Université Claude Bernard Lyon I UFR de Mathématiques

M2G année 2008-2009

ANALYSE FONCTIONELLE ET THEORIE DES OPERATEURS

PARTIEL

–Durée 3h.–

Le sujet comporte deux problèmes indépendants et qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Les notes de cours ne sont pas autorisées.

PROBLEME 1 : calcul fonctionnel continu pour les opérateurs auto-adjoints.

Dans tout le problème, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert complexe.

Partie I. Préliminaires

(1) Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On note $r(T)$ le rayon spectral de T. Rappeler la formule du rayon spectral (donnant une formule permettant de calculer $r(T)$).

(2) Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et supposons que $T_1T_2 = T_2T_1$. Montrer que $r(T_1T_2) \leq r(T_1)r(T_2)$.

(3) Montrer que si p est un polynome complexe, alors $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.

Partie II. Propriétés spectrales des auto-adjoints

Dans cette partie, on suppose que T est un opérateur auto-adjoint.

(1) Soit $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$|\langle (T - \lambda I)x, x\rangle| \geq |b|\|x\|^2.$$

(2) En déduire que, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $T - \lambda I$ et $(T - \lambda I)^*$ sont injectifs et à image fermés.

(3) En déduire que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(4) On suppose dans cette question que T est un opérateur positif.

   (a) Montrer que, si $\lambda > 0$, alors pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq \lambda\|x\|.$$

   (b) En déduire alors que $\sigma(T) \subset [0, +\infty[$.

Partie III. Formule du rayon spectral pour les opérateurs normaux

(1) On suppose que T est un opérateur auto-adjoint. Montrer que $r(T) = \|T\|$.

Indication : on rappelle que pour tout opérateur $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on a $\|U^*U\| = \|U\|^2$.

(2) On suppose maintenant que T est un opérateur normal. Montrer que $r(T) = \|T\|$.

Indication : on pourra considérer T^*T et utiliser la question précédente et la partie I.(2).

Partie IV. Construction du calcul fonctionnel continu.

Dans cette partie, on suppose que T est un opérateur auto-adjoint.

(1) Vérifier que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$, l'opérateur $p(T)$ est normal. En déduire que

$$\|p(T)\| = \sup\{|p(t)| : t \in \sigma(T)\}.$$

Indication : on pourra utiliser les questions I.(3) et III.(2).

(2) Soit ϕ l'homomorphisme d'algèbre défini par

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ & p & \longmapsto & p(T). \end{array}$$

On notera $C(\sigma(T))$ l'algèbre des fonctions continues sur $\sigma(T)$, muni de la norme infinie. Montrer que ϕ se prolonge en un homorphisme d'algèbre isométrique $\tilde{\phi} : C(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On notera, pour $f \in C(\sigma(T))$, $f(T) := \tilde{\phi}(f)$.

(3) On suppose dans cette question que T est un opérateur positif. Montrer qu'il existe un opérateur $U \in LH$ telle que $U^2 = T$.

Indication : on pourra utiliser la question II.(4)-(b) et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$.

(4) On suppose dans cette question que T est un opérateur auto-adjoint compact. Montrer que, si $f \in C(\sigma(T))$, $f(0) = 0$, alors l'opérateur $f(T)$ est compact.

PROBLEME 2 : un exemple d'opérateur compact.

Dans tout le problème, $L^2(0,1)$ désigne l'espace de Hilbert formé des fonctions complexes f mesurables telles que $\|f\|_2 < +\infty$ où

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt.$$

On considère Q et V deux opérateurs sur $L^2(0,1)$, définis pour $f \in L^2(0,1)$ par

$$(Qf)(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)\, dt, \qquad (x \in (0,1)),$$

et

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \qquad (x \in (0,1)).$$

Enfin on notera $A = QV$ et $T = A^*A$.

Partie I. Etude de l'opérateur Q.

(1) Soit $H = \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f(t)\,dt = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(0,1)$.

(2) Montrer que Q est la projection orthogonale sur le sous-espace H.

Partie II. Etude de l'opérateur V.

(1) Montrer que V est une application linéaire continue sur $L^2(0,1)$.

(2) On notera $C([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme infinie. Montrer que $\{Vf : \|f\|_2 \leq 1\}$ est une partie relativement compact de $C([0,1])$.

(3) En déduire que V est un opérateur compact de $L^2(0,1)$ dans lui-même.

(4) Vérifier que V est injectif.

Partie III. Etude de l'opérateur T.

(1) Montrer que l'opérateur T est compact sur $L^2(0,1)$.

(2) Montrer que $T = V^*A$.

(3) Montrer que, pour toute fonction $g \in L^2(0,1)$, on a

$$(V^*g)(t) = -\int_1^t g(u)\,du,$$

et en déduire que $(Tf)(1) = 0$, pour toute fonction $f \in L^2(0,1)$.

(4) Vérifier que

$$\int_0^1 (Qf)(x)\,dx = 0,$$

et en déduire que $(Tf)(0) = 0$, pour toute fonction $f \in L^2(0,1)$.

(5) Montrer que $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$.

Indication : pour montrer que 0 est dans le spectre de T, on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la compacité de T et le fait que $\dim L^2(0,1) = +\infty$.

(6) Montrer que $\sigma(T) = \{0\} \cup \{(n\pi)^{-2} : n \geq 1\}$ et calculer les vecteurs propres correspondants à $\lambda_n = (n\pi)^{-2}$, $n \geq 1$.

(7) En déduire que $\|A\| = \pi^{-1}$.