UNIVERSITÉ LYON I

LICENCE (MATHÉMATIQUES PURES)

VARIABLE COMPLEXE

EXERCICES et ANNALES

- 2003 -

Table des matières

Chapitre 1

Sphère de Riemann, similitudes du plan complexe

Exercice 1.1 (Projection stéréographique) *Dans $\mathbb{R}^3$, on note P le plan défini par $P := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,:\, w = 0\}$, $\mathbb{S}^2 = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |u|^2 + |v|^2 + |w|^2 = 1\}$ la sphère unité, et $N = (0,0,1)$ le "pôle nord" de $\mathbb{S}^2$. En associant le point $(x,y,0)$ avec le nombre complexe $x+iy$, on identifie le plan P avec $\mathbb{C}$. On appelle projection stéréographique de pôle nord, l'application φ qui à un point $M := (\zeta,\eta,\tau)$ de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ associe le nombre complexe z correspondant à l'affixe du point se trouvant à l'intersection de la droite (NM) et du plan P.*

a) *Montrer que φ réalise une bijection entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ et le plan P et donner explicitement les expressions de φ et φ^{-1}.*

b) *En déduire que φ réalise un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ sur P.*

c) *Soit Ω_- l'hémisphère sud et Ω_+ l'hémisphère nord, privé du pôle Nord de $\mathbb{S}^2$ définis par $\Omega_- := \{(\zeta,\eta,\tau) \in \mathbb{S}^2 \,:\, \tau < 0\}$ et $\Omega_+ := \{(\zeta,\eta,\tau) \in \mathbb{S}^2 \,:\, \tau > 0\} \setminus \{N\}$.*

   Montrer que $\varphi(\Omega_-) = D(0,1) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$ et $\varphi(\Omega_+) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > 1\}$

d) *Quelle est l'image par φ d'un cercle Γ de la sphère $\mathbb{S}^2$ (privé éventuellement de son pôle nord, si $N \in \Gamma$) ?*

e) *Soit* $C \subset \mathbb{C}$. *Montrer que* $\varphi^{-1}(C)$ *est un cercle si* C *est un cercle, un cercle privé du pôle nord si* C *est une droite.*

La projection stéréographique nous permet donc d'identifier $\mathbb{C}$ *avec* $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$*, l'identification préservant les topologies naturelles de ces deux ensembles (car* φ *est un homéomorphisme).*

Exercice 1.2 (Compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$) *Considérons* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *en ajoutant à* $\mathbb{C}$ *un point "à l'infini". Soit* β *l'ensemble des parties de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *qui sont soit des parties ouvertes de* $\mathbb{C}$*, soit des complémentaires (dans* $\widehat{\mathbb{C}}$*) de parties compactes de* $\mathbb{C}$*.*

a) *Montrer que* β *constitue l'ensemble des parties ouvertes d'une topologie sur* $\widehat{\mathbb{C}}$*.*

b) *Montrer que la topologie ainsi définie sur* $\widehat{\mathbb{C}}$ *induit sur* $\mathbb{C}$ *la topologie usuelle.*

c) *Montrer que* $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta)$ *est un espace topologique compact. On l'appelle le compactifié d'Alexandrov de* $\mathbb{C}$*.*

d) *Montrer que la projection stéréographique* φ *induit un homéomorphisme de* $\mathbb{S}^2$ *sur* $\widehat{\mathbb{C}}$*.*

e) *Montrer que* φ *permet de définir une distance* $\hat{d}$ *sur* $\widehat{\mathbb{C}}$*. Si* z_1 *et* z_2 *sont deux points de* $\widehat{\mathbb{C}}$*, donner l'expression explicite de* $\hat{d}(z_1, z_2)$*.*

f) *Vérifier que la topologie induite par cette distance sur* $\widehat{\mathbb{C}}$ *est identique à la topologie sur* $\widehat{\mathbb{C}}$ *définie ci-dessus.*

Dans les exercices qui suivent, on identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ de la façon usuelle par : $(x, y) = x + iy$. La base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ s'identifie à $(1, i)$. On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel :

$$\langle u, u' \rangle = xx' + yy'$$

pour $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ et $|u|$ désigne la norme euclidienne, i.e. $|u| = \sqrt{x^2 + y^2}$. . Rappelons enfin que si z_1, z_2 sont deux éléments de $\mathbb{C}^*$, on appelle angle orienté entre les vecteurs z_1, z_2 l'unique réel $\alpha \in [0, 2\pi[$ tel que :

$$\frac{z_2}{|z_2|} = e^{i\alpha}\frac{z_1}{|z_1|}.$$

Exercice 1.3 *Soit $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$ on a : $\langle Au, Av\rangle = k^2\langle u, v\rangle$;

(ii) il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ on a : $|Au| = k|u|$;

(iii) il existe $k \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} k\cos\theta & k\sin\theta \\ k\sin\theta & -k\cos\theta \end{pmatrix};$$

(iv) il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que, soit $\forall u \in \mathbb{C}$, $Au = wu$, soit $\forall u \in \mathbb{C}$, $Au = w\overline{u}$.

Lorsque de plus $k \neq 0$, ces conditions sont encore équivalentes à :

(v) A préserve les angles non orientés.

Dans ces conditions, on dit que A est une similitude.

Exercice 1.4 *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) dét $A \geqslant 0$ et il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $u, v \in \mathbb{C}$ on a : $\langle Au, Av\rangle = k^2\langle u, v\rangle$;

(ii) il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix};$$

(iii) $a = d$ et $b = -c$;

(iv) il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $u \in \mathbb{C}$ on a : $Au = wu$;

(v) A est la composée d'une rotation de centre 0 et d'angle θ et d'une homothétie de rapport k.

(vi) A est $\mathbb{C}$-linéaire ;

(vii) $A(i) = iA(1)$ *;*

Si dét $A \neq 0$*, ces conditions sont encore équivalentes à :*

(viii) A *préserve les angles orientés.*

Dans ces conditions, on dit que A *est une similitude directe.*

Chapitre 2

Equations de Cauchy-Riemann

Exercice 2.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$. *On note* $P = \Re\mathrm{e}(\mathrm{f})$ *et* $Q = \Im\mathrm{m}(\mathrm{f})$ *les parties réelle et imaginaire de* f.

a) *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

   (i) f *est holomorphe sur* Ω.

   (ii) Pour tout $z_0 \in \Omega$, f *est différentiable en* z_0 *et* $\mathrm{d}f_{z_0}$ *est* $\mathbb{C}$*-linéaire.*

   (iii) Pour tout $z_0 \in \Omega$, f *est différentiable en* z_0 *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

   iv) Pour tout $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, f *est différentiable en* z_0 *et* f *vérifie les équations de Cauchy-Riemann, c'est à dire que*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)\,.$$

   Si, de plus, $\mathrm{d}f_{z_0}$ *est bijective, ces conditions sont aussi équivalentes à*

   (v) Pour tout $z_0 \in \Omega$, f *est différentiable en* z_0 *et* $\mathrm{d}f_{z_0}$ *est une similitude directe (i.e qu'elle préserve les angles orientés).*

b) *Montrer que si* f *est holomorphe en* $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ *alors pour tout* $u \in \mathbb{C}$, *on a* $\mathrm{d}f_{z_0}(u) = f'(z_0)u$. *En déduire que :*

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \quad et \quad J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2\,.$$

Exercice 2.2 *Montrer directement, puis à l'aide des équations de Cauchy-Riemann, que les fonctions suivantes sont holomorphes :*

a) $z \mapsto z^k$ *sur* $\mathbb{C}$ *pour* $k \in \mathbb{N}$ *fixé.*

b) $z \mapsto z^{-k}$ *sur* $\mathbb{C}^*$ *pour* $k \in \mathbb{N}$ *fixé.*

Exercice 2.3 *Déterminer l'ensemble des points où les fonctions suivantes sont dérivables au sens complexe (on procèdera directement puis à l'aide des équations de Cauchy-Riemann) :*

a) $z \mapsto \overline{z}$ *sur* $\mathbb{C}$ *;*

b) $z \mapsto z\overline{z}$ *sur* $\mathbb{C}$*.*

Exercice 2.4 *Soient* Ω *et* Ω' *deux ouverts de* $\mathbb{C}$*.*

a) *Soient* $f : \Omega \to \Omega'$ *et* $g : \Omega' \to \mathbb{C}$ *deux fonctions de classe* C^1*. Montrer que si* f *et* g *sont holomorphes sur* Ω *et* Ω'*, alors* $g \circ f$ *est holomorphe sur* Ω*. (Trois méthodes proposées : directement, avec les équations de Cauchy-Riemann, ou en utilisant la caractérisation (ii) de l'Exercice 2.1).*

b) *Soit* $f : \Omega \to \Omega'$ *une application holomorphe, qui est aussi un* C^1*-difféomorphisme. Montrer que* f^{-1} *est holomorphe sur* Ω'*.*

c) *Soit* $f : \Omega \to \Omega'$ *une application holomorphe et* $z_0 \in \Omega$ *tel que* $f'(z_0) \neq 0$*. Montrer alors que* f *admet un inverse local au voisinage de* z_0 *et que, de plus, cet inverse est holomorphe au voisinage de* $f(z_0)$*.*

Exercice 2.5 *Pour* $z = x + iy \in \mathbb{C}$*, on définit* $\exp(z) := \exp(x)(\cos y + i \sin y)$*, puis*

$$\cos(z) := \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) \quad \mathrm{ch}(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z))$$

et

$$\sin(z) := \frac{-i}{2}(\exp(iz) - \exp(-iz)) \quad \mathrm{sh}(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z))\,.$$

Montrer que les fonctions suivantes sont holomorphes et calculer leur dérivée complexe :

a) exp, cos, sin, ch, sh.

b) $z = (x, y) \mapsto \log(z) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \arctan \dfrac{y}{x}$ *sur* $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re\mathrm{e(z)} > 0\}$.

c) $z \mapsto \log\left(-i\dfrac{z-1}{z+1}\right)$ *sur* $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im\mathrm{m(z)} > 0\}$ *(Ici,* log *est la fonction de b) ; vérifier le sens.)*

Exercice 2.6 *Soit* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *la fonction définie par :*

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & si\ x+iy \neq 0, \\ 0 & si\ x+iy = 0. \end{cases}$$

Montrer que f *n'est pas différentiable en* 0*, mais possède deux dérivées partielles qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann en* 0.

Exercice 2.7 (Partiel 99) *Soit* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *la fonction définie par :*

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & si\ z \neq 0, \\ 0 & si\ z = 0. \end{cases}$$

Déterminer les ensembles des points $z \in \mathbb{C}$ *où*

a) f *est holomorphe en* z *;*

b) f *est différentiable en* z *(comme application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$*) ;*

c) f *admet des dérivées partielles en* z *et les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites.*

Exercice 2.8 *Soit* $f : \Omega \longmapsto \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur* Ω *ouvert connexe de* $\mathbb{C}$. *On note* $P = \Re\mathrm{e(f)}$ *et* $Q = \Im\mathrm{m(f)}$ *les parties réelle et imaginaire de* f.

a) *Montrer que* f *est constante SSI* P *est constante SSI* Q *est constante SSI* $|f|$ *est constant.*

b) *Caractériser les fonctions* $Q_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ *telles que* $P + iQ_1$ *est holomorphe.*

c) **Applications :***trouver toutes les fonctions* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorphes telles que* $\Re\mathrm{e}(f)(x+iy) = x^2 - y^2 - x - y$. *Même question avec* $\Re\mathrm{e}(f)(x+iy) = -ye^x \cos y - xe^x \sin y$

Exercice 2.9 *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur* Ω.

a) *Montrer que si* $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ *alors* f *est constante.*

b) *Que peut-on dire de* f *si sa partie réelle est holomorphe sur* Ω *?*

c) *Même question si* $|f|$ *est holomorphe.*

Exercice 2.10 (Cauchy-Riemann en polaires) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *ne contenant pas* 0 *et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction différentiable. On note* $P = \Re\mathrm{e(f)}$ *et* $Q = \Im\mathrm{m(f)}$ *les parties réelle et imaginaire de* f. *Pour* $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, *on pose* $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$, $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

a) *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est dérivable en* z_0.

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(z_0) = i r_0 \dfrac{\partial f}{\partial r}(z_0)\,.$

(iii) $\dfrac{\partial P}{\partial r}(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)) = \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0))$ *et*
$\dfrac{\partial P}{\partial \theta}(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)) = -r_0\dfrac{\partial Q}{\partial r}(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0))$

Les équations (ii) et (iii) sont appelées les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires.

b) **Application :** *On note* Ω *le plan complexe privé de la demi-droite* $\{z : \Re\mathrm{e}(z) \leq 0\,, \Im\mathrm{mz} = 0\}$. *Pour* $z \in \Omega$, *on choisit l'argument* θ *de* z *dans* $]-\pi, \pi[$ *et on définit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *par*

$$f(z) = \sqrt{\rho}e^{i\theta/2}\,.$$

Montrer que f *est holomorphe sur* Ω. *Calculer* $f(z)^2$.

c) *Trouver toutes les fonctions* f *holomorphes sur* $\mathbb{C}^*$ *telles* $P = \Re\mathrm{e(f)}$ *ne dépend pas de* θ.

Exercice 2.11 *Soit* $f : \Omega \longmapsto \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur* Ω *ouvert connexe de* $\mathbb{C}$. *On note* $P = \Re\mathrm{e(f)}$ *et* $Q = \Im\mathrm{m(f)}$ *les parties réelle et imaginaire de* f.

a) *Montrer que s'il existe* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, *tel que* $aP + bQ = c$ *alors* f *est constante.*

b) *Soit* $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application différentiable telle que, pour tout* $(u,v) \in f(\Omega)$, *on ait* $\mathrm{d}\Psi(u,v) \neq 0$.

b.i) *Montrer que s'il existe une constante* $k \in \mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $(x,y) \in \Omega$, $\Psi(P(x,y), Q(x,y)) = k$, *alors* f *est constante.*

b.ii) *Quelles sont les fonctions holomorphes sur* Ω *dont l'image est incluse dans une droite du plan ; le cercle unité.*

Exercice 2.12 *Soit* $\varphi = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y$ *une forme* $\mathbb{R}$*-linéaire sur* $\mathbb{C}$. *On suppose qu'il existe un réel* $c > 0$ *tel que, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $|\varphi(z)| = c|z|$. *Montrer que*

a) φ *est* $\mathbb{C}$*-linéaire SSI* $J_\varphi(z) > 0$, $\forall z \in \Omega$.

b) $\overline{\varphi}$ *est* $\mathbb{C}$*-linéaire SSI* $J_\varphi(z) < 0$, $\forall z \in \Omega$.

Exercice 2.13 *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une application de classe* C^1 *en tant qu'application de* $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *On suppose de plus que, pour tout* $z \in \Omega$, *l'application* $\mathrm{d}f(z)$ *est bijective.*

a) *Montrer que soit* $J_f(z) > 0$, $\forall z \in \Omega$, *soit* $J_f(z) < 0$, $\forall z \in \Omega$.

b) *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est holomorphe sur* Ω.

(ii) Pour tout $z \in \Omega$, $\mathrm{d}f(z)$ *est une similitude et* $J_f(z) > 0$.

(iii) Pour tout $z \in \Omega$, $\mathrm{d}f(z)$ *est une similitude directe.*

(iv) f *est une application conforme sur* Ω.

c) *Montrer que* f *conserve les angles (non orientés) si et seulement si* f *est holomorphe ou anti-holomorphe. Dans le premier cas, elle conserve l'orientation des angles, dans le second cas, elle change l'orientation des angles.*

Exercice 2.14 *Soit* $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ *un* C^1 *difféomorphisme. Montrer que* φ *est un biholomorphisme si et seulement si* φ *préserve les angles orientés et pour tout* $z \in \Omega_1,\ J_f(z) \neq 0$.

Exercice 2.15 *Soit* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z) := z^2$.

a) *Montrer que* f *est une application conforme sur* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) *L'application* f *est-elle conforme en* $z_0 = 0$ *?*

Exercice 2.16 *Soit* $\varphi :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \longmapsto \varphi(z) := z|z|$.

a) *Montrer que* φ *est dérivable en* $z_0 = 0$ *mais n'est pas holomorphe en* z_0.

b) *Montrer que* φ *conserve les angles orientés en* z_0.

Exercice 2.17 *Soit* Ω *un voisinage de* $z_0 = \infty$ *dans* $\widehat{\mathbb{C}}$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction dérivable (au sens complexe) au point* z_0. *Supposons que* $f'(z_0) \neq 0$. *Montrer alors que* f *conserve les angles orientés de chemins passant par* z_0.

Exercice 2.18 a) *Montrer que l'homographie*

$$\begin{array}{rccl} f : & \widehat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{C}} \\ & z & \longmapsto & f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} & si\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & si\ z = 0 \\ 0 & si\ z = \infty \end{cases} \end{array}$$

induit sur $\mathcal{S}^2$ *la symétrie axiale par rapport à "l'axe des x".*

b) *Si on oriente la sphère* $\mathcal{S}^2$ *à l'aide de la "normale rentrante", montrer que la projection stéréographique* $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \to \mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$ *est une application conforme.*

c) *Soient* γ_1, γ_2 *deux chemins différentiables dans* $\widehat{\mathbb{C}}$ *qui passent par* ∞. *Notons* $\widetilde{\gamma_1} = \varphi^{-1}(\gamma_1)$ *et* $\widetilde{\gamma_2} = \varphi^{-1}(\gamma_2)$. *Déduire de a) et b) que l'angle orienté entre* γ_1 *et* γ_2 *au point* ∞ *est égal à l'angle orienté entre* $\widetilde{\gamma_1}$ *et* $\widetilde{\gamma_2}$ *au pôle nord.*

Exercice 2.19 (Fonctions holomorphes et harmoniques) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$*. Une fonction* $u : \Omega \to \mathbb{C}$ *est dite harmonique dans* Ω *si elle est de classe* C^2 *et si elle satisfait à l'équation suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

a) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$*. Montrer que si une fonction complexe sur* Ω *est holomorphe, alors ses parties réelle et imaginaire sont harmoniques. En déduire que la fonction elle-même est harmonique.*

   Inversement, on se demande si une fonction réelle harmonique sur Ω *est la partie réelle d'une fonction holomorphe. C'est parfois possible (voir Exercice 2.8, c)) mais en général la réponse est difficile et dépend de l'ouvert* Ω*.*

b) *Soit* $\Omega = \mathbb{C}^*$ *et* $P(x+iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$*. Vérifier que* P *est harmonique sur* Ω*. Par l'absurde, montrer que* P *ne peut pas être la partie réelle d'une fonction holomorphe sur* Ω*. En déduire qu'il n'existe pas de détermination holomorphe du logarithme sur* $\mathbb{C}^*$

c) *Soit* $P : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction harmonique, soit* $z_0 \in \Omega$ *et* $r > 0$ *un réel tel que* $D(z_0, r) \subset \Omega$*. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe* $f : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ *telle que* $P = \Re\mathrm{e}(f)$*. (On pourra appliquer le lemme de Poincaré, voir Exercice 2.20 à* $(-\partial P/\partial y, \partial P/\partial x)$*.) La fonction* f *est-elle unique ?*

   On résume ceci en disant que "toute fonction harmonique est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe".

d) *Lorsque* $\Omega = \mathbb{C}$*, montrer que toute fonction réelle harmonique est la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

Exercice 2.20 (Aparté : lemme de Poincaré) *Soit* $r \in \mathbb{R}^{+*}$*,* $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ *et* (R, S) *un couple de fonctions de classe* C^1 *du disque ouvert* $D = D(z_0, r)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Pour* $z = x + iy \in D$ *on pose :*

$$Q(x,y) = \int_0^1 \Big((x - x_0)\ R(t(z - z_0) + z_0) + (y - y_0)\ S(t(z - z_0) + z_0) \Big)\ \mathrm{d}t.$$

a) *Rappeler l'expression de la dérivée de la fonction*

$$\begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & R(t(x-x_0)+x_0, t(y-y_0)+y_0)\,. \end{array}$$

b) *On suppose que* $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial S}{\partial x}$. *Montrer alors que les dérivées partielles de* Q *existent et que pour tout* $(x,y) \in D(z_0, r)$, *on a :*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = R(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = S(x,y)\,.$$

Chapitre 3

Birapport

Exercice 3.1 *Soit* Γ *un sous-ensemble de* $\mathbb{C}$*. Montrer que* Γ *est un cercle de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *si et seulement si il existe* α*,* $\delta \in \mathbb{R}$*,* $\beta \in \mathbb{C}$ *avec* $|\beta|^2 - \alpha\delta > 0$ *tels que*

$$\Gamma := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \delta = 0\}\,.$$

(on entend ici par cercle dans $\widehat{\mathbb{C}}$ *un cercle de* $\mathbb{C}$ *ou une droite passant à l'infini).*

Exercice 3.2 *Une homographie est une application* $f = f_{a,b,c,d} \,:\, \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ *de la forme :*

$$f(z) = f_{a,b,c,d}(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & si\ z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & si\ z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & si\ z = \infty\,, \end{cases}$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ *sont tels que* $ad - bc \neq 0$*. On note* G *l'ensemble des homographies.*

a) *Montrer que si* $c = 0$*,* f *est la composée d'une similitude directe et d'une translation.*

b) *Montrer que si* $c \neq 0$*, on a :* $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad-bc}{c^2}\dfrac{1}{z+\frac{d}{c}}$*. En déduire que* f *peut s'écrire comme la composée d'une similitude directe, d'une inversion et de deux translations.*

c) *Montrer que l'application (surjective) suivante envoie le produit de deux* *matrices sur la composée de leurs images :*

$$\begin{array}{rccl}\Psi : & GL_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & G \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & f_{a,b,c,d}\end{array}$$

où $GL_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices 2×2 inversibles. En déduire que toute homographie est une bijection de $\widehat{\mathbb{C}}$ sur lui même et que G est un groupe (appelé groupe circulaire de Poincaré).

d) *Montrer que toute homographie est un homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{C}}$ sur lui-même.*

e) *Montrer que l'image par une homographie d'un cercle ou d'une droite est un cercle ou une droite.*

Définition 3.0.1 *Soient z_2, z_3, z_4 trois points distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$. Pour $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, on note (z, z_2, z_3, z_4) l'image de z par l'homographie qui envoie z_2 en 1, z_3 en 0 et z_4 en ∞. On appelle (z, z_2, z_3, z_4) le birapport des quatres points z, z_2, z_3, z_4.*

Donner l'expression explicite de ce birapport.

Exercice 3.3 *Soient z_2, z_3, z_4 trois points distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$ et T une homographie quelconque. Montrer que*

$$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, T_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)\,,$$

pour tout $z_1 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Exercice 3.4 *Soient z_2, z_3, z_4 trois points distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$.*

a) *Montrer qu'il existe un unique cercle Γ dans $\widehat{\mathbb{C}}$ passant par z_2, z_3 et z_4.*

b) *Montrer qu'un point z_1 de $\widehat{\mathbb{C}}$, distinct de z_2, z_3 et z_4, appartient à Γ si et seulement si le birapport (z_1, z_2, z_3, z_4) est réel.*

Exercice 3.5 *Soit $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ une transformation homographique ($ad - bc \neq 0$). Montrer que $T(\widehat{\mathbb{R}}) = \widehat{\mathbb{R}}$ si et seulement si on peut choisir les coefficients a, b, c, d réels.*

Définition 3.0.2 *Soit Γ un cercle passant par trois points distincts z_2, z_3, z_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$. Les points z et z^* de $\widehat{\mathbb{C}}$ sont dits symétriques par rapport à Γ si*

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}\,.$$

Exercice 3.6 a) *Montrer que cette définition ne dépend que de Γ et pas des points z_2, z_3, z_4 choisis sur Γ.*

b) *Montrer que $z = z^*$ si et seulement si $z \in \Gamma$.*

c) *Vérifier que si Γ est une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$, la définition 3.0.2 de points symétriques coincident avec la définition usuelle.*

d) *Vérifier enfin que cette définition correspond à celle donnée dans le cours.*

Exercice 3.7 *Soit Γ_1, Γ_2 deux cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$.*

a) *Montrer qu'il existe une homographie f telle que $f(\Gamma_1) = \Gamma_2$.*

b) *Soient z et z^* deux points de $\widehat{\mathbb{C}}$. Montrer que z et z^* sont symétriques par rapport à Γ_1 si et seulement si $f(z)$ et $f(z^*)$ sont symétriques par rapport à Γ_2.*

Définition 3.0.3 *Soit Γ un cercle de $\widehat{\mathbb{C}}$. Une orientation de Γ est un triplet ordonné de points distincts (z_1, z_2, z_3) tel que chaque point $z_i \in \Gamma$.*
Si $z \notin \Gamma$, on dit que z est à droite (respectivement à gauche) de Γ relativement à l'orientation (z_1, z_2, z_3) si

$$\Im\mathrm{m}(\mathrm{z}, \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3) > 0 \quad (\textit{resp.}\ \Im\mathrm{m}(\mathrm{z}, \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3) < 0)\,.$$

Pour un cercle Γ dans $\widehat{\mathbb{C}}$ et une orientation (z_1, z_2, z_3), on note

$$\Gamma_+ := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \Im\mathrm{m}(\mathrm{z}, \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3) > 0\} \quad \textit{et} \quad \Gamma_- := \{\mathrm{z} \in \widehat{\mathbb{C}} : \Im\mathrm{m}(\mathrm{z}, \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3) < 0\}\,.$$

Enfin, si Γ est un cercle dans $\mathbb{C}$ et z_1 ,z_2, z_3 trois points de Γ, on dit que (z_1, z_2, z_3) définit une orientation positive de Γ si $\infty \in \Gamma_+$, autrement dit si $\Im\mathrm{m}(\infty, \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3) > 0$.

Exercice 3.8 *Soit* Γ *un cercle de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *et* z_1, z_2, z_3 *trois points distincts de* Γ.

a) *Que représente* $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \,:\, \Im\mathrm{m}(z, z_1, z_2, z_3) = 0\}$ *?*

b) *Soit* $\Gamma = \widehat{\mathbb{R}}$. *Montrer que* Γ_+ *est soit le demi-plan supérieur soit le demi-plan inférieur.*

c) *Si* $\Gamma = \widehat{\mathbb{R}}$ *et* $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = \infty$, *montrer que* Γ_+ *relativement à l'orientation* $(1, 0, \infty)$ *est le demi-plan supérieur.*

d) *Soit* Γ *une droite de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *définie par*

$$\Gamma := \{a + tb, t \in \mathbb{R}\}, \quad a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}^* .$$

Montrer que Γ_+ *est soit le demi-plan à droite de* Γ *soit le demi-plan à gauche de* Γ.

e) *Soit* Γ *un cercle de* $\mathbb{C}$ *défini par*

$$\Gamma := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a| = R\}, \quad a \in \mathbb{C},\ R > 0 .$$

Montrer que Γ_+ *est soit* $D(a, R) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a| < R\}$ *soit* $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(a, R)}$.

f) *En déduire que si* (z_1, z_2, z_3) *définit une orientation positive, alors* Γ_- *(relativement à* (z_1, z_2, z_3)*) est égal au disque ouvert* $D(a, R)$.

g) *Si* $z_k = a + R\exp(i\theta_k)$, $k = 1, 2, 3$, *donner une condition nécessaire et suffisante portant sur* θ_1, θ_2 *et* θ_3 *pour que* (z_1, z_2, z_3) *définisse une orientation positive de* Γ.

Exercice 3.9 *Soit* Γ^1, Γ^2 *deux cercles de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *et* f *une homographie qui envoie* Γ^1 *sur* Γ^2. *Si* (z_1, z_2, z_3) *est une orientation de* Γ^1, *montrer que* f *envoie* Γ^1_+ *sur* Γ^2_+ *et* Γ^1_- *sur* Γ^2_- *où* Γ^1_+ *et* Γ^1_- *sont définis relativement à l'orientation* (z_1, z_2, z_3) *et* Γ^2_+ *et* Γ^2_- *relativement à l'orientation* $(f(z_1), f(z_2), f(z_3))$.

Exercice 3.10 *Soient* $G := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \Re\mathrm{e} z > 0\}$ *et* $D := D(0, 1)$. *Construire une homographie* f *telle que* $f(G) = D$.

Exercice 3.11 *Pour* X, $Y \subset \widehat{\mathbb{C}}$, *on désigne par* $\mathrm{Aut}(X,Y)$ *l'ensemble des homographies* f *telles que* $f(X) = Y$. *Si* $X = Y$, *on notera* $\mathrm{Aut}(X) := \mathrm{Aut}(X,X)$.

a) *Montrer que* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b \,:\, a \in \mathbb{C}^*,\, b \in \mathbb{C}\}$.

b) *Si* $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$ *est le disque unité, montrer que*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{\exp(i\theta)\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \,:\, \theta \in \mathbb{R},\, a \in \mathbb{D}\}\,.$$

c) *Si* $\mathcal{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \Im\mathrm{mz} > 0\}$ *désigne le demi-plan supérieur, montrer que*

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{H}_+, \mathbb{D}) = \{\exp(i\theta)\frac{z-a}{z-\overline{a}} \,:\, \theta \in \mathbb{R},\, a \in \mathcal{H}_+\}\,.$$

d) *Déterminer* $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}_+)$.

e) *Si* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$ *désigne le cercle unité, déterminer* $\mathrm{Aut}(\mathbb{T}, \widehat{\mathbb{R}})$.

Chapitre 4

Séries entières

Exercice 4.1 *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à R. Supposons que les a_n sont tous non nuls.*

a) *Montrer à l'aide de la définition du rayon de convergence que*

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \leqslant R \leqslant \frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

b) *Retrouver la règle classique dite de d'Alembert qui dit que si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe alors le rayon de convergence R est*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Exercice 4.2 *Montrer, sans utiliser la règle de D'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^n$$

est égal à $\frac{1}{e}$ (en utilisant le développement en série entière de e^n, on montrera au préalable que l'on a l'encadrement suivant

$$\frac{n^n}{n!} < e^n < (2n+1)\frac{n^n}{n!}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$).

Exercice 4.3 *Montrer que le rayon de convergence de la série entière (lacunaire)*

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{n^2}}{n!}$$

vaut $R = 1$.

Exercice 4.4 *Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :*

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$.

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n\sqrt{n}}$.

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n!z^n$.

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$.

On étudiera pour chacune de ces séries la convergence sur le bord du disque de convergence.

Exercice 4.5 *Soit* $\theta \in]0, 2\pi[$, $\theta \neq \pi$.

a) *Montrer que si* $|z| < 1$, *la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$ *converge absolument.*

b) *Montrer que, pour* $z = e^{i\theta}$ *ou* $z = e^{-i\theta}$, *la série du a) diverge. En déduire le rayon de convergence de cette série.*

Exercice 4.6 *Soient* X *et* Y *deux ensembles,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies dans* X, *à valeurs réelles, et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies dans* Y, *à valeurs complexes. On suppose que la suite* (u_n) *est monotone* ($u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *et tout* $x \in X$, *auquel cas elle est dite décroissante, ou bien* $u_{n+1}(x) \geqslant u_n(x)$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *et tout* $x \in X$, *auquel cas elle est dite croissante). On suppose aussi que la suite* (u_n) *est bornée (il existe* $M \geqslant 0$ *tel que* $|u_n(x)| \leqslant M$, *pour tout* $n \geqslant 0$ *et tout* $x \in X$*). Enfin, on suppose que la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n(y)$ *est uniformément convergente sur* Y. *Montrer que la série* *de fonctions*

$$(x,y) \longmapsto \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)v_n(y)$$

converge uniformément sur $X \times Y$.

Exercice 4.7 *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$, z_0 *un point de* $\mathbb{C}$ *et* z_1 *un point du cercle de centre* z_0 *et de rayon* R. *Si la série numérique*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z_1 - z_0)^n$$

converge alors la série de fonctions

$$z \longmapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n(z - z_0)^n$$

converge uniformément sur le segment $[z_0, z_1]$ *du plan complexe. (On pourra utiliser l'exercice précédent).*

Exercice 4.8 *Montrer que la série entière*

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

a pour rayon de convergence 1 et que pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\log(1+t) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}\,.$$

Montrer que la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

converge et déduire de l'exercice 4.7 que sa limite vaut $\log 2$.

Exercice 4.9 *Soit* $S(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R.

a) *Montrer que pour tout* $r < R$, *on a*

$$\int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta}|^2 \, d\theta = \sum_{n\geqslant 0} |a_k|^2 r^{2k}\,.$$

b) *Montrer que si $R = \infty$ et si S est une fonction bornée dans $\mathbb{C}$, alors S est forcément constante.*

c) *Que peut-on dire de S si $R = \infty$ et s'il existe un entier $k \geqslant 1$ et des constantes positives A et B telles que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|S(z)| \leqslant A|z|^k + B$?*

Exercice 4.10 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe qui admet une limite finie ℓ.*

a) *Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum u_n t^n/n!$ est infini. On note $h(t)$ la somme de cette série.*

b) *Montrer que $h(t)e^{-t}$ tend vers ℓ lorsque t tend vers $+\infty$ (dans $\mathbb{R}$).*

Exercice 4.11 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le terme général d'une série convergente complexe de somme S, et soit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$.*

a) *Montrer que les rayons de convergence des séries*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \quad et \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n t^n}{n!}$$

sont $+\infty$.

b) *Montrer que $f'(t) = g'(t) - g(t)$, puis que $\int_0^t f(u)e^{-u}du = (g(t) - f(t))e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

c) *En déduire que $\int_0^{+\infty} f(u)e^{-u}du = S$.*

Exercice 4.12 *Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes (on précisera le rayon de convergence) :*

a) $f(z) = \dfrac{-1}{(1+z)^2}$.

b) $g(z) = \dfrac{2}{(1+z)^3}$.

c) $h(z) = \exp\left(\dfrac{z}{\tan(\alpha)}\right)\cos(z)$, *où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ est fixé.*

Exercice 4.13 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0\,. \end{cases}$$

a) *Montrer que* f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$*.*

b) *Montrer que* f *n'est pas développable en série entière au voisinage de 0 et n'est donc pas analytique.*

Chapitre 5

Fonctions classiques

Exercice 5.1 a) *Montrer que* $\forall z \in \mathbb{C}$, *on a* $\cos(iz) = \operatorname{ch}(z)$; $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$; $\sin(iz) = i\operatorname{sh}(z)$ *et* $\operatorname{sh}(iz) = i\sin(z)$. *Déduire les parties réelles et imaginaires des fonctions* $\cos$, $\sin$, ch *et* sh. *Les fonctions* $\cos$ *et* $\sin$ *sont-elles bornées sur* $\mathbb{C}$ *?*

b) *Trouver les zéros des quatres fonctions* $\cos$, $\sin$, ch *et* sh.

c) *Résoudre les équations :*

(i) $\sin(z) = \dfrac{5}{3}$.

(ii) $\operatorname{ch}(z) = \dfrac{1}{2}$.

d) *Trouver l'image par* $\sin$ *de la droite* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

e) *Même question avec la droite* $x = a$ *où* $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

f) *Même question avec le segment :* $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ *et* $y = 0$.

Exercice 5.2 a) *Quels sont les domaines de définition de* $\tan$ *et de* th *? Montrer que* $\tan$ *est* π*-périodique et que* th *est* $i\pi$*-périodique.*

b) *Montrer* $\cos^2(z)+\sin^2(z) = 1$ *et que* $1+\tan^2(z) = \dfrac{1}{\cos^2(z)}$ *pour* $z \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

c) *Montrer que* $\operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1$ *et que* $1 - \operatorname{th}^2(z) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(z)}$ *pour* $z \neq i(\dfrac{\pi}{2} + k\pi)$.

d) *Résoudre :*

(i) $\exp(z) = 1$.

(ii) $\exp(z) = i$.

(iii) $\exp(z) = -3$.

Exercice 5.3 *Soient* $B = \{z \in \mathbb{C} \,:\, -\pi < \Im\mathrm{mz} < \pi\}$ *et* $A = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

a) *Montrer que* $\exp(z)$ *fournit une bijection holomorphe de* B *sur* A.

b) *Montrer que l'application réciproque, notée* $\log(z)$, *est holomorphe sur* A, *de dérivée* $\frac{1}{z}$.

c) *Calculer* $\log(i) + \log\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $\log\left(i(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$. *Conclusion ?*

d) *Soit* L *une détermination holomorphe du logarithme sur* $A = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. *Montrer qu'il existe* $k_0 \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\forall z \in A$, $L(z) = \log(z) + 2ik_0\pi$.

e) *Soit* $F : A \to \mathbb{C}$, *définie par* $F(z) := \exp(\frac{1}{2}\log(z))$. *Vérifier que* $F(z)^2 = z$, $\forall z \in A$.

f) *Montrer que* F *est holomorphe sur* A *et que* $F'(z) = \dfrac{1}{2F(z)}$.

g) *Soit* $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$. *En considérant les deux ouverts* $B_{\vartheta_0} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \vartheta_0 < \Im\mathrm{mz} < \vartheta_0 + 2\pi\}$ *et* $A_{\vartheta_0} = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\vartheta_0} \,:\, r \geqslant 0\}$. *Montrer que* $\exp(z)$ *induit une bijection de* B_{ϑ_0} *sur* A_{ϑ_0}, *qui permet de définir une détermination holomorphe sur* A_{ϑ_0}.

Exercice 5.4 (Fonction arcsinus) *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *ne contenant pas 1 et -1. On appelle fonction arcsinus sur* U *toute fonction holomorphe* $f : U \to \mathbb{C}$ *telle que* $\sin(f(z)) = z$, $\forall z \in U$.

a) *Soient* z *et* u *deux complexes fixés. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\sin(u) = z$.

(ii) $\exists v \in \mathbb{C} /\, v^2 = 1 - z^2$ *et* $\exp(iu) = iz + v$.

b) *Soit f une fonction arcsinus sur U. Montrer qu'il existe $g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $\forall z \in U$, on a $g(z)^2 = 1 - z^2$ et $\exp(if(z)) = iz + g(z)$. En déduire que $f'(z) = \dfrac{1}{g(z)}$, $\forall z \in U$.*

c) *Réciproquement, on suppose qu'il existe une fonction holomorphe $g : U \to \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in U$, on a $g(z)^2 = 1 - z^2$ et telle qu'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto \log(iz + g(z))$ sur U. Montrer alors qu'il existe une fonction arcsinus sur U.*

Exercice 5.5 *Soit C le carré de centre 0 et de coté 2, parcouru une fois dans le sens positif.*

a) *Calculer directement*

$$\int_C f(z)\,dz \quad \text{où } f(z) = \frac{z-1}{z}\,.$$

b) *Peut-on obtenir ce résultat à l'aide de l'indice de C par rapport à 0 ?*

b) *Mêmes questions avec $C = \mathcal{C}(2,1)$, i.e. le cercle de centre 2 et de rayon 1, et $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$.*

Exercice 5.6 (Fonction arctangente) *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On appelle fonction arctangente toute fonction holomorphe $g : U \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $a \in U$ on ait : $\tan(g(a)) = a$).*

a) *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

   (i) Il existe une fonction arctangente sur U ;

   (ii) Il existe une primitive holomorphe de $z \mapsto (z^2+1)^{-1}$ sur U ;

   (iii) Pour tout circuit $\gamma : [0,1] \to U$, les indices de γ par rapport à i et $-i$ sont égaux.

b) *Peut-on définir une fonction arctangente sur $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$?*

Soit $\log(z)$ la détermination principale du logarithme complexe, défini sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On note $\log_0(z)$ celle définie sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, par le choix de l'argument de z entre 0 et 2π.

c) *Montrer que* $\dfrac{1+iz}{1-iz} \in \mathbb{R}_+$ *SSI* $z \in [-i, i]$.

d) *Déduire que la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{2i} \log_0 \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$$

est bien définie et holomorphe sur $U := \mathbb{C} \setminus [-i, i]$.

e) *Calculer* $\tan(f(z))$ *pour* $z \in U$ *et montrer que* f *est à valeurs dans l'ouvert* $V := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re\mathrm{e(z)} < \pi \text{ et } \mathrm{z} \neq \frac{\pi}{2}\}$. *Montrer aussi que* $f(x) = \arctan(x)$, *pour* $x > 0$.

Soit $W = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

f) *Montrer à l'aide de la détermination principale du logarithme qu'on peut définir sur* W *une fonction holomorphe* g *telle que* $g(z)^2 = 1 - \dfrac{1}{z^2}$, $\forall z \in W$ *et* $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $\forall x \in]1, +\infty[$.

g) *Montrer que l'on ne peut pas avoir simultanément* $z \in W$ *et* $zg(z) \notin U$. *Déduire que la fonction* $h(z) := f(zg(z))$ *est holomorphe sur* W.

h) *Montrer que* h *prend ses valeurs dans* V *et que* $\tan^2(h(z)) = z^2 - 1$.

Exercice 5.7 (Racines carrées d'une fonction holomorphe) *Notons* U *le plan complexe privé des deux demi-droites* $[1, +\infty[$ *et* $]-\infty, -1]$ *de l'axe réel.*

a) *Montrer que l'image de* U *par la fonction* $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2 - 1$ *est contenue dans* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

b) *On note* $\log = \log_0$ *la détermination du logarithme définie sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. *Montrer que la fonction :*

$$\begin{array}{rccc} f: & U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)} \end{array}$$

est bien définie et holomorphe sur U. *Calculer son carré et sa dérivée.*

c) *Notons* V *le plan complexe privé du segment* $[-1, 1]$. *Vérifier que pour* $z \in V$, *on a* $z^{-1} \in U$. *Ceci permet de définir :*

$$\begin{array}{rccc} g: & V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & izf(z^{-1}) = iz\, e^{\frac{1}{2}\log(z^{-2}-1)}. \end{array}$$

Montrer que g est bien définie et holomorphe sur V. Calculer son carré et sa dérivée.

Exercice 5.8 (Racines p-ièmes) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et p un entier, $p \geq 2$.*

On appelle détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$ on a : $f(z)^p = z$.

a) *Montrer que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto \log(z)$ sur U, alors il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U.*

b) *Soit f une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer que pour tout $z \in U$ on a $f(z) \neq 0$. En déduire que $0 \notin U$.*

c) *On suppose U connexe et on note f_1, f_2 deux déterminations holomorphes de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = \lambda f_2$.*

d) *En déduire que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U, alors il en existe exactement p disctinctes.*

e) *Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe f de $z \mapsto z^{1/3}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ telle que $f(1) = e^{4i\pi/3}$.*

Exercice 5.9 *Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = e^{z^2}$. On fixe $R \in \mathbb{R}_*^+$ et on note γ_R le circuit composé du segment $[0, R]$, de l'arc de cercle centré en 0, de rayon R, joignant "au plus court" R à $Re^{i\pi/4}$ et du segment joignant $Re^{i\pi/4}$ à 0.*

a) *Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{C}$. En déduire que f possède une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}$, puis que $\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.*

b) *Montrer que la contribution de l'intégrale sur l'arc de cercle tend vers 0 lorsque $R \to +\infty$.*

c) *Montrer l'existence des intégrales suivantes et les calculer : $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$.*

Exercice 5.10 a) *Calculer $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos(e^{-z})}{z^2} dz$. (On pourra chercher $u, v \in \mathbb{C}$*

tels que $z \mapsto (\cos(e^{-z}) - u - vz)/z^2$ *se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$*).*

b) *Calculer* $\int_\gamma z e^{z^2} dz$ *lorsque* γ *est :*

(i) *le segment reliant* i *et* $i+2$ *;*

(ii) *la portion de la parabole* $y = x^2$ *limitée par les points* 0 *et* $1+i$*.*

Exercice 5.11 (Une fonction définie par une intégrale.) *Pour* $z \in \mathbb{C}$*, on pose :*

$$f(z) = e^{-z^2} \int_{\gamma_z} e^{u^2} du,$$

où γ_z *est un chemin* C^1 *par morceaux qui va de* 0 *à* z*.*

a) *Montrer que* $f(z)$ *est bien définie (c'est-à-dire ne dépend pas du choix de* γ_z*).*

b) *Montrer que* f *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$*. Le cours permettra d'en déduire que* f *est développable en série entière à l'origine, avec un rayon de convergence infini.*

c) *Trouver une équation différentielle dont* f *est solution.*

d) *Déterminer le* n*-ème coefficient du DSE de* f *à l'origine en fonction de* n*.*

Exercice 5.12 a) *Montrer que la fonction* $z \mapsto f(z) := \exp\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}$ *possède une primitive sur l'ouvert* $U = \mathbb{C}^*$*.*

b) *Soit* Γ *le cercle unité orienté dans le sens direct. Calculer l'intégrale :*

$$I := \int_\Gamma \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz\,.$$

Exercice 5.13 *Soient* a *et* b *dans* $\mathbb{R}_+^*$*.*

a) *Trouver un lacet* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$*, de classe* C^1 *et ayant pour image l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

b) *En calculant*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

de deux façons différentes, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}\,.$$

Exercice 5.14 *Soit U un ouvert connexe (ne contenant pas 0) sur lequel il existe une détermination du logarithme complexe, c'est-à-dire une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que pour tout $z \in U$ on ait :* $\exp(f(z)) = z$.

a) *Montrer que $f'(z) = z^{-1}$: ainsi f est une primitive holomorphe de z^{-1}.*

b) *En déduire que s'il existe une détermination holomorphe du logarithme sur U, alors pour tout chemin $\gamma : [0,1] \to U$, on a :* $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 0$.

c) *Existe-t-il une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}^*$?*

Inversement, soit U un ouvert connexe (ne contenant pas 0) sur lequel la fonction $z \mapsto z^{-1}$ possède une primitive holomorphe f.

d) *Montrer que la fonction $z \mapsto \exp(f(z))/z$ est constante.*

e) *En déduire qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme sur U.*

Exercice 5.15 *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un circuit,* i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$, *et soit z_0 un point hors de l'image de γ. On note :*

$$I(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - z_0}\, \mathrm{d}u, \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = I(b).$$

On appelle $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ *l'indice de γ par rapport à z_0.*

a) *Localement, $\gamma(u)$ varie dans une coupure de la forme $\mathbb{C} \setminus \{z_0 + \rho e^{i\theta_0},\ \rho \in \mathbb{R}^+\}$, avec θ_0 fixé, ce qui permet d'écrire $\gamma(t) = z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)}$. Ecrire l'expression de $I(t)$ avec ces notations. Donner ainsi un sens à la phrase : "l'indice de γ par rapport à z_0 est le nombre de tours que fait γ autour de z_0".*

En étudiant la fonction $g(t) = \exp(2i\pi\, I(t))$, *montrer et retenir les propriétés principales de l'indice :*

b) *la fonction* $z_0 \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ *est localement constante, i.e. constante sur les composantes connexes de* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\gamma)$.

c) *la fonction* $z_0 \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ *est constante le long de tout chemin tracé dans* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\gamma)$.

d) *sur la composante connexe non bornée de* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\gamma)$, *l'indice est nul.*

e) $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ *est un entier.*

Exercice 5.16 *Soit* $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ *deux circuits. On suppose qu'on peut déformer continûment* γ_0 *en* γ_1, *c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue* $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$, $(s,t) \mapsto \Gamma(s,t)$ *telle que pour* $s = 0$ *on ait* $\Gamma(0,t) = \gamma_0(t)$ *et pour* $s = 1$ *on ait* $\Gamma(1,t) = \gamma_1(t)$ *(voir figure 1). On note alors* $\Gamma(s,t) = \gamma_s(t)$. *Soit* z_0 *un point dans* $\mathbb{C}$ *tel que pour tout* $(s,t) \in [0,1]$, *on a :* $\gamma_s(t) \neq z_0$ *(i.e. que* z_0 *n'est dans aucun support de la déformation* Γ*).*

Montrer alors que $\mathrm{Ind}(\gamma_0, z_0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, z_0)$.

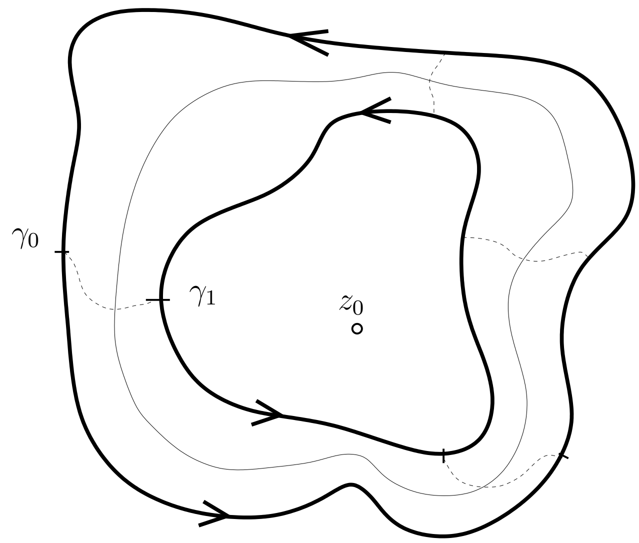


Fig. 5.1 – Déformation continue de lacets

Exercice 5.17 (Théorème de point fixe) *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *contenant* $\overline{D} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leqslant 1\}$ *et* $f : U \to \mathbb{C}$ *une application de classe* C^1 *vérifiant* $f(\overline{D}) \subset \overline{D}$. *Le but de l'exercice est de montrer que* f *a au moins un point fixe dans* $\overline{D}$.

Si $0 \leqslant s \leqslant 1$, *on définit les lacets* γ_s *et* Γ_s *en posant, pour* $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$\gamma_s(t) = f\left(se^{2\pi it}\right) - se^{2\pi it} \quad \textit{et} \quad \Gamma_s(t) = sf\left(e^{2\pi it}\right) - e^{2\pi it}.$$

On suppose que $f(z) \neq z$, *pour tout* $z \in \overline{D}$.

a) *Pour* $s \in [0,1]$, *déterminer* $\mathrm{Ind}(\gamma_s, 0)$ *et* $\mathrm{Ind}(\Gamma_s, 0)$.

b) *En déduire une contradisction et prouver ainsi que* f *a au moins un point fixe dans* $\overline{D}$.

Exercice 5.18 *Soit* $\gamma : I \to \mathbb{C}$ *un lacet* C^1 *par morceaux et* $z_0 \in \mathbb{C}$ *un point hors du support de* γ. *On va donner une méthode pratique pour calculer* $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$. *Soit* $L_{\overrightarrow{u}}$ *une demi droite issue du point* z_0 *dans la direction de* $\overrightarrow{u}$ *de manière à ne rencontrer le support du lacet qu'en un nombre fini de points simples* $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \ldots, \gamma(t_N)$ *tel que le vecteur* $\gamma'(t_j)$ *ne soit, pour* $j = 1, \ldots, N$ *jamais colinéaires à* $\overrightarrow{u}$ *(voir figure 2).*

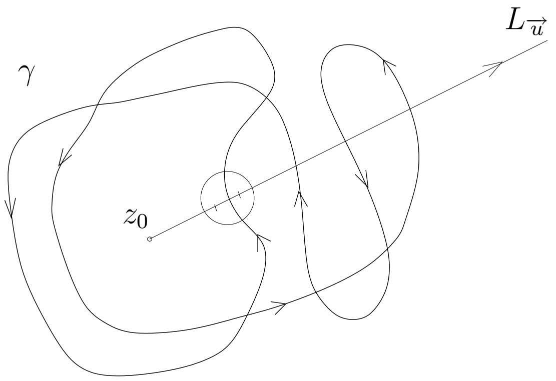


FIG. 5.2 – calcul pratique de l'indice

Pour expliquer la méthode (pratique) de calcul de l'indice, commençons par faire un zoom autour d'un point d'intersection (voir figure 3).

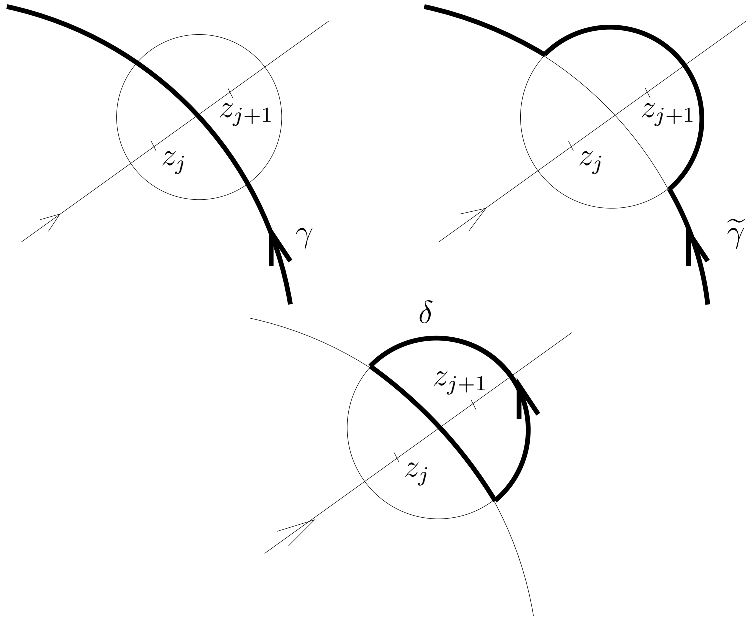


FIG. 5.3 – Zoom autour d'un point d'intersection

a) *Montrer que pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathrm{Supp}\gamma \cup \mathrm{Supp}\widetilde{\gamma})$, *on a :* $\mathrm{Ind}(\tilde{\gamma}, z) = \mathrm{Ind}(\gamma, z) + \mathrm{Ind}(\delta, z)$.

b) *Montrer que* $\mathrm{Ind}(\gamma, z_j) = \mathrm{Ind}(\gamma, z_{j+1}) + 1$.

c) *En déduire que*

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon(t_j)\,, \quad \textit{où } \varepsilon(t_j) = \begin{cases} 1 & \textit{si dét } (\overrightarrow{u}, \gamma'(t_j)) > 0 \\ -1 & \textit{si dét } (\overrightarrow{u}, \gamma'(t_j)) < 0\,. \end{cases}$$

Exercice 5.19 *Soit* $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *une application continue, non bornée, prenant la valeur* 0 *en* 0. *Notons* $U = \mathbb{C} \setminus \delta(\mathbb{R}^+)$, *et soit* $\gamma : [0, 1] \to U$ *un circuit tracé dans* U. *Notons* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, \delta(t))$ *(voir figure 4).*

a) *Montrer que* φ *est continue.*

b) *En déduire que* φ *est constante. Que vaut-elle ?*

c) *Conclure : pour tout chemin* γ *tracé dans* U, *on a* $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 0$.

d) *En déduire qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme dans* U.

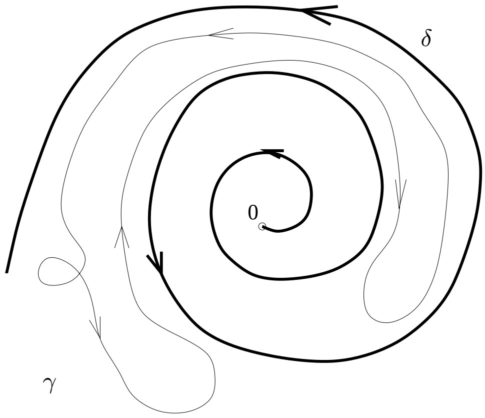


FIG. 5.4 – Coupure pour une détermination du logarithme

Exercice 5.20 *Dans ce qui suit, γ_r désigne le cercle de centre* 0 *et de rayon* r *parcouru une fois dans le sens positif.*

a) *On donne $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| \neq r$. Calculer*

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-x}\,;$$

En déduire $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^3-1}$ *si* $r \neq 1$.

b) *Calculer* $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{dz}{6z^2-5z+1}$.

c) *On donne $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Montrer que* $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{dz}{az^2+bz+c}$ *vaut zéro si* r *est assez grand.*

Exercice 5.21 (Logarithme de fonctions holomorphes) *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe qui ne s'annule jamais. On appelle détermination holomorphe du logarithme de f sur U toute fonction holomorphe $g : U \to \mathbb{C}$ telle que $e^g = f$.*

a) *Pour tout f et tout U, existe-t-il toujours une détermination du logarithme de f sur U ? S'il en existe une, comment trouver toutes les autres ?*

b) *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une détermination holomorphe du logarithme de f sur U ;*

(ii) *Il existe une primitive holomorphe de f'/f sur U ;*

(iii) *Pour tout circuit $\gamma : [0,1] \to U$, l'indice de $\Gamma = f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ par rapport à zéro est nul.*

c) *Supposons que U soit étoilé et que f ne s'annule pas sur U. Montrer qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme de f sur U.*

Exercice 5.22 (Racine carrée d'une fonction holomorphe) *On se contente de l'exemple d'une fonction sur deux ouverts.*

Soit $U = \mathbb{C} \setminus \big(]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\big)$. Soit aussi $\delta : [0,1] \to \mathbb{C}$ un chemin tel que $\delta(0) = -1$ et $\delta(1) = 1$ et $V = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\delta)$. Soit enfin, pour $z \in \mathbb{C}$, $h(z) = z^2 - 1$.

a) *Existe-t-il une détermination holomorphe du logarithme de h sur U ? Existe-t-il une détermination holomorphe de la racine carrée de h sur U ?*

b) *Existe-t-il une détermination holomorphe du logarithme de h sur V ?*

Supposons pour simplifier que V soit connexe, i.e. que δ soit un chemin injectif. Soit $z_0 \in V$ fixé. Pour $z \in V$, on fixe un chemin $\gamma : [0,1] \to V$ tel que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z$, puis on pose :

$$L(z) = \int_\gamma \frac{2w}{w^2 - 1}\,\mathrm{d}w, \quad r(z) = \exp(\frac{1}{2}L(z)).$$

c) *Est-ce que la fonction L est bien définie ? et r ?*

d) *Existe-t-il une détermination holomorphe de la racine carrée de h sur V ?*

Exercice 5.23 (Une primitive holomorphe de $1/\cos z$.) a) *Pour $w \in \mathbb{C}$, déterminer les parties réelle et imaginaire de $\tan w$ en fonction de $u = \Re\mathrm{e}(\mathrm{w})$ et $v = \Im\mathrm{m}(\mathrm{w})$.*

b) *Quel est le domaine de définition et d'holomorphie U de $f : z \mapsto \tan(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4})$? Déterminer les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ en fonction de $x = \Re\mathrm{e}(\mathrm{z})$ et $y = \Im\mathrm{m}(\mathrm{z})$.*

c) *Pour* $\theta \in \mathbb{R}$ *on pose* $\mathcal{C}_\theta = \{z \in U \ : \ \arg f(z) \equiv \theta[2\pi]\} \cup \{\pm i\}$. *Déterminer et tracer* $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{\pi/2}$, $\mathcal{C}_{-\pi/2}$, $\mathcal{C}_\pi$, $\mathcal{C}_\theta$.

d) *Déterminer une primitive de* $x \mapsto 1/\cos(x)$ *sur l'intervalle* $]-\pi/2, \pi/2[$ *de* $\mathbb{R}$. *En déduire une primitive holomorphe de* $z \mapsto 1/\cos(z)$ *sur* $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_\theta$.

Chapitre 6

Formules de Cauchy

Exercice 6.1 *Soit* $U = \mathbb{C} \setminus \{iy\,, |y| \geqslant 1\}$.

a) *Montrer qu'il existe une unique fonction* f *holomorphe sur* U *telle que* $f(0) = 0$ *et* $f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, $\forall z \in U$.

b) *Montrer que la fonction* f *du* a) *est développable en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence. Pouvait-on remplacer* U *par* $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ *?*

Exercice 6.2 *Soit* U *un domaine étoilé et* $f : U \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe.*

a) *Montrer que* $f(z) \neq 0$, $\forall z \in U$, *si et seulement si il existe une fonction* $g : U \to \mathbb{C}$ *holomorphe telle que* $\exp(g(z)) = f(z)$, $\forall z \in U$.

b) *Déterminer l'ensemble des fonctions* h *holomorphes sur* U *telles que* $\exp(h(z)) = f(z)$, $\forall z \in U$.

Exercice 6.3 *Soit* Ω *un ouvert étoilé et soit* $f : \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *une fonction holomorphe. Montrer que, pour tout* $n > 1$, f *possède une racine* $n-$*ième holomorphe sur* Ω.

Exercice 6.4 *Calculer pour* $|a| \neq 0$ *et* $R > 0$, *l'intégrale*

$$I = \int_{\gamma_R} \frac{e^{z^2}}{z^3 - a^3}\, dz\,,$$

où γ_R est le cercle de centre 0 et de rayon R (on discutera suivant les valeurs de $|a|$).

Exercice 6.5 *Soit f une fonction entière (c'est-à-dire une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$) telle qu'il existe $M \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $R > 0$ telles que*

$$|f(z)| \leqslant M|z|^n\,, \quad \forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant R\,.$$

En utilisant la formule de Cauchy, montrer que f est un polynôme de degré au plus n. Qu'obtient-on pour $n = 0$?

Exercice 6.6 *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose*

$$F(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n\,.$$

Montrer que F est entière et que $\forall \rho > 0$, $\rho < R$, il existe $M(\rho) \geqslant 0$ telle que

$$|F(z)| \leqslant M(\rho) \exp\left(\frac{|z|}{\rho}\right)\,, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Exercice 6.7 *Soit $f : D(0,1[\to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $r \in]0,1[$. On suppose qu'il existe $z_0 \in D(0,r[$ tel que $f(z_0) = 0$. En écrivant la formule de Cauchy pour 0 et z_0 montrer que*

$$|z_0| \geqslant \frac{r|f(0)|}{M + |f(0)|}\,,$$

où $M := \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

Exercice 6.8 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur U telles que*

(i) la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur U vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$;

(ii) il existe $M > 0$ telle que $|f_n(z)| \leqslant M$, $\forall n \geqslant 0$, $\forall z \in U$.

a) *Soit* $z_0 \in U$ *et* $R > 0$ *tel que* $D(z_0, R[\subset U$. *Montrer que,* $\forall a \in D(z_0, R[$,

$$f(a) = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,,$$

où γ_r *est le cercle de centre* z_0 *et de rayon* $r \in]|z_0 - a|, R[$. *En déduire que* f *est continue en* a.

b) *Montrer que,* $\forall a \in D(z_0, R[$,

$$f(a) = \sum_{n \geqslant 0} (a - z_0)^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\,,$$

et en déduire que f *est holomorphe sur* U.

Exercice 6.9 *Soit* $R \geqslant 1$ *et* $f : D(0, R[\to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur* $D(0, R[$. *On suppose que, pour tout* $z \in D(0, 1[$, *on a*

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{1 - |z|}\,.$$

Montrer que $\forall n \geqslant 0$:

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1)\,.$$

Exercice 6.10 *Soit* f *holomorphe sur* $D(0, R[$ *et continue sur* $D(0, R]$. *Soit* $M := \sup\limits_{|z|=R} |f(z)|$.

a) *Montrer que* $\forall n \geqslant 0$, $\forall z \in D(0, R[$, *on a :*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\, du\,.$$

b) *En déduire que*

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leqslant \frac{MR}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(R^2 + |z|^2 - 2R|z|\cos\varphi)^{\frac{n+1}{2}}}\,.$$

c) *Montrer par exemple que :*

$$|f'(z)| \leqslant \frac{MR}{R^2 - |z|^2}\,, \quad \forall z \in D(0, R[\,.$$

Exercice 6.11 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe telle que, pour tout circuit γ contenu dans Ω, on ait :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \in 2\mathbb{Z}\,.$$

Soit $a \in \Omega$ fixé.

a) *Pour $z \in \Omega$, on considère γ_z un chemin tracé dans Ω, d'oirgine a et d'extrémité z. Montrer que*

$$F(z) := \exp\left(\int_{\gamma_z} \frac{1}{2}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du\right)$$

ne dépend pas du choix de γ_z.

b) *Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\dfrac{1}{2}\dfrac{f'}{f}$ possède des primitives dans $D(z, r[$. Si G est une primitive de $\dfrac{1}{2}\dfrac{f'}{f}$, montrer que, pour tout $u \in D(z, r[$, on a : $F(u) = F(z)\exp(G(u))$.*

c) *Déduire de ce qui précède que F est une fonction holomorphe sur Ω telle que :*

$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{2}\frac{f'}{f}\,.$$

d) *Montrer finalement que $\dfrac{f}{F^2}$ est une fonction constante et conclure que f possède une racine carrée holomorphe sur Ω.*

e) *Etudier la réciproque.*

Exercice 6.12 *Calculer les intégrales curvilignes suivantes, où γ désigne le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct :*

$$\text{a)}\quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz\,, \qquad \text{b)}\quad \int_\gamma \frac{\sin z}{z}\,dz\,, \qquad \text{c)}\quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}\,dz\,.$$

Exercice 6.13 *Soit $p(z) = (z - a_1)\dots(z - a_n)$ où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et soit δ un circuit tracé dans $\mathbb{C}$ qui ne contient aucun des a_i. Montrer que*

$$\int_\delta \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2i\pi\left(ind\ (\delta, a_1) + \dots + ind\ (\delta, a_n)\right)\,.$$

Exercice 6.14 *Soit f une fonction entière telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :*

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|}.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 6.15 *Soit $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m(z)} > 0\}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P_a = \mathbb{C} \setminus \{a - iy : y \in \mathbb{R}_+\}$.*

a) *Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe dans P_a,*

$$z \longmapsto h_a(z) = \frac{1}{\sqrt{z-a}}$$

et qui soit réelle positive pour $z \in]a, +\infty[$.

b) *Soit $k \in]0, 1[$ et $U = P_{-\frac{1}{k}} \cap P_{-1} \cap P_1 \cap P_{\frac{1}{k}}$. Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe dans U,*

$$z \longmapsto f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

telle que $f(0) = 1$.

c) *Soient $U_1 = \Pi_+ \cup \{z \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e(z)} < -\frac{1}{\mathrm{k}}\}$, $U_2 = \Pi_+ \cup \{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{k} < \Re\mathrm{e(z)} < 1\}$, $U_3 = \Pi_+ \cup \{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re\mathrm{e(z)} < 1\}$, $U_4 = \Pi_+ \cup \{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re\mathrm{e(z)} < 1\}$ et $U_5 = \Pi_+ \cup \{z \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e(z)} > \frac{1}{\mathrm{k}}\}$. Montrer que f a des primitives dans chacun de ces ouverts.*

d) *En déduire que f possède dans U une unique primitive F telle que $F(0) = 0$.*

Chapitre 7

Zéros, principe du maximum

Exercice 7.1 *Soit U un voisinage connexe de 0. Etudier l'existence et l'unicité de fonctions holomorphes f sur U telles que :*

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \geqslant 1$. b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \exp(-n)$, $\forall n \geqslant 1$.

Exercice 7.2 *Déterminer les zéros de la fonction $z \longmapsto 1 - \exp\left(\frac{z}{z-1}\right)$ dans le disque ouvert $D(0,1)$. Cela contredit-il le principe des zéros isolés ?*

Exercice 7.3 *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de U qui converge vers $a \in U$ sans jamais prendre cette valeur. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :*

$$f'(a_n)g(a_n) = g'(a_n)f(a_n)\,.$$

Montrer que si $g(a) \neq 0$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $f \equiv cg$.

Exercice 7.4 *Soient f et g deux fonctions entières telles que :*

$$|f(z)| \leqslant |g(z)|\,, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

a) *Montrer que tout zéro de g est un zéro de f de multiplicité au moins aussi grande.*

b) *En déduire que f et g sont proportionnelles.*

Exercice 7.5 *On fixe* $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *On pose* $a = e^{2i\pi t}$ *et on note*

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2} \right\}.$$

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur* U *telle que :*

$$f(az) = f(z), \quad \forall z \in U\,.$$

Enfin on définit $g : U \to \mathbb{C}$ *par* $g(z) = zf'(z) - f'(1)$, $z \in U$.

a) *Calculer* $g(a^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

b) *Montrer que* g *est identiquement nulle sur* U. *En déduire une expression simple de* f.

c) *Montrer que* f *est constante.*

d) *La conclusion subsiste-t-elle si on prend* $t \in \mathbb{Q}$.

Exercice 7.6 *Soient* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$, *symétrique par rapport à l'axe réel et* f *une fonction holomorphe sur* U.

a) *Montrer que la fonction* $f^* : U \to \mathbb{C}$ *définit par* $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, $z \in U$, *est holomorphe sur* U.

b) *Montrer que* $I = U \cap \mathbb{R}$ *est non vide et même contient un segment non réduit à un point.*

c) *Montrer qu'il existe deux fonctions* g *et* h *holomorphes sur* U, *à valeurs réelles sur* I *et telles que* $f = g + ih$. *Y a-t-il unicité du couple* (g, h) *?*

d) *Montrer que pour tout* $z \in U$, *on a* $\overline{g(\overline{z})} = g(z)$ *et* $\overline{h(\overline{z})} = h(z)$. *Calculer* $\overline{f(\overline{z})}$.

Exercice 7.7 a) *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ *et* $L := \{z_0 + tb : t \in \mathbb{R}\}$ *où* $b \in \mathbb{C}^*$. *Soit* f *une fonction continue sur* Ω *et holomorphe sur* $\Omega \setminus L$. *Montrer que* f *est holomorphe sur* Ω.

b) *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m}(z) > 0\}$, continue et bornée sur $\overline{\mathbb{H}_+}$ et ne prenant que des valeurs réelles sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante (On pourra chercher à prolonger f sur $\mathbb{C}$).*

Exercice 7.8 *Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert de centre 0 et de rayon $r > 1$ et ne prenant que des valeurs réelles sur le cercle unité. Que peut-on dire de f ?*

Exercice 7.9 a) *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ dont l'adhérence est compacte et g une fonction holomorphe sur U, continue sur $\overline{U}$. Montrer que si $|g|$ est constante sur la frontière de U alors g a un zéro dans U ou g est constante. Que peut-on dire si U n'est pas connexe ?*

b) *Soit f une fonction entière qui envoie le cercle unité $\mathbb{T}$ dans lui même (i.e. $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$). On veut montrer que $f(z) = cz^n$, pour $c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ convenables.*

(i) Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans le disque unité $\mathbb{D}$. On les note $a_1, \ldots, a_N$ tous pris avec leur ordre de multiplicité.

(ii) On pose, pour $z \in \mathbb{C}$

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^{N} \frac{1 - \overline{a_i} z}{z - a_i}\,.$$

En utilisant a), *montrer que g est constante.*

(iii) En utilisant le fait que f est une fonction entière, montrer que, pour tout $i = 1 \ldots, N$, on a $a_i = 0$.

(iv) Conclure.

Exercice 7.10 *Soit $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0, R)$. Pour $r \in [0, R[$, on pose :*

$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|\,.$$

a) *Montrer que* M *est une fonction croissante.*

b) *Montrer que s'il existe* $r_1 \neq r_2$ *tels que* $M(r_1) = M(r_2)$*, alors* f *est constante sur* $D(0, R)$*.*

c) *Soit* P *un polynôme de degré* $n \geqslant 1$*. Pour* $r > 0$*, on pose* $s(r) = \dfrac{M(r)}{r^n}$*.*

(i) *Montrer que* s *est décroissante et que si* P *n'est pas de la forme* $a_n z^n$*, alors* s *est strictement décroissante. (Pour comparer* $s(r_1)$ *et* $s(r_2)$*, on pourra considérer* $f(z) = z^n P\left(\dfrac{r_1 r_2}{z}\right)$*.)*

(ii) *Montrer que, pour tout* $r > 0$*, on a* $|a_n| \leqslant s(r)$*, puis que* $\lim_{r \to +\infty} s(r) = |a_n|$*. Redémontrer le résultat du (i), en considérant la fonction* $f(z) = \dfrac{P(z)}{z^n}$*.*

(iii) *En déduire que si* P *n'est pas de la forme* $a_n z^n$*, alors il existe* z *de module 1 tel que* $|P(z)| > |a_n|$*.*

(iv) *Montrer que si* P *est majoré par 1 sur le disque unité, alors* $|P(z)|$ *est majoré par* $|z|^n$ *hors du disque unité.*

Exercice 7.11 *Soit* $0 < r < R$ *et* $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe tel que* $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{D(0, r)}$*.*

a) *Montrer qu'il existe* $\rho \in]r, R[$ *tel que* $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{D(0, \rho)}$*.*

b) *En déduire que*

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{it}| \, dt \, .$$

(On montrera qu'il existe une détermination holomorphe de $\log f$ *sur* $D(0, \rho)$*).*

Exercice 7.12 *Soit* $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe telle que* $f(0) = 0$ *et* $|f(z)| \leqslant C$, $\forall z \in D(0, R)$*.*

a) *Montrer que* $|f'(0)| \leqslant \dfrac{C}{R}$*.*

b) *Montrer que* $|f'(0)| = \dfrac{C}{R}$ *si et seulement s'il existe* λ, $|\lambda| = 1$, *tel que* $f(z) = \dfrac{C\lambda}{R} z$, $\forall z \in D(0, R)$*.*

Exercice 7.13 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient z_0 un point de U et f une fonction holomorphe de $U \setminus \{z_0\}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que f est bornée au voisinage de z_0. Montrer alors que f se prolonge par continuité en une fonction holomorphe de U dans $\mathbb{C}$.*

Exercice 7.14 *Soit U un ouvert de $\widehat{\mathbb{C}}$. Soit f une fonction continue de U dans $\widehat{\mathbb{C}}$. On suppose que f est holomorphe en dehors d'un ensemble discret de U. Montrer que f est holomorphe en tout point de U.*

Exercice 7.15 *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et z_0 un point de U. Soit f une fonction holomorphe de U dans $\mathbb{C}$ qui n'est pas constante au voisinage de z_0. Montrer qu'il existe une fonction φ définie sur un voisinage de z_0 et dont la dérivée ne s'annule pas en z_0 et un entier $p > 0$ tel que l'on ait, pour tout z voisin de z_0 :*

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^p \,.$$

Exercice 7.16 *En utilisant l'exercice 7.15, montrer qu'une fonction holomorphe sur un ouvert U, qui n'est constante sur aucune composante connexe de U, est ouverte (i.e. qu'elle envoie tout ouvert de U sur un ouvert de $\mathbb{C}$).*

Définition 7.0.4 *Soient U et V deux ouverts de $\widehat{\mathbb{C}}$. On appelle isomorphisme de U sur V une fonction holomorphe bijective de U sur V dont la fonction réciproque est holomorphe. On appelle automorphisme d'un ouvert U de $\widehat{\mathbb{C}}$ un isomorphisme de U sur lui-même.*

Il est clair que les automorphismes d'un ouvert U de $\widehat{\mathbb{C}}$ forment un groupe pour la compostion, appelé groupe d'automorphismes de U et noté $G(U)$.

Exercice 7.17 *Soient U et V deux ouverts de $\widehat{\mathbb{C}}$ et f une fonction de U dans V. Alors f est un isomorphisme de U sur V si et seulement si f est holomorphe et bijective. (On pourra utiliser l'exercice 7.15).*

Exercice 7.18 *Montrer que le groupe $G(\widehat{\mathbb{C}})$ des automorphismes de $\widehat{\mathbb{C}}$ est formé des fonctions de la forme :*

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\,,$$

où a, b, c, d sont des complexes tels que $ad-bc \neq 0$. Autrement dit $G(\widehat{\mathbb{C}})$ est exactement le groupe de toutes les homographies de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Exercice 7.19 *Montrer que le groupe $G(\mathbb{C})$ des automorphismes de $\mathbb{C}$ est formé des fonctions de la forme :*

$$z \longmapsto az+b\,,$$

où a, b sont deux complexes tels que $a \neq 0$. Autrement dit $G(\mathbb{C})$ est exactement le groupe de toutes les homographies qui envoient $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 7.20 *Montrer que le groupe $G(\mathbb{D})$ des automorphismes du disque unité $\mathbb{D}$ est formé des fonctions de la forme :*

$$z \longmapsto c\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\,,$$

où $|c|=1$ et $a \in \mathbb{D}$. Autrement dit $G(\mathbb{D})$ est exactement le groupe de toutes les homographies qui envoient $\mathbb{D}$ sur lui-même.

Exercice 7.21 *Soit $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et z_0 un point de $\mathbb{D}$. Soit f une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Pour tout $z \neq z_0$ de $\mathbb{D}$, on pose :*

$$\varphi(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\frac{1-\overline{z_0}z}{z-z_0}\,.$$

a) *Montrer que φ se prolonge en une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{D}$.*

b) *Montrer que, pour tout $z \neq z_0$, $z \in \mathbb{D}$, on a :*

$$|\varphi(z)| \leqslant |z| \left|\frac{\overline{z}^{-1}-z_0}{z-z_0}\right|\,.$$

c) *Montrer que φ est à valeurs dans le disque unité fermé.*

d) *Montrer l'inégalité :*

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{1-|f(z_0|^2}{1-|z_0|^2}\,.$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 7.22 *Soit U le complémentaire de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$.*

a) *Montrer que la série*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

converge uniformément sur tout compact de U. Pour tout $z \in U$, on pose :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}\,.$$

b) *Montrer que f est une fonction holomorphe sur U qui vérifie :*

$$f(z+1) = f(z), \quad \forall z \in U\,.$$

c) *Soit b un réel strictement positif. Soit z un complexe avec $|\Im\mathrm{m}(z)| \geqslant b$. Montrer l'inégalité :*

$$|f(z)| \leqslant 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{b^2+n^2}\,.$$

d) *Montrer que l'on a, pour tout complexe z de U :*

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}\,.$$

e) *En déduire l'égalité suivante, valable pour tout complexe z non entier :*

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} = \pi \mathrm{cotg}(\pi z)\,.$$

Chapitre 8

Singularités, théorème des résidus

Exercice 8.1 *Déterminer les singularités des fonctions suivantes, leur nature et les résidus correspondants :*

a) $\dfrac{\sin z}{z^3 - \pi^2 z}$, **b)** $\dfrac{z}{\sin z}$, **c)** $\exp\left(\dfrac{1}{z^4}\right)$, **d)** $z \cos \dfrac{1}{z}$, **e)** $\dfrac{1}{z(e^z - 1)}$,

f) $cotanz - \dfrac{1}{z}$, **g)** $\dfrac{\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)}{z-1}$, **h)** $\pi\, cotan(\pi\, z)$, **i)** $\dfrac{1}{\sin(z^2)}$.

Exercice 8.2 *Soit U un ouvert connexe. Même question que ci-dessus avec :*

a) $\dfrac{f'}{f}$, *lorsque f est une fonction holomorphe sur U.*

b) $\dfrac{g}{h}$, *lorsque g et h sont deux fonctions holomorphes sur U et que h a un pôle simple.*

c) $\dfrac{f(z)}{(z - z_0)^n}$, *lorsque f est une fonction holomorphe sur U, $z_o \in U$ et $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 8.3 *Si γ désigne le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique, calculer :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\, dz\,.$$

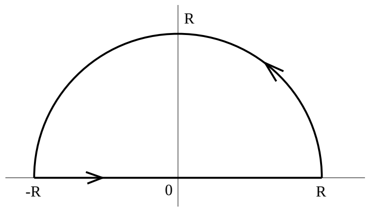
Exercice 8.4 *On note γ le cercle de centre 0 et de rayon $3/2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, calculer :*

$$\int_\gamma \frac{5z^2+1}{z(z-1)}\, dz \quad et \quad \int_\gamma \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}\, dz\,.$$

Exercice 8.5 *Pour* $r \neq 1$*, on note* γ_r *le cercle de centre* 0 *et de rayon* r *parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :*

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{1/z}}{z-1}\, dz\,.$$

Exercice 8.6 *Considérons le contour suivant* ($R \in \mathbb{R}^{+*}$) *:*



a) *On fixe* $a \in \mathbb{R}^+$. *Calculer l'intégrale de*

$$z \longmapsto \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$$

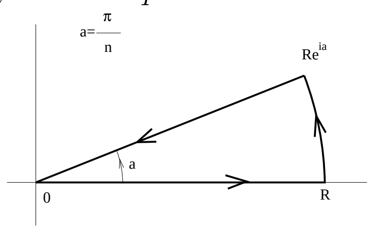
sur ce circuit. En faisant tendre R *vers* $+\infty$*, déduire*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\, dx.$$

b) *En intégrant* $ze^{iz}/(1+z^2)$ *sur le même contour, calculer*

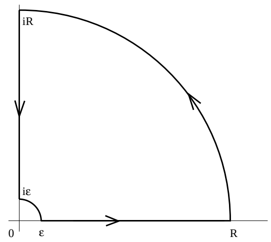
$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}\, dx.$$

Exercice 8.7 *Soit* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *En considérant le contour suivant, puis en faisant tendre* R *vers* $+\infty$*, montrer que :*



$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n} \sin\frac{\pi}{n}.$$

Exercice 8.8 *En intégrant* $\dfrac{e^{iz}}{z}$ *sur le circuit suivant, puis en faisant tendre* ε *vers* 0 *et* R *vers* $+\infty$*, calculer* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$



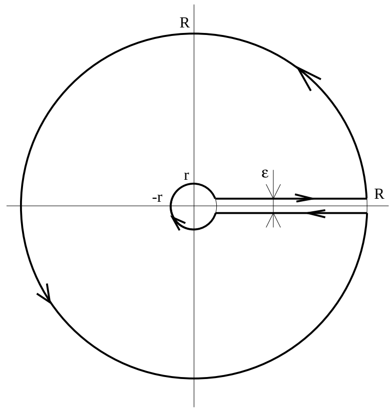
Exercice 8.9 *On fixe* $\alpha\ \in]0,1[$. *On considère la détermination du logarithme définie sur* $U=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^{+}$, *et on pose pour* $z\in U$:

$$f(z)=z^{\alpha-1}=e^{(\alpha-1)\log(z)}.$$

a) *Montrer que la fonction* $x\mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

Pour $0<\varepsilon<r<1<R$, *on considère le circuit* $\gamma_{\varepsilon,r,R}$ *ci-dessous et on pose*

$$I(\varepsilon,r,R)=\int_{\gamma_{\varepsilon,r,R}}\frac{f(z)}{z+1}\,dz.$$



b) *Calculer* $I(\varepsilon,r,R)$ *par le théorème des résidus.*

c) *Déterminer* $I(r,R)=\lim_{\varepsilon\to 0}I(\varepsilon,r,R)$.

d) *Déterminer* $\displaystyle\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} I(r,R)$ *et en déduire que*

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Exercice 8.10 *On désigne par* log *la détermination holomorphe du logarithme complexe sur le domaine* $U=\mathbb{C}\setminus\{-iy\ :\ y\in\mathbb{R}^{+}\}$.

a) *Montrer qu'il existe une unique fonction g holomorphe sur U telle que :*

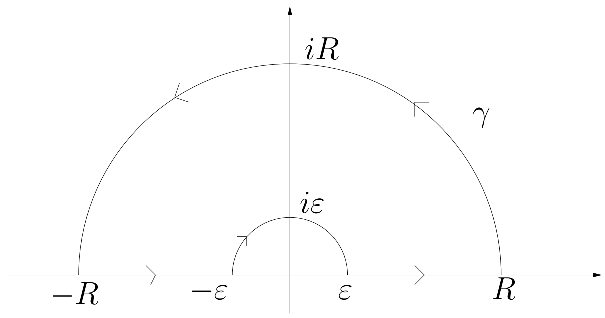
(i) $g(z)^2 = z$, *pour tout* $z \in U$.

(ii) $g(x) = \sqrt{x}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$.

On considère la fonction $f(z) = \dfrac{\log(z)}{g(z)(1+z^2)}$, *pour* $z \in U$.

b) *Déterminer les points singuliers isolés de f, leur nature ainsi que le résidu de f en ces points.*

c) *Pour* $0 < \varepsilon < R$, *on considère le contour γ suivant :*



Calculer $\int_\gamma f(z)\,dz$.

d) *Si C_ε (respectivement C_R) désigne le demi-cercle de centre 0 et de rayon ε (respectivement de rayon R), contenu dans le demi-plan complexe supérieur, montrer que :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = 0 \quad et \quad \lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0\,.$$

e) *Calculer les intégrales :*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx \quad et \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,.$$

Exercice 8.11 *On note* $U = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \Re\mathrm{e}(z) > 0\}$.

a) *Soit K un compact de U. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $z \in K$:*

(i) $|t^2 + z^2| \geqslant A^2$, *si* $0 \leqslant t \leqslant B$.

(ii) $|t^2 + z^2| \geqslant (t-B)^2 + A^2$, *si* $t \geqslant B$.

b) *On pose, si $z \in U$:*

$$f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + z^2}\, dt\,.$$

Prouver que f est holomorphe sur U et que, pour tout $z \in U$, on a :

$$f(z) = \frac{\pi}{2z} \log(z)\,,$$

où log *désigne la détermination principale du logarithme (i.e. celle définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$).*

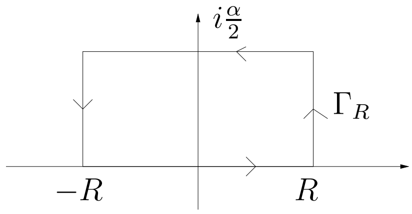
Exercice 8.12 a) *Soit h une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant un pôle simple en $\alpha \in \mathbb{C}$. On note γ_r le chemin $t \longmapsto \alpha + re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Etablir :*

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} h(z)\, dz = i\pi \text{Rés}\,(h, \alpha)\,.$$

b) *Soit $s \in]-1, 1[$. Calculer l'intégrale :*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^s \ln x}{x^2 - 1}\, dx\,.$$

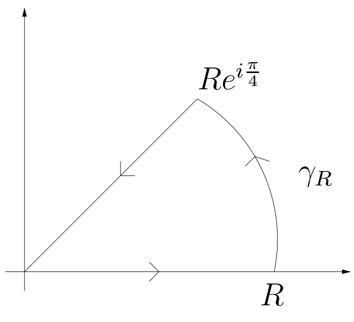
Exercice 8.13 a) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant le lacet Γ_R suivant*



calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) \cos(\alpha x)\, dx\,.$$

b) *En utilisant le lacet γ_R suivant*



calculer les intégrales suiavntes :

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx\,, \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx\,.$$

Chapitre 9

Quelques annales

Partiel et examens

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Partiel du 5 avril 2002

–Durée 3h.–

Problème 1.

1) Soit $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. Déterminer et représenter graphiquement $f(D_k)$, $k = 1, 2, 3$ où :

   a) $D_1 = \{it;\ t \in \mathbb{R}^+\}$.

   b) $D_2 = \{t + i;\ t \in \mathbb{R}\}$.

   c) $D_3 = \{z \in \mathbb{C};\ |z-1| \leqslant 1 \text{ et } \Im\text{mz} \geqslant 0\}$.

2) Expliciter une homographie f vérifiant $f(u_k) = v_k$, $\forall k = 1, 2, 3$ avec :

   a) $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$

      $v_1 = 1$, $v_2 = 0$, $\text{v}_3 = \infty$.

   b) $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$

      $v_1 = i$, $v_2 = -1$, $v_3 = 1$.

3) Soit $D_0 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant 1\}$ et f une homographie telle que $f(D_0) = D_0$. Montrer que $f(\infty) = \dfrac{1}{\overline{f(0)}}$.

Problème 2.

Pour $z \neq 0$, soit $f(z) = e^{\frac{1}{z}} - \dfrac{1}{z}$.

1) Représenter $f(z)$ comme une série entière en $\dfrac{1}{z}$ et montrer que cette série converge uniformément sur le support de chaque chemin tracé dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2) Montrer que f possède une primitive F sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et exprimer F comme une série entière en $\dfrac{1}{z}$.

3) Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct. Calculer

$$\int_\gamma e^{\frac{1}{z}}\, dz\,.$$

Problème 3.

Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{iy;\, y \in \mathbb{R},\, |y| \geqslant 1\}$.

1) Montrer qu'il existe une unique application φ holomorphe sur U telle que :

$$e^{\varphi(z)} = z^2 + 1,\ \forall z \in U \text{ et } \varphi(0) = 0\,.$$

2) a) En déduire qu'il existe une unique application g holomorphe sur U telle que :

$$g(z)^2 = z^2 + 1,\ \forall z \in U \text{ et } g(0) = 1\,.$$

b) Montrer que $g(z) = g(-z)$, $\forall z \in U$.

c) Montrer que $z + g(z) \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^+$, $\forall z \in U$.

d) En déduire qu'il existe une application h holomorphe sur U telle que :

$$e^{h(z)} = z + g(z),\ \forall z \in U\,.$$

3) Montrer enfin que $\mathrm{sh}(h(z)) = z$, $\forall z \in U$.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Examen du 4 juin 2002

–Durée 4h.–

Problème 1.

Soit $D = D(0,1[$ le disque unité ouvert de centre 0 et de rayon 1. On considère une fonction f holomorphe sur D vérifiant :

$$i) \quad f(0) = 1$$
$$ii) \quad \Re\mathrm{e}(\mathrm{f(z)}) \geqslant 0, \quad \forall \mathrm{z} \in \mathrm{D}\,.$$

1) Soit $h(z) = e^{-f(z)}$. Montrer que $|h(z)| < 1$, pour tout $z \in D$.

2) Soit $P^+ = \{z \in \mathbb{C};\ \Re\mathrm{e(z)} > 0\}$. On pose $\varphi(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$. Déterminer $\varphi(P^+)$.

3) Pour $z \in D$, on pose $g(z) = \dfrac{f(z)-1}{f(z)+1}$.

   a) Montrer que g est holomorphe sur D et que $g(D)$ est inclus dans D.

   b) En déduire que $|g(z)| \leqslant |z|$, pour tout $z \in D$.

4) a) Etablir les inégalités suivantes :

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad \forall z \in D\,.$$

   b) On suppose qu'il existe $a \in D$, $a \neq 0$, tel que l'une ou l'autre des inégalités précédentes soit une égalité. Montrer que f est une homographie que l'on explicitera.

Problème 2.

Soit f une fonction entière.

1) Pour $r > 0$, on note $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. On suppose qu'il existe un polynôme réel P de degré inférieur ou égal à $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$M(r) \leqslant P(r), \quad \forall r > 0\,.$$

Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à N.

2) On suppose que $\Re\mathrm{e}(\mathrm{f(z)}) \geqslant 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

3) On suppose que $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$. Montrer que $\{z \in \mathbb{C};\ f(z) = 0\} \neq \emptyset$.

4) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^n \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $f(z) = f(\alpha z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

5) Montrer qu'il n'existe aucun $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$|f^{(n)}(z)| > n!n^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Problème 3.

Soit

$$f(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\,.$$

1) Montrer que f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Déterminer ses pôles ainsi que les résidus correspondants.

2) Pour z dans un voisinage de 0, $z \neq 0$, on écrit $f(z)$ sous la forme :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

(développement en série de Laurent de f au voisinage de 0).

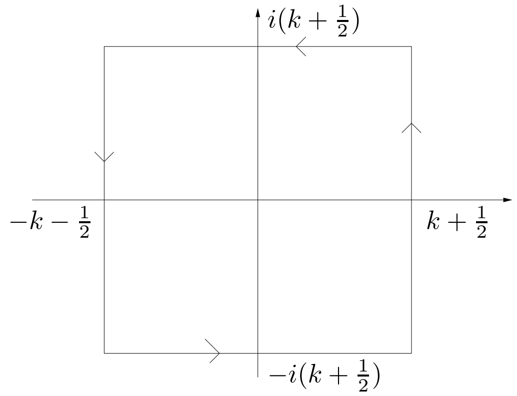
a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$?

b) Montrer que $a_n = 0$, pour $n < -1$.

c) Montrer que $a_n = 0$ si n est pair.

d) Calculer a_{-1} et a_1.

3) Soit $k \in \mathbb{N}$. On désigne par γ_k le circuit dont le support est la frontière du carré dessiné ci-dessous, parcourue une fois dans le sens direct.



Montrer qu'il existe un réel M, indépendant de k, tel que :

$$|f(z)| \leqslant M, \quad \forall z \in \text{Supp}\,(\gamma_k)\,.$$

(Indication : on rappelle que, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \text{sh}^2\, y$.)

4) On fixe $p \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z^{2p}}\,dz = 0\,.$

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z^{2p}}\,dz$ en fonction des coefficients a_j.

c) En faisant tendre k vers $+\infty$, déduire de a) et b), la valeur de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^{2p}}$$

en fonction des coefficients a_j.

d) En déduire enfin la valeur explicite de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\,.$$

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Examen du 9 septembre 2002

–Durée 4h.–

Problème 1.

Soit $P^+ = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) > 0\}$ et $P^- = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) < 0\}$.

1) Soit f une homographie de la forme $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc < 0$. Montrer que $f(P^+) = P^-$.

2) Reciproquement, soit f une homographie telle que $f(P^+) = P^-$.

   a) Montrer que $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ pour chaque $z \in \mathbb{C}$;

   b) En déduire que l'on peut écrire f sous la forme

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

   où a, b, c, d sont des réels et $ad - bc < 0$.

3) Soit $Q^+ = \{z \in \mathbb{C}; Re(z) > 0\}$ et $Q^- = \{z \in \mathbb{C}; Re(z) < 0\}$. Désignons par M un ensemble des homographies. Décrire explicitement les éléments de M si

   a) $M = \{f; f(Q^-) = Q^+\}$,

   b) $M = \{f; f(Q^-) = P^-\}$,

   c) $M = \{f; f(Q^-) = Q^-, f(1) = i\}$.

Problème 2.

Soit $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$.

1) Trouvez les pôles de f ainsi que les residues de f en ces pôles.

2) Trouvez la valeur de
$$\int_\gamma f(z)\,dz\,,$$
où $\gamma(t) = 2e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

3) Soit
$$f(z) = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + ...$$
la representation de f comme une série entière en z.

   a) Trouver le rayon de convergence de cette série.

   b) Montrer que $\{c_i\}$ coincide avec la suite de Fibonacci, c'est à dire , $c_o = c_1 = 1$ et $c_{i+2} = c_i + c_{i+1}$ si $i > 2$. (Indication : On pourrait utiliser des expressions intégrales pour les coefficients c_i.)

4) Exprimer $f(z)$ sous la forme
$$f(z) = \frac{a_1}{z - \alpha_1} + \frac{a_2}{z - \alpha_2}$$
et puis montrer que
$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}.$$

Problème 3.

Soient D une disque ouvert de rayon R, C la frontière de D et M une constante positive.

1) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur D telle que
$$\overline{lim}_{z \to a} |f(z)| \leqslant M$$
pour chaque $a \in C$. (Rappelons que $\overline{lim}_{z \to a} |f(z)| \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to o} \sup_{|z-a|<\varepsilon, z \in D} |f(z)|$, où $\varepsilon > 0$.) Montrer que
$$|f(z)| \leq M$$
pour tous $z \in D$.

2) Soient g une fonction holomorphe, bornée sur D et $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Supposons que

$$\overline{lim}_{z \to a} |g(z)| \leqslant M$$

pour chaque $a \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, ..., a_n\}$.

a) Pour chaque $\varepsilon > 0$ on pose

$$g_\varepsilon(z) = g(z) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{z - a_i}{2R} \right)^\varepsilon,$$

où $\left(\frac{z-a_i}{2R}\right)^\varepsilon = e^{\varepsilon \log\left(\frac{z-a_i}{2R}\right)}$ et $\log(.)$ désigne la détermination principale du logarithme. Montrer que

$$|g_\varepsilon(z)| \leq |g(z)|$$

pour tous $z \in D$.

b) Montrer que

$$|g_\varepsilon(z)| \leq M$$

pour tous $z \in D$.

c) En déduire que

$$|g(z)| \leq M$$

pour tous $z \in D$.

Problème 4.

Soit la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$.

1) Soit γ_R le chemin $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Montrer que

$$|\int_{\gamma_R} f(z) dz| \leq 2 \int_o^{\pi/2} e^{-Rsin(t)} dt,$$

En déduire que l'intégrale de f sur γ_R tend vers 0 quand $R \to +\infty$.

2) Soit γ_ε le chemin $\gamma_\varepsilon = \varepsilon e^{i(\pi-t)}$, $t \in [0,\pi]$. Montrer que l'intégrale de f sur γ_ε tend vers $-i\pi$ lorsque $\varepsilon \to 0$. (Indication : Poser $f(z) = \frac{1}{z} + g(z)$ où g est analytique au voisinage de 0.)

3) En intégrant f sur un lacet convenable, déduire de ce qui précède la limite quand $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ de :

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} e^{it/t} dt + \int_{\varepsilon}^{R} e^{it/t} dt.$$

4) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$.