Université Claude Bernard Lyon I UFR de Mathématiques

MASTER "Mathématiques et Applications", $2^{\text{ème}}$ année Recherche, filière "Maths avancées' année 2008-2009

Espaces de de Branges–Rovnyak et applications.

PARTIEL

–Durée 2h.–

Le sujet comporte 3 exercices indépendants et qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Les notes de cours sont autorisées. Les théorèmes du cours utilisés devront être explicitement mentionnés.

Exercice 1

Si Ω est un ensemble, on dit qu'une fonction $k : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est un *noyau positif* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $k(z,w) = \overline{k(w,z)}$, pour tous $z, w \in \Omega$;

(ii) pour tout entier N, pour toute famille finie $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ de points distincts de Ω et pour toute famille finie $\{a_0, a_1, \dots, a_N\}$ de points de $\mathbb{C}$, on

$$\sum_{i,j=0}^{N} \overline{a_i} a_j k(\lambda_i, \lambda_j) \geq 0.$$

Si de plus la condition supplémentaire suivante

(iii) $k(z,z) \neq 0$, $z \in \Omega$,

est satisfaite, alors on dit que k est un *noyau défini positif*.

Soit H un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur un ensemble Ω et k_z le noyau reproduisant associé à $z \in \Omega$.

(a) Montrer que la fonction k, définie pour $z, w \in \Omega$ par $k(z,w) := k_w(z)$, est un noyau défini positif sur Ω.

(b) Soient ρ un nombre réel positif et φ une fonction définie sur Ω. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

  (bi) φ est un multiplicateur de H et $\|M_\varphi\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \rho$;

  (bii) la fonction

$$K(z,w) := \left(\rho^2 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}\right) k(z,w), \qquad (z, w \in \Omega)$$

  est un noyau positif sur Ω.

Exercice 2

(a) Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Montrer que T est une contraction si et seulement si l'opérateur $Id - TT^*$ est positif. En déduire que si T est une contraction et si $A \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$, alors l'opérateur $A(Id - TT^*)A^*$ est positif.

(b) Soient $A_1 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $A_2 \in \mathcal{L}(H_3, H)$ et $T \in \mathcal{L}(H_2, H)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

   (i) T est une contraction de $\mathcal{M}(A_1)$ dans $\mathcal{M}(A_2)$.

   (ii) $TA_1A_1^*T^* \leq A_2A^*$.

(c) Application : retrouver le fait que si $A_1 \in \mathcal{L}(H_1, H)$ et $A_2 \in \mathcal{L}(H, H_2)$ sont deux contractions et si $A = A_2A_1$, alors

   c1) $\mathcal{H}(A_2)$ s'injecte contractivement dans $\mathcal{H}(A)$.

   c2) A_2 agit comme une contraction de $\mathcal{H}(A_1)$ dans $\mathcal{H}(A)$.

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ une contraction.

(a) Supposons que $w \in \mathcal{H}(A)$. Montrer que

$$\sup_{z\in\mathcal{M}(A)} \left(\|w+z\|_{H_2}^2 - \|z\|_{\mathcal{M}(A)}^2\right) < +\infty.$$

(b) Soit $w \in H_2$ et supposons que

$$c := \sup_{z\in\mathcal{M}(A)} \left(\|w+z\|_{H_2}^2 - \|z\|_{\mathcal{M}(A)}^2\right) < +\infty.$$

Le but de cette question est de montrer que $w \in \mathcal{H}(A)$ et $\|w\|_{\mathcal{H}(A)}^2 \leq c$.

   (i) Soit $x \in H_1$ et soit $\gamma \in \mathbb{T}$ tel que $\langle w, Ax\rangle_{H_2} = \gamma|\langle w, Ax\rangle_{H_2}|$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|w + t\gamma Ax\|_{H_2}^2 - \|t\gamma x\|_{H_1}^2 \leq c.$$

   (ii) En déduire que

$$t^2\|(Id - A^*A)^{1/2}x\|_{H_1}^2 - 2t|\langle w, Ax\rangle_{H_1}| + c - \|w\|_{H_2}^2 \geq 0,$$

   puis

$$|\langle w, Ax\rangle_{H_2}| \leq C\|(Id - AA^*)^{1/2}x\|_{H_1},$$

   où $C = (c - \|w\|_{H_2}^2)^{1/2}$.

   (iii) En utilisant (ii), montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{M}(Id - A^*A) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (Id - A^*A)x & \longmapsto & \langle x, A^*w\rangle_{H_1} \end{array}$$

   est bien définie et s'étend en une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(A^*)$ de norme inférieure ou égale à C.

   (iv) En déduire alors qu'il existe $y \in \mathcal{H}(A^*)$ tel que $y = A^*w$ et $\|y\|_{\mathcal{H}(A^*)} \leq C$.

(v) Finalement conclure que $w \in \mathcal{H}(A)$ et $\|w\|_{\mathcal{H}(A)}^2 \leq c$.

(c) Déduire de (a) et (b) que si $w \in H_2$, alors on a équivalence entre les deux assertions suivantes :

   (1) $w \in \mathcal{H}(A)$

   (2) $\sup_{z\in\mathcal{M}(A)} \left(\|w+z\|_{H_2}^2 - \|z\|_{\mathcal{M}(A)}^2\right) < +\infty.$

   De plus, dans ce cas, montrer que

$$\|w\|_{\mathcal{H}(A)}^2 = \sup_{z\in\mathcal{M}(A)} \left(\|w+z\|_{H_2}^2 - \|z\|_{\mathcal{M}(A)}^2\right) < +\infty.$$