanov [2], pour que $(k_{\lambda_n}e_n)_{n\geqslant 1}$ forme une suite basique inconditionnelle. Pour établir cette condition, ((P 1.7) ci-dessous), nous posons

$$G(\Lambda,r) := \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega(\lambda,r)\,,$$

où $\Omega(\lambda,r)=\{z\,:\,|b_\lambda(z)|<r\}$ est le disque pseudo-hyperbolique de rayon r et de centre λ. Notons par $G_m(\Lambda,r)$, $m=1,2,\ldots$, les composantes connexes de l'ensemble $G(\Lambda,r)$ (voir Figure 1.1) et écrivons

$$\Lambda_m(r) := \Lambda\bigcap G_m(\Lambda,r)\,.$$

Pour une suite $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans E et pour $\Lambda'\subset\Lambda$, nous posons

$$\mathcal{E}(\Lambda') := \text{ Span }(e_\mu\,:\,\mu\in\Lambda'\,)\,.$$

$G_1(r)$

$\mathbb{D}$

$G_m(r)$

$G_2(r)$

Figure 1.1: Décomposition de $G(r)$ en composantes connexes

(P 1.7) *Supposons que* $\Lambda := (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *soit* N*-Carleson. Alors* $(k_{\lambda_n} e_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite basique inconditionnelle si et seulement si il existe* $r > 0$ *tel que*

$$\inf_{m\geqslant 1} \min_{\lambda\in\Lambda_m(r)} \alpha\Big(e_\lambda, \mathcal{E}(\Lambda_m(r) \setminus \{\lambda\})\Big) > 0\,.$$

Pour la preuve, voir [2]. □

Maintenant, nous établissons certains faits concernant les relations existant entre les propriétés des familles à valeurs scalaires et celles à valeurs vectorielles. L'idée est que les propriétés géométriques des familles scalaires $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ sont "plus fortes" que celles des familles à valeurs vectorielles $(k_{\lambda_n} e_n)_{n\geqslant 1}$. Pour préciser cette idée, certaines propriétés concernant les produits tensoriels d'espaces de Hilbert seront utiles. Soient E et H deux espaces de Hilbert séparables. Nous notons par $H \otimes E$ la complétion du produit tensoriel algébrique par rapport à la norme de Hilbert-Schmidt $\|.\|_{HS}$, définie pour une somme finie $A := \sum_k x_k \otimes y_k \in H \otimes E$ par

$$\|A\|_{HS} := \left(\sum_{n\geqslant 1} \|Ae_n\|^2\right)^{1/2}\,,$$

où $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base orthonormale de H. Ici nous avons identifié A avec l'opérateur $A : H \longrightarrow E$ défini, pour $h \in H$, par

$$Ah = \sum_k \langle h, x_k\rangle y_k\,,$$

où $\langle ., .\rangle$ désigne un produit bilinéaire sur $H \times H$. En utilisant ces définitions, on peut aisément identifier $L^2 \otimes E$ avec $L^2(E)$ par

$$\sum_k x_k \otimes y_k \longrightarrow \sum_k x_k(\zeta) y_k\ ,\ \zeta \in \mathbb{T}$$

où $x_k \in L^2(\mathbb{T})$, $y_k \in E$.

En effet, soit A une somme finie, $A = \sum_k x_k \otimes y_k \in L^2 \otimes E$ et soit $(b_j)_j$ une base orthonormale de E. Alors, nous avons

$$\begin{aligned}
\|A\|_{HS}^2 &= \sum_{n\geqslant 1}\sum_{j\geqslant 1} |\langle Ae_n, b_j\rangle|^2 = \sum_{n\geqslant 1}\sum_{j\geqslant 1}\left|\sum_k \langle e_n, x_k\rangle\langle y_k, b_j\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{j\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\left|\langle e_n, \sum_k \langle y_k, b_j\rangle x_k\rangle\right|^2 = \sum_{j\geqslant 1}\left\|\sum_k \langle y_k, b_j\rangle x_k\right\|_{L^2}^2 \\
&= \sum_{j\geqslant 1}\int_{\mathbb{T}}\left|\sum_k \langle y_k, b_j\rangle x_k(\zeta)\right|^2 dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}}\sum_{j\geqslant 1}\left|\langle \sum_k x_k(\zeta) y_k, b_j\rangle\right|^2 dm(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}}\left\|\sum_k x_k(\zeta) y_k\right\|_E^2 dm(\zeta) = \left\|\sum_k x_k(.) y_k\right\|_{L^2(E)}^2 .
\end{aligned}$$

La propriété suivante est bien connue :

(P 1.8) *Soit $V \in \mathcal{L}(H)$ et $U \in \mathcal{L}(E)$. Alors $V \otimes U \ : \ H \otimes E \longrightarrow H \otimes E$ défini par*

$$(V \otimes U)(\sum_k x_k \otimes y_k) := \sum_k V x_k \otimes U y_k \,,$$

est un opérateur borné, et nous avons $\|V \otimes U\| \leqslant \|V\|\|U\|$.

□

(P 1.9) *Supposons qu'une famille $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans H est soit minimale, soit uniformément minimale, soit une suite basique inconditionnelle. Alors*

(1) *la famille $(x_n \otimes y_n)_{n\geqslant 1}$ jouit des mêmes propriétés, pour tout $y_n \in E$, $y_n \neq 0$;*

(2) *la famille de sous espaces $(x_n \otimes E)_{n\geqslant 1}$ a également les mêmes propriétés que $(x_n)_{n\geqslant 1}$;*

(3) *si $(y_k)_{k\geqslant 1} \subset E$ possède les mêmes propriétés que $(x_n)_{n\geqslant 1}$, alors la famille doublement indexée $(x_n \otimes y_k)_{n,k\geqslant 1}$ aussi.*

En effet, (1) est une conséquence de (2). Pour vérifier (2), on écrit simplement les projections spectrales $\mathcal{E}_\sigma$ correspondant à $(x_n \otimes E)_{n\geqslant 1}$ en fonction des projections $\mathcal{P}_\sigma$ associées à la famille $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Clairement, on a $\mathcal{E}_\sigma = \mathcal{P}_\sigma \otimes I$, pour tout sous ensemble fini $\sigma \subset \mathbb{N}$. Puisque $\|\mathcal{E}_\sigma\| \leqslant \|\mathcal{P}_\sigma\|$ (voir (P 1.8)), l'assertion (2) provient des remarques faites en début de section et des propriétés correspondantes pour $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour vérifier (3), on observe, tout d'abord, que $\mathcal{E}_k = \mathcal{P}_k \otimes \mathcal{Q}_k$, où $\mathcal{Q}_k$ désigne la projection coordonnée associée à la suite $(y_k)_{k\geqslant 1}$, i.e. $\mathcal{Q}_k = \langle ., \phi_k\rangle y_k$, $(\phi_k)_{k\geqslant 1} \subset E$

étant la suite biorthogonale. Comme $\|\mathcal{E}_k\|\leqslant\|\mathcal{P}_k\|\|\mathcal{Q}_k\|$ pour tout k, les questions relatives à la minimalité et à l'uniforme minimalité se déduisent aisément. Dans le cas où $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_k)_{k\geqslant 1}$ sont des suites basiques inconditionnelles, on considère les deux isomorphismes V and U qui transforment ces deux suites en suites orthogonales. Clairement, $(Vx_n \otimes Uy_k)_{n,k\geqslant 1}$ est une famille orthogonale dans $H\otimes E$ et $V\otimes U$ est un isomorphisme de $\text{span}\{x_n : n\geqslant 1\}\otimes\text{span}\{y_k : k\geqslant 1\}$. Par conséquent, $(x_n \otimes y_k)_{n,k\geqslant 1}$ est une suite basique inconditionnelle. $\square$

(P 1.10) *Soit $(K_n)_{n\geqslant 1}$ une famille de sous espaces de H ayant l'une des propriétés suivantes : minimalité, uniforme minimalité, base de Riesz. Alors la famille de sous espaces $(K_n \otimes E)_{n\geqslant 1}$ a les mêmes propriétés dans $H \otimes E$.*

La preuve est la même que pour (P 1.9)(2) car $\mathcal{E}_\sigma = \mathcal{P}_\sigma \otimes I$ est la projection coordonnée correspondante. $\square$

(P 1.11) *Soit $\dim E = N < \infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe une famille de vecteurs $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans E, $\|e_\lambda\| = 1$ telle que $\mathbb{X} := (k_\lambda e_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ soit une base de Riesz.*

(2) *Λ est N-Carleson.*

En effet, (1) $\Longrightarrow$ (2) provient immédiatement de (P 1.6).

Pour prouver (2) $\Longrightarrow$ (1), nous posons $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i\,,\quad \Lambda_i \in (C)\,,$ et écrivons $\Lambda_i := \{\lambda_{n,i} : n\geqslant 1\}$. Considérons $(e_1, e_2, \ldots, e_N)$ une base orthonormale de E et définissons pour $\lambda \in \Lambda$

$$e_\lambda := e_i\,,\ \text{si}\ \lambda \in \Lambda_i\,.$$

Comme $\Lambda_i \in (C)$, la famille $(k_{\lambda_{n,i}})_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz et (P 1.9) implique que $(k_{\lambda_{n,i}} \otimes e_i = k_{\lambda_{n,i}} e_i : n\geqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant N)$ est aussi une base de Riesz. $\square$

1.2.3 Quelques généralisations vectorielles.

Dans ce paragraphe, en utilisant une approche opératorielle, on obtient le critère suivant pour que la famille $(k_\Theta(., \lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ soit une suite basique inconditionnelle.

Théorème 1.2.1 *Soient $\Lambda \subset \mathbb{D}$, $N = \dim E < \infty$ et Θ une fonction intérieure dans $H^\infty(\mathcal{L}(E))$. Soit $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de vecteurs de E, $\|e_\lambda\| = 1$, telle que*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|\Theta(\lambda)^* e_\lambda\| < 1\,.$$

Notons par B la fonction intérieure de $H^\infty(\mathcal{L}(E))$ satisfaisant

$$K_B = \ Span\ \{k_\lambda e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\,.$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $(k_\Theta(.,\lambda)e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *est une suite basique inconditionnelle.*

(2)

$$\begin{cases} (i)\ \Lambda \textit{ est } N\textit{-Carleson}\,, \\ (ii)\ \textit{il existe } r\in\mathbb{R} \textit{ tel que } \inf\limits_{m\geqslant 1}\min\limits_{\lambda\in\Lambda_m(r)} \alpha\left(e_\lambda, \mathcal{E}(\Lambda_m(r)\setminus\{\lambda\})\right) > 0\,, \\ (iii)\ T_{B^*\Theta} \textit{ est inversible à gauche dans } H^2(E)\,. \end{cases}$$

On considère aussi le problème d'un réarrangement possible d'une famille $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ en base de sous espaces. Finalement, sous l'hypothèse supplémentaire que $\lim_{n\to\infty}\|\Theta(\lambda_n)^*e_n\| = 0$, on montre l'équivalence entre les propriétés d'uniforme minimalité et de suite basique inconditionnelle.

Pour prouver le théorème 1.2.1, nous avons besoin de généraliser certains faits bien connus dans le cas scalaire (voir par exemple [53]). Les preuves sont les mêmes que dans le cas scalaire et nous les reportons à l'appendice.

Lemme 1.2.2 *Soient Θ et B deux fonctions intérieures à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$P_\Theta|K_B$ est un isomorphisme sur son image;*
2. *dist$(B^*\Theta, H^\infty(\mathcal{L}(E))) < 1$;*
3. *$\|P_B\Theta\| < 1$;*
4. *$T_{B^*\Theta}$ est inversible à gauche dans $H^2(E)$.*

Preuve (du théorème 1.2.1) (1) $\Longrightarrow$ (2) : puisque $(k_\Theta(.,\lambda)e_\lambda\ :\ \lambda\in\Lambda)$ est une suite basique inconditionnelle, elle est uniformément minimale et (P 1.4) implique que $\mathbb{X} = (k_\lambda e_\lambda\ :\ \lambda\in\Lambda)$ est aussi uniformément minimale. On déduit de (P 1.6) que Λ est N-Carleson et de (P 1.5) et (P 1.7) que la condition (ii) est satisfaite. Observons maintenant que l'opérateur $P_\Theta|K_B$ transforme la base de Riesz $\mathbb{X}$ en une base de Riesz $(k_\Theta(.,\lambda)e_\lambda\ :\ \lambda\in\Lambda)$ et par conséquent c'est un isomorphisme sur son image. Le lemme 1.2.2 entraîne alors que $T_{B^*\Theta}$ est inversible à gauche dans $H^2(E)$.
(2) $\Longrightarrow$ (1) : en utilisant (P 1.7), on déduit de (i) et (ii) que $\mathbb{X} = (k_\lambda e_\lambda\ :\ \lambda\in\Lambda)$ est une base de Riesz pour K_B. Le lemme 1.2.2 et (iii) implique que $P_\Theta|K_B$ est un isomorphisme sur son image et donc $P_\Theta\mathbb{X} = (k_\Theta(.,\lambda)e_\lambda\ :\ \lambda\in\Lambda)$ est une suite basique inconditionnelle. □

Remarque 1.2.3 En fait, pour prouver (2) $\Longrightarrow$ (1), nous n'avons pas utilisé les hypothèses $\dim E < \infty$ et

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|\Theta(\lambda)^*e_\lambda\| < 1\,.$$

Dans le cas scalaire, si une famille de sous espaces propres $(K_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'un opérateur modèle n'est pas une base, V. Vasyunin a proposé une méthode pour rassembler les sous espaces propres "suffisamment proches" de telle sorte que la nouvelle famille forme une base de Riesz (voir, par exemple, [53], Lecture IX, page 229-230). En utilisant une méthode similaire et (P 1.10), il est facile de généraliser ce résultat au cas vectoriel. De plus, si nous avons une base inconditionnelle de sous espaces $(K_{\Theta_n})_{n\geqslant 1}$ telle que dim $K_{\Theta_n}\leqslant k$, $\forall n\geqslant 1$, alors il est aussi possible de séparer cette famille en une union de k suites, chacune formant une suite basique inconditionnelle. Nous avons donc les deux résultats suivants.

Théorème 1.2.4 *Soient E un espace de Hilbert de dimension finie N, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une famille de vecteurs unitaires de E. Soit $\mathcal{B}$ une fonction intérieure de $H^\infty(\mathcal{L}(E))$ telle que*

$$K_{\mathcal{B}} := span\,\{k_{\lambda_n}e_n\,:\, n\geqslant 1\}\,.$$

Supposons que Λ est N-Carleson. Alors il existe un regroupement

$$K_{\Theta_n} := span\,\{k_{\lambda_i}e_i\,:\,\lambda_i\in\Lambda_n\}$$

telle que $\Lambda_n\subset\Lambda$, dim $K_{\Theta_n}\leqslant N$ et la famille $(K_{\Theta_n})_{n\geqslant 1}$ forme une base inconditionnelle de sous-espaces pour $K_{\mathcal{B}}$.

Preuve Comme Λ est N-Carleson, le théorème de Vasyunin (voir [53]) entraîne qu'il existe $\Lambda_n\subset\Lambda$, card $\Lambda_n\leqslant N$, $\Lambda = \bigcup_{n\geqslant 1}\Lambda_n$ et tel que

$$K_n^0 := \text{span}\,\{k_{\lambda_i}\,:\,\lambda_i\in\Lambda_n\}$$

forme une base inconditionnelle de sous-espaces pour K_B, où B est le produit de Blaschke associé à Λ. D'après (P 1.10), la famille $(K_n^0\otimes E)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de sous espaces pour $K_B\otimes E$. Considérons

$$K_{\Theta_n} := \text{span}\,\{k_{\lambda_i}e_i = k_{\lambda_i}\otimes e_i\,:\,\lambda_i\in\Lambda_n\}\subset K_n^0\otimes E\,.$$

Alors, il est clair que la famille $(K_{\Theta_n})_{n\geqslant 1}$ forme une base inconditionnelle de sous-espaces pour $K_{\mathcal{B}}$. □

On donne maintenant une "sorte" de réciproque de ce résultat.

Théorème 1.2.5 *Notons par*

$$K_{\Theta_n} := span\,\{k_{\lambda_k}e_k\,:\,\lambda_k\in\Lambda_n\}$$

et

$$\Lambda := \bigcup_{n\geqslant 1}\Lambda_n\,.$$

Supposons, de plus, que

$$\sup_{n\geqslant 1} \|\Theta(\lambda_n)^* e_n\| < 1 \,.$$

Si $(P_\Theta K_{\Theta_n})_{n\geqslant 1}$ *forme une base inconditionnelle de sous-espaces et si* $\dim K_{\Theta_n} \leqslant M$ *alors il existe* $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_M$ *tel que*

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^{M} \sigma_j \,, \qquad \sigma_j \text{ étant } N\text{-Carleson} \;,$$

et $(k_\Theta(.,\lambda_i)e_i)_{\lambda_i\in\sigma_j}$ *forme une suite basique inconditionnelle, pour tout* $j = 1, \dots, M$*.*

Preuve Pour tout $n\geqslant 1$, choisissons $\lambda_n^{(1)} \in \Lambda_n$ et définissons

$$\sigma_1 := \bigcup_{n\geqslant 1} \lambda_n^{(1)} \,.$$

Il est clair que $(k_\Theta(.,\lambda_i)e_i)_{\lambda_i\in\sigma_1}$ forme une suite basique inconditionnelle. D'après le théorème 1.2.1, σ_1 est N-Carleson. Par récurrence, on construit $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_M$ tel que

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^{M} \sigma_j \,, \qquad \sigma_j \text{ étant } N\text{-Carleson} \;,$$

et $(k_\Theta(.,\lambda_i)e_i)_{\lambda_i\in\sigma_j}$ forme une suite basique inconditionnelle, pour tout $j = 1, \dots, M$.

$\square$

Dans les applications (particulièrement en théorie du contrôle), il est utile, étant donnée une famille d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t)u_n)_{n\geqslant 1}$, de savoir si on peut trouver un réel $a > 0$ tel que la famille $(\exp(i\mu_n t)u_n)_{n\geqslant 1}$ forme une suite basique inconditionnelle dans $L^2(0,a;E)$. En utilisant le langage des noyaux reproduisants, ceci est équivalent à dire qu'il existe $a > 0$ tel que $(k_{\Theta_1^a}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ forme une suite basique inconditionnelle, où $\Theta_1^a = \exp(a\frac{z+1}{z-1})$. Pour une fonction intérieure scalaire générale Θ, Hruschev, Nikolski et Pavlov ont montré que sous l'hypothèse $\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| < 1$, la condition de Carleson $\Lambda \in (C)$ est nécessaire et suffisante pour l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $(k_{\Theta^n}(.,\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ soit une suite basique inconditionnelle. Nous donnons, maintenant, une généralisation de ce résultat pour le cas vectoriel. Il existe plusieurs possibilités pour étendre l'hypothèse $\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| < 1$ au cas où $\dim E > 1$. Par exemple, on peut penser aux propriétés $\sup_{n\geqslant 1} \|\Theta(\lambda_n)\| < 1$, $\sup_{n\geqslant 1} \|\Theta(\lambda_n)^* e_n\| < 1$ ou $\sup_{n\geqslant 1} r(\Theta(\lambda_n)) < 1$, $r(T)$ étant le rayon spectral d'un opérateur T ($r(T) := \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in \sigma(T)\}$). Toutes ces propriétés coincident dans le cas scalaire ($\dim E = 1$). Nous présentons maintenant un résultat avec l'hypothèse $\sup_{n\geqslant 1} r(\Theta(\lambda_n)) < 1$.

Théorème 1.2.6 *Soient Θ une fonction intérieure à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$, dim $E = N < \infty$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ tels que*

$$\sup_{n\geqslant 1} r(\Theta(\lambda_n)) < 1\,. \tag{1.2}$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) *Λ est N-Carleson.*

(2) *Il existe une suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ dans E, $\|e_n\| = 1$, telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, la famille $(k_{\Theta^m}(.,\lambda_n)e_n \,:\, n\geqslant 1)$ est une suite basique inconditionnelle.*

Pour prouver le théorème 1.2.6 nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 1.2.7 *Soient $\Lambda \subset \mathbb{D}$ et $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de vecteurs unitaires dans E telle que $(k_\lambda e_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda)$ est une suite basique inconditionnelle. Notons par B la fonction intérieure telle que $K_B := Span\,\{k_\lambda e_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$. Alors il existe une constante C telle que*

$$\|P_B\Theta^*\|\leqslant C \sup_{\lambda\in\Lambda}\|\Theta(\lambda)^* e_\lambda\|\,,$$

pour toute fonction intérieure Θ dans $H^\infty(\mathcal{L}(E))$.

Preuve Comme $(k_\lambda e_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ est une suite basique inconditionnelle, il existe deux constantes $c_1, C_1 > 0$ telles que

$$c_1 \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda|^2 \|k_\lambda\|^2 \leqslant \left\| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda k_\lambda e_\lambda \right\|^2 \leqslant C_1 \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda|^2 \|k_\lambda\|^2\,, \tag{1.3}$$

et

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} (1-|\lambda|^2)\|f(\lambda)\|^2 \leqslant C_1 \|f\|^2\,, \tag{1.4}$$

pour toute famille finie (a_λ) dans $\mathbb{C}$ et toute fonction $f \in K_B$. En observant maintenant que $P_B\Theta^* k_\lambda e_\lambda = P_B k_\lambda \Theta(\lambda)^* e_\lambda$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\left\| P_B\Theta^* \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda k_\lambda e_\lambda \right) \right\| &= \left\| P_B \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda k_\lambda \Theta(\lambda)^* e_\lambda \right) \right\| \\
&\leqslant \left\| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda k_\lambda \Theta(\lambda)^* e_\lambda \right\| \\
&= \sup_{\substack{f\in H^2(E) \\ \|f\|\leqslant 1}} \left| \sum_{\lambda\in\Lambda} \overline{a_\lambda} \langle f(\lambda), \Theta(\lambda)^* e_\lambda \rangle \right| \\
&\leqslant \sup_{\substack{f\in H^2(E) \\ \|f\|\leqslant 1}} \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| \|\Theta(\lambda)^* e_\lambda\| \|f(\lambda)\| \\
&\leqslant \sup_{\lambda\in\Lambda} \|\Theta(\lambda)^* e_\lambda\| \sup_{\substack{f\in H^2(E) \\ \|f\|\leqslant 1}} \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| \|f(\lambda)\|\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (1.3) et (1.4), on obtient

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| \|f(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left\| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda k_\lambda e_\lambda \right\| \sqrt{C_1} \|f\| .$$

On a alors

$$\left\| P_B \Theta^* \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda k_\lambda e_\lambda \right) \right\| \leqslant \sqrt{\frac{C_1}{c_1}} \sup_{\lambda\in\Lambda} \|\Theta(\lambda)^* e_\lambda\| \left\| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda k_\lambda e_\lambda \right\| ,$$

ce qui prouve le lemme avec $C = \sqrt{\frac{C_1}{c_1}}$. □

Lemme 1.2.8 *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ une contraction dans un espace de Hilbert de dimension finie, $N = \dim X < \infty$. Supposons que $r := r(T) < 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $r + \varepsilon < 1$, et tout $\phi \in$ Hol $(|z| \leqslant r + \varepsilon)$ nous avons*

$$\|\phi(T)\| \leqslant \frac{2^{N-1}}{\varepsilon^N} \sup_{|z|=r+\varepsilon} |\phi(z)| .$$

Preuve En utilisant le calcul fonctionnel de Riesz-Dunford, on peut écrire

$$\|\phi(T)\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=r+\varepsilon} \|R_\lambda(T)\| |\phi(\lambda)| \, d\lambda .$$

D'autre part, il est bien connu que

$$\|R_\lambda(T)\| \leqslant \frac{\|T - \lambda I\|^{N-1}}{|\det\ (T - \lambda I)|} ,$$

(voir par exemple [6]). Par conséquent, nous obtenons

$$\|R_\lambda(T)\| \leqslant \frac{2^{N-1}}{\text{dist}\ (\lambda, \sigma(T))^N} ,$$

ce qui implique le résultat. □

Corollaire 1.2.9 *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, Θ une fonction intérieure à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$, $\dim E = N < \infty$. Supposons que*

$$r := \sup_{n\geqslant 1} r(\Theta(\lambda_n)) < 1 .$$

Alors, pour tout $0 < c < 1$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \geqslant M$, on a

$$\sup_{n\geqslant 1} \|\Theta(\lambda_n)^m\| < c .$$

Preuve Soit $\varepsilon > 0$ tel que $r+\varepsilon < 1$. En utilisant le lemme 1.2.8 avec $T = \Theta(\lambda_n)$ et $\phi(z) := z^m$, on obtient

$$\|\Theta(\lambda_n)^m\| \leqslant \frac{2^{N-1}}{\varepsilon^N}(r+\varepsilon)^m\,.$$

Choisissons $M \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2^{N-1}}{\varepsilon^N}(r+\varepsilon)^M < c$. Alors, pour tout $m \geqslant M$, on a

$$\sup_{n\geqslant 1}\|\Theta(\lambda_n)^m\| < c\,.$$

$\square$

Preuve (du théorème 1.2.6) $(2) \Longrightarrow (1)$: d'après le corollaire 1.2.9, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \geqslant N$, on a

$$\sup_{n\geqslant 1}\|\Theta(\lambda_n)^m\| < 1\,.$$

La conclusion provient alors du théorème 1.2.1.
$(1) \Longrightarrow (2)$: Grâce à (P 1.11), on peut construire une famille de vecteurs unitaires $(e_n)_{n\geqslant 1}$ dans E telle que $(k_{\lambda_n}e_n : n\geqslant 1)$ forme une suite basique inconditionnelle. Notons par B la fonction intérieure telle que$K_B := \text{Span}\,\{k_{\lambda_n}e_n : n\geqslant 1\}$. D'après le lemme 1.2.7, il existe une constante C telle que

$$\|P_B\Theta^{p*}\| \leqslant C\sup_{n\geqslant 1}\|\Theta(\lambda_n)^{p*}\| = C\sup_{n\geqslant 1}\|\Theta(\lambda_n)^p\|\,.$$

En utilisant le corollaire 1.2.9, choisissons $M \in \mathbb{N}$ telle que, pour tout $m \geqslant M$, on a

$$\sup_{n\geqslant 1}\|\Theta(\lambda_n)^m\| < \frac{1}{C}\,.$$

Par conséquent, on obtient

$$\|P_B\Theta^{*m}\| < 1\,,$$

ce qui prouve le résultat d'après le lemme 1.2.2 et le théorème 1.2.1. $\square$

En général, l'uniforme minimalité est une propriété plus faible que celle d'être une base inconditionnelle. Pour les noyaux reproduisants $(k_\lambda e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans $H^2(E)$, avec $\dim E < \infty$, ces deux propriétés coincident. Il est intéressant de savoir si l'équivalence entre ces deux propriétés reste valable pour les familles $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$. Dans le cas scalaire, il a été montré, sous l'hypothèse $\lim_{n\to\infty}|\Theta(\lambda_n)| = 0$, que l'équivalence est vraie (voir [34]). Ce résultat a été retrouvé par I. Boricheva, grâce à des techniques différentes basées sur les paramètres de Schur associés à la fonction intérieure Θ et aux zéros du produit de Blaschke B (voir [12]). Nous présentons, maintenant, une généralisation de ce résultat pour le cas vectoriel, toujours sous l'hypothèse que

$$\lim_{n\to\infty}\|\Theta(\lambda_n)^*e_n\| = 0\,. \tag{1.5}$$

Sans cette hypothèse, l'équivalence entre l'uniforme minimalité et la propriété de base inconditionnelle est toujours un problème ouvert, même dans le cas scalaire.

Théorème 1.2.10 *Soient E un espace de Hilbert de dimension finie, dim $E = N$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure dans $H^\infty(\mathcal{L}(E))$. Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une famille de vecteurs unitaires de E. Supposons que (1.5) est satisfaite. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite basique inconditionnelle.*

(2) $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ *est uniformément minimale.*

Preuve (1) $\Longrightarrow$ (2) est évident.
(2) $\Longrightarrow$ (1) : sans perte de généralité, on peut supposer que Θ est une fonction intérieure purement contractive, c'est-à-dire que $\|\Theta(z)e\| < \|e\|$ pour tout $|z| < 1$ et tout $e \neq 0$ (voir [66]). Par conséquent, (1.5) implique que

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|\Theta(\lambda)^* e_\lambda\| < 1\,,$$

et (P 1.4) entraîne que $\mathcal{X} := (k_{\lambda_n} e_n \,:\, n\geqslant 1)$ est uniformément minimale. Donc, c'est une suite basique inconditionnelle, d'après (P 1.5). Pour $M\geqslant 1$, notons par

$$K_{B_M} := \text{Span}\,(k_{\lambda_n} e_n \,:\, n\geqslant M)\,.$$

D'après le lemme 1.2.7, il existe une constante C, dépendant seulement de la famille $\mathcal{X}$, telle que

$$\|P_{B_M}\Theta^*|K_{B_M}\| \leqslant C \sup_{n\geqslant M} \|\Theta(\lambda_n)^* e_n\|\,.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \|\Theta(\lambda_n)^* e_n\| = 0$, on peut trouver $M\geqslant 1$ tel que

$$\sup_{n\geqslant M} \|\Theta(\lambda_n)^* e_n\| < \frac{1}{C}\,.$$

Donc on obtient

$$\|P_{B_M}\Theta^*|K_{B_M}\| < 1\,,$$

ce qui implique par le lemme 1.2.2 et le théorème 1.2.1 que $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant M}$ forme une suite basique inconditionnelle. En utilisant la minimalité de toute la famille, il est facile d'en déduire qu'on peut rajouter un nombre fini de termes, sans perturber la propriété de base inconditionnelle. Par conséquent $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ forme une suite basique inconditionnelle. $\square$

1.3 Stabilité des bases inconditionnelles de noyaux reproduisants.

1.3.1 Position du problème et énoncé des principaux résultats.

Maintenant, nous allons considérer le problème de stabilité mentionné dans l'introduction. On se donne $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{D}$, $\mathcal{E} = (e_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans E et Θ une fonction intérieure à valeurs opératorielles dans $\mathcal{L}(E)$. Supposons que la suite de noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ soit une suite basique inconditionnelle dans $K_\Theta = H^2(E) \ominus \Theta H^2(E)$ et soit $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs. Nous dirons que $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ est (ε_n)-*stable* si chaque suite $(k_\Theta(.,\lambda'_n)e'_n)_{n\geqslant 1}$ satisfaisant

$$|b_{\lambda_n}(\lambda'_n)|\leqslant\varepsilon_n \text{ and } \|e_n - e'_n\|\leqslant\varepsilon_n\,,\ n\geqslant 1\,,$$

est une suite basique inconditionnelle dans K_Θ. Etant donnée une suite basique inconditionnelle $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$, le *problème de stabilité* est de décrire $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ telle que cette suite est (ε_n)-stable. Nous considèrerons le cas de k_{λ_n} comme un cas limite de $k_\Theta(.,\lambda_n)$, avec $\Theta \equiv 0$, et par conséquent nous utiliserons le même langage pour les familles de noyaux reproduisants $(k_{\lambda_n}e_n)_{n\geqslant 1}$ dans $H^2(E)$. Nous étudierons également le cas des familles de noyaux reproduisants scalaires $k_\Theta(.,\lambda_n)$, dans les espaces de Banach K^p_Θ, $1 < p < +\infty$ et nous conserverons aussi la même définition pour la stabilité.

Comme cela a été mentionné dans l'introduction, l'histoire de l'(ε_n)-stabilité trouve son origine dans les travaux de R.E. Paley et N. Wiener, en 1934. En effet, sans utiliser cette terminologie et en posant le problème avec la métrique euclidienne, ces deux auteurs se sont intéressés aux perturbations du système trigonométrique $(\exp(int))_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $L^2(0,2\pi)$. Plus précisément, ils ont cherché $\delta > 0$ tel que, pour toute suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ satisfaisant $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n < \delta$, le système $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base inconditionnelle de $L^2(0,2\pi)$. Ils ont montré que $\delta = \frac{1}{\pi^2}$ suffisait, puis ce résultat a été amélioré jusqu'à $\delta = \frac{\log 2}{\pi}$ par R.J. Duffin et J.J. Eachus. En 1936, A. Ingham [36] a donné un exemple montrant qu'un tel δ devait être strictement plus petit que $\frac{1}{4}$. Finalement, en 1964, dans le cas de perturbations réelles ($(\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$), M. Kadeč ([38]) a montré que $\delta < \frac{1}{4}$ était suffisant. On pourra se reporter à [53], Lectures 8 et 11, pour une exposition des relations entre les exponentielles et les noyaux reproduisants et pour une autre preuve du résultat de Kadeč. Ce résultat a été l'objet de plusieurs généralisations par V. Katsnelson [40], A. Avdonin [3], et Hruschev-Nikolski-Pavlov [34]. En particulier, dans [34] (corollaire 2.5, p.295), on montre la généralisation suivante d'un résultat précédent de R. Duffin et A. Schaeffer : étant donnée une suite basique inconditionnelle $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ dans $L^2(0,a)$ telle que $\inf_{n\geqslant 1} \mathrm{Im}\mu_n > 0$ (ce qui est équivalent à $\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\mu_n)| < 1$ pour $\Theta(z) = \exp(iaz)$), alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\exp(i\mu'_n t))_{n\geqslant 1}$ est une suite basique inconditionnelle dans $L^2(0,a)$ quel que soit μ_n', $|\mu_n' - \mu_n| \leqslant \varepsilon$. Plus tard, ce résultat a été généralisé au cas des exponentielles à valeurs vectorielles par Avdonin, Ivanov et Joo [2]. Avant de donner des généralisations de ces résultats pour les noyaux reproduisants, nous rappelons quelques faits bien connus.

En posant $H^p_- := \{f \in L^p \, : \, \hat{f}(n) = 0 \;\; n \geqslant 0\}$, pour $p \in (1,\infty)$, on sait, d'après un théorème de M. Riesz sur les fonctions conjuguées, que L^p est la somme directe de H^p et H^p_-, et donc, en utilisant la dualité

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\, dm\,,$$

on peut identifier (de manière sesquilinéaire) l'espace dual $(H^p)^*$ avec H^q, où q est l'exposant conjugué de p

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Définissons alors, pour une fonction intérieure Θ,

$$K^p_\Theta := H^p \cap \Theta\overline{H^p_0}\,, \qquad k_\Theta(.,\lambda) = \frac{1 - \overline{\Theta}(\lambda)\Theta}{1 - \overline{\lambda}z}\,,$$

où $H^p_0 = zH^p$. Alors

$$f(\lambda) = \langle f, k_\Theta(.,\lambda)\rangle\,,\; \lambda \in \mathbb{D}\,,\; f \in K^q_\Theta\,,$$

et $k_\Theta(.,\lambda) \in K^p_\Theta$. Notons par $J_{\Theta,\Lambda}$ l'opérateur défini sur K^q_Θ par

$$J_{\Theta,\Lambda} f = (f(\lambda_n))_{n\geqslant 1}\,,\;\; f \in K^q_\Theta\,.$$

La caractérisation suivante des bases inconditionnelles a été prouvée, dans [34], Partie II, théorème 6.3.

Théorème 1.3.1 (Hruschev-Nikolski-Pavlov) *Supposons que*

$$\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| < 1\,.$$

La famille $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de K^p_Θ si et seulement si l'opérateur $J_{\Theta,\Lambda}$ est un isomorphisme de K^q_Θ sur $\ell^q((1-|\lambda_n|^2)^{1/q})$.

Les trois théorèmes suivants sont les résultats principaux de cette section. Dans le paragraphe 1.3.2, on compare ces résultats avec le théorème de Kadeč énoncé ci-dessus. Le paragraphe 1.3.3 contient les preuves des théorèmes 1.3.2, 1.3.4 et 1.3.14.

Théorème 1.3.2 *Soient $1 < p < \infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, et Θ une fonction intérieure dans H^∞ telle que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de K^p_Θ. Supposons que*

$$\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| < 1 \,.$$

Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(\Lambda, \Theta, p)$ tel que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est (ε_n)-stable dans K^p_Θ pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ satisfaisant $\sup_{n\geqslant 1} \varepsilon_n < \varepsilon$.

Remarque 1.3.3 Il suit de la preuve de ce théorème que la constante $\varepsilon = \varepsilon(\Lambda, \Theta, p)$, peut être choisie telle que $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$ et

$$\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| + 2\varepsilon < 1 \,, \tag{1.6}$$

$$\frac{2\varepsilon}{\delta/2 - \varepsilon} \|J^{-1}_{\Theta,\Lambda}\| \left(128 \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}(1 + 6\log 1/\delta) \frac{1+\varepsilon+\delta/2}{1-\varepsilon-\delta/2} \right)^{1/q} < 1 \,. \tag{1.7}$$

où $\delta = \delta(\Lambda)$ est la constante de Carleson de la suite Λ.

En fait, pour $p = 2$, on peut améliorer la borne supérieure pour ε :

Théorème 1.3.4 *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure telle que*

$$\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| < 1 \,.$$

Supposons que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ soit une suite basique inconditionnelle. Alors $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est (ε_n)-stable pour tout $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ satisfaisant

$$\sup_{n\geqslant 1} \varepsilon_n < \frac{\delta^6}{8} \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \,,$$

où $\delta = \delta(\lambda)$ et $\gamma :=$ dist $(\Theta \overline{B}_\Lambda, H^\infty)$.

L'analogue vectoriel du théorème 1.3.2 est comme suit :

Théorème 1.3.5 *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, E un espace de Hilbert de dimension finie, $(e_n)_{n\geqslant 1} \subset E$, $\|e_n\| = 1$, et $\Theta \in H^\infty(\mathcal{L}(E))$ une fonction intérieure telle que $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de K_Θ. Supposons que*

$$\sup_{n\geqslant 1} \|\Theta(\lambda_n)^* e_n\| < 1 \,.$$

Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(\Lambda, \Theta)$ tel que $(k_\Theta(.,\lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ est (ε_n)-stable pour tout $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ satisfaisant $\sup_{n\geqslant 1} \varepsilon_n < \varepsilon$.

Remarque 1.3.6 (1) Comme $N = \dim E < \infty$, on sait d'après le théorème 1.2.1 que Λ est $N-$Carleson, $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $\Lambda_i \in (C)$. Soit $\delta := \inf_{i=1}^{N} \delta(\Lambda_i) > 0$. De plus, comme $(k_\Theta(., \lambda_n)e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de K_Θ, l'opérateur $J_{\Theta,\Lambda}$ défini par

$$J_{\Theta,\Lambda} f := (\langle f(\lambda_n), e_n\rangle)_{n\geqslant 1}, \ f \in K_\Theta,$$

est un isomorphisme de K_Θ sur $\ell^2((1-|\lambda_n|^2)^{1/2})$. Alors, il suit de la preuve du théorème 1.3.5 que la constante $\varepsilon = \varepsilon(\Lambda, \Theta, (e_n)_{n\geqslant 1})$ peut être choisie telle que $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$ et

$$\sup_{n\geqslant 1} \|\Theta(\lambda_n)^* e_n\| + 2\varepsilon(\varepsilon+1) + \varepsilon < 1, \tag{1.8}$$

$$\frac{2\varepsilon}{\delta/2-\varepsilon}\|J_{\Theta,\Lambda}^{-1}\| \left(128N\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}(1+6\log 1/\delta)\frac{1+\varepsilon+\delta/2}{1-\varepsilon-\delta/2}\right)^{1/2} < 1. \tag{1.9}$$

(2) En fait, l'hypothèse dim $E < \infty$, dans le théorème 1.3.5 peut être évitée si on suppose que Λ est $N-$Carleson.

(3) Le théorème 1.3.5 admet la forme "asymptotique" suivante : sous les mêmes hypothèses, soit $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et $(e'_n)_{n\geqslant 1} \subset E$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|e'_n - e_n\| = 0.$$

Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(k_\Theta(., \lambda'_n)e'_n)_{n\geqslant N}$ est une suite basique inconditionnelle.

En effet, soit $\varepsilon > 0$ une constante définie par le théorème 1.3.5. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{n\geqslant N} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| < \varepsilon, \quad \text{et} \quad \sup_{n\geqslant N} \|e'_n - e_n\| < \varepsilon.$$

Il suit de la preuve du théorème 1.3.5 que $(k_\Theta(., \lambda'_n)e'_n)_{n\geqslant N}$ est une suite basique inconditionnelle. $\square$

Faisons quelques commentaires sur ces résultats. D'une part, ils s'inscrivent dans la continuité du résultat de Hruschev, Nikolski et Pavlov cité ci-dessus, en remplaçant la distance euclidienne $|\mu_n - \mu'_n| \leqslant \varepsilon$ par la distance hyperbolique $|\frac{\mu_n-\mu'_n}{\mu_n-\overline{\mu}'_n}| \leqslant \varepsilon$. Ces distances sont comparables lorsque $|\mu_n - \mu'_n| \leqslant A\varepsilon \Im m \mu_n$, où A est une constante absolue. Dans le cas où $\sup_n(\Im m\mu_n) = \infty$, notre résultat est donc plus fort. D'autre part, on peut comparer ces résultats à d'autres résultats généraux de stabilité connus pour les bases de Riesz dans un espace de Hilbert. On peut résumer ces résultats dans le lemme suivant.

Lemme 1.3.7 *(i) Soit $\mathcal{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite basique inconditionnelle et normalisée dans un espace de Hilbert H. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que toute suite $\mathcal{X}' = (x'_n)_{n\geqslant 1}$ satisfaisant*

$$\|x_n - x'_n\| \leqslant \varepsilon_n\,, \quad \text{avec} \sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n^2 < \delta^2\,,$$

est une suite basique inconditionnelle.

(ii) Etant données une base orthonormale $(x_n)_{n\geqslant 1} \subset H$ et une suite $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n^2 = +\infty$, alors il existe une suite de vecteurs $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ dans H telle que

$$\|x_n - x'_n\| \leqslant \varepsilon_n\,,\ n\geqslant 1\,,$$

mais aucun des restes $(x'_n)_{n\geqslant N}$ ne forme une suite basique inconditionnelle.

Remarque 1.3.8 Pour la propriété (i), il suffit d'avoir

$$\delta < \frac{1}{\|V\|\|V^{-1}\|}\,,$$

où V est un orthogonalisateur de $\mathcal{X}$, c'est-à-dire un isomorphisme qui transforme $\mathcal{X}$ en une suite orthogonale, $Vx_n \perp Vx_k$, $n \neq k$.

Preuve (i) En fait, la preuve répète les arguments de Paley-Wiener. Soit A un opérateur linéaire défini par

$$Ax_n = x'_n\,,\ n\geqslant 1\,,$$

et $A = I$ sur le complément orthogonal de span $\{x_n : n\geqslant 1\}$. Alors, en utilisant un orthogonalisateur V, on a

$$
\begin{aligned}
\|(I-A)\sum_n c_n x_n\| = \| \sum_n c_n(x_n - x'_n)\| & \\
&\leqslant \left(\sum_n |c_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_n \|x_n - x'_n\|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \delta \left(\sum_n |c_n|^2\right)^{1/2} \\
&= \delta \left(\sum_n |c_n|^2 \|Vx_n\|^2 \frac{1}{\|Vx_n\|^2}\right)^{1/2} \\
&\leqslant \delta \|V^{-1}\| \left(\sum_n |c_n|^2 \|Vx_n\|^2\right)^{1/2} \\
&= \delta \|V^{-1}\| \| \sum_n c_n V x_n\| \\
&\leqslant \delta \|V^{-1}\| \|V\| \| \sum_n c_n x_n\| \, ,
\end{aligned}
$$

pour toute somme finie $\sum_n c_n x_n$. Par conséquent, A est continu et

$$\|I - A\| \leqslant \delta \|V^{-1}\| \|V\| \, .$$

En rendant la dernière quantité strictement plus petite que 1, on montre que A est un isomorphisme et donc $\mathcal{X}' = A\mathcal{X}$ est une suite basique inconditionnelle.

(ii) C'est un résultat de L. Dovbysh, N. Nikolski et V. Sudakov (voir [20]). $\square$

En fait, le lemme 1.3.7 signifie que les bases de Riesz générales sont (ε_n)-stables seulement si $\sum_n \varepsilon_n^2 < \infty$. Les théorèmes 1.3.2 et 1.3.5 montrent que, pour les bases de noyaux reproduisants dans les espaces K_Θ, la situation est bien meilleure et on peut garantir la stabilité par rapport à des perturbations uniformes $\sup_{n \geqslant 1} \varepsilon_n < \varepsilon$.

1.3.2 Suites de noyaux reproduisants asymptotiquement orthonormales

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion de suites asymptotiquement orthonormales. Nous donnons alors deux méthodes pour construire des suites de noyaux reproduisants asymptotiquement orthonormales. Pour ce cas, nous comparons la constante obtenue dans le théorème 1.3.4 avec la constante du théorème de Kadeč.

Définition 1.3.9 *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans un espace de Hilbert H. Nous dirons que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite asymptotiquement orthonormale (et écrirons $(f_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathrm{SAO})$) si, pour tout N suffisamment grand, il existe $c_N, C_N > 0$ tels que*

$$c_N \sum_{n\geqslant N} |a_n|^2 \leqslant \left\| \sum_{n\geqslant N} a_n f_n \right\|^2 \leqslant C_N \sum_{n\geqslant N} |a_n|^2 \,, \tag{1.10}$$

pour toute somme finie $\sum_{n\geqslant N} a_n f_n$, et

$$\lim_{N\to\infty} c_N = 1 \,, \quad \lim_{N\to\infty} C_N = 1.$$

Le lemme suivant montre que cette définition est équivalente à celle donnée par A. L. Volberg (voir [72]).

Lemme 1.3.10 *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite basique inconditionnelle et V un orthogonalisateur de $(f_n)_{n\geqslant 1}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *$(f_n)_{n\geqslant 1} \in$ (SAO).*

(2) *Il existe un opérateur unitaire U et un opérateur compact K tels que $V = U + K$.*

(3) *Il existe un opérateur compact K tel que la matrice de Gram $G = (\langle f_n, f_k\rangle)_{n,k}$ s'écrive*

$$G = I + K \,,$$

où I est la matrice identité.

Preuve (2) $\Longrightarrow$ (3) : soit V un isomorphisme de $\mathcal{X} := \mathrm{Span}\,\{f_n \,:\, n\geqslant 1\}$ sur ℓ^2 tel que $Vf_n = e_n$, $n\geqslant 1$, avec $(e_n)_{n\geqslant 1}$ la base orthonormale standard de ℓ^2. Notons $V_1 := V^{-1}$, et soit $a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^2$. Alors

$$\left\| V_1 \left(\sum_{n\geqslant 1} a_n e_n \right) \right\|^2 = \sum_{n,j} a_n \overline{a}_j \langle f_n, f_j\rangle = \langle Ga, a\rangle \,.$$

Donc $G = V_1^* V_1$. Si $V = U + K$ alors il est clair que $V_1 = V^{-1} = U_1 + K_1$, où U_1 est un opérateur unitaire et K_1 est compact. Il suit que $G = (U_1^* + K_1^*)(U_1 + K_1) = I + K_2$, avec K_2 opérateur compact.

(3) $\Longrightarrow$ (2) : supposons que $G = V_1^* V_1 = I + K$ avec K un opérateur compact. Comme $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite basique inconditionnelle, V_1 est un isomorphisme de ℓ^2 sur $\mathcal{X}$. Considérons la décomposition polaire de $V_1 = JR$ avec R opérateur positif sur ℓ^2 et J opérateur unitaire (voir par exemple [61], théorème 12.35, page 332). Alors $V_1^* V_1 = RJ^*JR = R^2 = I + K$. D'où $R^2 - I = K$. Comme R est

positif, $I+R$ est inversible et on en déduit que $R-I=(R+I)^{-1}K$ est compact. Donc, $V_1 = J + JK_1 = J + K_2$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : soit $V = U + K$, $V^{-1} = U_1 + K_1$, avec U, U_1 des opérateurs unitaires et K, K_1 des opérateurs compacts. Soit $\varepsilon_N := \|K_{|\text{Span }(f_n\,:\,n\geqslant N)}\|$ et $\widetilde{\varepsilon}_N := \|K_{1|\text{Span }(f_n\,:\,n\geqslant N)}\|$. Comme K est compact, nous avons

$$\lim_{N\to+\infty} \varepsilon_N = 0\,,$$

et pour toute $f \in \text{Span }(f_n : n\geqslant N)$

$$\|Vf\| = \|Uf + Kf\| \leqslant \|f\| + \varepsilon_N\|f\| = (1+\varepsilon_N)\|f\|\,.$$

De façon similaire, pour tout $g \in \text{Span }(e_n : n\geqslant N)$, nous avons

$$\|V^{-1}g\| \leqslant (1+\widetilde{\varepsilon}_N)\|g\|\,,$$

ce qui implique que $(f_n)_{n\geqslant 1} \in$ (SAO).

(1) $\Longrightarrow$ (3): en utilisant les mêmes calculs, on montre que

$$\|P_N(I-G)P_N\| = \sup_{a\in\ell^2,\,\|a\|\leqslant 1} \left| \sum_{n\geqslant N} |a_n|^2 - \left\| \sum_{n\geqslant N} a_n f_n \right\|^2 \right|.$$

Donc

$$\|P_N(I-G)P_N\| \leqslant 1 - c_N\,,$$

ce qui implique que $\lim\limits_{N\to+\infty} \|P_N(I-G)P_N\| = 0$. Par conséquent, pour conclure, il suffit de noter que

$$\begin{aligned} I - G &= P_N(I-G) + (I-P_N)(I-G) \\ &= P_N(I-G)P_N + T_N\,, \end{aligned}$$

avec T_N opérateur de rang fini. □

Etablissons maintenant un lemme qui va nous permettre de construire des suites asymptotiquement orthonormales de noyaux reproduisants.

Lemme 1.3.11 *Soient $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormale dans H et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans H telle que*

$$\sum_{n\geqslant 1} \|x_n - y_n\|^2 < \infty\,.$$

Alors $(y_n)_{n\geqslant 1} \in (SAO)$.

Preuve Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n\geqslant N} \|x_n - y_n\|^2 < 1\,.$$

Nous avons

$$\sum_{n\geqslant N} a_n y_n = \sum_{n\geqslant N} a_n(y_n - x_n) + \sum_{n\geqslant N} a_n x_n\,.$$

Donc

$$c_N^2 \sum_{n\geqslant N} |a_n|^2 \leqslant \left\| \sum_{n\geqslant N} a_n y_n \right\|^2 \leqslant C_N^2 \sum_{n\geqslant N} |a_n|^2\,,$$

avec $c_N^2 := 1 - \left(\sum_{n\geqslant N} \|x_n - y_n\|^2\right)^{1/2}$ et $C_N^2 := 1 + \left(\sum_{n\geqslant N} \|x_n - y_n\|^2\right)^{1/2}$. Par définition, on en déduit que $(y_n)_{n\geqslant 1} \in (SAO)$. $\square$

Si $\Lambda \subset \mathbb{D}$ et card $\Lambda > 1$, alors la famille $(k_\Theta(.,\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ne peut pas être orthogonale. Pour certains Θ il est cependant possible de construire des bases orthogonales de noyaux reproduisants avec pôles sur le cercle unité. Soit

$$\Theta(z) := z^N \prod_{n\geqslant 1} b_{a_n}(z) \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta)\right)\,,$$

la factorisation canonique de Θ. Posons

$$\sigma(\Theta) := \overline{\mathbb{D}} \backslash \{\lambda \in \overline{\mathbb{D}} \,:\, \frac{1}{\Theta} \text{ peut être prolongée analytiquement dans un voisinage de } \lambda\}\,,$$

et

$$E_\Theta := \{\zeta \in \mathbb{T} \,:\, \sum_{n\geqslant 1} \frac{1 - |a_n|^2}{|\zeta - a_n|^2} + \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(t)}{|t - \zeta|^2} < +\infty\}\,.$$

Soit $\Lambda \subset \mathbb{T}$ et $c \in \mathbb{T}$. P. Ahern et D. Clark (voir [1]) ont montré que la famille

$$\left(k_\Theta(z,\lambda) := \frac{1 - \overline{c}\Theta(z)}{1 - \overline{\lambda} z}\right)_{\lambda\in\Lambda}$$

est orthogonale dans K_Θ si et seulement si $\Lambda \subset E_\Theta$ et $\Theta(\lambda) = c$, pour chaque $\lambda \in \Lambda$. Clark et A. Aleksandrov (voir [4] et [15]) ont aussi donné un critère pour que l'espace K_Θ possède une base orthogonale de noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$, $\Lambda \subset \mathbb{T}$. Malheureusement, ce critère n'est pas facile à vérifier dans les applications et nous nous réfèrerons plutôt à une condition suffisante plus simple qui est la suivante : si l'ensemble $\mathbb{T} \setminus E_\Theta$ est au plus dénombrable alors pour tout $\alpha \in \mathbb{T}$, la famille $(k_\Theta(.,\lambda))_{\lambda\in E_\Theta\cap\Theta^{-1}(\alpha)}$ forme un système complet et orthogonal dans K_Θ. Cette condition suffisante est, par exemple, vérifiée pour les fonctions intérieures

$$\Theta(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta)\right),$$

telles que supp μ est au plus dénombrable. En particulier, si $\Theta(z)=\exp(2\pi\frac{z+1}{z-1})$, on voit, après un passage au demi-plan supérieur et application de la transformée de Fourier, que $(k_\Theta(.,\lambda))_{\lambda\in\Theta^{-1}(1)}$ correspond au système trigonométrique classique d'exponentielles $(\exp(int))_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $L^2(0,2\pi)$.

En utilisant le lemme 1.3.11, il est maintenant possible de construire des suites asymptotiquement orthogonales de noyaux reproduisants. Supposons, par exemple, que pour une fonction intérieure Θ donnée et $\alpha\in\mathbb{T}$, la famille $\{k_\Theta(.,\lambda_n^*)\,:\,\Theta(\lambda_n^*)=\alpha,\ \lambda_n^*\in\mathbb{T}\setminus\sigma(\Theta)\}$ forme une base orthogonale dans K_Θ. Comme

$$\lim_{r\to 1}\|k_\Theta(.,r\lambda_n^*)-k_\Theta(.,\lambda_n^*)\|_2 = 0\,,$$

on peut choisir une suite de nombres réels r_n suffisamment proches de 1 de telle sorte que

$$\left\|\frac{k_\Theta(.,r_n\lambda_n^*)}{\|k_\Theta(.,r_n\lambda_n^*)\|}-\frac{k_\Theta(.,\lambda_n^*)}{\|k_\Theta(.,\lambda_n^*)\|}\right\|\leqslant\frac{1}{n^2}\,.$$

Le lemme 1.3.11 implique alors que $\left(\frac{k_\Theta(.,r_n\lambda_n^*)}{\|k_\Theta(.,r_n\lambda_n^*)\|}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite asymptotiquement orthonormale.

On présente maintenant une autre méthode pour construire des suites asymptotiquement orthonormales de noyaux reproduisants. Rappelons la condition nécessaire et suffisante donnée par Volberg pour que la famille $R(\Lambda):=\left(\frac{k_{\lambda_n}}{\|k_{\lambda_n}\|}\right)_{n\geqslant 1}$ de noyaux reproduisants de H^2 forme une suite asymptotiquement orthonormale (voir [72]).

Théorème 1.3.12 (Volberg) *Soit $\Lambda=(\lambda_n)_{n\geqslant 1}\subset\mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) $R(\Lambda)$ *est une base asymptotiquement orthogonale de* K_{B_Λ}.

(2) $\lim_{n\to+\infty}|B_{\lambda_n}(\lambda_n)|=1$, *où* $B_{\lambda_n}:=\prod_{k\neq n} b_{\lambda_k}$.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant.

Lemme 1.3.13 *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure de H^∞.*
(1) Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} |B_{\lambda_n}(\lambda_n)| = 1\,,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} |\Theta(\lambda_n)| = 0\,.$$

Alors $R_\Theta(\Lambda) := \left(\dfrac{k_\Theta(.,\lambda_n)}{\|k_\Theta(.,\lambda_n)\|}\right)_{n\geqslant 1} \in$ *(SAO).*
(2) Supposons que $R_\Theta(\Lambda) \in$ (SAO). Alors $R(\Lambda) \in$ (SAO).
(3) Soit $\Lambda' = (\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telle que

$$|b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| \leqslant \varepsilon < 1\,.$$

Si $R(\Lambda) \in$ (SAO) alors $R(\Lambda')$ est une suite de la même qualité.

Preuve (1) Comme $\lim_{n\to+\infty} |B_{\lambda_n}(\lambda_n)| = 1$, on obtient d'après le théorème de Volberg que $R(\Lambda) \in$ (SAO). Par conséquent, il existe c_N, $C_N \to 1$ tel que

$$c_N \sum_{n\geqslant N} |a_n|^2 \leqslant \left\| \sum_{n\geqslant N} a_n \frac{k_{\lambda_n}}{\|k_{\lambda_n}\|} \right\|^2 \leqslant C_N \sum_{n\geqslant N} |a_n|^2\,. \tag{1.11}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} |\Theta(\lambda_n)| = 0$, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|k_\Theta(.,\lambda_n)\|^2}{\|k_{\lambda_n}\|^2} = \lim_{n\to+\infty} (1 - |\Theta(\lambda_n)|^2) = 1\,.$$

Donc $R_\Theta(\Lambda) \in$ (SAO) si et seulement si $\left(\frac{k_\Theta(.,\lambda_n)}{\|k_{\lambda_n}\|}\right)_{n\geqslant 1} \in$ (SAO). De plus,

$$\left\| \sum_{n\geqslant N} a_n \frac{k_\Theta(.,\lambda_n)}{\|k_{\lambda_n}\|} \right\|^2 = \left\| \sum_{n\geqslant N} a_n \frac{k_{\lambda_n}}{\|k_{\lambda_n}\|} \right\|^2 - \left\| \sum_{n\geqslant N} a_n \overline{\Theta(\lambda_n)} \frac{k_{\lambda_n}}{\|k_{\lambda_n}\|} \right\|^2,$$

et
(1.12)

$$\inf_{n\geqslant N} |\Theta(\lambda_n)|^2 c_N \sum_{n\geqslant N} |a_n|^2 \leqslant \left\| \sum_{n\geqslant N} a_n \overline{\Theta(\lambda_n)} \frac{k_{\lambda_n}}{\|k_{\lambda_n}\|} \right\|^2 \leqslant \sup_{n\geqslant N} |\Theta(\lambda_n)|^2 C_N \sum_{n\geqslant N} |a_n|^2\,.$$

En utilisant (1.11) et (1.12), on obtient que $R_\Theta(\Lambda) \in$ (SAO).
(2) Soit $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ la famille biorthogonale à $R_\Theta(\Lambda)$. Alors, il est clair (d'après, par exemple, le lemme 1.3.10) que $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ est aussi une suite asymptotiquement orthonormale. De plus, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}^2\left(\frac{k_\Theta(.,\lambda_n)}{\|k_\Theta(.,\lambda_n)\|}, \operatorname{Span}\,(k_\Theta(.,\lambda_k)\ :\ k\neq n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\|\psi_n\|^2} = 1\,.$$

On utilise alors une formule de I.A. Boricheva :

$$\text{dist}^{\,2}\left(\frac{k_\Theta(.,\lambda_n)}{\|k_\Theta(.,\lambda_n)\|}, \text{Span }(k_\Theta(.,\lambda_k)\ :\ k\neq n)\right) = |B_{\lambda_n}(\lambda_n)|^2 \prod_{i\geqslant 1} \frac{1-|\Theta_{i+1}(\lambda_n)|^2}{1-|\Theta_{i+1}(\lambda_n)|^2|b_{\lambda_i}(\lambda_n)|^2}\,,$$

où Θ_i sont les fonctions de Schur-Nevanlinna associées à (Θ,Λ) (voir [12]). Comme

$$\prod_{i\geqslant 1} \frac{1-|\Theta_{i+1}(\lambda_n)|^2}{1-|\Theta_{i+1}(\lambda_n)|^2|b_{\lambda_i}(\lambda_n)|^2}\leqslant 1\,,$$

on obtient

$$\text{dist}^{\,2}\left(\frac{k_\Theta(.,\lambda_n)}{\|k_\Theta(.,\lambda_n)\|}, \text{Span }(k_\Theta(.,\lambda_k)\ :\ k\neq n)\right)\leqslant|B_{\lambda_n}(\lambda_n)|^2\,,$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}|B_{\lambda_n}(\lambda_n)|=1$, ce qui implique, d'après le théorème de Volberg, que $R(\Lambda)$ est une suite asymptotiquement orthonormale.
(3) Posons $\delta_n := |B_{\lambda_n}(\lambda_n)|$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\delta_n = 1$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\lambda := \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2} < \inf_{n\geqslant N}\delta_n\,.$$

En utilisant le lemme 1.3.17 ci-dessous, on obtient, pour $k\geqslant N$,

$$\prod_{j\neq k}|b_{\lambda'_j}(\lambda'_k)|\geqslant\frac{\prod_{j\neq k}|b_{\lambda_j}(\lambda_k)|-\lambda}{1-\lambda\prod_{j\neq k}|b_{\lambda_j}(\lambda_k)|} = \frac{\delta_k-\lambda}{1-\lambda\delta_k}\,.$$

Donc

$$\lim_{k\to+\infty}\prod_{j\neq k}|b_{\lambda'_j}(\lambda'_k)| = 1\,,$$

ce qui implique, d'après le théorème de Volberg, que $R(\Lambda')$ est une suite asymptotiquement orthonormale. $\square$

Le résultat suivant de stabilité se dérive du théorème 1.3.4 et du lemme 1.3.13.

Théorème 1.3.14 *Soit $R_\Theta(\Lambda)\in$ (SAO) tel que*

$$\lim_{n\to+\infty}|\Theta(\lambda_n)| = 0\,.$$

Soit $\Lambda' := (\lambda'_n)_{n\geqslant 1}\subset\mathbb{D}$ tel que

$$|b_{\lambda_n}(\lambda'_n)|\leqslant\varepsilon<1\,,\ n\geqslant 1\,.$$

Alors il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{k_\Theta(.,\lambda'_n)}{\|k_\Theta(.,\lambda'_n)\|}\right)_{n\geqslant N}$ est une suite basique inconditionnelle.

Remarque 1.3.15 Comparé à la constante du théorème de Kadeč, ce résultat peut sembler surprenant. Mais, en fait, comme cela a été mentionné au-dessus, nous utilisons la métrique pseudo-hyperbolique alors que Kadeč utilise la métrique euclidienne. Donc, notre résultat est meilleur dans le cas où $\sup\limits_{n\geqslant 1}\text{Im }(\mu_n) = +\infty$ et moins bon dans le cas où $\inf\limits_{n\geqslant 1}\text{Im }(\mu_n) = 0$.

1.3.3 Preuves des théorèmes 1.3.2, 1.3.4 et 1.3.14

Tout d'abord, nous donnons des résultats auxiliaires qui seront utiles dans la suite.

Lemme 1.3.16 *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{D}$ *et* $0 < \varepsilon < 1$ *tels que* $|b_\lambda(\mu)| \leqslant \varepsilon$. *Alors nous avons*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1-|\lambda|^2}{1-|\mu|^2} \leqslant 2\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

Preuve Grâce à un lemme de Vinogradov-Havin (voir [35]), on a

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \leqslant \frac{1-|\lambda|}{1-|\mu|} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Il suffit alors de noter que $1-|\lambda| \leqslant 1-|\lambda|^2 \leqslant 2(1-|\lambda|)$. □

Lemme 1.3.17 *Soit* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite dans* $\mathbb{D}$ *vérifiant la condition de Carleson et soit* $\delta = \delta(\Lambda)$ *sa constante de Carleson. Soit* $0 < \lambda < 1$. *Si* $\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} < \delta$ *et*

$$|b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| \leqslant \lambda, \quad n \geqslant 1$$

alors $\Lambda' := (\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \in (C)$ *et, plus précisément, on a*

$$\delta(\Lambda') \geqslant \frac{\delta - 2\lambda/(1+\lambda^2)}{1-2\lambda\delta/(1+\lambda^2)}.$$

Preuve Voir [27], Chap. VII, page 310, par exemple. □

Remarque 1.3.18 Ce lemme signifie, en fait, que $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est (ε_n)-stable, pour la propriété de suite basique inconditionnelle, dès que $\sup_{n\geqslant 1} \varepsilon_n < \lambda$.

Si $\lambda = \delta/3$, nous avons

$$\delta(\Lambda') \geqslant \delta/3.$$

Si $\lambda = \delta/2$, alors

$$\delta(\Lambda') \geqslant \delta^3.$$

Lemme 1.3.19 *Soit* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in (C)$ *tel que* $\delta(\Lambda) \geqslant \delta > 0$. *Alors, pour toute fonction* $f \in H^q$, *on a*

$$\sum_{n\geqslant 1} |f(\lambda_n)|^q (1-|\lambda_n|^2) \leqslant 32(1+2\log 1/\delta)\|f\|_q^q.$$

Preuve Pour $q = 2$, voir [53]. Pour $q \neq 2$, en utilisant la factorisation de Riesz-Smirnov, on se ramène aisément au cas Hilbertien. □

Lemme 1.3.20 *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in (C)$ et $\delta = \delta(\Lambda)$ sa constante de Carleson. Considérons $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telle que*

$$|b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| \leqslant \varepsilon < \frac{\delta}{2}, \quad \forall n \geqslant 1 .$$

Alors, pour toute fonction $f \in H^q$, on a

$$\sum_{n\geqslant 1} |f(\lambda_n) - f(\lambda'_n)|^q (1-|\lambda'_n|^2) \leqslant 64(1+6\log 1/\delta)\left(\frac{1+\varepsilon+\delta/2}{1-\varepsilon-\delta/2}\right)\left(\frac{2\varepsilon}{\delta/2-\varepsilon}\right)^q \|f\|_q^q .$$

Preuve Posons

$$g(z) := \frac{f(z) - f(\lambda'_n)}{b_{\lambda'_n}(z)} .$$

Alors, il est facile de voir que $g \in H^q$. Comme $\overline{\Omega(\lambda_n, \delta/2)} \subset \mathbb{D}$, on peut appliquer le principe du maximum. Par conséquent,

$$|g(\lambda_n)| \leqslant \sup_{\xi\in\partial\Omega(\lambda_n,\delta/2)} |g(\xi)| .$$

Si $\xi \in \partial\Omega(\lambda_n, \delta/2)$, nous avons $|b_{\lambda'_n}(\xi)| \geqslant \big||b_{\lambda'_n}(\lambda_n)| - |b_{\lambda_n}(\xi)|\big| \geqslant \delta/2 - \varepsilon$. D'où

$$\left|\frac{f(\lambda_n) - f(\lambda'_n)}{b_{\lambda'_n}(\lambda_n)}\right| \leqslant \frac{1}{\delta/2-\varepsilon} \sup_{\xi\in\partial\Omega(\lambda_n,\delta/2)} |f(\xi) - f(\lambda'_n)| .$$

Considérons alors $u_n \in \partial\Omega(\lambda_n, \delta/2)$ tel que

$$|f(u_n)| = \sup_{\xi\in\partial\Omega(\lambda_n,\delta/2)} |f(\xi)| .$$

Nous obtenons

$$\left|\frac{f(\lambda_n) - f(\lambda'_n)}{b_{\lambda'_n}(\lambda_n)}\right| \leqslant \frac{2}{\delta/2-\varepsilon}|f(u_n)| .$$

Par conséquent,

$$|f(\lambda_n) - f(\lambda'_n)|^q (1-|\lambda'_n|^2) \leqslant \left(\frac{2\varepsilon}{\delta/2-\varepsilon}\right)^q (1-|\lambda'_n|^2)|f(u_n)|^q .$$

D'autre part, comme $|b_{\lambda'_n}(u_n)| \leqslant |b_{\lambda'_n}(\lambda_n)| + |b_{\lambda_n}(u_n)| \leqslant \varepsilon + \delta/2$, le lemme 1.3.16 entraîne que

$$(1-|\lambda'_n|^2) \leqslant 2\left(\frac{1+\varepsilon+\delta/2}{1-\varepsilon-\delta/2}\right)(1-|u_n|^2) .$$

Donc

$$|f(\lambda_n) - f(\lambda'_n)|^q (1-|\lambda'_n|^2) \leqslant 2\left(\frac{2\varepsilon}{\delta/2-\varepsilon}\right)^q \left(\frac{1+\varepsilon+\delta/2}{1-\varepsilon-\delta/2}\right)(1-|u_n|^2)|f(u_n)|^q .$$

En outre, comme $|b_{\lambda_n}(u_n)| \leqslant \delta/2$, il suit du lemme 1.3.17 que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ satisfait la condition de Carleson et on a

$$\inf_{k\geqslant 1} \prod_{j\neq k} \left| \frac{u_k - u_j}{1 - \overline{u_k} u_j} \right| \geqslant \delta^3 .$$

En utilisant le lemme 1.3.19, on obtient

$$\sum_{n\geqslant 1} (1 - |u_n|^2)|f(u_n)|^q \leqslant 32(1 + 6 \log 1/\delta)\|f\|_q^q ,$$

ce qui achève la preuve. □

Preuve (du théorème 1.3.2) Soit $\varepsilon < \delta/2$ satisfaisant les relations (1.6) et (1.7). Soit $\Lambda' = (\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ tel que

$$\sup_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| < \varepsilon .$$

Le lemme 1.3.16 implique que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1 - |\lambda_n|^2}{1 - |\lambda'_n|^2} \leqslant 2\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) , \quad \forall n \geqslant 1 \tag{1.13}$$

D'autre part, nous avons

$$\left| \frac{\Theta(\lambda_n) - \Theta(\lambda'_n)}{b_{\lambda_n}(\lambda'_n)} \right| \leqslant \left\| \frac{\Theta - \Theta(\lambda'_n)}{b_{\lambda'_n}} \right\|_\infty = \|\Theta - \Theta(\lambda'_n)\|_\infty \leqslant 2 .$$

Donc $|\Theta(\lambda_n) - \Theta(\lambda'_n)| \leqslant 2\varepsilon$ et on a alors

$$\sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda'_n)| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} |\Theta(\lambda_n)| + 2\varepsilon < 1 .$$

Par conséquent, d'après le théorème 1.3.1, $(k_\Theta(., \lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de K^p_Θ si et seulement si l'opérateur $J_{\Theta,\Lambda'}$ est un isomorphisme de K^q_Θ sur $\ell^q((1 - |\lambda'_n|^2)^{1/q})$. En vertu du lemme 1.3.20, on a, pour toute fonction $f \in H^q$,

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} |f(\lambda_n) - f(\lambda'_n)|^q (1 - |\lambda'_n|^2) \right)^{1/q} \leqslant C(\delta, \varepsilon)\|f\|_q , \tag{1.14}$$

où

$$C(\delta, \varepsilon) := \left(64(1 + 6 \log 1/\delta) \left(\frac{1 + \varepsilon + \delta/2}{1 - \varepsilon - \delta/2} \right) \right)^{1/q} \left(\frac{2\varepsilon}{\delta/2 - \varepsilon} \right) .$$

Cela implique que $J_{\Theta,\Lambda'}$ est un opérateur continu de K^q_Θ dans $\ell^q((1 - |\lambda'_n|^2)^{1/q})$. Notons par U l'opérateur défini de $\ell^q((1 - |\lambda_n|^2)^{1/q})$ dans $\ell^q((1 - |\lambda'_n|^2)^{1/q})$ par

$$Ua := a , \qquad a \in \ell^q((1 - |\lambda_n|^2)^{1/q}) .$$

De l'inégalité (1.13), il est facile de voir que U est un isomorphisme et

$$\|U^{-1}\| \leqslant \left(2\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/q}.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} J_{\Theta,\Lambda'} &= UJ_{\Theta,\Lambda} + J_{\Theta,\Lambda'} - UJ_{\Theta,\Lambda} \\ &= UJ_{\Theta,\Lambda}\left(I + J_{\Theta,\Lambda}^{-1}U^{-1}(J_{\Theta,\Lambda'} - UJ_{\Theta,\Lambda})\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour prouver que $J_{\Theta,\Lambda'}$ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que

$$\|J_{\Theta,\Lambda}^{-1}\|\|U^{-1}\|\|J_{\Theta,\Lambda'} - UJ_{\Theta,\Lambda}\| < 1\,.$$

Mais l'inégalité (1.14) signifie précisément que

$$\|J_{\Theta,\Lambda'} - UJ_{\Theta,\Lambda}\| \leqslant \left(64(1+6\log 1/\delta)\left(\frac{1+\varepsilon+\delta/2}{1-\varepsilon-\delta/2}\right)\right)^{1/q}\left(\frac{2\varepsilon}{\delta/2-\varepsilon}\right),$$

et le résultat suit de (1.7). □

Preuve (du théorème 1.3.4) Soit $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ tel que

$$|b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| \leqslant \varepsilon := \sup_{n\geqslant 1} \varepsilon_n < \frac{\delta^6}{8}\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\,.$$

Comme $\dfrac{\delta^6}{8}\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma} < \dfrac{\delta}{2}$, on déduit, du lemme 1.3.17, que $\Lambda' := (\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathrm{C})$ et $\delta(\Lambda') \geqslant \delta^3$. En utilisant le critère de Hruschev, Nikolski et Pavlov (voir théorème 0.1.1), il reste à prouver que

$$\mathrm{dist}\,(\Theta\overline{B}_{\Lambda'}, H^\infty) < 1\,.$$

D'après un théorème de P. Jones et S. A. Vinogradov (voir, par exemple, [53], Lecture VIII, Sect. 4), il existe $f \in H^\infty$ satisfaisant

$$f(\lambda'_n) = B_\Lambda(\lambda'_n)\,, \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty \leqslant \frac{8}{\delta^6}\sup_{n\geqslant 1}|B_\Lambda(\lambda'_n)|\,.$$

Par conséquent, $B_\Lambda - f \in B_{\Lambda'}H^\infty$ et $\|f\|_\infty \leqslant \frac{8}{\delta^6}\varepsilon$. D'où

$$\mathrm{dist}\,(B_\Lambda\overline{B}_{\Lambda'}, H^\infty) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant \frac{8}{\delta^6}\varepsilon\,.$$

Soient $g, h \in H^\infty$ tels que

$$\|\Theta\overline{B}_\Lambda - h\|_\infty = \mathrm{dist}\,(\Theta\overline{B}_\Lambda, H^\infty) = \gamma\,, \tag{1.15}$$

et

$$\|B_\Lambda \overline{B}_{\Lambda'} - g\|_\infty = \text{dist }(B_\Lambda \overline{B}_{\Lambda'}, H^\infty) \leqslant \frac{8}{\delta^6}\varepsilon\,. \tag{1.16}$$

Remarquons que $\|g\|_\infty \leqslant \frac{8}{\delta^6}\varepsilon + 1$ et, de plus, comme $\Theta\overline{B}_{\Lambda'} - gh = \Theta\overline{B}_\Lambda(B_\Lambda\overline{B}_{\Lambda'} - g) + (\Theta\overline{B}_\Lambda - h)g$, on obtient

$$\text{dist }(\Theta\overline{B}_{\Lambda'}, H^\infty) \leqslant \|B_\Lambda\overline{B}_{\Lambda'} - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|\Theta\overline{B}_\Lambda - h\|_\infty\,,$$

et donc, d'après (1.15) et (1.16), on en déduit que

$$\text{dist }(\Theta\overline{B}_{\Lambda'}, H^\infty) \leqslant \frac{8}{\delta^6}\varepsilon + (\frac{8}{\delta^6}\varepsilon + 1)\gamma < 1\,.$$

□

Preuve (du théorème 1.3.14) En utilisant le lemme 1.3.13, on obtient que $R(\Lambda)$ et $R(\Lambda')$ sont des suites asymptotiquement orthonormales. Donc il existe des constantes c_N, $\widetilde{c}_N$, C_N, $\widetilde{C}_N$ qui tendent vers 1 et telles que, pour tout N suffisamment grand, on a

$$c_N \sum_{n \geqslant N} |a_n|^2 \|k_{\lambda_n}\|^2 \leqslant \Big\| \sum_{n \geqslant N} a_n k_{\lambda_n} \Big\|^2 \leqslant C_N \sum_{n \geqslant N} |a_n|^2 \|k_{\lambda_n}\|^2\,, \tag{1.17}$$

et

$$\widetilde{c}_N \sum_{n \geqslant N} |a_n|^2 \|k_{\lambda'_n}\|^2 \leqslant \Big\| \sum_{n \geqslant N} a_n k_{\lambda'_n} \Big\|^2 \leqslant \widetilde{C}_N \sum_{n \geqslant N} |a_n|^2 \|k_{\lambda'_n}\|^2\,. \tag{1.18}$$

Notons par $\Lambda_N = (\lambda_n)_{n \geqslant N}$ et $\Lambda'_N = (\lambda'_n)_{n \geqslant N}$. On a, alors

$$\begin{aligned}
\text{dist }(\Theta\overline{B}_{\Lambda_N}, H^\infty) &= \|H_{\Theta\overline{B_{\Lambda_N}}}\|\,, && \text{d'après le théorème de Sarason,}\\
&= \|P_-\Theta\overline{B_{\Lambda_N}}\| \\
&= \sup_{\substack{f \in H^2 \\ \|f\| \leqslant 1}} \|B_{\Lambda_N} P_- \overline{B_{\Lambda_N}}\Theta f\| \\
&= \|P_{B_{\Lambda_N}} | \Theta H^2\| \\
&= \|(P_{B_{\Lambda_N}} | \Theta H^2)^*\| \\
&= \|P_{\Theta H^2} | K_{B_{\Lambda_N}}\|\,,
\end{aligned}$$

où $H_{\Theta\overline{B_{\Lambda_N}}}$ est l'opérateur de Hankel à symbole $\Theta\overline{B_{\Lambda_N}}$ et $P_{\Theta H^2}$ est la projection orthogonale sur ΘH^2. De plus, d'après (1.17), on a

$$\begin{aligned}\Big\|P_{\Theta H^2}|K_{B_{\Lambda_N}}\sum_{n\geqslant N}a_nk_{\lambda_n}\Big\|^2 &= \Big\|\sum_{n\geqslant N}a_n\overline{\Theta}(\lambda_n)k_{\lambda_n}\Big\|^2\\ &\leqslant C_N\sum_{n\geqslant N}|a_n|^2|\Theta(\lambda_n)|^2\|k_{\lambda_n}\|^2\\ &\leqslant C_N\sup_{n\geqslant N}|\Theta(\lambda_n)|^2\sum_{n\geqslant N}|a_n|^2\|k_{\lambda_n}\|^2\\ &\leqslant \frac{C_N}{c_N}\sup_{n\geqslant N}|\Theta(\lambda_n)|^2\Big\|\sum_{n\geqslant 1}a_nk_{\lambda_n}\Big\|^2 .\end{aligned}$$

Donc $\|P_{\Theta H^2}|K_{B_{\Lambda_N}}\|\leqslant\sqrt{\frac{C_N}{c_N}}\sup_{n\geqslant N}|\Theta(\lambda_n)|$, ce qui implique que

$$\lim_{N\to\infty}\text{dist }(\Theta\overline{B}_{\Lambda_N},H^\infty)=0\,.$$

On montre de même que

$$\text{dist }(B_{\Lambda_N}\overline{B}_{\Lambda'_N},H^\infty)\leqslant\sqrt{\frac{\widetilde{C}_N}{\widetilde{c}_N}}\varepsilon\,.$$

Par conséquent, en raisonnant comme dans la preuve du théorème 1.3.4, on obtient que

$$\text{dist }(\Theta\overline{B}_{\Lambda'_N},H^\infty)\leqslant\sqrt{\frac{\widetilde{C}_N}{\widetilde{c}_N}}\varepsilon+(\sqrt{\frac{\widetilde{C}_N}{\widetilde{c}_N}}\varepsilon+1)\text{dist }(\Theta\overline{B}_{\Lambda_N},H^\infty)\,.$$

On peut alors choisir N suffisamment grand pour rendre la dernière quantité strictement plus petite que 1, dès que $\varepsilon<1$. □

Chapitre 2

Stabilité de la complétude pour les noyaux reproduisants

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier divers problèmes relatifs à la stabilité de la complétude pour les noyaux reproduisants de K_Θ^p. Pour une fonction intérieure Θ, nous rappelons que K_Θ^p désigne le sous-espace de H^p invariant par S^* défini par

$$K_\Theta^p := H^p \cap \Theta \overline{H_0^p},$$

où $H_0^p = zH^p$. Le problème de stabilité est le suivant : on se donne $1 < p < +\infty$, une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure de H^∞ tels que le système $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complet dans K_Θ^p. Si on perturbe la suite Λ ou (et) la fonction intérieure Θ, la question qui se pose est de savoir si le nouveau système $(k_{\Theta_1}(., \lambda_n'))_{n\geqslant 1}$ est complet dans $K_{\Theta_1}^p$.

Commençons par rappeler certaines propriétés élémentaires qui vont motiver cette question de stabilité.

(P 2.1) Soient $1 < p < +\infty$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$. Alors la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est complète dans H^p si et seulement si

$$\sum_{n\geqslant 1} (1 - |\lambda_n|) = +\infty,$$

(voir, par exemple, [60]).

(P 2.2) Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach et $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une application linéaire (ou antilinéaire), continue et à image dense dans $\mathcal{Y}$. Si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite complète dans $\mathcal{X}$ alors $(Tx_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans $\mathcal{Y}$.

En effet, comme T est linéaire (ou antilinéaire) et continue, on a

$$T\mathcal{X} = T\text{span}\,\{x_n \,:\, n\geqslant 1\} \subset \text{span}\,\{Tx_n \,:\, n\geqslant 1\}.$$

La densité de $T\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ permet alors de conclure que

$$\operatorname{span}\{Tx_n \,:\, n\geqslant 1\} = \mathcal{Y}\,.$$

$\square$

(P 2.3) Soient $1 < p < +\infty$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K^p_Θ, pour toute fonction intérieure Θ.

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|) = +\infty$.

En effet, $(ii) \Longrightarrow (i)$ découle de (P 2.1) et (P 2.2) appliqué à $T = P_\Theta \,:\, H^p \to K^p_\Theta$. $(i) \Longrightarrow (ii)$: supposons que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|) < +\infty$ et considérons $B := \displaystyle\prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}$ et $\Theta := zB$. Remarquons alors que $B = \overline{z}\Theta \in H^q \cap \Theta\overline{H^q_0} = K^q_\Theta$. De plus, $B(\lambda_n) = 0$, $n\geqslant 1$. Donc $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ n'est pas complète dans K^p_Θ. $\square$

Etant donné une fonction intérieure Θ fixée et une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, une question naturelle qui se pose alors est de trouver un critère en langage de Θ et Λ pour que la suite $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ soit complète dans K^p_Θ.
La propriété (P 2.3) montre qu'on peut, sans perte de généralité pour ce problème, supposer que $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke. Par conséquent, dans tout ce chapitre, sans qu'on le précise nécessairement et sauf mention expresse du contraire, les suites seront supposées être des suites de Blaschke sans multiplicité. Ce problème est encore ouvert même pour le cas particulier des exponentielles. Rappelons que si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, $a > 0$, et $\Theta := \Theta_a := \exp\left(a\dfrac{z+1}{z-1}\right)$, l'espace K_{Θ_a} s'identifie de façon unitaire à l'espace $L^2(0,a)$ et la complétude de la suite $(k_{\Theta_a}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ dans K_{Θ_a} est équivalente à la complétude de la suite $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ dans $L^2(0,a)$, $\mu_n := i\dfrac{1+\lambda_n}{1-\lambda_n}$ (voir introduction). Même dans ce cas particulier, le problème est encore loin d'être résolu. Les travaux les plus avancés restent ceux de A. Beurling et P. Malliavin qui ont donné une méthode pour calculer le rayon de complétude d'une suite d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ en fonction d'une certaine densité (voir [8] et [9] pour les travaux originaux, [45] pour une réinterprétation de ces résultats, [59] et [44] pour une présentation très complète du sujet). Rappelons que le rayon de complétude, pour une suite $M = (\mu_n)_{n\geqslant 1}$, est défini par

$$R(M) := \sup\left\{a > 0 \,:\, (\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1} \text{ est complète dans } L^2(-a,a)\right\}.$$

Mais, d'une part, la densité à partir de laquelle s'exprime le rayon de complétude est très difficile à calculer dans les applications et d'autre part, cela ne donne

pas un critère (au sens nécessaire et suffisant) pour la complétude. Ainsi, on ne possède aucun renseignement quant à la complétude des exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ dans $L^2(-R(M), R(M))$ lorsque $0 < R(M) < +\infty$, et elles peuvent, en fait, y être complètes aussi bien que non suivant les cas. Cela se voit par des exemples et jusqu'à présent, les résultats généraux sur cette question de complétude dans $L^2(-R(M), R(M))$ restent fragmentaires. Cela motive donc l'apparition de notre problème de stabilité: étant donné une famille $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ complète dans K_Θ, on veut caractériser les perturbations $(k_\Theta(., \mu_n))_{n\geqslant 1}$ qui restent encore complètes dans K_Θ.
Dans beaucoup de cas, la famille donnée est une petite perturbation d'une famille dont on sait déjà qu'elle est complète. Un critère de stabilité permettrait donc, dans beaucoup d'applications, de prouver la complétude des noyaux reproduisants.
Il faut également signaler que ce problème de stabilité est, en fait, lié à un problème d'unicité fondamental. En effet, si $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille complète dans un espace de Banach E, considérons les deux problèmes suivants:

(Pb 2.1) décrire $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ tel que si $f \in E^*$

$$\Big(|\langle f, e_n\rangle| \leqslant \varepsilon_n \|f\| \quad (\forall n \geqslant 1)\Big) \Longrightarrow f \equiv 0\,.$$

(Pb 2.2) décrire $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ tel que si $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset E$

$$\Big(\|f_n - e_n\| \leqslant \varepsilon_n \quad (\forall n \geqslant 1)\Big) \Longrightarrow \text{span}\,\{f_n \,:\, n \geqslant 1\} = E\,.$$

Alors, on a

Lemme 2.1.1 *(Pb 2.1) $\Longleftrightarrow$ (Pb 2.2)*

Preuve (Pb 2.1) $\Longrightarrow$ (Pb 2.2) : soit $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset E$ tel que $\|f_n - e_n\| \leqslant \varepsilon_n$, $\forall n \geqslant 1$ et considérons $f \in E^*$ tel que $\langle f, f_n\rangle = 0$, $\forall n \geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned} |\langle f, e_n\rangle| &= |\langle f, f_n - e_n\rangle| \\ &\leqslant \|f\| \|f_n - e_n\| \\ &\leqslant \varepsilon_n \|f\|\,. \end{aligned}$$

D'aprés (Pb 2.1), $f \equiv 0$ et donc par Hahn-Banach, span $\{f_n \,:\, n \geqslant 1\} = E$.
(Pb 2.2) $\Longrightarrow$ (Pb 2.1) : soit $f \in E^*$ tel que $|\langle f, e_n\rangle| \leqslant \varepsilon_n \|f\|$, $\forall n \geqslant 1$. On cherche à construire $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset E$ telle que

$$\|f_n - e_n\| \leqslant \varepsilon_n\,,\ \forall n \geqslant 1 \tag{2.1}$$

et

$$\langle f, f_n\rangle = 0\,,\ \forall n \geqslant 1\,. \tag{2.2}$$

Considérons

$$f_n := e_n - \frac{\langle f, e_n\rangle}{\|f\|} e \,,$$

où $e \in E$ est tel que $\|e\| = 1$, $\|f\| = \langle f, e\rangle$. On a alors $\|f_n - e_n\| = \frac{\|e\|}{\|f\|}|\langle f, e_n\rangle| \leqslant \varepsilon_n$, par hypothèse. De plus,

$$\begin{aligned}\langle f, f_n\rangle =& \langle f, e_n\rangle - \frac{\langle f, e_n\rangle}{\|f\|}\langle f, e\rangle \\ =& 0\,.\end{aligned}$$

La condition (2.1) implique que span $\{f_n \,:\, n \geqslant 1\} = E$ et donc (2.2) entraîne par Hahn-Banach que $f \equiv 0$. $\square$

Remarquons que le problème de l'existence d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ vérifiant (Pb 2.1) (et donc (Pb 2.2)) a été résolu par V. Gurarii et M. Meletidi (voir [28]). Mais ce théorème est un résultat de pure existence. Par conséquent, le problème intéressant qui subsiste est de trouver une estimation sur la décroissance des suites $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ qui garantissent l'unicité ou la stabilité de la complétude.

Le problème d'unicité (Pb 2.1) a été abondamment étudié dans le cas où $E = H^2(\mathbb{D})$ et $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de noyaux reproduisants. On peut alors reformuler ce problème de la façon suivante: étant donné une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telle que

$$\sum_{n\geqslant 1}(1 - |\lambda_n|) = +\infty \,, \tag{2.3}$$

on cherche à caractériser $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ tel que si $f \in H^2$ alors

$$\Big(|f(\lambda_n)| \leqslant \varepsilon_n \|f\| \quad (\forall n \geqslant 1)\Big) \Longrightarrow f \equiv 0\,.$$

S. Khavinson [41] a montré que si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ satisfait (2.3) et une condition de séparation et si $(\nu_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \nu_n = \infty$, alors si f est dans la classe de Nevanlinna, on a

$$\left(|f(\lambda_n)| \leqslant \exp\left(-\frac{\nu_n}{1 - |\lambda_n|}\right) \quad (\forall n \geqslant 1)\right) \Longrightarrow f \equiv 0\,.$$

Plus tard, toujours dans le même cadre, N. Danikas [18], W. Hayman [33] et Y. Lyubarskii- K. Seip [50] ont obtenu certaines améliorations portant sur la décroissance de $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$. Tout ceci motive donc l'apparition de notre problème de stabilité. Dans le cas particulier des systèmes d'exponentielles, R. Redheffer a beaucoup étudié cette stabilité (voir [58] et [59]).

Enfin, pour finir cette introduction, remarquons que le problème de complétude des noyaux reproduisants dans l'espace modèle K^p_Θ peut se reformuler dans le langage des opérateurs de Toeplitz. Avant de préciser cette reformulation, donnons une notation. Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ et $1 < p < +\infty$, on notera

$$\ker_p T_\varphi := \{f \in H^p \,:\, T_\varphi f = 0\}\,.$$

On a alors le résultat suivant :

Lemme 2.1.2 *Soient $1 < p < +\infty$, B un produit de Blaschke, à zéros simples, associé à une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure. Alors*

$$dim\ \ker_q T_{\overline{\Theta}B} = dim\ (K^q_\Theta \cap BH^q) = codim_{K^p_\Theta}\ (span\ \{k_\Theta(.,\lambda_n)\,:\, n\geqslant 1\})\ .$$

En particulier, les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $T_{\overline{\Theta}B} \,:\, H^q \longrightarrow H^q$ *est injectif.*

(ii) $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est complète dans* K^p_Θ.

(iii) $K^q_\Theta \cap BH^q = \{0\}$.

Le cas $p = q = 2$ trouve son origine dans [46] et est démontré dans [53], Lemme 97, Appendice 4, page 336. Nous démontrerons le cas général dans l'appendice.

De nombreux auteurs se sont intéressés à la structure des noyaux des opérateurs de Toeplitz. Dans [30], [31] et [32]), E. Hayashi a montré que si φ est une fonction de $L^\infty(\mathbb{T})$ telle que $\ker_2 T_\varphi \neq \{0\}$ alors on peut écrire

$$\ker_2 T_\varphi = GK^2_\Theta\,,$$

où $G \in H^2$ est tel que G^2 est un point exposé de H^1 et Θ est une fonction intérieure telle que $\Theta(0) = 0$. En utilisant un théorème de factorisation de Bourgain, K. Dyakonov [24] a caractérisé les sous-espaces de H^p, $1\leqslant p\leqslant +\infty$, qui coincident avec les noyaux des opérateurs de Toeplitz. De plus, étant donné une suite d'exposants $1 = p_0 < p_1 < \cdots < p_N = +\infty$ et une suite d'entiers $n_1 > n_2 > \cdots > n_N = 0$, il a construit deux produits de Blaschke B et b pour lesquels, pour tout $j = 1, \ldots, N$ on a

$$\dim\ \left(K^p_B \bigcap bH^p\right) = n_j, \quad \forall p \in [p_{j-1}, p_j)\,.$$

Signalons que les opérateurs de Toeplitz, comme les autres outils, n'ont pas permis, jusqu'à présent, de progrès visibles sur ce problème de la complétude des noyaux reproduisants dans K_Θ.

2.2 Une réduction aux fréquences à parties imaginaires positives

Dans cette section, nous allons voir que pour le problème de la complétude des systèmes d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ dans $L^2(-a,a)$, on peut supposer sans perte de généralité que $\Im m \mu_n > 0$, $n\geqslant 1$. Tout d'abord, rappelons une définition. Soient $M = (\mu_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes, $0 < |\mu_1|\leqslant|\mu_2|\leqslant|\mu_3|\leqslant \dots$ et $\mathcal{S} := \{z \,:\, \alpha < \arg z < \beta\}$, $\beta - \alpha < \pi$. On désigne par $n_M(r)$ le nombre de points de M de module $\leqslant r$ et par $n_M(r,\mathcal{S})$ le nombre de points de M dans $\mathcal{S}$ et de module $\leqslant r$. On a alors la définition suivante (voir par exemple [44]) :

Définition 2.2.1 *On dit que Λ est une distribution de Levinson de densité A lorsque les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) Si le secteur $\mathcal{S}$ inclut la demi-droite réelle soit positive, soit négative (voir Figure 2.1), on a

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n_M(r,\mathcal{S})}{r} = A\,.$$

Si la fermeture de $\mathcal{S}$ ne rencontre l'axe réel qu'à l'origine (voir Figure 2.2), on a

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n_M(r,\mathcal{S})}{r} = 0\,.$$

(ii) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left| \Im m \left(\frac{1}{\mu_k}\right)\right| < +\infty.$

(iii) $\displaystyle\sum_{|\mu_k|\leqslant r} \Re e \left(\frac{1}{\mu_k}\right)$ *tend vers une limite finie lorsque $r \to +\infty$.*

y

$\mathcal{S}$

x

Figure 2.1

y

$\mathcal{S}$

x

Figure 2.2

Pour démontrer la réduction annoncée, nous aurons besoin des deux résultats suivants :

Théorème 2.2.2 (Koosis, [44]) *Soit $M = (\mu_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes, $0 < |\mu_1|\leqslant|\mu_2|\leqslant|\mu_3|\leqslant \dots$. Alors M est une distribution de Levinson de densité A si et seulement si M vérifie (ii), (iii) et*

(i')
$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n_M(r)}{r} = 2A\,.$$

Théorème 2.2.3 (Levinson, [44]) *Supposons que la fonction entière*

$$f(z) := c\exp(az)z^m \prod_{k\geqslant 1}\left(1-\frac{z}{\mu_k}\right)\exp\left(\frac{z}{\mu_k}\right) \tag{2.4}$$

soit de type exponentiel et possède en outre les trois propriétés suivantes :

(a) $\displaystyle \limsup_{y\to+\infty} \frac{\log|f(iy)|}{y} + \limsup_{y\to+\infty} \frac{\log|f(-iy)|}{y} = 2\pi A,$

(b) $\displaystyle \limsup_{x\to+\infty} \frac{\log|f(x)|}{x} + \limsup_{x\to+\infty} \frac{\log|f(-x)|}{x} = 0,$

(c) $\displaystyle \int_1^R \frac{\log|f(x)f(-x)|}{x^2}\,dx$ *tend vers une limite finie lorsque $R\to+\infty$.*

Alors la suite $M = (\mu_k)_{k\geqslant 1}$ est une distribution de Levinson de densité A. Réciproquement, si $M = (\mu_k)_{k\geqslant 1}$ est une distribution de Levinson de densité A, le produit d'Hadamard (2.4) converge uniformément sur tout compact et représente une fonction entière $f(z)$ de type exponentiel avec les propriétés (a), (b) et (c).

Soit $M = (\mu_n)_{n\geqslant 1}$ une suite quelconque dans $\mathbb{C}$. Associons à cette suite M la suite $M^* = (\mu_n^*)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\mu_n^* := \begin{cases} \mu_n & \text{si } \Im m\mu_n \geqslant 0 \\ \overline{\mu_n} & \text{si } \Im m\mu_n < 0\,. \end{cases}$$

Théorème 2.2.4 *Soit $a > 0$. Alors les deux suites $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ et $(\exp(i\mu_n^* t))_{n\geqslant 1}$ sont complètes ou non simultanément dans $L^2(-a,a)$.*

Preuve Supposons que $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ ne soit pas complète dans $L^2(-a,a)$. Alors, d'après le théorème de Hahn-Banach, cela signifie qu'il existe une fonction $\psi \in L^2(-a,a)$, $\psi \not\equiv 0$, telle que

$$\int_{-a}^{a} \exp(i\mu_n t)\psi(t)\,dt = 0\,, \qquad n\geqslant 1\,.$$

De plus, quitte à réduire, la valeur de a, on peut supposer que supp $\psi = [-a, a]$. Considérons

$$f(z) := \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \psi(t) \exp(izt)\, dt\,.$$

Il est alors facile de vérifier que f est de type exponentiel a, que $f \in L^2(-\infty, +\infty)$ et $f(\mu_n) = 0$, $n \geqslant 1$. Notons par $\widetilde{M}$ la suite des zéros de f. D'après la factorisation d'Hadamard, on peut écrire

$$f(z) = cz^k \exp(bz) \prod_{\mu \in \widetilde{M}} \left(1 - \frac{z}{\mu}\right) \exp\left(\frac{z}{\mu}\right)\,.$$

De plus, on a (voir [43])

$$\limsup_{y \to +\infty} \frac{\log |f(iy)|}{y} + \limsup_{y \to +\infty} \frac{\log |f(-iy)|}{y} = 2a\,.$$

D'autre part, comme f est bornée sur l'axe réel ($|f(x)| \leqslant \|\psi\|_2$, $\forall x \in \mathbb{R}$), il est clair que f satisfait les propriétés (b) et (c) du théorème 2.2.3. Par conséquent, ce théorème entraîne que $\widetilde{M}$ est une distribution de Levinson de densité $A = \dfrac{a}{\pi}$. Il est alors facile de voir, d'après le théorème 2.2.2, que $\widetilde{M}^*$ est aussi une distribution de Levinson de densité $A = \dfrac{a}{\pi}$. Considérons la fonction

$$f^*(z) := cz^k \exp(bz) \prod_{\mu \in \widetilde{M}^*} \left(1 - \frac{z}{\mu}\right) \exp\left(\frac{z}{\mu}\right)\,.$$

La réciproque du théorème 2.2.3 entraîne alors que f^* est une fonction entière, de type exponentiel telle que

$$\limsup_{y \to +\infty} \frac{\log |f^*(iy)|}{y} + \limsup_{y \to +\infty} \frac{\log |f^*(-iy)|}{y} = 2a\,.$$

De plus, on vérifie que

$$|f^*(x)| = |f(x)|\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

et donc $f^* \in L^2(-\infty, +\infty)$. Notons par

$$b^* := \limsup_{y \to +\infty} \frac{\log |f^*(iy)|}{y}\,, \quad \text{et} \quad -a^* := \limsup_{y \to +\infty} \frac{\log |f^*(-iy)|}{y}\,.$$

D'après le théorème de Paley-Wiener, il existe donc $\phi \in L^2(a^*, b^*)$, $\phi \not\equiv 0$, telle que

$$f^*(z) = \frac{1}{2a} \int_{a^*}^{b^*} \phi(t) \exp(-izt)\, dt\,.$$

Comme $M^* \subset \widetilde{M}^*$, on a

$$\int_{a^*}^{b^*} \phi(t)\exp(-i\mu_n^* t)\, dt = 0\,, \quad n \geqslant 1\,,$$

ce qui prouve que $(\exp(i\mu_n^* t))_{n\geqslant 1}$ n'est pas complète dans $L^2(-b^*, -a^*)$. Puisque $b^* - a^* = 2a$ on obtient, par changement de variable, que $(\exp(i\mu_n^* t))_{n\geqslant 1}$ n'est pas complète dans $L^2(-a, a)$. Il est clair que la réciproque du raisonnement précédent est valable, ce qui achève la démonstration. □

Le lemme suivant sera souvent utile par la suite :

Lemme 2.2.5 *Soient* $(\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$, $1 < p < +\infty$, $a > 0$ *et* $\delta \in \mathbb{R}$. *Alors* $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ *est complète dans* $L^p(-a, a)$ *si et seulement si* $(\exp(i(\mu_n + i\delta)t))_{n\geqslant 1}$ *est complète dans* $L^p(-a, a)$

Preuve Il suffit de remarquer que l'application $\phi(t) \mapsto \phi(t)\exp(-\delta t)$ est un isomorphisme sur $L^p(-a, a)$ puis d'appliquer la propriété (P 2.2). □

En utilisant le théorème 2.2.4 et le lemme 2.2.5, on obtient immédiatement le

Corollaire 2.2.6 *Soient* $M = (\mu_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite quelconque dans* $\mathbb{C}$, $\delta > 0$ *et* $a > 0$. *Alors les deux suites* $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ *et* $(\exp(i(\mu_n^* + i\delta)t))_{n\geqslant 1}$ *sont complètes ou non simultanément dans* $L^2(-a, a)$.

Comme $\Im m(\mu_n^* + i\delta) = \Im m \mu_n^* + \delta \geqslant \delta > 0$, ce corollaire montre que pour le problème de la complétude des systèmes d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ dans $L^2(-a, a)$, on peut, sans perte de généralité, supposer que $\inf_{n\geqslant 1} \Im m \mu_n > 0$.

2.3 Perturbations des fréquences.

Le théorème suivant établit une condition de stabilité dans le cas des noyaux reproduisants, qui nous permettra de retrouver à la fois un résultat de R. Redheffer, un autre de K. Chan- S. Seubert et une généralisation d'un théorème de N. Levinson .

Théorème 2.3.1 *Soient* $1 < p < \infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ *et* Θ *une fonction intérieure dans* H^∞ *telle que* $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *soit complète dans* K_Θ^p. *Soit* $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ *telle que*

$$\sum_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| < +\infty\,. \tag{2.5}$$

Alors $(k_\Theta(., \lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ *est aussi complète dans* K_Θ^p.

Preuve Raisonnons par l'absurde. Supposons que $(k_\Theta(.,\lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ ne soit pas complète dans K^p_Θ. Par Hahn-Banach, il existe $f \in K^q_\Theta$, $f \not\equiv 0$, telle que $f(\lambda'_n) = 0$, pour tout $n\geqslant 1$, avec q l'exposant conjugué associé à p. Définissons par récurrence une suite de fonctions $(\phi_n)_{n\geqslant 1}$ dans H^q :

$$\phi_0 := f \,, \text{ et } \phi_n := \frac{b_{\lambda'_n} - b_{\lambda'_n}(\lambda_n)}{b_{\lambda'_n}}\phi_{n-1} \,,\, n\geqslant 1 \,.$$

Il est facile de vérifier que $\phi_n \in K^q_\Theta$, pour tout $n\geqslant 1$. De plus, $\phi_n(\lambda_k) = 0$, $\forall k\leqslant n$, et $\phi_n(\lambda'_k) = 0$, $\forall k > n$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\phi_n - \phi_{n-1}\|_q &= \left\| \frac{b_{\lambda'_n}(\lambda_n)}{b_{\lambda'_n}}\phi_{n-1} \right\|_q \\ &= |b_{\lambda'_n}(\lambda_n)| \|\phi_{n-1}\|_q \end{aligned} \tag{2.6}$$

Donc

$$(1 - |b_{\lambda'_n}(\lambda_n)|)\|\phi_{n-1}\|_q \leqslant \|\phi_n\|_q \leqslant (1 + |b_{\lambda'_n}(\lambda_n)|)\|\phi_{n-1}\|_q \,,$$

et par récurrence, on obtient

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(1 - |b_{\lambda'_k}(\lambda_k)|\Big)\|f\|_q \leqslant \|\phi_n\|_q \leqslant \prod_{k=1}^{n}\Big(1 + |b_{\lambda'_k}(\lambda_k)|\Big)\|f\|_q \,. \tag{2.7}$$

De l'hypothèse (2.5), on déduit que les deux produits infinis $\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1 - |b_{\lambda'_k}(\lambda_k)|\Big)$ et $\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1 + |b_{\lambda'_k}(\lambda_k)|\Big)$ sont convergents. Posons

$$c_i := \prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 + \varepsilon_i |b_{\lambda'_k}(\lambda_k)|\Big) \,, i = 1, 2 \,,$$

avec $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$. Alors (2.7) implique que

$$\|\phi_n\|_q \leqslant c_1 \|f\|_q \,,\ \forall n\geqslant 1 \,.$$

Nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} \|\phi_{n+p} - \phi_n\|_q &\leqslant \sum_{k=1}^{p} \|\phi_{n+k} - \phi_{n+k-1}\|_q \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{p} |b_{\lambda'_{n+k}}(\lambda_{n+k})| \|\phi_{n+k-1}\|_q \quad \text{d'après (2.6)} \,, \\ &\leqslant c_1 \|f\|_q \sum_{k=1}^{p} |b_{\lambda'_{n+k}}(\lambda_{n+k})| \quad \text{d'après (2.7)} \,. \end{aligned}$$

En utilisant (2.5), on a

$$\lim_{n,p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}|b_{\lambda'_{n+k}}(\lambda_{n+k})| = 0\,,$$

et on en déduit finalement que $(\phi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans K^q_Θ. Par conséquent, il existe $\phi\in K^q_\Theta$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\phi_n=\phi$, dans K^q_Θ. Nous obtenons, d'après (2.7), que

$$c_2\|f\|_q\leqslant\|\phi\|_q\,,$$

ce qui prouve que $\phi\not\equiv 0$. Comme $\phi(\lambda_n)=\lim_{p\to+\infty}\phi_p(\lambda_n)=0$, on en déduit que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ n'est pas complète dans K^p_Θ, ce qui contredit l'hypothèse. □

Il est clair que le théorème 2.3.1 admet l'analogue suivant dans le demi-plan supérieur.

Corollaire 2.3.2 *Soient $1<p<\infty$, $M=(\mu_n)_{n\geqslant 1}\subset\mathbb{C}_+$ et Θ une fonction intérieure de $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ telle que $(k_\Theta(.,\mu_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans $K^{+p}_\Theta:=H^p_+\cap\overline{zH^p_+}$. Soit $(\mu'_n)_{n\geqslant 1}\subset\mathbb{C}_+$ telle que*

$$\sum_{n\geqslant 1}|b^+_{\mu_n}(\mu'_n)|<+\infty\,. \tag{2.8}$$

Alors $(k_\Theta(.,\mu'_n))_{n\geqslant 1}$ est aussi complète dans K^{+p}_Θ.

Remarque 2.3.3 En reprenant le raisonnement utilisé, il est facile de voir que le théorème 2.3.1 et son corollaire restent valables dans le cas $(K^p_\Theta)^*$, $p=1,+\infty$, avec la topologie faible*.

Dans le cas, où $\Theta=0$, $K^p_\Theta=H^p$, on a un résultat de stabilité uniforme qui montre que le théorème 2.3.1 n'est pas optimal.

Théorème 2.3.4 *Soient $1<p<+\infty$, $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ une suite de noyaux reproduisants complète dans H^p et $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1}\subset\mathbb{D}$. Si*

$$\sup_{n\geqslant 1}|b_{\lambda_n}(\lambda'_n)|<1\,, \tag{2.9}$$

alors $(k_{\lambda'_n})_{n\geqslant 1}$ est aussi complète dans H^p.

Preuve Le lemme 1.3.16 implique que, sous l'hypothèse (2.9), on a $(1-|\lambda_n|)\asymp(1-|\lambda'_n|)$. La propriété (P 2.1), rappelée dans l'introduction, montre alors que les deux suites $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ et $(k_{\lambda'_n})_{n\geqslant 1}$ sont complètes ou non simultanément. □

Remarque 2.3.5 (1) Ce résultat est optimal, à savoir qu'il existe des suites $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telles que $\sup\limits_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| = 1$ avec $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ complète dans H^p alors que $(k_{\lambda'_n})_{n\geqslant 1}$ ne l'est pas. Par exemple, on peut prendre $\lambda_n := 1 - \dfrac{1}{n}$ et $\lambda'_n := 1 - \dfrac{1}{n^2}$, $n\geqslant 1$.

(2) L'exemple du système trigonométrique montre aussi qu'il existe un décalage entre le théorème 2.3.1 et certains résultats déjà connus pour les exponentielles. Passons au demi-plan supérieur, et considérons

$$\mu_n := n + i\,, \ \ \mu'_n := n + \delta_n + i\,, \ n \in \mathbb{Z}, \ \delta_n \in \mathbb{R}\,.$$

Un résultat de N. Levinson [48], qui découle en fait du théorème 0.1.2, permet d'affirmer que si

$$|\delta_n| \leqslant \frac{1}{2q}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}\,,$$

alors $(\exp(i\mu'_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ est complète dans $L^p(-\pi, \pi)$.

D'autre part, si on calcule $|b^+_{\mu_n}(\mu'_n)|$, le théorème 2.3.1 donne comme condition suffisante de stabilité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\delta_n|}{\sqrt{\delta_n^2 + 4}} < +\infty\,,$$

ce qui prouve que notre théorème est loin d'être optimal. Cependant, cet exemple montre aussi que le résultat 2.3.4 n'est plus valide pour les noyaux reproduisants de l'espace modèle K_Θ : il existe $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(\mu'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}_+$ telles que $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |b^+_{\mu_n}(\mu'_n)| < 1$ et $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ est complète dans $L^2(-\pi, \pi)$ alors que $(\exp(i\mu'_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ ne l'est pas. Considérons, par exemple, $\mu_n := n + i$ et

$$\begin{cases} \mu'_n := n + \dfrac{1}{4} + \varepsilon + i\,, & \text{pour } n\geqslant 1\,, \\ \mu'_0 := i\,, & \\ \mu'_n := n - \dfrac{1}{4} - \varepsilon + i\,, & \text{pour } n\leqslant -1\,. \end{cases}\,.$$

Clairement, $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ est complète dans $L^2(-\pi, \pi)$ (c'est même une base de Riesz!). De plus, N. Levinson a montré que $(\exp(i(\mu'_n - i)t))_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas complète dans $L^2(-\pi, \pi)$: il suffit de poser

$$c := \frac{1}{4} + \varepsilon\,, \quad \text{et} \quad \phi(t) := (\cos\frac{1}{2}t)^{2c-1} \sin\frac{1}{2}t\,.$$

Puis, on montre que $\phi \in L^2(-\pi, \pi)$ et $\phi \perp (\exp(i(\mu'_n - i)t))_{n\in\mathbb{Z}}$. Le lemme 2.2.5 permet alors de conclure. D'autre part, un calcul explicite montre facilement que $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |b^+_{\mu_n}(\mu'_n)| = \dfrac{\frac{1}{4} + \varepsilon}{\sqrt{(\frac{1}{4} + \varepsilon)^2 + 2}} < 1.$

Donnons maintenant les trois applications annoncées du théorème 2.3.1. Le premier résultat qu'on peut retrouver est un résultat de R. Redheffer [59].

Corollaire 2.3.6 *Soient* $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$, $(\mu'_n)_{n\geqslant 1}$ *deux suites réelles telles que*

$$\sum_{n\geqslant 1} |\mu_n - \mu'_n| < \infty\,.$$

Si $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ *est complète dans* $L^2(-a,a)$ *alors* $(\exp(i\mu'_n t))_{n\geqslant 1}$ *l'est aussi.*

Preuve Ce résultat se déduit aisément du lemme 2.2.5, du corollaire 2.3.2 et du calcul explicite suivant

$$\begin{aligned} |b^+_{\mu_n+i\delta}(\mu'_n+i\delta)| &= \frac{|\mu_n-\mu'_n|}{|\mu_n-\mu'_n+2i\delta|}, \\ &\leqslant \frac{1}{2\delta}|\mu_n-\mu'_n|\,, \end{aligned}$$

où δ est un nombre réel quelconque strictement positif. □

Dans [14], K. Chan et S. Seubert cherchent des conditions nécessaires et suffisantes pour que le noyau d'un opérateur de Toeplitz soit non trivial, dans le cas où le symbole est le quotient de deux fonctions intérieures. Ils montrent, en particulier, que si Θ_0 et Θ_1 sont deux fonctions intérieures telles que $\ker_2 T_{\overline{\Theta}_0\Theta_1} \neq \{0\}$ alors

$$\mathbb{T}\cap\sigma(\Theta_1) \subset \mathbb{T}\cap\sigma(\Theta_0)\,.$$

Si Θ_0 et Θ_1 sont deux produits de Blaschke infinis, cette condition signifie que les zéros de Θ_1 ne peuvent s'accumuler qu'aux points de $\mathbb{T}$ où ceux de Θ_0 s'accumulent. En d'autres termes, les zéros de Θ_1 doivent être, en un certain sens, proches de ceux de Θ_0. Dans le résultat qui suit, K. Chan et S. Seubert donnent une condition suffisante portant sur cette proximité des zéros pour que $\ker_2 T_{\overline{\Theta}_0\Theta_1} \neq \{0\}$. Nous obtenons, en fait, ce résultat comme corollaire du théorème 2.3.1.

Corollaire 2.3.7 *Soient* $1<p<+\infty$, B_1 *un produit de Blaschke associé à une suite de Blaschke* $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ *et* Θ_0 *une fonction intérieure qui s'annule en* $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$. *Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n-\beta_n|}{1-|\alpha_n|} < \infty\,,$$

et si Θ_0 *possède au moins un autre zéro en dehors des* α_n, *alors* $\ker_q T_{\overline{\Theta}_0 B_1} \neq \{0\}$, *c'est-à-dire que* $(k_{\Theta_0}(.,\beta_n))_{n\geqslant 1}$ *n'est pas complète dans* $K^p_{\Theta_0}$.

Preuve Supposons que le système $(k_{\Theta_0}(.,\beta_n))_{n\geqslant 1}$ soit complet dans $K^p_{\Theta_0}$. Nous avons

$$\begin{aligned}|b_{\alpha_n}(\beta_n)| =& \frac{|\alpha_n-\beta_n|}{|1-\overline{\alpha}_n\beta_n|}\\ \leqslant& \frac{|\alpha_n-\beta_n|}{1-|\alpha_n|},,\end{aligned}$$

ce qui implique, d'après notre hypothèse, que

$$\sum_{n\geqslant 1}|b_{\alpha_n}(\beta_n)| < \infty\,.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème 2.3.1 et conclure que la suite $(k_{\Theta_0}(.,\alpha_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans $K^p_{\Theta_0}$. Mais, ceci est absurde car, si B désigne le produit de Blaschke associé à la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$, alors on a

$$\operatorname{span}_{K^p_\Theta}\{k_{\Theta_0}(.,\alpha_n)\,:\,n\geqslant 1\} = \operatorname{span}_{H^p}\{k_{\alpha_n}\,:\,n\geqslant 1\} = K^p_B\,,$$

et donc $K^p_B = K^p_{\Theta_0}$, ce qui est impossible puisque Θ_0 possède au moins un autre zéro en dehors des α_n. □

En 1940, N. Levinson [48] a montré que la complétude d'une suite d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ n'est pas altérée si l'une des fréquences μ_n est remplacée par une autre μ, avec $\mu\neq\mu_n$, $\forall n$. Le théorème 2.3.1 nous permet de retrouver ce résultat dans le cadre général des noyaux reproduisants.

Corollaire 2.3.8 *Soient $1<p<+\infty$, $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}\subset\mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure telle que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ soit complète dans K^p_Θ. Alors $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant N}\bigcup(k_\Theta(.,\lambda'_n))_{1\leqslant n<N}$ est complète dans K^p_Θ, pour toute suite finie $(\lambda'_n)_{1\leqslant n<N}$, $\lambda'_n\neq\lambda_i$, $\lambda'_n\neq\lambda'_m$.*

Preuve Il suffit de remarquer que si

$$\widetilde{\lambda_n} := \begin{cases}\lambda'_n\,: & 1\leqslant n<N\\ \lambda_n\,: & n\geqslant N\,,\end{cases}$$

alors

$$\sum_{n\geqslant 1}|b_{\lambda_n}(\widetilde{\lambda_n})| = \sum_{1\leqslant n<N}|b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| < +\infty\,,$$

et le théorème 2.3.1 implique que $(k_\Theta(.,\widetilde{\lambda_n}))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K^p_Θ. □

2.4 Perturbation de la fonction intérieure Θ.

Jusqu'à présent, nous avons uniquement étudié les effets de perturbations sur les "fréquences" $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ mais on peut aussi perturber la fonction intérieure Θ. Plus précisément, si $(k_{\Theta_1}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est une famille complète dans $K^p_{\Theta_1}$ et si Θ_2 est une autre fonction intérieure, quelle doit être la proximité entre Θ_1 et Θ_2 pour que $(k_{\Theta_2}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ soit une famille complète dans $K^p_{\Theta_2}$?

La première conjecture naturelle est de penser qu'il suffit que $\Theta_1(\lambda_n)$ soit proche de $\Theta_2(\lambda_n)$. Mais cela ne suffit pas comme le montre l'exemple suivant: soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke dans $\mathbb{D}$ et ζ un point de $\mathbb{D}$ tel que $\zeta \neq \lambda_n$, $\forall n\geqslant 1$. Notons

$$\Theta_1 := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}\,, \quad \text{et} \quad \Theta_2 := b_\zeta \Theta_1\,.$$

Alors $\Theta_1(\lambda_n) = \Theta_2(\lambda_n) = 0$, $\forall n\geqslant 1$ et $(k_{\Theta_1}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est une famille complète dans K_{Θ_1} alors que $(k_{\Theta_2}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ n'est pas complète dans $K^p_{\Theta_2}$. En effet,

$$\begin{aligned}\operatorname{span}\,\{k_{\Theta_2}(.,\lambda_n)\,:\,n\geqslant 1\} =& \operatorname{span}\,\{k_{\lambda_n}\,:\,n\geqslant 1\}\\ =& K^p_{\Theta_1} \subsetneqq K^p_{\Theta_2}\,.\end{aligned}$$

En fait, en utilisant les opérateurs de Toeplitz et leurs liens avec le problème de la complétude (voir lemme 2.1.2), nous allons montrer que, sous certaines hypothèses, on peut donner des conditions qui garantissent la stabilité de la complétude. Tout d'abord, rappelons un lemme de L. Coburn dont nous allons avoir besoin par la suite.

Lemme 2.4.1 (L. Coburn) *Si $1 < p < +\infty$ et $\varphi \in L^\infty$, $\varphi \not\equiv 0$, alors soit $\ker_q T_\varphi = \{0\}$ soit $\ker_p T^*_\varphi = \{0\}$.*

Pour le cas $p = q = 2$, nous renvoyons le lecteur à [16] ou [53], Appendice 4, page 318. Le cas général suit, en fait, exactement le même schéma et sa démonstration est reportée dans l'appendice.

En imposant une condition de Fredholm, nous obtenons un résultat de stabilité. Rappelons qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit *Fredholm* si $\dim \ker T < +\infty$, $\dim \ker T^* < +\infty$ et TH est fermé. Dans ce cas, *l'index* d'un tel opérateur est le nombre $\operatorname{ind} T$ defini par

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim \ker T^*\,.$$

Si φ est une fonction de $L^\infty(\mathbb{T})$ telle que T_φ est de Fredholm dans H^q alors $\operatorname{ind}_q T_\varphi$ désignera l'indice de T_φ vu comme opérateur de H^q dans H^q, c'est-à-dire, par définition,

$$\operatorname{ind}_q T_\varphi = \dim \ker_q T_\varphi - \dim \ker_p T^*_\varphi\,.$$

Théorème 2.4.2 *Soient $1 < p < +\infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ_1 une fonction intérieure dans H^∞. Supposons que l'opérateur de Toeplitz $T_{\overline{\Theta_1} B_\Lambda}$ soit Fredholm dans H^q. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute suite $\Lambda' = (\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et toute fonction intérieure Θ_2 satisfaisant*

$$\|B_\Lambda - B_{\Lambda'}\|_\infty < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\Theta_1 - \Theta_2\|_\infty < \varepsilon\,, \tag{2.10}$$

on a

$$\mathit{codim}_{K^p_{\Theta_1}}\left(\mathit{span}\ \{k_{\Theta_1}(.,\lambda_n)\ :\ n\geqslant 1\}\right) = \mathit{codim}_{K^p_{\Theta_2}}\left(\mathit{span}\ \{k_{\Theta_2}(.,\lambda'_n)\ :\ n\geqslant 1\}\right)\ .$$

Nous allons décomposer la preuve de ce théorème en 2 lemmes.

Lemme 2.4.3 *Soient $1 < q < +\infty$, Θ_1 et B_1 deux fonctions intérieures de H^∞. Supposons que l'opérateur de Toeplitz $T_{\overline{\Theta_1}B_1}$ soit de Fredholm dans H^q. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toutes fonctions intérieures Θ_2, B_2 satisfaisant*

$$\|\Theta_1 - \Theta_2\|_\infty < \varepsilon \quad \mathit{et} \quad \|B_1 - B_2\|_\infty < \varepsilon\,,$$

l'opérateur $T_{\overline{\Theta_2}B_2}$ est de Fredholm dans H^q et

$$\mathit{ind}_q\, T_{\overline{\Theta_1}B_1} = \mathit{ind}_q\, T_{\overline{\Theta_2}B_2}\,.$$

Preuve Comme $T_{\overline{\Theta_1}B_1}$ est de Fredholm dans H^q, il existe $\eta > 0$ tel que $T_{\overline{\Theta_1}B_1} + A$ est de Fredholm dans H^q, pour tout opérateur A satisfaisant $\|A\| < \eta$ (voir [39]). De plus, nous avons

$$\mathrm{ind}_q\ \left(T_{\overline{\Theta_1}B_1} + A\right) = \mathrm{ind}_q\ \left(T_{\overline{\Theta_1}B_1}\right)\ .$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|T_{\overline{\Theta_1}B_1} - T_{\overline{\Theta_2}B_2}\| &= \|T_{\overline{\Theta_1}B_1 - \overline{\Theta_2}B_2}\| \\
&= \sup_{\substack{f\in H^q \\ \|f\|_q\leqslant 1}} \|P_+(\overline{\Theta_1}B_1 - \overline{\Theta_2}B_2)f\|_q \\
&\leqslant \|\overline{\Theta_1}B_1 - \overline{\Theta_2}B_2\|_\infty \\
&\leqslant \|B_1 - B_2\|_\infty + \|\Theta_1 - \Theta_2\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Donc, si $\|B_1 - B_2\|_\infty < \frac{\eta}{2}$ et $\|\Theta_1 - \Theta_2\|_\infty < \frac{\eta}{2}$, alors $T_{\overline{\Theta_2}B_2} = T_{\overline{\Theta_1}B_1} + \left(T_{\overline{\Theta_2}B_2} - T_{\overline{\Theta_1}B_1}\right)$ est Fredholm dans H^q et

$$\mathrm{ind}_q\, T_{\overline{\Theta_1}B_1} = \mathrm{ind}_q\, T_{\overline{\Theta_2}B_2}\,.$$

□

Lemme 2.4.4 *Soient $1 < q < +\infty$, $\varphi\,,\,\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ telle que $\mathit{ind}_q\, T_\varphi = \mathit{ind}_q\, T_\psi$. Alors*

$$\mathit{dim}\ \mathit{ker}_q\, T_\varphi = \mathit{dim}\ \mathit{ker}_q\, T_\psi\,.$$

Preuve <u>Premier cas :</u> $\ker_q T_\varphi = \{0\}$. Alors $\mathrm{ind}_q\, T_\psi = \mathrm{ind}_q\, T_\varphi = -\dim\ \ker_p T^*_\varphi \leqslant 0$. Supposons que $\ker_q T_\psi \neq \{0\}$. Alors, d'après le lemme 2.4.1, nécessairement $\ker_p T^*_\psi = \{0\}$ et donc $\mathrm{ind}_q\, T_\psi = \dim\ \ker_q T_\psi > 0$, ce qui est absurde. Donc $\ker_q T_\psi = \{0\}$.

Deuxième cas : $\ker_q T_\varphi \neq \{0\}$. D'après le lemme 2.4.1, $\ker_p T_\varphi^* = \{0\}$ et donc $\mathrm{ind}_q T_\psi = \mathrm{ind}_q T_\varphi = \dim \ker_q T_\varphi > 0$. Un raisonnement analogue montre que $\ker_p T_\psi^* = \{0\}$ et donc $\mathrm{ind}_q T_\psi = \dim \ker_q T_\psi$. Par conséquent, on obtient

$$\dim \ker_q T_\varphi = \dim \ker_q T_\psi \,.$$

$\square$

Preuve (du théorème 2.4.2) D'après le lemme 2.4.3, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute suite $\Lambda' = (\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et toute fonction intérieure Θ_2 satisfaisant (2.10), l'opérateur $T_{\overline{\Theta_2 B_M}}$ est de Fredholm dans H^q et

$$\mathrm{ind}_q T_{\overline{\Theta_1 B_\Lambda}} = \mathrm{ind}_q T_{\overline{\Theta_2 B_{\Lambda'}}} \,.$$

Le lemme 2.4.4 entraîne alors que

$$\dim \ker_q T_{\overline{\Theta_1 B_\Lambda}} = \dim \ker_q T_{\overline{\Theta_2 B_{\Lambda'}}} \,,$$

ce qui est équivalent, d'après le lemme 2.1.2, à

$$\mathrm{codim}_{K^p_{\Theta_1}} \left(\mathrm{span}\,\{k_{\Theta_1}(.,\lambda_n) : n\geqslant 1\}\right) = \mathrm{codim}_{K^p_{\Theta_2}} \left(\mathrm{span}\,\{k_{\Theta_2}(.,\lambda'_n) : n\geqslant 1\}\right) \,.$$

$\square$

Si Θ_0 et Θ_1 sont deux fonctions intérieures, considérons l'application φ définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0,1] & \to & H^\infty \\ & t & \mapsto & \varphi(t) := t\Theta_1 + (1-t)\Theta_0 \,. \end{array}$$

Si on impose une condition de Fredholm sur les opérateurs $T_{\overline{\Theta}\varphi(t)}$, on a le résultat suivant:

Théorème 2.4.5 *Soient $1 < p < +\infty$, Θ, Θ_0 et Θ_1 trois fonctions intérieures dans H^∞. Supposons que, pour tout $t \in [0,1]$, $T_{\overline{\Theta}\varphi(t)}$ est de Fredholm dans H^q. Alors*

$$\mathrm{ind}_q T_{\overline{\Theta}\Theta_0} = \mathrm{ind}_q T_{\overline{\Theta}\Theta_1} \,.$$

En particulier, si $\Theta_0 = B_\Lambda$ et $\Theta_1 = B_{\Lambda'}$ sont deux produits de Blaschke à zéros simples, nous avons

$$\mathrm{codim}_{K^p_\Theta} \left(\mathrm{span}\,\{k_\Theta(.,\lambda_n) : n\geqslant 1\}\right) = \mathrm{codim}_{K^p_\Theta} \left(\mathrm{span}\,\{k_\Theta(.,\lambda'_n) : n\geqslant 1\}\right) \,.$$

Preuve Posons

$$\begin{array}{rccl} \phi : & [0,1] & \to & \mathbb{N} \\ & t & \mapsto & \mathrm{ind}_q T_{\overline{\Theta}\varphi(t)} \,. \end{array}$$

Rappelons que l'application ind est continue (voir [39]) et donc l'application ϕ est aussi continue. Comme $[0,1]$ est connexe et ϕ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, ϕ est nécessairement constante. Par conséquent,

$$\operatorname{ind}_q T_{\overline{\Theta}\Theta_0} = \operatorname{ind}_q T_{\overline{\Theta}\Theta_1} .$$

Dans le cas particulier où $\Theta_0 = B_\Lambda$ et $\Theta_1 = B_M$, il suffit d'appliquer les lemmes 2.1.2 et 2.4.4. □

Dans le cas où Θ_0 et Θ_1 sont des perturbations de Frostman d'une même fonction intérieure, il n'est pas nécessaire de supposer que $T_{\overline{\Theta}\varphi(t)}$ est Fredholm. Le cadre est le suivant: soit Θ une fonction intérieure. Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, notons par Θ_λ la "transformée de Frostman" de Θ, c'est-à-dire la fonction intérieure définie par

$$\Theta_\lambda := \frac{\Theta - \lambda}{1 - \overline{\lambda}\Theta} .$$

Pour préciser un peu plus les choses, nous allons avoir besoin de cette version améliorée du théorème de O. Frostman.

Théorème 2.4.6 (Frostman) *Soit Θ une fonction intérieure. Alors il existe un ensemble $\Omega \subset \mathbb{D}$, de mesure nulle, tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \Omega$, la fonction Θ_λ est un produit de Blaschke, à zéros simples.*

Preuve D'après le théorème de Frostman classique (voir [27] ou [53]), il existe $\Omega_0 \subset \mathbb{D}$, de mesure nulle, telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \Omega_0$, Θ_λ est un produit de Blaschke. D'autre part, il est facile de vérifier que

$$\Theta'_\lambda = \frac{(1 - |\lambda|^2)\Theta'}{(1 - \overline{\lambda}\Theta)^2} .$$

Considérons

$$\Omega := \Omega_0 \cup \Theta({\Theta'}^{-1}(0)) .$$

Comme Θ' est analytique, ${\Theta'}^{-1}(0)$ est dénombrable et donc $\Theta({\Theta'}^{-1}(0))$ est de mesure nulle. Par conséquent, Ω est aussi de mesure nulle. De plus, si $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \Omega$, alors par définition, Θ_λ est un produit de Blaschke. Notons par $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des zéros de Θ_λ. Comme $\lambda \in {}^c\Theta({\Theta'}^{-1}(0))$, on a

$$\Theta'(\lambda_n) \neq 0 \quad \forall n \geqslant 1 .$$

En effet, supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $\Theta'(\lambda_{n_0}) = 0$. Alors, $\lambda = \Theta(\lambda_{n_0}) \in \Theta({\Theta'}^{-1}(0))$, ce qui est absurde. Par conséquent,

$$\Theta'_\lambda(\lambda_n) \neq 0 \quad \forall n \geqslant 1 ,$$

et Θ_λ est bien un produit de Blaschke à zéros simples.

□

On a alors le résultat suivant

Théorème 2.4.7 *Soient* $1 < p < +\infty$, Θ_1 *et* Θ *deux fonctions intérieures. Alors*

$$\textit{dim ker}_q\, T_{\overline{\Theta}_1\Theta_\lambda} \equiv cte, \quad et \quad \textit{dim ker}_q\, T_{\Theta_1\overline{\Theta}_\lambda} \equiv cte, \quad \forall\lambda \in \mathbb{D}\,.$$

D'autre part, si λ, $\lambda' \in \mathbb{D} \setminus \Omega$, *avec* $\Theta_\lambda := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}$ *et* $\Theta_{\lambda'} := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda'_n}$, *on a*

$$\textit{codim}_{K^p_{\Theta_1}}\left(\textit{span}\,\{k_{\Theta_1}(.,\lambda_n) : n\geqslant 1\}\right) = \textit{codim}_{K^p_{\Theta_1}}\left(\textit{span}\,\{k_{\Theta_1}(.,\lambda'_n) : n\geqslant 1\}\right)\,.$$

Preuve Soit $\zeta \in \mathbb{D}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\Theta\overline{\Theta}_\zeta =& \Theta\frac{\overline{\Theta} - \overline{\zeta}}{1 - \zeta\overline{\Theta}}\\ =& \frac{1 - \overline{\zeta}\Theta}{1 - \zeta\overline{\Theta}}\\ =& \frac{h}{\overline{h}}\,,\end{aligned}$$

avec $h := 1 - \overline{\zeta}\Theta$. Comme

$$0 < 1 - |\zeta|\leqslant|h(z)|\leqslant 2\,,\ \forall z \in \mathbb{D}\,,$$

la fonction h est extérieure et $h, h^{-1} \in H^\infty$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}T_{\overline{\Theta}_1\Theta} =& T_{\overline{\Theta}_1\Theta_\zeta\overline{\Theta}_\zeta\Theta}\\ =& T_{\overline{\Theta}_1\Theta_\zeta\frac{h}{\overline{h}}}\\ =& (T_{h^{-1}})^* T_{\overline{\Theta}_1\Theta_\zeta} T_h\,.\end{aligned}$$

Comme $h, h^{-1} \in H^\infty$, les opérateurs T_h et $T_{h^{-1}}$ sont inversibles, et donc

$$\dim \ker_q T_{\overline{\Theta}_1\Theta_\zeta} = \dim \ker_q T_{\overline{\Theta}_1\Theta}\,.$$

On en déduit aussi que

$$T_{\Theta_1\overline{\Theta}} = T^*_{\overline{\Theta}_1\Theta} = T^*_h T_{\Theta_1\overline{\Theta}_\zeta} T_{h^{-1}}\,,$$

et donc

$$\dim \ker_q T_{\Theta_1\overline{\Theta}_\zeta} = \dim \ker_q T_{\Theta_1\overline{\Theta}}\,.$$

Si λ, $\lambda' \in \mathbb{D} \setminus \Omega$, avec $\Theta_\lambda := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}$ et $\Theta_{\lambda'} := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda'_n}$ deux produits de Blaschke à zéros simples, il suffit d'appliquer le lemme 2.1.2. $\square$

Corollaire 2.4.8 *Soit Θ une fonction intérieure de H^∞. Alors il existe une suite de Blaschke $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telle que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K^p_Θ, pour tout $1 < p < +\infty$.*

Preuve D'après le théorème 2.4.7, on a

$$\dim \ker_q T_{\overline{\Theta}\Theta_\lambda} \equiv \text{cte}\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}\,.$$

D'autre part, $T_{\overline{\Theta}\Theta_0} = T_{\overline{\Theta}\Theta} = T_{\mathbb{I}}$ où $\mathbb{I}$ désigne l'application identiquement égale à 1 et donc

$$\dim \ker_q T_{\overline{\Theta}\Theta_\lambda} = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}\,.$$

Il suffit alors de choisir $\lambda \in \mathbb{D}$ tel que $\Theta_\lambda := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}$ soit un produit de Blaschke à zéros simples, ce qui est possible d'après le théorème 2.4.6 $\square$

Remarque 2.4.9 Dans [53], N. Nikolski a posé la question suivante: étant donnée une fonction intérieure Θ arbitraire, existe-t-il une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telle que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ forme une base inconditionnelle de K^2_Θ?
Dans [21], K. Dyakonov a obtenu le résultat suivant: il y a une constante absolue $N \in \mathbb{N}$ telle que, pour toute fonction intérieure Θ, il existe un produit de Blaschke B d'interpolation et vérifiant

$$\text{dist}\,(B, \Theta H^\infty) < 1\,, \quad \text{et} \quad \text{dist}\,(\Theta^N, BH^\infty) < 1\,.$$

Une amélioration de ce résultat avec $N = 1$ permettrait de répondre par l'affirmative au problème posé par N. Nikolski. Cependant, jusqu'à présent ce problème reste ouvert.
Le corollaire 2.4.8 montre que l'analogue de cette question pour la complétude admet une réponse positive.

Chapitre 3

Complétude de la biorthogonale pour les noyaux reproduisants

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la complétude de la biorthogonale pour les noyaux reproduisants. On se donne $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure de H^∞ telle que la suite $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complète et minimale dans K_Θ. Nous nous demandons alors si la biorthogonale à $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est, elle aussi, complète dans K_Θ.

La notion des systèmes biorthogonaux pour l'étude des bases dans un espace de Hilbert séparable est fondamentale (voir [49] et [63]). Nous commençons par rappeler quelques définitions et faits élémentaires.

Définition 3.1.1 *Deux suites $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $(g_n)_{n\geqslant 1}$ d'un espace de Hilbert H sont dites biorthogonales si*

$$\langle f_n, g_m\rangle = \delta_{nm}\,.$$

Par abus de langage, on dit que $(g_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite (ou le système) biorthogonale à $(f_n)_{n\geqslant 1}$.
Une suite qui admet un sytème biorthogonal est dite minimale.

En utilisant le théorème de Hahn-Banach, il est facile de voir qu'une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est minimale si et seulement si

$$\text{dist}\,\left(\frac{f_n}{\|f_n\|},\ \text{span}\,\{f_k\,,\,k\neq n\}\right) > 0\,,\,\forall n\geqslant 1\,.$$

Dans ce cas, le système biorthogonal est uniquement déterminé si et seulement si la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est complète.

Définition 3.1.2 *Une suite qui est à la fois minimale et complète est dite exacte.*

En dépit de l'apparente symétrie de la définition, il est clair que la propriété de complétude pour une suite minimale n'est, en général, pas héritée par sa biorthogonale. En effet, considérons $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormale d'un espace de Hilbert H de dimension infinie. Alors, il est facile de voir que $(e_n+e_1)_{n\geqslant 2}$ est exacte dans H alors que sa biorthogonale $(e_n)_{n\geqslant 2}$ n'est pas complète dans H. $\square$

Un fait bien connu (voir par exemple [53]) affirme que pour les noyaux reproduisants dans H^2, la situation est totalement différente. Nous allons donner trois preuves de ce résultat dont les deux premières qui nous semblent nouvelles.

Théorème 3.1.3 *Soit B un produit de Blaschke associé à une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$. Alors la famille biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est exacte dans K_B.*

Preuve Tout d'abord, remarquons que la biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est donnée par

$$g_n = c_n \frac{B}{z-\lambda_n}\,,\ n\geqslant 1\,,$$

où $c_n = (1-|\lambda_n|^2)B_n(\lambda_n)^{-1}$ et $B_n = \dfrac{B}{b_{\lambda_n}}$.

La première démonstration repose sur le théorème de Hahn-Banach. Soit $f \in K_B$, $f \perp g_n$, $n\geqslant 1$. Il s'agit de montrer que $f \equiv 0$.

On a

$$\begin{aligned} 0 =&\langle f, g_n\rangle = \overline{c_n}\langle f, \frac{B}{z-\lambda_n}\rangle = \overline{c_n}\langle f, \frac{B_n}{1-\overline{\lambda_n}z}\rangle \\ =&\overline{c_n}\langle \overline{B_n}f, k_{\lambda_n}\rangle = \overline{c_n}\langle P_+\overline{B_n}f, k_{\lambda_n}\rangle\,. \end{aligned}$$

D'où

$$(P_+\overline{B_n}f)(\lambda_n) = 0\,,\ \forall n\geqslant 1\,. \tag{3.1}$$

En utilisant le fait bien connu que $K_B = H^2 \cap BH^2_-$ (voir [53], Lecture II, Lemme sur Lat S^*), on a $P_+\overline{B}f = 0$, c'est-à-dire $P_+\overline{b_{\lambda_n}B_n}f = 0$, soit $P_+\overline{b_{\lambda_n}}P_+\overline{B_n}f = 0$. Donc

$$P_+\overline{B_n}f \in H^2 \cap b_{\lambda_n}H^2_- = K_{b_{\lambda_n}}\,.$$

Or $K_{b_{\lambda_n}} = \mathbb{C}k_{\lambda_n}$. Par conséquent, il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que $P_+\overline{B_n}f = a_n k_{\lambda_n}$. D'après 3.1, on en déduit que $a_n = 0$, $\forall n\geqslant 1$. D'où $P_+\overline{B_n}f = 0$, $\forall n\geqslant 1$, c'est-à-dire $f \in K_{B_n}$, $\forall n\geqslant 1$. Or

$$\bigcap_{n\geqslant 1} K_{B_n} = \{0\}$$

(voir [53], Lecture I, Corollaire 8). Donc $f \equiv 0$.

La deuxième démonstration repose uniquement sur l'existence d'une application antilinéaire, isométrique et surjective de K_B sur K_B et qui transforme $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ en $(c_n^{-1}g_n)_{n\geqslant 1}$.

Définissons

$$\begin{array}{rccl} U : & K_B & \to & K_B \\ & f(z) & \mapsto & \overline{z}B(z)\overline{f(z)}, . \end{array}$$

Il est clair que U est antilinéaire et isométrique. De plus, en utilisant le fait que $K_B = H^2 \cap BH^2_-$, il est facile de voir que U est surjective. En effet,

$$f \in K_B \Longleftrightarrow \overline{z}B\overline{f} \in \overline{z}B(\overline{H^2} \cap \overline{B}\overline{H^2_-}) = \overline{z}B\overline{H^2} \cap \overline{z}\overline{H^2_-} = BH^2_- \cap H^2 = K_B \,.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} U(k_{\lambda_n}) =& \overline{z}B(z)\frac{1}{1-\lambda_n\overline{z}} \\ =& \frac{B(z)}{z-\lambda_n} \\ =& c_n^{-1}g_n \,. \end{aligned}$$

La propriété (P 2.2), rappelée au chapitre 2, entraîne alors que

$$\text{span } \{g_n \,:\, n\geqslant 1\} = \text{span } \{c_n^{-1}g_n \,:\, n\geqslant 1\} = \text{span } \{Uk_{\lambda_n} \,:\, n\geqslant 1\} = K_B \,.$$

La troisième démonstration est celle donnée par N. Nikolski (voir [53], Lecture VIII, Exemple 1, page 194). En fait, la complétude de la biorthogonale va découler du fait que si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke, la suite de noyaux reproduisants $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ forme une base de sommation dans K_B, c'est-à-dire qu'il existe une matrice infinie $A = (a_{nk})_{n,k\geqslant 1}$ telle que, pour tout $x \in K_B$, on a

$$x = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n\geqslant 1} a_{nk}\langle x, g_n\rangle k_{\lambda_n} \,.$$

Pour $p\geqslant 1$, on pose

$$B^{(p)} := \prod_{n\geqslant p} b_{\lambda_n} \,.$$

On montre alors que, pour tout $x \in K_B$, on a

$$B^{(p)}(M_B)^*x = \sum_{n=1}^{p-1} \overline{B^{(p)}(\lambda_n)}\langle x, g_n\rangle k_{\lambda_n} \,, \tag{3.2}$$

où M_B désigne l'opérateur modèle sur K_B, $M_B := P_B S_{|K_B}$. D'autre part, on a, pour tout $p\geqslant 1$,

$$\|B^{(p)}(M_B)^*\| \leqslant 1 \,,$$

et

$$B^{(p)}(M_B)^*k_{\lambda_n} = \overline{B^{(p)}(\lambda_n)}k_{\lambda_n} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} k_{\lambda_n} \,.$$

Le théorème de Banach-Steinhauss entraîne alors que, pour tout $x \in K_B$,

$$\lim_{p\to+\infty} B^{(p)}(M_B)^*x = x \,,$$

et (3.2) implique donc que

$$x = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n\geqslant 1} \overline{B^{(p)}(\lambda_n)} \langle x, g_n \rangle k_{\lambda_n} .$$

□

En 1981, R. Young [74] a montré que pour les sytèmes d'exponentielles complexes, la situation est la même : si une suite d'exponentielles complexes $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans $L^2(-\pi,\pi)$, alors sa suite biorthogonale est aussi exacte.
En 1996, dans un manuscrit privé, Y. Lyubarskii a redonné une preuve un peu différente de ce résultat. La question naturelle qui se pose alors est : qu'en est-il pour les familles de noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ dans K_Θ?
Tout d'abord, donnons une condition nécessaire simple qui sera utile dans la réduction que nous ferons pour ce problème (voir §3.3).
(P 3.1) : si $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans K_Θ alors $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke.

En effet, si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas de Blaschke alors

$$\text{span}\,\{k_\Theta(.,\lambda_n)\ :\ n\geqslant 2\} = K_\Theta\,,$$

ce qui contredit la minimalité de la suite. □

Par conséquent, sans perte de généralité pour le problème de la complétude de la biorthogonale, on peut supposer que $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke, sans multiplicité.
Sous l'hypothèse $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in (CN)$, S. Avdonin et S. Ivanov [2] ont montré que

$$(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1} \text{ exacte dans } K_\Theta \Longrightarrow \text{ sa biorthogonale est aussi exacte dans } K_\Theta\,.$$

Mais, sans cette hypothèse, le problème général reste ouvert.

3.2 Un résultat de complétude pour la biorthogonale des noyaux reproduisants

En reprenant les idées de R. Young et en imposant une condition sur Θ, nous allons maintenant donner un résultat de complétude pour la biorthogonale. Pour cela, nous allons passer au demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C}\ :\ \Im m z > 0\}$.

Théorème 3.2.1 *Soit Θ une fonction intérieure dans $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ telle que $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $M = (\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}_+$ telle que $(k_\Theta(.,\mu_n))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans K_Θ^+. Alors, sa biorthogonale, $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$, est aussi exacte dans K_Θ^+.*

Pour la preuve de ce théorème, nous allons avoir besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.2.2 *Soit Θ une fonction intérieure dans $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ telle que $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors, il existe une suite $(\gamma_p)_{p\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$ et $|c| = 1$ tels que $\Theta(\gamma_p) = c$, $p\geqslant 1$, et la famille*

$$\left(k_\Theta(z,\gamma_p) := i\frac{1-\bar{c}\Theta(z)}{z-\gamma_p}\right)_{p\geqslant 1}$$

forme une base orthogonale de K_Θ^+. De plus, $\lim_{p\to+\infty} |\gamma_p| = +\infty$.

Preuve Comme $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$, la fonction Θ se prolonge analytiquement à travers tout l'axe réel (voir [22]). Repassons au disque unité, en considérant le changement de variable

$$\gamma \,:\, x \mapsto \frac{x-i}{x+i},$$

qui envoie la droite réelle $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{T}\setminus\{1\}$. Notons $\widetilde{\Theta} := \Theta \circ \gamma^{-1}$. Alors, $\widetilde{\Theta}$ est une fonction intérieure de $H^\infty(\mathbb{D})$, qui se prolonge analytiquement à travers $\mathbb{T}\setminus\{1\}$. En reprenant les notations standards (voir Chapitre I), on obtient donc que

$$\mathbb{T}\setminus E_{\widetilde{\Theta}} \subset \sigma(\widetilde{\Theta}) \subset \{1\}\,.$$

La condition suffisante pour appliquer le théorème de D. Clark est donc satisfaite (voir [34], Partie II, §5, ou §1.3.2 de cette thèse). Par conséquent, il existe $(\lambda_p)_{p\geqslant 1} \subset \mathbb{T}\setminus\{1\}$, $\lim_{p\to+\infty} \lambda_p = 1$, et $|c| = 1$ tels que $\widetilde{\Theta}(\lambda_p) \equiv c$ et $(k_{\widetilde{\Theta}}(.,\lambda_p))_{p\geqslant 1}$ forme une base orthogonale de $K_{\widetilde{\Theta}}$. Si U désigne l'opérateur unitaire défini sur $L^2(\mathbb{T})$ par

$$Uf(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{x+i} f\left(\frac{x-i}{x+i}\right)\,,\; x \in \mathbb{R}\,,$$

alors il est facile de vérifier (voir par exemple [34]) que

$$UK_{\widetilde{\Theta}} = K_{\widetilde{\Theta}\circ\gamma} = K_\Theta^+\,,$$

et U transforme les noyaux reproduisants de $K_{\widetilde{\Theta}}$ en noyaux reproduisants de K_Θ^+. Par conséquent, si $\gamma_p := \gamma^{-1}(\lambda_p) = i\frac{1+\lambda_p}{1-\lambda_p}$, la base orthogonale $(k_{\widetilde{\Theta}}(.,\lambda_p))_{p\geqslant 1}$ se transforme en une base orthogonale $(k_\Theta(.,\gamma_p))_{p\geqslant 1}$ pour K_Θ^+. Comme $\lim_{p\to+\infty}\lambda_p = 1$, il est clair que $\lim_{p\to+\infty} |\gamma_p| = +\infty$. □

Lemme 3.2.3 *Soient $f \in K_\Theta^+$ et $\mu \in \mathbb{C}_+$ tels que $f(\mu) = 0$. Alors $\dfrac{f}{z-\mu} \in K_\Theta^+$.*

Nous reportons la preuve de ce lemme à l'appendice.

Preuve (du théorème 3.2.1) Considérons $f := (z-\mu_1)\psi_1$. Il est clair que, $\forall n\geqslant 1$, $f(\mu_n) = 0$. Montrons que f n'a pas d'autres zéros.

Supposons qu'il existe $\mu \neq \mu_n$ tel que $f(\mu) = 0$. Alors nécessairement $\psi_1(\mu) = 0$ et donc ψ_1 est orthogonale à $(k_\Theta(.,\mu_n))_{n\geqslant 2} \cup (k_\Theta(.,\mu))$. D'autre part, l'analogue du corollaire 2.3.8 pour le demi-plan supérieur montre que $(k_\Theta(.,\mu_n))_{n\geqslant 2} \cup (k_\Theta(.,\mu))$ est complète dans K_Θ^+, ce qui entraîne une contradiction car $\psi_1 \not\equiv 0$.

Remarquons maintenant que, $\forall n\geqslant 1$, $f'(\mu_n) \neq 0$. En effet, supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $f'(\mu_{n_0}) = 0$. On a

$$f'(z) = \psi_1(z) + (z - \mu_1)\psi_1'(z)\,,$$

et donc $f'(\mu_1) = 1$ Nécessairement $n_0 \geqslant 2$ et $\psi_1'(\mu_{n_0}) = 0$. Considérons alors $\mu \neq \mu_n$, $n\geqslant 1$, et

$$g := \frac{z-\mu}{z-\mu_{n_0}}\psi_1\,.$$

On a $g = \psi_1 + (\mu_{n_0} - \mu)\dfrac{\psi_1}{z-\mu_{n_0}}$ et donc le lemme 3.2.3 montre que $g \in K_\Theta^+$. D'autre part, $g(\mu) = 0$ et $g(\mu_n) = 0$, $n\geqslant 2$. L'analogue du corollaire 2.3.8 pour le demi-plan supérieur permet encore d'aboutir à une contradiction. Par conséquent, $\forall n\geqslant 1$, $f'(\mu_n) \neq 0$.

Considérons alors, pour $n\geqslant 1$,

$$g_n := \frac{f}{f'(\mu_n)(z-\mu_n)}\,.$$

Le lemme 3.2.3 montre que $g_n \in K_\Theta^+$ et d'autre part, $g_n(\mu_k) = \delta_{nk}$. Par unicité de la biorthogonale, on en déduit que

$$\psi_n = g_n = \frac{f}{f'(\mu_n)(z-\mu_n)}\,,\ n\geqslant 1\,.$$

Soit $h \in K_\Theta^+$ telle que

$$\langle h, \psi_n\rangle = 0\,, \quad \forall n\geqslant 1\,. \tag{3.3}$$

Il s'agit de montrer que $h \equiv 0$.
D'après le lemme 3.2.2, il existe une suite $(\gamma_p)_{p\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$, $\Theta(\gamma_p) = c$, $p\geqslant 1$, telle que la famille

$$\left(k_\Theta(z,\gamma_p) := i\frac{1-\bar{c}\Theta(z)}{z-\gamma_p}\right)_{p\geqslant 1}$$

forme une base orthogonale de K_Θ^+. De plus, $\lim\limits_{p\to+\infty} |\gamma_p| = +\infty$.
Comme $h \in K_\Theta^+$, on peut écrire

$$h = \sum_{p\geqslant 1} a_p k_\Theta(.,\gamma_p)\,, \quad \text{avec} \quad \|h\|_2^2 = \sum_{p\geqslant 1} |a_p|^2 \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 < +\infty\,.$$

On obtient donc, en utilisant (3.3)

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{p\geqslant 1} \overline{a_p}\langle \psi_n, k_\Theta(.,\gamma_p)\rangle\,, \quad n\geqslant 1 \\ = & \sum_{p\geqslant 1} \overline{a_p}\psi_n(\gamma_p)\,, \quad n\geqslant 1 \\ = & \sum_{p\geqslant 1} \overline{a_p}\frac{f(\gamma_p)}{\gamma_p-\mu_n}\,, \quad n\geqslant 1\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Premier cas : il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_{p_0} = 0$.
Pour $p \neq p_0$, posons $c_p := \dfrac{\overline{a_p} f(\gamma_p)}{\gamma_p}$. Montrons que $(c_p)_{p\neq p_0} \in \ell^1$. On a

$$\begin{aligned} c_p =& \overline{a_p}\frac{(\gamma_p-\mu_1)\psi_1(\gamma_p)}{\gamma_p} \\ =& \underbrace{\frac{\gamma_p-\mu_1}{\gamma_p}}_{\text{borné}} \underbrace{\overline{a_p}\|k_\Theta(.,\gamma_p)\|}_{\in\ell^2} \underbrace{\langle\psi_1, \frac{k_\Theta(.,\gamma_p)}{\|k_\Theta(.,\gamma_p)\|}\rangle}_{\in\ell^2}\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que $(c_p)_{p\neq p_0} \in \ell^1$. Notons $r := \sum_{p\neq p_0} c_p$. D'après (3.4), on a

$$-\frac{\overline{a_{p_0}} f(\gamma_{p_0})}{\mu_n} + \sum_{p\neq p_0} c_p \frac{\gamma_p}{\gamma_p-\mu_n} = 0\,, \quad n\geqslant 1\,,$$

soit

$$-\frac{\overline{a_{p_0}} f(\gamma_{p_0})}{\mu_n} + r + \mu_n \sum_{p\neq p_0} \frac{c_p}{\gamma_p-\mu_n} = 0\,, \quad n\geqslant 1\,.$$

Considérons

$$g(z) := -i(1-\overline{c}\Theta(z))\left(-\overline{a_{p_0}} f(\gamma_{p_0})\frac{1}{z} + r + z\sum_{p\neq p_0}\frac{c_p}{\gamma_p - z}\right)\,.$$

On a $g(\mu_n) = 0$, $n\geqslant 1$. De plus,

$$g(z) = \underbrace{\overline{a_{p_0}} f(\gamma_{p_0}) k_\Theta(z,\gamma_{p_0})}_{\in K_\Theta^+} \underbrace{-ir(1-\overline{c}\Theta(z))}_{\in zK_\Theta^+} + z\sum_{p\neq p_0} c_p k_\Theta(z,\gamma_p)\,.$$

Montrons que $\sum_{p\neq p_0} c_p k_\Theta(z,\gamma_p) \in K_\Theta^+$.
On a

$$|c_p|^2\|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 = |a_p|^2\|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 \left|\frac{\gamma_p-\mu_1}{\gamma_p}\right|^2 |\psi_1(\gamma_p)|^2\,.$$

Or la condition $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ entraîne que $K_\Theta^+ \subset L^\infty(\mathbb{R})$ (voir [22]) et donc $(\psi_1(\gamma_p))_{p\geqslant 1}$ est bornée et donc la suite $\left(\dfrac{\gamma_p - \mu_1}{\gamma_p}\psi_1(\gamma_p)\right)_{p\neq p_0}$ est aussi bornée et donc

$$\sum_{p\neq p_0} |c_p|^2 \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 < +\infty\,,$$

ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{p\neq p_0} c_p k_\Theta(z,\gamma_p) \in K_\Theta^+$. Par conséquent, g s'écrit

$$g = g_1 + z g_2\,, \qquad \text{avec } g_1,\, g_2 \in K_\Theta^+\,.$$

Montrons que $\dfrac{g}{z-\mu_1} \in K_\Theta^+$.
On a $g = g_1 + (z-\mu_1)g_2 + \mu_1 g_2$, d'où

$$\frac{g}{z-\mu_1} = g_2 + \frac{g_1 + \mu_1 g_2}{z-\mu_1}\,.$$

Or $g_1 + \mu_1 g_2 \in K_\Theta^+$ et $(g_1+\mu_1 g_2)(\mu_1) = g_1(\mu_1) + \mu_1 g_2(\mu_1) = g(\mu_1) = 0$ et donc

$$\frac{g_1 + \mu_1 g_2}{z-\mu_1} \in K_\Theta^+\,.$$

Par conséquent, $\widetilde{g} := \dfrac{g}{z-\mu_1} \in K_\Theta^+$.
Si $\widetilde{g}(\mu_1) = 0$. Alors $\widetilde{g} \in K_\Theta^+$ et $\widetilde{g}(\mu_n) = 0$, $n\geqslant 1$. Comme la suite $(k_\Theta(.,\mu_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K_Θ^+, cela implique que $\widetilde{g} \equiv 0$, soit $g \equiv 0$. Or

$$g(\gamma_{p_0}) = \overline{a_{p_0}} f(\gamma_{p_0}) \|k_\Theta(.,\gamma_{p_0})\|^2\,,$$

et, pour $p \neq p_0$, on a

$$\begin{aligned} g(\gamma_p) &= \gamma_p c_p \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 \\ &= \overline{a_p} f(\gamma_p) \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2\,. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $p\geqslant 1$,

$$g(\gamma_p) = \overline{a_p} f(\gamma_p) \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2\,. \tag{3.5}$$

On obtient donc

$$\overline{a_p} f(\gamma_p) \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 = 0\,, \quad \forall p\geqslant 1\,,$$

et comme $f(\gamma_p) \neq 0$, on a $a_p = 0$, $p\geqslant 1$, ce qui donne $h \equiv 0$.
Si $\widetilde{g}(\mu_1) \neq 0$. Alors $g'(\mu_1) \neq 0$. La fonction

$$\frac{g}{g'(\mu_1)(z-\mu_1)} - \frac{f}{f'(\mu_1)(z-\mu_1)}$$

est dans K_Θ^+ et s'annule aux points μ_n, $n\geqslant 1$. Par conséquent, elle est identiquement nulle et donc il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que

$$g \equiv Af\,.$$

D'après (3.5),

$$Af(\gamma_p) = \overline{a_p} f(\gamma_p) \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2\,,$$

ce qui donne, comme $f(\gamma_p) \neq 0$,

$$\overline{a_p} \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 \equiv A\,.$$

D'où

$$|a_p|^2 \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 = \frac{|A|^2}{\|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2}\,.$$

D'autre part, on a

$$\|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 = |\Theta'(\gamma_p)| \leqslant \|\Theta'\|_\infty\,,$$

et donc

$$\frac{|A|^2}{\|\Theta'\|_\infty} \leqslant |a_p|^2 \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 \to 0\,,$$

ce qui implique nécessairement que $A = 0$ et donc $a_p = 0$, $p\geqslant 1$, c'est-à-dire $h \equiv 0$.

Deuxième cas : Pour tout $p\geqslant 1$, $\gamma_p \neq 0$. On raisonne en fait de la même manière, sans avoir à couper la somme définie par la relation (3.3). □

Montrons que ce théorème permet de retrouver le résultat de R. Young, dans le cas où $\inf\limits_{n\geqslant 1} \Im m \mu_n > -\infty$.

Corollaire 3.2.4 *Soit $M = (\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ telle que $\inf\limits_{n\geqslant 1} \Im m\mu_n > -\infty$.*
Si la suite d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans $L^2(-\pi,\pi)$ alors sa biorthogonale est aussi exacte dans $L^2(-\pi,\pi)$.

Nous allons avoir besoin du lemme général suivant, probablement connu, mais faute de références, nous en donnerons une preuve dans l'appendice.

Lemme 3.2.5 *Soient X, Y deux espaces de Hilbert tel qu'il existe un isomorphisme T entre X et Y. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de X et notons $y_n := Tx_n$, $n\geqslant 1$. Alors $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est exacte dans X si et seulement si $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est exacte dans Y. De plus, leurs biorthogonales sont complètes ou non simultanément.*

Preuve (du corollaire 3.2.4) Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $\inf\limits_{n\geqslant 1} \Im m\mu_n > c$. Définissons l'opérateur T sur $L^2(-\pi,\pi)$ par

$$(Tf)(t) := f(t)\exp(ct)\,, \quad t \in (-\pi,\pi)\,.$$

Il est facile de voir que T est un isomorphisme sur $L^2(-\pi,\pi)$ et de plus,

$$T\exp(i\mu_n t) = \exp(i(\mu_n - ic)t)\,.$$

D'autre part, comme $\Im m\,(\mu_n - ic) = \Im m\,\mu_n - c > 0$, $n\geqslant 1$, il est connu (voir introduction générale) que les suites $(\exp(i(\mu_n - ic)t))_{n\geqslant 1}$ et $(k_{\Theta_{2\pi}}(.,\mu_n - ic))_{n\geqslant 1}$ sont unitairement équivalentes, où $\Theta_{2\pi}$ est la fonction intérieure de $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ définie par

$$\Theta_{2\pi}(z) := \exp(2i\pi z)\,.$$

Par conséquent, les familles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ et $(k_{\Theta_{2\pi}}(.,\mu_n - ic))_{n\geqslant 1}$ sont isomorphes et le lemme 3.2.5 entraîne que $(k_{\Theta_{2\pi}}(.,\mu_n - ic))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans $K^+_{\Theta_{2\pi}}$. Comme $\Theta'_{2\pi} \in L^\infty(\mathbb{R})$ ($\|\Theta'_{2\pi}\|_\infty = 2\pi$), le théorème 3.2.1 implique que la biorthogonale à $(k_{\Theta_{2\pi}}(.,\mu_n - ic))_{n\geqslant 1}$ est complète dans $K^+_{\Theta_{2\pi}}$. En utilisant une nouvelle fois le lemme 3.2.5, on en déduit que la biorthogonale à $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ est complète dans $L^2(-\pi,\pi)$. □

Remarque 3.2.6 La condition $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ est vérifiée, par exemple, pour $\Theta(z) = \exp(iaz)B(z)$ où B est un produit de Blaschke d'interpolation pour lequel dist $(B^{-1}(0),\mathbb{R}) > 0$. En fait, J. Garnett (voir [27]) a montré que la condition $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ est équivalente à l'une des deux conditions suivantes :

(i) il existe $h > 0$ tel que $\inf\{|\Theta(z)| \,:\, 0 < \Im m z < h\} > 0$

(ii) Θ est inversible dans l'algèbre de Douglas $[H^\infty, \exp(-ix)]$, égale à l'algèbre engendrée par H^∞ et l'ensemble de toutes les fonctions uniformément continues et bornées sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, Dyakonov [22] a démontré que cette condition est également équivalente au plongement

$$K^{+p}_\Theta \subset K^{+q}_\Theta\,, \qquad \text{pour } 1 < p < q \leqslant +\infty\,.$$

3.3 Réduction au cas où Θ est un produit de Blaschke sans multiplicité

Dans ce paragraphe, nous donnons un résultat qui montre que l'étude de la complétude de la biorthogonale peut être réduite au cas où Θ est un produit de Blaschke sans multiplicité. Rappelons que si Θ est une fonction intérieure et $\lambda \in \mathbb{D}$, alors Θ_λ désigne la transformée de Frostman de Θ, c'est-à-dire la fonction intérieure définie par

$$\Theta_\lambda := \frac{\Theta - \lambda}{1 - \overline{\lambda}\Theta}\,.$$

Théorème 3.3.1 *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ une suite de Blaschke sans multiplicité et Θ une fonction intérieure de H^∞.*
(a) Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans K_Θ.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{D}$, $(k_{\Theta_\lambda}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans K_{Θ_λ}.

(iii) Il existe $\lambda \in \mathbb{D}$ tel que $(k_{\Theta_\lambda}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans K_{Θ_λ}.

(b) Supposons que l'une des trois conditions précédentes soient vérifiées et notons $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ la biorthogonale à $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ dans K_Θ et $(\widetilde{\psi}_n)_{n\geqslant 1}$ la biorthogonale à $(k_{\Theta_\lambda}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ dans K_{Θ_λ}. Alors

$$(\psi_n)_{n\geqslant 1} \text{ est exacte dans } K_\Theta \iff (\widetilde{\psi}_n)_{n\geqslant 1} \text{ est exacte dans } K_{\Theta_\lambda}\,.$$

Pour la preuve de ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.2 *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke sans multiplicité et Θ une fonction intérieure dans H^∞. Alors, $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans K_Θ si et seulement si*

$$\begin{cases} \ker T_{\overline{\Theta}B} = \{0\} \\ \text{et} \\ \dim \ker T_{\overline{\Theta}B_k} = 1\,,\ \forall k\geqslant 1 \end{cases}$$

Preuve Il est facile de voir que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans K_Θ si et seulement si

$$\begin{cases} \ker T_{\overline{\Theta}B} = \{0\} \\ \text{et} \\ \dim\ (K_\Theta \ominus \operatorname{span}\{k_\Theta(.,\lambda_n)\ :\ n\neq k\}) = 1\,,\ \forall k\geqslant 1 \end{cases}$$

Il suffit alors de remarquer que

$$K_\Theta \ominus \operatorname{span}\{k_\Theta(.,\lambda_n)\ :\ n \neq k\} = B_k \ker T_{\overline{\Theta}B_k}\,.$$

□

Preuve (du théorème 3.3.1) (a) On raisonne comme dans la preuve du théorème 2.4.7. Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \overline{\Theta}\Theta_\lambda &= \overline{\Theta}\frac{\Theta-\lambda}{1-\overline{\lambda}\Theta} \\ &= \frac{1-\lambda\overline{\Theta}}{1-\overline{\lambda}\Theta} \\ &= \frac{\overline{h}}{h} \end{aligned}$$

avec $h := 1 - \overline{\lambda}\Theta$. Comme

$$0 < 1 - |\lambda| \leqslant |h(z)| \leqslant 2\,, \quad \forall z \in \mathbb{D}\,,$$

la fonction h est extérieure et $h, h^{-1} \in H^\infty$. D'où

$$T_{\overline{\Theta}B} = T_{\overline{\Theta_\lambda}B\frac{\overline{h}}{h}} = T_h^* T_{\overline{\Theta_\lambda}B} T_{h^{-1}}\,.$$

Comme $h, h^{-1} \in H^\infty$, les opérateurs T_h et $T_{h^{-1}}$ sont inversibles. Donc

$$\begin{cases} \text{dim ker } T_{\overline{\Theta}B} = \text{dim ker } T_{\overline{\Theta_\lambda}B} \\ \text{et} \\ \text{dim ker } T_{\overline{\Theta}B} = \text{dim ker } T_{\overline{\Theta_\lambda}B}\,. \end{cases}$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 3.3.2 pour conclure la preuve de (a).
(b) Montrons que $T_h K_{\Theta_\lambda} = K_\Theta$.
Soit $f \in K_{\Theta_\lambda}$. On a

$$\begin{aligned} P_+\overline{\Theta}hf &= P_+\overline{\Theta_\lambda h}f \\ &= P_+\overline{h}P_+\overline{\Theta_\lambda}f \\ &= 0 \qquad\qquad \text{car } f \in K_{\Theta_\lambda}\,. \end{aligned}$$

D'où $T_h f \in H^2 \cap \Theta H^2_- = K_\Theta$, ce qui montre que

$$T_h K_{\Theta_\lambda} \subset K_\Theta\,.$$

Soit $g \in K_\Theta$. Définissons $f := h^{-1}g$. Comme $h^{-1} \in H^\infty$, $f \in H^2$ et on a

$$\begin{aligned} P_+\overline{\Theta_\lambda}f &= P_+\overline{\Theta_\lambda}h^{-1}g \\ &= P_+\overline{\Theta}\overline{h^{-1}}g \\ &= P_+\overline{h^{-1}}P_+\overline{\Theta}g \\ &= 0 \qquad\qquad \text{car } g \in K_\Theta\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que $f \in K_{\Theta_\lambda}$. Comme $T_h f = P_+ hf = hf = g$, on a $g \in T_h K_{\Theta_\lambda}$, ce qui prouve l'inclusion inverse

$$K_\Theta \subset T_h K_{\Theta_\lambda}\,.$$

Donc T_h est un isomorphisme de K_{Θ_λ} sur K_Θ. D'autre part, remarquons que

$$\begin{aligned} \langle T_h\widetilde{\psi}_k, k_\Theta(., \lambda_n)\rangle &= \langle h\widetilde{\psi}_k, k_\Theta(., \lambda_n)\rangle \\ &= h(\lambda_n)\widetilde{\psi}_k(\lambda_n) \qquad\qquad \text{car } h\widetilde{\psi}_k \in K_\Theta \\ &= 0\,, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si } n \neq k\,. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$T_h\widetilde{\psi}_k \in K_\Theta \ominus \operatorname{span}\{k_\Theta(.,\lambda_n) \,:\, n \neq k\}.$$

Or, par définition de la biorthogonale,

$$\psi_k \in K_\Theta \ominus \operatorname{span}\{k_\Theta(.,\lambda_n) \,:\, n \neq k\},$$

et, d'après le lemme 3.3.2,

$$\dim\left(K_\Theta \ominus \operatorname{span}\{k_\Theta(.,\lambda_n) \,:\, n \neq k\}\right) = 1.$$

Par conséquent, il existe $c_k \neq 0$ telle que

$$T_h\widetilde{\psi_k} = c_k\psi_k.$$

Il est alors clair que $(\widetilde{\psi}_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans K_{Θ_λ} si et seulement si $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans K_Θ, ce qui achève la preuve du théorème. □

Sans perte de généralité pour le problème de la complétude de la biorthogonale à $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$, ce théorème montre donc qu'on peut supposer que Θ est un produit de Blaschke sans multiplicité. En effet, d'après le théorème 2.4.6, on peut choisir $\lambda \in \mathbb{D}$ tel que Θ_λ est un produit de Blaschke sans multiplicité, puis on applique le théorème 3.3.1. Cependant, cette réduction n'a jusqu'à présent pas donné de résultats.

Chapitre 4

Remarques sur la surcomplétude des noyaux reproduisants

4.1 Introduction

Si on se donne une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans un espace de Banach $\mathcal{X}$, la question naturelle et classique qui se pose est de savoir si cette suite est complète ou non dans $\mathcal{X}$, c'est-à-dire si

$$\text{span}\,\{x_n \,:\, n\geqslant 1\} = \mathcal{X}\,.$$

Lié à cette question, il existe deux autres types de complétude : celle à défaut fini et celle à défaut infini ou surcomplétude. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier ce dernier type de complétude pour les noyaux reproduisants de l'espace K_Θ.

Rappelons tout d'abord la définition et quelques faits généraux.

Définition 4.1.1 *Soient $\mathcal{X}$ un espace de Banach et $\mathcal{M}$ une partie de $\mathcal{X}$. On dit que $\mathcal{M}$ est surcomplète dans $\mathcal{X}$ si*

$$\textit{span}\,(\mathcal{S}) = \mathcal{X}\,,$$

pour tout sous-ensemble infini $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}$.
Si $\mathcal{X} = \mathcal{Y}^*$ est le dual d'un espace de Banach $\mathcal{Y}$, et $\mathcal{M} \subset \mathcal{Y}^*$, on dira que $\mathcal{M}$ est faible* surcomplète si, pour tout sous-ensemble infini $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}$, on a

$$\textit{span}^{w^*}\,(\mathcal{S}) = \mathcal{X}\,,$$

où $\textit{span}^{w^*}\,(\mathcal{S})$ désigne l'enveloppe linéaire faible* fermée engendrée par $\mathcal{S}$.

Remarque 4.1.2 Si $\mathcal{Y}$ est réflexif, il est facile de vérifier que les deux notions de surcomplétude coincident, à savoir que si $\mathcal{M} \subset \mathcal{Y}^*$, alors

$$\mathcal{M} \text{ est surcomplète dans } \mathcal{Y}^* \Longleftrightarrow \mathcal{M} \text{ est faible}^* \text{ surcomplète dans } \mathcal{Y}^*\,.$$

Des exemples de suites surcomplètes, dans des espaces de Banach concrets, sont connus depuis longtemps. Par exemple, G. Szegö a prouvé que si $0 < \lambda_n \to +\infty$, alors la suite $\dfrac{1}{t+\lambda_n}$ ($t \in [0,1]$, $n\geqslant 1$) est complète dans $C([0,1])$ et donc surcomplète dans $C([0,1])$, comme l'ont observé P. Erdös et E. Strauss (voir [25] ou [17]). V. Klee a montré que, dans tout espace de Banach séparable, il existe des suites surcomplètes (voir [42]). Une autre preuve, plus constructive, de ce résultat a été obtenue par H. Brass (voir [64], remarque 1.3, page 59). P. Terenzi a beaucoup étudié ce problème de surcomplétude. En particulier, il a montré le résultat suivant qui décrit, dans un espace de Banach, la structure des suites qui ne possèdent pas de sous-suites basiques.

Théorème 4.1.3 (P. Terenzi, [67]) *Soient $\mathcal{X}$ un espace de Banach et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $\mathcal{X}$ qui ne possède pas de sous-suite basique. Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ de $(x_n)_{n\geqslant 1}$ satisfaisant l'une des deux alternatives suivantes :*

(i) $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ *est surcomplète dans* $\mathcal{S} := \text{span}\,\{x_{n_k} \,:\, k\geqslant 1\}$.

(ii) x_{n_k} *peut se décomposer sous la forme*

$$x_{n_k} = u_{n_k} + x^*_{n_k}\,, \quad u_{n_k} \neq 0\,,\, x^*_{n_k} \neq 0$$

avec $(u_{n_k})_{k\geqslant 1}$ *surcomplète dans* $\mathcal{U} := \text{span}\,\{u_{n_k} \,:\, k\geqslant 1\}$ *et* $(x^*_{n_k})_{k\geqslant 1}$ *suite basique.*

Nous allons maintenant donner une condition suffisante de surcomplétude pour les noyaux reproduisants d'un espace de Banach de fonctions holomorphes. La plupart des résultats qui suivent dans cette section font partie du folklore et sont sans doute connus mais faute de références, nous en donnons des preuves.
Le cadre est le suivant : soient Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{X}$ un espace de Banach formé de fonctions holomorphes sur Ω et plongé continûment dans l'espace $C(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Pour $\lambda \in \Omega$, considérons φ_λ la forme linéaire évaluation en λ définie par

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\lambda & : \mathcal{X} & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(\lambda),. \end{array}$$

Si Z est un sous-ensemble infini de Ω, nous désignons par Z' l'ensemble de ses points d'accumulation. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 4.1.4 *Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach de fonctions holomorphes sur Ω, plongé continûment dans $C(\Omega)$. Si Z est un sous-ensemble infini de Ω tel que $Z' \subset \Omega$, alors $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in Z}$ est surcomplète dans $\mathcal{X}^*$ si $\mathcal{X}$ est réflexif et faible* surcomplète sinon.*

La preuve de ce théorème nécessite le lemme suivant, bien connu des spécialistes.

Lemme 4.1.5 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, $Z \subset \Omega$ avec $Z' \cap \Omega \neq \emptyset$ et $\mathcal{X}$ un espace de Banach.*

(a) Si f est une fonction holomorphe de Ω dans $\mathcal{X}$ alors

$$\overline{\mathit{span}}\,\{f(z)\,:\,z \in Z\} = \overline{\mathit{span}}\,\{f(z)\,:\,z \in \Omega\}\,.$$

(b) Si $\mathcal{X} = \mathcal{Y}^*$ est le dual d'un espace de Banach et si f est une fonction faible* holomorphe de Ω dans $\mathcal{Y}^*$ alors

$$\overline{\mathit{span}}^{w^*}\{f(z)\,:\,z \in Z\} = \overline{\mathit{span}}^{w^*}\{f(z)\,:\,z \in \Omega\}\,.$$

Preuve (a) D'après un résultat classique de dualité (voir, par exemple, [61]), il suffit de montrer que

$$\mathrm{span}\,\{f(z)\,:\,z \in Z\}^{\perp} \subset \mathrm{span}\,\{f(z)\,:\,z \in \Omega\}^{\perp}\,.$$

Soit donc $\varphi \in \mathrm{span}\,\{f(z)\,:\,z \in Z\}^{\perp}$. Considérons l'application g définie sur Ω par

$$g(z) := \langle f(z), \varphi\rangle\,, \qquad z \in \Omega\,.$$

L'application g est holomorphe sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et s'annule sur Z. Comme $Z' \cap \Omega \neq \emptyset$, le théorème des zéros isolés permet alors d'affirmer que $g \equiv 0$, ce qui prouve que

$$\varphi \in \mathrm{span}\,\{f(z)\,:\,z \in \Omega\}^{\perp}\,.$$

(b) On raisonne de la même manière en remarquant qu'il suffit de montrer

$$^{\perp}\mathcal{L}\mathrm{in}\{f(z)\,:\,z \in Z\} \subset {}^{\perp}\mathcal{L}\mathrm{in}\{f(z)\,:\,z \in \Omega\}\,,$$

où $^{\perp}N := \{y \in \mathcal{Y}\,:\,\langle y, y^*\rangle = 0,\, \forall y^* \in N\}$. $\square$

Corollaire 4.1.6 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, Z un sous-ensemble infini de Ω avec $Z' \subset \Omega$ et $\mathcal{X}$ un espace de Banach*

(a) Si f est une fonction holomorphe de Ω dans $\mathcal{X}$ telle que

$$\overline{\mathit{span}}\,\{f(z)\,:\,z \in \Omega\} = \mathcal{X}\,,$$

alors $\mathcal{M} = (f(z))_{z \in Z}$ est surcomplète dans $\mathcal{X}$.

(b) Si $\mathcal{X} = \mathcal{Y}^*$ est le dual d'un espace de Banach $\mathcal{Y}$ et si f est une fonction faible* holomorphe de Ω dans $\mathcal{Y}^*$ telle que

$$\overline{\mathit{span}}^{w^*}\{f(z)\,:\,z \in \Omega\} = \mathcal{Y}^*\,,$$

alors $\mathcal{M} = (f(z))_{z \in Z}$ est faible* surcomplète dans $\mathcal{Y}^*$.

Preuve (a) D'après les hypothèses, il est clair que, pour tout $S \subset Z$ tel que card $S = \infty$, alors $S' \cap \Omega \neq \emptyset$. Le lemme 4.1.5 entraîne alors que

$$\text{span}\,\{f(z)\,:\,z \in S\} = \text{span}\,\{f(z)\,:\,z \in \Omega\}\,.$$

Donc si span $\{f(z)\,:\,z \in \Omega\} = \mathcal{X}$, alors, il est clair, par définition, que $\mathcal{M} = (f(z))_{z \in Z}$ est surcomplète dans $\mathcal{X}$.
(b) On raisonne de la même manière en appliquant la partie (b) du lemme 4.1.5.
$\square$

Preuve (du théorème 4.1.4) Si $\mathcal{X}$ est réflexif, l'application $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ est faiblement co-analytique et donc (fortement) co-analytique dans Ω (voir [61]). Comme

$$\text{span}\,\{\varphi_\lambda\,:\,\lambda \in \Omega\} = \mathcal{X}^*\,,$$

il suffit d'appliquer le corollaire 4.1.6 (a). Si $\mathcal{X}$ n'est pas réflexif, on raisonne de la même manière, en appliquant le corollaire 4.1.6 (b). $\square$

4.2 Surcomplétude des noyaux reproduisants de K^p_Θ.

Revenons à notre cadre d'étude sur les noyaux reproduisants dans les espaces modèles. Soit Θ une fonction intérieure dans H^∞ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{D}$. On cherche un critère pour que la suite de noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n \geqslant 1}$ soit surcomplète dans K^p_Θ, $1 < p < +\infty$. Tout d'abord, donnons deux résultats dans deux cas particuliers. Le premier concerne les noyaux reproduisants dans H^p, qui correspond au cas où $\Theta \equiv 0$. Le deuxième traite le cas des suites d'exponentielles dans $L^p(-a,a)$, qui correspond au cas où $\Theta = \Theta_a = \exp\left(-a\dfrac{z+1}{z-1}\right)$.

4.2.1 Cas particulier des exponentielles et des noyaux reproduisants de H^p.

En fait, nous allons replacer le premier résultat sur les noyaux reproduisants de H^p dans un cadre un peu plus général.

On considère $\mathcal{X}$ un espace de Banach de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$, et donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, la forme linéaire φ_λ évaluation en λ est continue,

(ii) $\mathcal{X}$ est réflexif,

(iii) $\lim_{|\lambda|\to 1}\|\varphi_\lambda\| = +\infty$, ce qui signifie que $\mathbb{D}$ est le domaine d'holomorphie naturelle des fonctions $f \in \mathcal{X}$,

(iv) l'ensemble $\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ se plonge continûment dans $\mathcal{X}$ et l'injection est à image dense.

Alors, on a le théorème suivant:

Théorème 4.2.1 *Soient $\Lambda \subset \mathbb{D}$ et $\mathcal{X}$ un espace de Banach de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$, vérifiant les quatre propriétés précédentes. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *est surcomplète dans* $\mathcal{X}^*$.

(b) $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}|\lambda| < 1$.

Pour prouver ce théorème, nous allons avoir besoin du résultat suivant de C. Bessaga et A. Pelczynski (voir [7] ou [64], Corollaire 1.1, page 48).

Lemme 4.2.2 (C. Bessaga-A. Pelczynski) *Soit $(y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'un espace de Banach E satisfaisant*

$$\inf_{n\geqslant 1}\|y_n\| > 0 \tag{4.1}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0\,, \quad \textit{pour la topologie faible}\,. \tag{4.2}$$

Alors $(y_n)_{n\geqslant 1}$ possède une sous-suite $(y_{n_p})_{p\geqslant 1}$ qui est une suite basique.

Preuve (du théorème 4.2.1) $(b) \Longrightarrow (a)$: c'est le théorème 4.1.4.
$(a) \Longrightarrow (b)$: Supposons que $\sup\limits_{\lambda\in\sigma}|\lambda| = 1$. Alors il existe $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \Lambda$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}|\lambda_n| = 1$ et donc, en utilisant (iii), on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty}\|\varphi_{\lambda_n}\| = +\infty\,.$$

Considérons

$$\psi_n := \frac{\varphi_{\lambda_n}}{\|\varphi_{\lambda_n}\|} \qquad n\geqslant 1\,.$$

Nous allons appliquer le lemme 4.2.2 à la suite $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$. Il est clair que cette suite satisfait l'hypothèse (4.1). Montrons qu'elle vérifie aussi l'hypothèse 4.2, ce qui se traduit, en utilisant le fait que $\mathcal{X}$ est réflexif, par

$$\lim_{n\to+\infty}\langle f, \psi_n\rangle = 0\,, \qquad f \in \mathcal{X}\,.$$

Or, si $f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$, on a

$$|\langle f, \psi_n\rangle| = \frac{|f(\lambda_n)|}{\|\varphi_{\lambda_n}\|} \leqslant \frac{\sup_{|z|\leqslant 1}|f(z)|}{\|\varphi_{\lambda_n}\|},,$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\langle f, \psi_n\rangle = 0\,, \qquad f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})\,.$$

Comme $\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ est dense dans $\mathcal{X}$, le théorème de Banach-Steinhauss implique que la suite $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie l'hypothèse (4.2). Donc d'après le lemme 4.2.2, il existe une sous-suite $(\psi_{n_p})_{p\geqslant 1}$ qui forme une suite basique dans $\mathcal{X}^*$. Par conséquent, $(\varphi_{\lambda_{n_p}})_{p\geqslant 1}$ forme aussi une suite basique dans $\mathcal{X}^*$ et, en particulier, elle est minimale. Donc,

$$\varphi_{\lambda_{n_1}} \notin \mathrm{span}\,\{\varphi_{\lambda_{n_p}}\ :\ p\geqslant 2\}\,,$$

et donc la suite $(\varphi_{\lambda_{n_p}})_{p\geqslant 2}$ n'est pas complète dans $\mathcal{X}^*$. $\square$

Remarque 4.2.3 En fait, sous les hypothèses (i) à (iv), toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{X}^*$ peut être identifiée avec sa série de Taylor $\sum_{n\geqslant 0}\varphi(z^n)\zeta^n$. En effet, considérons

$$\begin{array}{rccl} i\ :& \mathcal{X}^* & \to & \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \\ & \varphi & \mapsto & \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\varphi(z^n)\zeta^n\,. \end{array}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} z^n\zeta^n$ converge vers $\dfrac{1}{1-\zeta z}$, pour la topologie de $\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$. Donc, comme $\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \hookrightarrow \mathcal{X}$, on a convergence dans $\mathcal{X}$ et par continuité de φ, on obtient

$$\sum_{n\geqslant 0}\varphi(z^n)\zeta^n = \varphi\left(\frac{1}{1-\zeta z}\right)\,.$$

Par conséquent, l'application

$$\zeta \mapsto \sum_{n\geqslant 0}\varphi(z^n)\zeta^n$$

définit bien une application holomorphe dans $\mathbb{D}$. D'autre part, i est injective. En effet, si $i(\varphi) = 0$, $\varphi \in \mathcal{X}^*$, alors $\varphi(z^n) = 0$, $\forall n\geqslant 0$. Considérons alors $f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$,

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0}\hat{f}(n)z^n\,,$$

où la convergence est valable pour la topologie de $\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ et donc pour la topologie de la norme d'après (iv). On obtient donc

$$\varphi(f) = \sum_{n\geqslant 0}\hat{f}(n)\varphi(z^n) = 0\,.$$

Par conséquent, $\forall f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$, $\varphi(f) = 0$. Le fait que $\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ soit dense dans $\mathcal{X}$ entraîne alors que $\varphi \equiv 0$. Donc i est une injection, linéaire et on peut identifier $\mathcal{X}^*$ comme un sous-espace de $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. La dualité entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}^*$ peut s'écrire à la "Cauchy":

$$\langle f, \varphi\rangle = (f, i(\varphi)) = \sum_{n\geqslant 0} \hat{f}(n)\varphi(z^n)\,, \qquad\qquad (\text{au moins pour } f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}}))\,.$$

D'autre part, on a

$$i(\varphi_\lambda) = \frac{1}{1-\lambda z}\,.$$

Le corollaire suivant est alors immédiat :

Corollaire 4.2.4 *Soient $\Lambda \subset \mathbb{D}$ et $\mathcal{X}$ un espace de Banach de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$, vérifiant les quatre propriétés (i) à (iv). Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\left(\dfrac{1}{1-\lambda z}\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *est surcomplet dans $\mathcal{X}^*$.*

(b) $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} |\lambda| < 1.$

Le théorème 4.2.1 permet de trouver le critère pour les noyaux reproduisants de H^p :

Corollaire 4.2.5 *Soient $1 < p < +\infty$ et Λ un sous-ensemble infini de $\mathbb{D}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(a) $(k_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *est surcomplète dans H^p.*

(b) $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} |\lambda| < 1.$

Preuve Il est clair que H^p vérifie les propriétés (i) à (iv), et donc il suffit d'appliquer le théorème 4.2.1. □

Nous donnons maintenant le résultat pour les exponentielles.

Théorème 4.2.6 *Soient $1 < p < +\infty$, Z un sous-ensemble infini de $\mathbb{C}$ et $a > 0$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $(\exp(i\mu t))_{\mu\in Z}$ *est surcomplète dans $L^p(-a, a)$.*

(ii) $\sup\limits_{\mu\in Z} |\mu| < +\infty.$

Preuve $(i) \Longrightarrow (ii)$: Supposons que $\sup_{\mu\in Z}|\mu| = +\infty$. Alors, il existe $(\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset Z$ tel que $|\mu_n|\geqslant n^2$, $n\geqslant 1$. On obtient donc

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{|\mu_n|}\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} < +\infty\,.$$

Un théorème classique permet alors d'affirmer que $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ n'est pas complète dans $L^p(-a,a)$ (voir par exemple [65] pour le cas réel et [58] pour le cas complexe).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Si $\sup_{\mu\in Z}|\mu| < +\infty$, alors nécessairement $Z' \subset \mathbb{C}$ et donc le corollaire 4.1.6 implique que $(\exp(i\mu t))_{\mu\in Z}$ est surcomplète dans $L^p(-a,a)$.

□

Remarque 4.2.7 Il n'est pas difficile de voir que le corollaire 4.2.5 et le théorème 4.2.6 peuvent se généraliser au cas $(H^p)^*$, $p = 1, +\infty$, en utilisant la topologie faible*.

4.2.2 Cas général.

Dans le cas général, nous donnons maintenant une condition suffisante et deux conditions nécessaires pour que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ soit surcomplète dans K_Θ.

Théorème 4.2.8 *Soient* $1 < p < +\infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ *et* Θ *une fonction intérieure de* H^∞.
(a) Si $\inf_{n\geqslant 1}\big((1-|\lambda_n|^2) + \mathit{dist}\,(\lambda_n,\sigma(\Theta))\big) > 0$, *alors* $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est surcomplète dans* K^p_Θ.
(b) Supposons que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *soit surcomplète dans* K^p_Θ. *Alors :*

(i) $\sup_{n\geqslant 1}\|k_\Theta(.,\lambda_n)\|_p < +\infty$.

(ii) Si $\sigma(\Theta)\cap\mathbb{D} \neq \emptyset$, *alors*

$$\inf_{n\geqslant 1}\big((1-|\lambda_n|^2) + \mathit{dist}_h\,(\lambda_n,\sigma(\Theta)\cap\mathbb{D})\big) > 0\,,$$

où $\mathit{dist}_h\,(\lambda_n,\sigma(\Theta)\cap\mathbb{D}) := \inf_{\zeta\in\sigma(\Theta)\cap\mathbb{D}}|b_{\lambda_n}(\zeta)|$.

Preuve (a) Une propriété bien connue (voir [53], par exemple) affirme que toute fonction $f \in K^q_\Theta$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega := \mathbb{C}\setminus(\sigma(\Theta)\cap\mathbb{T})$. Si $\inf_{n\geqslant 1}\big((1-|\lambda_n|^2) + \mathrm{dist}\,(\lambda_n,\sigma(\Theta))\big) > 0$, alors $\Lambda' \subset \Omega$ et le théorème 4.1.4 permet d'en déduire que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est surcomplète dans $(K^q_\Theta)^* = K^p_\Theta$.
(b) (i) Il n'est pas difficile de voir qu'un raisonnement analogue à celui effectué dans la preuve du théorème 4.2.1 va donner la conclusion.

Supposons que $\sup_{n\geqslant 1} \|k_\Theta(.,\lambda_n)\|_p = +\infty$. Alors, il existe $(\lambda_{n_i})_{i\geqslant 1}$ telle que

$$\lim_{i\to+\infty} \|k_\Theta(.,\lambda_{n_i})\|_p = +\infty\,.$$

Soit

$$x_i := \frac{k_\Theta(.,\lambda_{n_i})}{\|k_\Theta(.,\lambda_{n_i})\|_p}\,,\qquad i\geqslant 1\,.$$

Il est clair que $(x_i)_{i\geqslant 1}$ satisfait l'hypothèse (4.1) du lemme 4.2.2. Montrons qu'elle vérifie aussi l'hypothèse (4.2), c'est à dire que, pour tout $f\in K^q_\Theta$,

$$\lim_{i\to+\infty} \langle f, x_i\rangle = 0\,.$$

Définissons une forme linéaire T_i sur K^q_Θ par

$$T_i f := \langle f, x_i\rangle\,,\quad f\in K^q_\Theta\,.$$

Il est clair que $T_i\in (K^q_\Theta)^*$ et $\|T_i\| = 1$, $\forall i\geqslant 1$. Soit maintenant $f\in K^q_\Theta\cap H^\infty$. On a

$$|T_i f| = |\langle f, x_i\rangle| = \frac{|f(\lambda_{n_i})|}{\|k_\Theta(.,\lambda_{n_i})\|}\leqslant\frac{\|f\|_\infty}{\|k_\Theta(.,\lambda_{n_i})\|}\,.$$

Donc

$$\lim_{i\to+\infty} T_i f = 0\,,\quad \forall f\in K^q_\Theta\cap H^\infty\,.$$

Remarquons alors que $(k_\Theta(.,\lambda))_{\lambda\in\mathbb{D}}\subset K^q_\Theta\cap H^\infty$ et span $\{k_\Theta(.,\lambda)\,:\,\lambda\in\mathbb{D}\} = K^q_\Theta$. Ceci prouve que $K^q_\Theta\cap H^\infty$ est dense dans K^q_Θ. Le théorème de Banach-Steinhauss implique que

$$\lim_{i\to+\infty} T_i f = 0\,,\quad \forall f\in K^q_\Theta\,.$$

Par conséquent, la suite $(x_i)_{i\geqslant 1}$ vérifie les hypothèses du lemme 4.2.2 et donc il existe une sous-suite $(x_{i_j})_{j\geqslant 1}$ qui forme une suite basique. Quitte à renommer la sous-suite, on obtient donc que $(k_\Theta(.,\lambda_{n_i}))_{i\geqslant 1}$ forme une suite basique et donc ne peut pas être surcomplète comme cela a déjà été remarqué.
(ii) Si card $(\sigma(\Theta)\cap\mathbb{D}) < +\infty$, alors la condition (ii) est automatiquement vérifiée. En effet, notons $|\zeta_0| := \max_{\zeta\in\sigma(\Theta)\cap\mathbb{D}} |\zeta|$ et considérons $\varepsilon > 0$ tel que $|\zeta_0|\leqslant 1-\varepsilon$. Alors, pour tout $n\geqslant 1$ et tout $\zeta\in\sigma(\Theta)\cap\mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned}|b_{\lambda_n}(\zeta)| &= \frac{|\lambda_n-\zeta|}{|1-\overline{\lambda_n}\zeta|}\\ &\geqslant\frac{1}{2}|\lambda_n-\zeta|\\ &\geqslant\frac{1}{2}(|\lambda_n|-1+\varepsilon)\,,\end{aligned}$$

et donc

$$\operatorname{dist}_h(\lambda_n, \sigma(\Theta) \cap \mathbb{D}) \geqslant \frac{1}{2}(|\lambda_n| - 1 + \varepsilon)\,.$$

On obtient

$$(1-|\lambda_n|^2)+\operatorname{dist}_h(\lambda_n, \sigma(\Theta)\cap\mathbb{D}) \geqslant 1-|\lambda_n|-\frac{1}{2}(1-|\lambda_n|)+\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}(1-|\lambda_n|)+\frac{1}{2}\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon\,,$$

d'où

$$\inf_{n\geqslant 1}\big((1-|\lambda_n|^2)+\operatorname{dist}_h(\lambda_n, \sigma(\Theta)\cap\mathbb{D})\big) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon\,.$$

On peut donc supposer que card $(\sigma(\Theta)\cap\mathbb{D}) = +\infty$. Dans ce cas, la condition (ii) va en fait découler du théorème de stabilité 2.3.1. Supposons que

$$\inf_{n\geqslant 1}\big((1-|\lambda_n|^2)+\operatorname{dist}_h(\lambda_n, \sigma(\Theta)\cap\mathbb{D})\big) = 0\,.$$

Cela implique qu'il existe deux sous-suites $(\lambda_{n_i})_{i\geqslant 1} \subset \Lambda$ et $(a_{n_i})_{i\geqslant 1} \subset \Theta^{-1}(0)$ telles que

$$\lim_{i\to+\infty} |b_{\lambda_{n_i}}(a_{n_i})| = 0\,.$$

Quitte à renommer la sous-suite, on peut donc supposer que

$$\sum_{i\geqslant 1} |b_{\lambda_{n_i}}(a_{n_i})| < +\infty\,.$$

Comme $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est surcomplète dans K^p_Θ, la sous-suite $(k_\Theta(.,\lambda_{n_i}))_{i\geqslant 2}$ est complète dans K^p_Θ. Le théorème 2.3.1 entraîne alors que $(k_\Theta(.,a_{n_i}))_{i\geqslant 2}$ est aussi complète dans K^p_Θ. Notons alors

$$B := \prod_{i\geqslant 1} b_{a_{n_i}}\,.$$

Il est facile de voir que $\dfrac{B}{z-a_{n_1}} \in K^q_B \subset K^q_\Theta$ et

$$\left\langle \frac{B}{z-a_{n_1}}, k_\Theta(.,a_{n_i})\right\rangle = \frac{B(a_{n_i})}{a_{n_i}-a_{n_1}} = 0\,,\ i\geqslant 2\,,$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $(k_\Theta(.,a_{n_i}))_{i\geqslant 2}$ est complète dans K^p_Θ. $\square$

Remarque 4.2.9 Il n'est pas difficile de voir que le théorème 4.2.8 reste valable dans le cas $(K^p_\Theta)^*$, $p = 1, +\infty$, avec la topologie faible*. La démonstration reste la même sauf pour l'assertion (b)(i), où il faut remplacer le lemme 4.2.2 par un résultat de W.B. Johnson et H.P. Rosenthal [37].

Dans le cas où $\sup_{n\geqslant 1}|\Theta(\lambda_n)| < 1$, on peut donner le critère suivant de surcomplétude.

Théorème 4.2.10 *Soient $1 < p < +\infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure de H^∞ telle que*

$$\sup_{n\geqslant 1}|\Theta(\lambda_n)| < 1 \,. \tag{4.3}$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est surcomplète dans* K_Θ^p.

(ii) $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ *est surcomplète dans* H^p.

(iii) $\sup_{n\geqslant 1}\|k_\Theta(.,\lambda_n)\|_p < +\infty$.

(iv) $\inf_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|^2) > 0$.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du résultat général suivant qui est utilisé implicitement par I. Singer (voir [64], page 58-59).

Lemme 4.2.11 *Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach et $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une application linéaire, continue et à image dense. Si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite surcomplète dans $\mathcal{X}$ alors la suite $(u(x_n))_{n\geqslant 1}$ sera surcomplète dans $\mathcal{Y}$.*

La preuve de ce lemme est reportée en appendice.

Preuve (du théorème 4.2.10) $(ii) \Longleftrightarrow (iv)$: c'est le corollaire 4.2.5.
$(iii) \Longleftrightarrow (iv)$: il est facile de voir que, sous la condition (4.3), on a

$$\|k_{\lambda_n}\|_p \asymp \|k_\Theta(.,\lambda_n)\|_p \,.$$

D'autre part, il est connu (voir, par exemple, [29]), que

$$\|k_{\lambda_n}\|_p \asymp (1-|\lambda_n|^2)^{-1/q} \,,$$

et l'équivalence suit immédiatement.
$(ii) \Longrightarrow (i)$: il suffit d'appliquer le lemme 4.2.11 à $u = P_\Theta : H^2 \to K_\Theta$.
$(i) \Longrightarrow (iii)$: c'est le théorème 4.2.8 (b)(i).

□

Remarque 4.2.12 Le théorème 4.2.10 permet de retrouver le théorème 4.2.6, dans le cas où $p = 2$ et $\inf_{\mu\in Z} \Im m\mu > -\infty$. En effet, passons dans le demi-plan supérieur et considérons une famille d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ telle que $\inf_{n\geqslant 1} \Im m\mu_n > -\infty$. D'après le lemme 2.2.5, on peut supposer que

$$\inf_{n\geqslant 1} \Im m\mu_n \geqslant \delta > 0 \,.$$

Dans ce cas, on a

$$|\Theta_a(\mu_n)| = |\exp(ia\mu_n)| = \exp(-a\Im m\mu_n)\leqslant \exp(-a\delta) < 1\,.$$

Le théorème 4.2.10 implique alors que $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ est surcomplète dans $L^2(-a,a)$ si et seulement si

$$\inf_{n\geqslant 1}\left(1-\left|\frac{\mu_n - i}{\mu_n + i}\right|^2\right) > 0\,,$$

ce qui est équivalent à

$$\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{\mu_n - i}{\mu_n + i}\right|^2 < 1\,.$$

Comme $\Im m\mu_n\geqslant\delta > 0$, ceci est équivalent à

$$\sup_{n\geqslant 1}|\mu_n| < +\infty\,.$$

Nous allons maintenant donner un critère dans deux cas particuliers. Pour cela, le lemme suivant sera utile:

Lemme 4.2.13 *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}\subset\mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure de H^∞. Alors*

$$\sup_{n\geqslant 1}\|k_\Theta(.,\lambda_n)\|_2 < +\infty \Longrightarrow \inf_{n\geqslant 1} \mathit{dist}\ (\lambda_n, {}^cE_\Theta) > 0\,.$$

Preuve Rappelons que si

$$\Theta(z) := z^N\prod_{n\geqslant 1} b_{a_n}(z)\exp\left(-\int_{\mathbb{T}}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta)\right)\,,$$

alors

$$E_\Theta := \{\zeta\in\mathbb{T}\,:\,\lambda_1(\Theta,\zeta) := \sum_{n\geqslant 1}\frac{1-|a_n|^2}{|\zeta-a_n|^2} + \int_{\mathbb{T}}\frac{d\mu(t)}{|t-\zeta|^2} < +\infty\}\,.$$

En combinant un cas spécial du théorème de Julia-Carathéodory sur les dérivées angulaires et un résultat de Ahern-Clark, K. Dyakonov [23] a montré que si

$$\lambda_2(\Theta,\zeta) := \liminf_{\substack{z\in\mathbb{D}\\ z\to\zeta}}\frac{1-|\Theta(z)|^2}{1-|z|^2}\,,$$

alors $\lambda_1(\Theta,\zeta) = \lambda_2(\Theta,\zeta)$. Soit alors ζ un point d'accumulation de $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$. On a

$$\liminf_{\substack{z\in\mathbb{D}\\ z\to\zeta}}\frac{1-|\Theta(z)|^2}{1-|z|^2}\leqslant\sup_{n\geqslant 1}\frac{1-|\Theta(\lambda_n)|^2}{1-|\lambda_n|^2} = \sup_{n\geqslant 1}\|k_\Theta(.,\lambda_n)\|_2^2 < +\infty\,.$$

Par conséquent, $\lambda_2(\Theta,\zeta) < +\infty$ et donc $\zeta\in E_\Theta$, ce qui prouve que

$$\inf_{n\geqslant 1}\mathrm{dist}\ (\lambda_n, {}^cE_\Theta) > 0\,.$$

$\square$

Le premier résultat concerne le cas des fonctions intérieures singulières dont la mesure singulière est à support fini.

Théorème 4.2.14 *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et*

$$\Theta(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta)\right)$$

une fonction intérieure singulière telle que la mesure associée

$$\mu = \sum_{\lambda\in\sigma} a_\lambda \delta_\lambda$$

soit à support fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est surcomplète dans* K_Θ.

(ii) $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|k_\Theta(.,\lambda_n)\| < +\infty$

(iii) $\inf\limits_{n\geqslant 1} \mathit{dist}\ (\lambda_n, \sigma(\Theta)) > 0$.

Preuve D'après le théorème 4.2.8, la seule implication à montrer est $(ii) \Longrightarrow (iii)$. De plus, d'après le lemme 4.2.13, il suffit de remarquer que, dans ce cas, on a $E_\Theta = \mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta)$. En effet, par définition, il est clair que, pour toute fonction intérieure Θ, on a $\mathbb{T} \setminus \sigma(\Theta) \subset E_\Theta$. D'autre part, si $\zeta \in E_\Theta$ alors on a

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(t)}{|t-\zeta|^2} < +\infty\,,$$

ce qui donne

$$\sum_{\lambda\in\sigma} \frac{a_\lambda}{|\lambda - \zeta|^2} < +\infty\,,$$

Comme card $\sigma < +\infty$, cela implique nécessairement que $\zeta \notin \sigma = \sigma(\Theta)$.

$\square$

Le second résultat concerne le cas des produits de Blaschke dont les zéros vérifient la condition de Stolz. Rappelons (voir [53]) qu'un ensemble $\sigma \subset \mathbb{D}$ vérifie la condition de Stolz ($\sigma \in (S)$) si il existe un sous-ensemble fini $e \subset \mathbb{T}$ tel que

$$\sup\left\{\frac{\text{dist }(\lambda, e)}{\text{dist }(\lambda, \mathbb{T})}\ :\ \lambda \in \sigma\right\} < +\infty\,.$$

Si $\sigma = (\alpha_n)_{n\geqslant 1} \in (S)$ et si ζ est un point d'accumulation de σ alors il existe une sous-suite $(\alpha_{n_p})_{p\geqslant 1}$ de σ et un angle de Stolz (voir Figure 4.1)

$$\Delta_\zeta := \{z \in \mathbb{D}\ :\ |\arg(1 - \overline{\zeta} z)| < \alpha,\ |z - \zeta| < \rho\}\ (0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ \rho < 2\cos\alpha)\,,$$

tels que

$$(\alpha_{n_p})_{p\geqslant 1} \subset \Delta_\zeta\,, \qquad \text{et } \lim_{p\to+\infty} \alpha_{n_p} = \zeta\,.$$

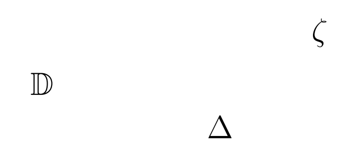

Figure 4.1: Angle de Stolz Δ_ζ

Dans ce cas, nous avons le critère suivant :

Théorème 4.2.15 *Soient $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et $\Theta = \prod_{n\geqslant 1} b_{\alpha_n}$ un produit de Blaschke tel que $\sigma = (\alpha_n)_{n\geqslant 1} \in (S)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est surcomplète dans* K_Θ.

(ii) $\sup_{n\geqslant 1} \|k_\Theta(., \lambda_n)\| < +\infty$

(iii) $\inf_{n\geqslant 1}$ *dist* $(\lambda_n, \sigma(\Theta)) > 0$.

Preuve Comme pour le théorème 4.2.14, la seule implication à montrer est *(ii)* $\Longrightarrow$ *(iii)*. Supposons que $\inf_{n\geqslant 1}$ dist $(\lambda_n, \sigma(\Theta)) = 0$. Alors il existe $\zeta \in \sigma(\Theta)$ et une sous suite $(\lambda_{n_p})_{p\geqslant 1}$ de Λ tels que $\lim_{p\to+\infty} \lambda_{n_p} = \zeta$. D'après le lemme 4.2.13, nécessairement $\zeta \in E_\Theta$. En utilisant la caractérisation de Clark de E_Θ (voir [15]) et une version Hilbertienne du théorème de Carathéodory (voir [62]), on obtient alors que Θ a une dérivée angulaire, au sens de Carathéodory, au point ζ et donc en particulier Θ a une limite non tangentielle en ζ, de module 1. Cela signifie que pour tout angle de Stolz Δ_ζ, on a

$$|\Theta(\zeta)| := \lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in\Delta_\zeta}} |\Theta(z)| = 1\,.$$

D'autre part, $\zeta \in \sigma(\Theta) = \text{clos}\,(\alpha_n \ : \ n\geqslant 1)$. Donc il existe une sous suite $(\alpha_{n_p})_{p\geqslant 1}$ de σ et un angle de Stolz Δ_ζ tels que

$$(\alpha_{n_p})_{p\geqslant 1} \subset \Delta_\zeta\,, \qquad \text{et } \lim_{p\to+\infty} \alpha_{n_p} = \zeta\,.$$

on en déduit d'après ce qui précède que

$$|\Theta(\zeta)| = \lim_{p\to+\infty} |\Theta(\alpha_{n_p})| = 0\,,$$

ce qui est absurde.

□

Comme pour l'étude de la complétude de la biorthogonale, on peut supposer que Θ est un produit de Blaschke sans multiplicité. En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 4.2.16 *Soient $1 < p < +\infty$, Θ une fonction intérieure et pour $\lambda \in \mathbb{D}$, notons*

$$\Theta_\lambda := \frac{\Theta - \lambda}{1 - \overline{\lambda}\Theta} .$$

Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ une suite de Blaschke, sans multiplicité. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est surcomplète dans* K^p_Θ.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{D}$, $(k_{\Theta_\lambda}(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est surcomplète dans* $K^p_{\Theta_\lambda}$.

(iii) $\exists \lambda \in \mathbb{D}$ *tel que* $(k_{\Theta_\lambda}(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est surcomplète dans* $K^p_{\Theta_\lambda}$.

Preuve Remarquons que si Θ est une fonction intérieure de H^∞ alors $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est surcomplète dans K^p_Θ si et seulement si

$$\ker_q T_{\overline{\Theta B_{\widetilde{\Lambda}}}} = \{0\} ,$$

pour toute sous suite infinie $\widetilde{\Lambda} \subset \Lambda$. Pour conclure, il suffit alors d'appliquer le théorème 2.4.7 qui affirme que

$$\dim \ker_q T_{\overline{\Theta_\lambda B_{\widetilde{\Lambda}}}} \equiv \text{cte} ,\ \forall \lambda \in \mathbb{D} .$$

□

Appendice A

Quelques compléments

A.1 .. ad paragraphe 1.2.3

Lemme A.1.1 *Soient B et Θ deux fonctions intérieures dans $H^\infty(\mathcal{L}(E))$. Alors*

$$\|P_B\Theta\| = \|P_+\Theta^*_{|K_B}\| = dist(B^*\Theta, H^\infty(\mathcal{L}(E)))\,.$$

Preuve Nous avons

$$\begin{aligned}\|P_B\Theta\| &= \|BP_-B^*\Theta\| \quad \text{par définition de } P_B\\ &= \|P_-B^*\Theta\|\\ &= \|H_{B^*\Theta}\|\\ &= \operatorname{dist}(B^*\Theta, H^\infty(\mathcal{L}(E)) \quad \text{par le théorème de Page} \quad \text{(voir par exemple [53])}\,.\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons $(P_B\Theta)^* = P_+\Theta^*P_B$, d'où

$$\|P_B\Theta\| = \|P_+\Theta^*_{|K_B}\|\,,$$

et le lemme suit. $\square$

Lemme A.1.2 *Soit φ une fonction de $L^\infty(\mathcal{L}(E))$, à valeurs isométriques. Alors l'opérateur de Toeplitz T_φ est inversible à gauche dans $H^2(E)$ si et seulement si $dist(\varphi, H^\infty(\mathcal{L}(E)) < 1$.*

Preuve Soit $x \in H^2(E)$. Alors

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|\varphi x\|^2\\ &= \|P_+\varphi x\|^2 + \|P_-\varphi x\|^2\\ &= \|T_\varphi x\|^2 + \|H_\varphi x\|^2\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}T_\varphi \text{ est inversible à gauche dans } H^2(E) &\iff \exists c \in]0,1[\text{ tel que } c\|x\|^2 \leqslant \|T_\varphi x\|^2\\ &\iff \exists c \in]0,1[\text{ tel que } \|H_\varphi x\|^2 \leqslant (1-c)\|x\|^2\\ &\iff \|H_\varphi\| < 1\\ &\iff \operatorname{dist}(\varphi, H^\infty(\mathcal{L}(E)) < 1 \quad \text{par le théorème de Page}\,.\end{aligned}$$

□

Lemme A.1.3 *Soient Θ et B deux fonctions intérieures de $H^\infty(\mathcal{L}(E))$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$P_{\Theta|K_B}$ est un isomorphisme sur son image;*
2. *dist$(B^*\Theta, H^\infty(\mathcal{L}(E)) < 1$;*
3. *$T_{B^*\Theta}$ est inversible à gauche dans $H^2(E)$.*

Preuve D'après un lemme sur les sous-espaces fermés ([53], page 201), $P_{\Theta|K_B}$ est un isomorphisme sur son image si et seulememt si $\|P_{\Theta H^2(E)}P_B\| < 1$, où $P_{\Theta H^2(E)}$ désigne la projection orthogonale sur $\Theta H^2(E)$. Par définition, $P_{\Theta H^2(E)} = \Theta P_+ \Theta^*$, d'où

$$\begin{aligned} P_{\Theta|K_B} \text{ est un isomorphisme sur son image } &\iff \|P_+\Theta^*_{|K_B}\| < 1 \\ &\iff \mathrm{dist}(B^*\Theta, H^\infty(\mathcal{L}(E)) < 1 \text{ (lemme A.1.1)} \\ &\iff T_{B^*\Theta} \text{ is left invertible in } H^2(E) \text{ (lemme A.1.2)} \end{aligned}$$

□

A.2 Preuve du théorème 1.3.5

Pour prouver le théorème 1.3.5, nous aurons besoin du lemme suivant qui est l'analogue vectoriel du lemme 1.3.19.

Lemme A.2.1 *Soient E un espace de Hilbert, complexe, séparable, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite N-Carleson de $\mathbb{D}$*

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{N} \Lambda_i\,, \quad \Lambda_i \in (C)\,,$$

et notons par δ_i la constante de Carleson de Λ_i. Alors, pour toute $f \in H^2(E)$, nous avons

$$\sum_{\lambda\in\sigma}(1-|\lambda|^2)\|f(\lambda)\|_E^2 \leqslant 32\sum_{i=1}^{N}(1+2\log 1/\delta_i)\|f\|^2_{H^2(E)}\,.$$

Preuve Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormale de E. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda\in\sigma}(1-|\lambda|^2)\|f(\lambda)\|_E^2 &= \sum_{\lambda\in\sigma}(1-|\lambda|^2)\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda), e_n\rangle|^2 \\ &= \sum_{n\geqslant 1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\lambda\in\sigma_i}(1-|\lambda|^2)|\langle f(\lambda), e_n\rangle|^2 \end{aligned}$$

Dfinissons

$$\begin{aligned} g \ : \ & \mathbb{D} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto \langle f(z), e_n \rangle \,. \end{aligned}$$

Alors il est clair que $g \in H^2$ et comme $\Lambda_i \in (C)$ on a

$$\sum_{\lambda \in \sigma_i} (1 - |\lambda|^2) |g(\lambda)|^2 \leqslant 32(1 + 2 \log\, 1/\delta_i) \|g\|^2_{H^2} \,,$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \sigma} (1 - |\lambda|^2) \|f(\lambda)\|^2_E &\leqslant \sum_{n \geqslant 1} \sum_{i=1}^{N} 32(1 + 2 \log\, 1/\delta_i) \|\langle f(.), e_n \rangle\|^2_{H^2} \\ &= \sum_{i=1}^{N} 32(1 + 2 \log\, 1/\delta_i) \sum_{n \geqslant 1} \|\langle f(.), e_n \rangle\|^2_{H^2} \\ &= \sum_{i=1}^{N} 32(1 + 2 \log\, 1/\delta_i) \|f\|^2_{H^2(E)} \,, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

Preuve (du théorème 1.3.5) Soit $\varepsilon < \delta/2$ satisfaisant les relations (1.8) et (1.9) et soit $\Lambda' = (\lambda'_n)_{n \geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, $(e'_n)_{n \geqslant 1} \subset E$ telles que

$$\sup_{n \geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| < \varepsilon \,, \quad \text{et} \quad \sup_{n \geqslant 1} \|e'_n - e_n\| < \varepsilon \,.$$

D'après le lemme 1.3.16, on a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \leqslant \frac{1 - |\lambda_n|^2}{1 - |\lambda'_n|^2} \leqslant 2 \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \,, \quad \forall n \geqslant 1 \tag{A.1}$$

Comme dans la preuve du cas scalaire, il est aisé de voir que la relation (1.8) implique que

$$\sup_{n \geqslant 1} \|\Theta(\lambda'_n)^* e'_n\| < 1 \,.$$

Par conséquent, $\|k_\Theta(., \lambda'_n) e'_n\|^{-2} \asymp 1 - |\lambda'_n|^2$ et $(k_\Theta(., \lambda'_n) e'_n)_{n \geqslant 1}$ est une base de Riesz de K_Θ si et seulement l'opérateur $J_{\Theta, \Lambda'}$ défini par

$$J_{\Theta, \Lambda'} f := (\langle f(\lambda'_n), e'_n \rangle)_{n \geqslant 1} \,, \ f \in K_\Theta \,,$$

est un isomorphisme de K_Θ sur $\ell^2((1 - |\lambda'_n|^2)^{1/2})$. Mais, nous avons

$$|\langle f(\lambda'_n), e'_n \rangle - \langle f(\lambda_n), e_n \rangle|^2 = |\langle f(\lambda'_n) - f(\lambda_n), e_n \rangle + \langle f(\lambda'_n), e'_n - e_n \rangle|^2 \,.$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Minkowski, on obtient

(A.2)
$$\left|\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda'_n),e'_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}-\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda_n),e_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda'_n)-f(\lambda_n),e_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}+\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda'_n),e'_n-e_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}$$

En appliquant le principe du maximum à

$$\begin{aligned} g \ : \ & \mathbb{D}\to\mathbb{C} \\ & z\mapsto g(z):=\langle\frac{f(z)-f(\lambda'_n)}{b_{\lambda'_n}(z)},e_n\rangle\,, \end{aligned}$$

on montre, comme dans le cas scalaire, qu'il existe $u_n\in\partial\Omega(\lambda_n,\delta/2)$ tel que

$$|\langle f(\lambda_n)-f(\lambda'_n),e_n\rangle|\leqslant\frac{2\varepsilon}{\delta/2-\varepsilon}|\langle f(u_n),e_n\rangle|\,.$$

On obtient donc

$$\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda'_n)-f(\lambda_n),e_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}\leqslant\frac{2\varepsilon}{\delta/2-\varepsilon}\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(u_n),e_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}.$$

Gràce au lemme 1.3.16, on en déduit que

$$\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda'_n)-f(\lambda_n),e_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}\leqslant c_1\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(u_n),e_n\rangle|^2(1-|u_n|^2)\right)^{1/2},$$

où
$$c_1:=c_1(\delta,\varepsilon):=\frac{2\varepsilon(2(1+\delta/2+\varepsilon))^{1/2}}{(\delta/2-\varepsilon)(1-\delta/2-\varepsilon)^{1/2}}\,.$$

Puisque $\Lambda=\bigcup_{i=1}^N\Lambda_i$ avec $\Lambda_i\in(C)$ et $|b_{\lambda_n}(u_n)|=\delta/2$ il est facile de voir que le lemme 1.3.17 entraine que

$$\mathcal{U}:=(u_n)_{n\geqslant 1}=\bigcup_{i=1}^N\mathcal{U}_i\,,\qquad\text{avec } \mathcal{U}_i\in(C)\text{ et }\delta(\mathcal{U}_i)\geqslant\delta(\Lambda_i)^3\geqslant\delta^3\,.$$

Le lemme A.2.1 implique donc que

$$\sum_{n\geqslant 1}(1-|u_n|^2)\|f(u_n)\|^2\leqslant 32N(1+6\log 1/\delta)\|f\|_2^2\,.$$

Par conséquent
(A.3)
$$\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda'_n)-f(\lambda_n),e_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}\leqslant c_1\sqrt{32N(1+6\log\,1/\delta)}\|f\|_2\,.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda'_n),e'_n-e_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)&\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\|e'_n-e_n\|^2\|f(\lambda'_n)\|^2(1-|\lambda'_n|^2)\\&\leqslant\varepsilon^2\sum_{n\geqslant 1}\|f(\lambda'_n)\|^2(1-|\lambda'_n|^2)\,.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a

$$\sum_{n\geqslant 1}\|f(\lambda'_n)\|^2(1-|\lambda'_n|^2)\leqslant 32N(1+6\log\,1/\delta)\|f\|^2$$

et

$$\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda'_n),e'_n-e_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}\leqslant\varepsilon\sqrt{32N(1+6\log\,1/\delta)}\|f\|_2\,. \tag{A.4}$$

Les inégalités (A.2),(A.3) et (A.4) impliquent que

(A.5)
$$\left|\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda'_n),e'_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}-\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda_n),e_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{2\sqrt{2(1+\delta/2+\varepsilon)}}{(\delta/2-\varepsilon)\sqrt{1-\delta/2-\varepsilon}}+1\right)\varepsilon\sqrt{32N(1+6\log\,1/\delta)}\|f\|_2\,.$$

De plus, en utilisant (A.1), on a

$$\left(\frac{1}{2}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{1/2}c\|f\|_2\leqslant\left(\sum_{n\geqslant 1}|\langle f(\lambda_n),e_n\rangle|^2(1-|\lambda'_n|^2)\right)^{1/2}\leqslant\left(2\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/2}\|J_{\Theta,\Lambda}\|\|f\|_2\,,$$

ce qui prouve que $J_{\Theta,\Lambda'}$ est un opérateur continu de K_Θ dans $\ell^2((1-|\lambda'_n|^2)^{1/2})$. Comme dans la preuve du cas scalaire, notons par U l'opérateur défini de $\ell^2((1-|\lambda_n|^2)^{1/2})$ dans $\ell^2((1-|\lambda'_n|^2)^{1/2})$ par $Ua:=a$, $a\in\ell^2((1-|\lambda_n|^2)^{1/2})$. De l'inégalité (A.1), on déduit que U est un isomorphisme et

$$\|U^{-1}\|\leqslant\left(2\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/2}\,.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} J_{\Theta,\Lambda'} &= UJ_{\Theta,\Lambda} + J_{\Theta,\Lambda'} - UJ_{\Theta,\Lambda} \\ &= UJ_{\Theta,\Lambda}\left(I + J_{\Theta,\Lambda}^{-1}U^{-1}(J_{\Theta,\Lambda'} - UJ_{\Theta,\Lambda})\right) . \end{aligned}$$

Par conséquent, pour prouver que $J_{\Theta,\Lambda'}$ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que

$$\|J_{\Theta,\Lambda}^{-1}\|\|U^{-1}\|\|J_{\Theta,\Lambda'} - UJ_{\Theta,\Lambda}\| < 1 .$$

Mais l'inégalité (A.5) signifie que

$$\|J_{\Theta,\Lambda'} - UJ_{\Theta,\Lambda}\| \leqslant \left(64(1 + 6\log 1/\delta)\left(\frac{1+\varepsilon+\delta/2}{1-\varepsilon-\delta/2}\right)\right)^{1/q}\left(\frac{2\varepsilon}{\delta/2-\varepsilon}\right) ,$$

et le résultat suit de (1.9). □

A.3 .. ad paragraphe 2.1

Lemme A.3.1 *Soient $1 < p < +\infty$, B un produit de Blaschke, à zéros simples, associé à une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure. Alors*

(A.6) $dim\ \ker_q T_{\overline{\Theta}B} = dim\ (K_\Theta^q \cap BH^q) = codim_{K_\Theta^p}\ (span\ \{k_\Theta(.,\lambda_n)\ :\ n\geqslant 1\})$.

En particulier, les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $T_{\overline{\Theta}B}\ :\ H^q \longrightarrow H^q$ *est injectif.*

(ii) $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est complète dans* K_Θ^p.

(iii) $K_\Theta^q \cap BH^q = \{0\}$.

Preuve Le cas $p = q = 2$ trouve son origine dans [46] et est démontré dans [53], Lemme 97, Appendice 4, page 336. Pour le cas général, remarquons que

$$\begin{aligned} f \in \ker_q T_{\overline{\Theta}B} &\Longleftrightarrow f \in H^q \text{ et } P_+\overline{\Theta}Bf = 0 \\ &\Longleftrightarrow f \in H^q \text{ et } \overline{\Theta}Bf \in \overline{H_0^q} \\ &\Longleftrightarrow f \in H^q \cap \overline{B}\Theta\overline{H_0^q} \\ &\Longleftrightarrow f \in \overline{B}(BH^q \cap \Theta\overline{H_0^q}) \\ &\Longleftrightarrow f \in \overline{B}(BH^q \cap K_\Theta^q) . \end{aligned}$$

Donc

$$B\ker_q T_{\overline{\Theta}B} = BH^q \cap K_\Theta^q .$$

On en déduit alors que

$$\dim\ \ker_q T_{\overline{\Theta}B} = \dim\ (K_\Theta^q \cap BH^q) .$$

De plus, il est clair que

$$\operatorname{codim}_{K^p_\Theta} \left(\operatorname{span} \{k_\Theta(.,\lambda_n) \,:\, n\geqslant 1\}\right) = \dim \left(K^q_\Theta \cap BH^q\right) .$$

Les équivalences entre les trois assertions (i), (ii) et (iii) se déduisent aisément de l'égalité (A.6). □

A.4 .. ad paragraphe 2.4

Lemme A.4.1 (L. Coburn) *Si $1 < p < +\infty$ et $\varphi \in L^\infty$, $\varphi \not\equiv 0$, alors soit $\ker_q T_\varphi = \{0\}$ soit $\ker_p T^*_\varphi = \{0\}$.*

Preuve Si $f \in H^q$, $g \in H^p$ tels que $P_+\varphi f = 0$, $P_+\overline{\varphi} g = 0$ alors $\varphi f = \overline{a}$, $\overline{\varphi} g = \overline{b}$ avec $a \in H^q_0$ et $b \in H^p_0$. Donc $\overline{ga} = fb$ et comme fb, $ga \in H^1_0$, on en déduit que $fb \equiv 0$ et $ga \equiv 0$. Si $f \not\equiv 0$ alors $f \neq 0$ presque partout et donc $b \equiv 0$. Par conséquent, $\overline{\varphi} g \equiv 0$ et $g = 0$ sur un ensemble de mesure positive. On en déduit donc $g \equiv 0$. □

A.5 .. ad paragraphe 3.2

Lemme A.5.1 *Soient $f \in K^+_\Theta$ et $\mu \in \mathbb{C}_+$ tels que $f(\mu) = 0$. Alors $\dfrac{f}{z-\mu} \in K^+_\Theta$.*

Preuve Il est clair que $\dfrac{f}{z-\mu} \in H^2_+$. D'autre part, si $g \in H^2_+$, on a

$$\begin{aligned} \langle \frac{f}{z-\mu}, \Theta g\rangle_{H^2_+} =& \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\overline{\Theta(x)g(x)}}{x-\mu}\,dx \\ =& \langle f, \frac{\Theta g}{z-\overline{\mu}}\rangle \\ =& 0 \qquad\qquad \text{car } \frac{g}{z-\overline{\mu}} \in H^2_+ \,. \end{aligned}$$

Donc, $\dfrac{f}{z-\mu} \in H^2_+ \ominus \Theta H^2_+ = K^+_\Theta$. □

Lemme A.5.2 *Soient X, Y deux espaces de Hilbert tel qu'il existe un isomorphisme T entre X et Y. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de X et notons $y_n := Tx_n$, $n\geqslant 1$. Alors $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est exacte dans X si et seulement si $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est exacte dans Y. De plus, leurs biorthogonales sont complètes ou non simultanément.*

Preuve D'après (P 2.2), il est clair que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans X si et seulement si $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans Y. Supposons que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ soit exacte dans X et notons $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ sa biorthogonale dans X. Alors, on a

$$\begin{aligned}\delta_{nk} &= \langle \varphi_n, x_k \rangle \\ &= \langle \varphi_n, T^{-1} y_k \rangle \\ &= \langle T^{-1^*} \varphi_n, y_k \rangle \,,\end{aligned}$$

ce qui montre que $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est minimale et sa biorthogonale est $(T^{-1^*}\varphi_n)_{n\geqslant 1}$. Comme les biorthogonales à $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ sont isomorphes, il est clair qu'elles sont complètes ou non simultanément. $\square$.

A.6 .. ad paragraphe 4.2.2

Lemme A.6.1 *Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach et $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une application linéaire, continue et à image dense. Si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite surcomplète dans $\mathcal{X}$ alors la suite $(u(x_n))_{n\geqslant 1}$ sera surcomplète dans $\mathcal{Y}$.*

Preuve Soit $y \in \mathcal{Y}^*$ tel que

$$\langle u(x_{n_p}), y \rangle = 0 \,,\ p\geqslant 1 \,.$$

Alors $\langle x_{n_p}, u^* y \rangle = 0$, $p\geqslant 1$, et comme $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est surcomplète dans $\mathcal{X}$, on obtient que $u^*y = 0$. D'autre part, u est à image dense donc u^* est injectif et donc $y = 0$. $\square$

Bibliographie

[1] P. Ahern and D. Clark, Radial limits and invariant subspaces, *Amer. Journal of Math*, **2** (1970), 332-342.

[2] S.A. Avdonin and S.A. Ivanov, *Families of exponentials*, Cambridge University Press, 1995.

[3] S.A. Avdonin, On the solution of the exponential moment problem in the space $L^2(0, \infty)$, *Zapiski Nauchn. Seminarov Mat. Inst. Steklova (LOMI)*, **73** (1977), 193-194 (Russian); English transl.: *J. Soviet Math.* **34** No 6, (1986), 2137-2138.

[4] A.B. Aleksandrov, Inner functions and related spaces of pseudocontinuable functions, *Zapiski Nauchn. Seminarov Mat. Inst. Steklova (LOMI)*, **170** (1989), 7-33 (Russian); English transl.: *J. Soviet Math.* **63** No 2, (1993), 115-119.

[5] J. Ball, I. Gohberg and L. Rodman, Interpolation of rational matrix functions, In *Operator Theory: Advances and Applications*, Birkhäuser, Basel, **45** 1990.

[6] N. Benamara and N. Nikolski, Resolvent tests for similarity to a normal operator, *Proc. London Math. Soc.*, **3** No 78 (1999).

[7] C. Bessaga and A. Pelczynski, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, *Studia Math.*, **17** (1958), 151-164.

[8] A. Beurling and P. Malliavin, On Fourier transforms of measures with compact support, *Acta Math.* **107** (1962), 291-309.

[9] A. Beurling and P. Malliavin, On the closure of characters and the zeros of entire functions, *Acta Math.* **118** (1967), 79-93.

[10] R.P. Boas, *Entire Functions*, Academic Press, New-York, 1954.

[11] I.A. Boricheva, An application of the Schur method to free interpolation problems in the model space, *Algebra i Analyz*, **7** No 4 (1995), 50-73 (Russian); English transl.: *St. Petersburg Math. J.*, **7** No 4 (1996), 543-560.

[12] I.A. Boricheva, Geometric properties of projections of reproducing kernels on z^*-invariant subspaces of H^2, *J. Funct. Anal.*, **161** (1999), 397-417.

[13] L. de Branges, *Square summable, power series*, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[14] K.C. Chan and S.M. Seubert, Reducing subspaces of compressed analytic Toeplitz operators on the Hardy space, *Integr. equ. oper. theory*, **28** (1997), 147-157.

[15] D. Clark One dimensional perturbations of restricted shifts, *J. Analyse Math.*, **25** (1972), 169-191.

[16] L.A. Coburn, Weyl's theorem for nonnormal operators, *Michigan Math J.*, **13** (1966), 285-288.

[17] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol I, Interscience Publ. Inc., New-York, 1965.

[18] N. Danikas, On an identity theorem in the Nevanlinna class $\mathcal{N}$, *J. Approx. Theory*, **77** (1994), 184-190.

[19] R.J. Duffin and J.J. Eachus, Some notes on an expansion theorem of Paley and Wiener, *Bull. Am. Math. Soc.*, **48** No 12 (1942), 850-855.

[20] L.N. Dovbysh, N.K. Nikolski and V.N. Sudakov, How good can a nonhereditary family be?, *Zapiski Nauchn. Seminarov Mat. Inst. Steklova (LOMI)*, **73** (1977), 52-69 (Russian); English transl.: *J. Soviet Math.*, **34** No 6 (1986), 2050-2060.

[21] K.M. Dyakonov, Interpolating functions of minimal norm, star-invariant subspaces, and kernels of Toeplitz operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **116** No 4 (1992), 1007-1013.

[22] K.M. Dyakonov, Entire functions of exponentials type and model subspaces in H^p, *Journal of Math. Sciences*, **71** No 1, (1994), 2222-2233.

[23] K.M. Dyakonov, Factorization of smooth analytic functions via Hilbert-Schmidt operators, *St. Petersburg Math. J.*, **8** No 4 (1997), 543-569.

[24] K.M. Dyakonov, Kernels of Toeplitz operators via Bourgain's factorization theorem , Preprint.

[25] P. Erdös and E.G. Strauss, On linear independence of sequences in a Banach space, *Pacific J. Math.*, **3** (1953), 689-694.

[26] C. Foias and A. Frazho, The commutant lifting approach to interpolation problems, In *Operator Theory: Adv. Appl.*, Birkhäuser, Basel , **44**, 1990.

[27] J.B. Garnett, *Bounded analytic functions*, New York: Academic Press 1981.

[28] V.I. Gurarii and M.A. Meletidi, Stability of completeness of sequences in Banach spaces, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **18** (1970), 533-536 [Russian].

[29] A. Hartmann, *Interpolation libre et caractérisation des traces de fonctions holomorphes sur les réunions finies de suites de Carleson*, Thèse de l'université de Bordeaux I, 1996.

[30] E. Hayashi, The solution sets of extremal problems in H^1, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **93** (1985), 690-696.

[31] E. Hayashi, The kernel of a Toeplitz operator, *Integral Equations Operator Theory*, **9** (1986), 588-591.

[32] E. Hayashi, Classification of nearly invariant subspaces of the backward shift, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **110** (1990), 441-448.

[33] W.K. Hayman, Identity theorems for functions of bounded characteristic, *J. London Math. Soc.*, **58** No 1 (1998), 127-140.

[34] S. Hruscev, N. Nikolski and B. Pavlov, *Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels*, Lect. Notes Math., Springer, Berlin-Heidelberg, Nez York, **864** (1981), 214-335.

[35] V.P. Havin and S.A. Vinogradov, Free interpolation in H^∞ and in some other function classes, *Zapiski Nauchn. Seminarov Mat. Inst. Steklova (LOMI)*, **47** (1974), 15-54 (Russian); English transl.: *J. Soviet Math.*, **9** No 2 (1978), 137-171.

[36] A.E. Ingham, Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, *Math. Z.*, **41** (1936), 367-399.

[37] W.B. Johnson and H.P. Rosenthal, On w^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces, *Studia Math.*, **43** (1972), 77-92.

[38] M.I. Kadets, The exact value of the Paley Wiener constant, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **155** (1964), 1253-1254 (Russian); English transl.: *Sov. Math. Dokl.*, **5** (1964), 559-561.

[39] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, Berlin-Heidelberg-New-York , Springer Verlag, **144**, 1967.

[40] V.E. Katsnelson, On bases in exponential functions for L^2 spaces, *Funkt. Analyz i ego Pril.*, **5** (1971), 37-74 (Russian); English transl.: *J. Funct. Anal. Appl.*, **5** (1971), 31-38.

[41] S.Ya. Khavinson, Extremal problems for bounded analytic functions with interior side conditions, *Russ. Math. Survey*, **18** No 2 (1963), 21-96.

[42] V. Klee, On the borelian and projective types of linear subspaces, *Math. Scand.*, **6** (1958), 189-199.

[43] P. Koosis *The Logarithmic Integral*, Vol. I, Cambridge University Press, 1988.

[44] P. Koosis, *Leçons sur le Théorème de Beurling et Malliavin*, Les Publications CRM, Montréal, 1996.

[45] I.F. Krasichkov-Ternovskii, An interpretation of the Beurling-Malliavin theorem on the radius of completeness, *Math. USSR Sbornik*, **66** No 2 (1990), 405-429.

[46] M. Lee and D.E. Sarason, The spectra of some Toeplitz operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **33** (1971), 529-543.

[47] B. Ja Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Amer. Math. Soc., Providence, 1980.

[48] N. Levinson, *Gap and density Theorems*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., New-York, **26**, 1940.

[49] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces, I.*, Springer Verlag, Berlin and New-York, 1977.

[50] Y.I. Lyubarskii and K. Seip, A uniqueness theorem for bounded analytic functions, *Bull. London Math. Soc.*, **29** (1997), 49-52.

[51] A.M. Minkin, Reflections of exponents, and unconditional bases of exponentials, *Algebra i Analyz*, **3** No 5 (1991), 109-134 (Russian); English transl.: *St. Petersburg Math. J.*, **3** No 5 (1992), 1043-1068.

[52] N.K. Nikolski, Bases of exponentials and values of reproducing kernels. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **252** (1980), 1316-1320 (Russian).

[53] N.K. Nikolski, *Treatise on the shift operator*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1986.

[54] N.K. Nikolski and S.V. Hruschev, A function model and some problems in the spectral theory of functions, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, **176** (1987), 97-210 (Russian); English transl.: *Proc. Steklov Inst. Mat.*, **176** No 3 (1988), 101-214.

[55] N.K. Nikolski, *Rudiments de la theorie du contrôle: vision opératorielle*, Publ. Ecole Doctorale Mat. Bordeaux, Cours Post DEA, 1994.

[56] N.K. Nikolski and V.I. Vasyunin, Elements of Spectral Theory in Terms of the Free Function Model, Part I: Basic Constructions., *MSRI Publ. Cambridge Univ. Press* **33** (1998), 211-302.

[57] R.E. Paley and N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Am. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence, **19**, 1934.

[58] R.M. Redheffer, Elementary remarks on completeness, *Duke Math. J.*, **35** No 1 (1968), 103-116.

[59] R.M. Redheffer, Completeness of sets of complex exponentials, *Adv. in Math.*, **24** (1977), 1-62.

[60] W. Rudin *Analyse réelle et complexe*, Masson, cinquième édition 1991.

[61] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw Hill. Inc., second edition, 1991.

[62] D.E. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, J. Wiley and Sons, Inc., New-York, **10** 1994.

[63] I. Singer, *Bases in Banach spaces, I.*, Springer Verlag, Berlin and New-York, 1970.

[64] I. Singer, *Bases in Banach spaces, II.*, Springer Verlag, Berlin and New-York, 1981.

[65] L. Schwartz, Etude des sommes d'exponentielles réelles, *Actualités Sci. Ind.* **959**, Paris, 1943.

[66] B. Sz-Nagy and C. Foias, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Budapest: Akademiei Kiado, 1967.

[67] P. Terenzi, On the structure, in a Banach space, of the sequences without an infinite basic subsequence, *Boll. Un. Mat. B (5)*, **15** No 1 (1978), 32-48.

[68] S.R. Treil, Geometric methods in spectral theory of vector-valued functions : some recent results, In *Operator Theory: Adv. Appl.*, Birkhäuser, Basel , **42** (1989), 209-280.

[69] S.R. Treil, Hankel operators, imbedding theorems and unconditional bases of coinvariant subspaces of the multiple shift operator, *Algebra i Analyz*, **1** No 6 (1989), 200-234 (Russian); English transl.: *St Petersburg Math. J.*, **1** No 6 (1990), 1515-1548.

[70] S.R. Treil, Unconditional bases of invariant subspaces of a contraction with finite defects, *Indiana Univ. Math. J.*, **46** No 4 (1997), 1021-1054.

[71] S.A. Vinogradov, Some remarks on free interpolation by bounded and slowly growing analytic functions, *Zapiski Nauchn. Seminarov Mat. Inst. Steklova (LOMI)*, **126** (1983), 35-46 (Russian); English transl.: *J. Soviet Math.*, **27** No 1 (1984), 137-171.

[72] A.L. Volberg, Two remarks concerning the theorem of S. Axler, S.A. Chang and D. Sarason, *J. Operator Theory*, **7** (1982), 211-219.

[73] R.M. Young, *An introduction to nonharmonic fourier series*, New York: Academic Press, 1980.

[74] R.M. Young, On complete biorthogonal systems, *Proceedings of the Amer. Soc.*, **83** No 3 (1981), 537-540.