1 Exemples d'espace de Banach.

Exercice 1 Soit E_1 un espace métrique et E_2 un espace de Banach. On notera par $C(E_1, E_2)$ (resp. par $C_b(E_1, E_2)$) l'ensemble des applications continues (resp. bornées) de E_1 dans E_2.

a) Montrer que si on munit $C_b(E_1, E_2)$ de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{x\in E_1} \|f(x)\|_2$, alors cet espace est un espace de Banach.

b) Montrer que si E_1 est compact, alors $(C(E_1, E_2), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

c) On suppose ici que $E_1 = [a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) et $E_2 = \mathbb{R}$. On considère $C^1([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^1 sur $[a, b]$. On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_1 := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \qquad f \in C^1([a, b], \mathbb{R}).$$

Montrer que $(C^1([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.

Exercice 2 On considère ℓ^1 l'espace des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$, à valeurs complexes et telles que

$$\sum_{n\geqslant 1} |u_n| < +\infty.$$

On munit cet espace d'une norme en posant

$$\|u\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|, \qquad u = (u_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^1.$$

Montrer que $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.

Exercice 3 On considère ℓ^∞ l'espace des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs complexes et bornées et c_0 le sous-espace des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tendant vers 0. On munit ℓ^∞ d'une norme en posant

$$\|u\|_\infty := \sup_{n\geqslant 1} |u_n|, \qquad u = (u_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^\infty.$$

a) Montrer que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

b) Montrer que c_0 est un sous-espace fermé de ℓ^∞. En déduire que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 4 Soit E et F deux espaces vectoriels normés. On note par $\mathcal{L}(E; F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme

$$\|T\| := \sup_{x\in E\,,\|x\|_E\leqslant 1} \|Tx\|_F \left(= \sup_{x\in E\,,x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \inf\{M > 0 : \|Tx\|_F \leqslant M\|x\|_E, \forall x \in E\} \right).$$

Montrer que si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E; F)$ est un espace de Banach.

Exercice 5 Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$ est isométriquement isomorphe à F.

Exercice 6 Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ des espaces vectoriels normés, et soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application multilinéaire. Rappelons que f est continue sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ si et seulement si f est continue en $(0, \ldots, 0)$ ou si et seulement s'il existe $C > 0$ tels que

$$\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leqslant C \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n. \tag{1}$$

Pour $f \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, on pose

$$\|f\| := \sup\{\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F : x_i \in E_i, \|x_i\|_{E_i} \leqslant 1\}.$$

a) Montrer que, pour $f \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, on a

$$\|f\| = \inf\{M > 0 : M \text{ vérifie } (\textbf{??})\}.$$

b) Vérifier que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

c) Montrer que si F est un espace de Banach, l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ est un espace de Banach.

d) Montrer que $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$.

2 Applications linéaires continues.

Exercice 7 Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit une norme, en posant

$$\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|, \qquad P \in \mathbb{R}[X].$$

a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et L_a l'application de E dans $\mathbb{R}$, $L_a(P) = P(a)$. Vérifier que L_a est une forme linéaire. Montrer que L_a est continue si et seulement si $a \in [0, 1]$. Lorsque $a \in [0, 1]$, calculer $\|L_a\|$.

b) Soient α et β deux réels vérifiant $\alpha < \beta$. On définit une application $\varphi_{\alpha,\beta} : E \to \mathbb{R}$ en posant

$$\varphi_{\alpha,\beta}(P) = \int_\alpha^\beta P(x)\, dx.$$

Montrer que $\varphi_{\alpha,\beta}$ est une forme linéaire sur E. Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur α et β, pour que cette forme linéaire soit continue et lorsque c'est le cas, déterminer sa norme.

Exercice 8 Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad f \in E.$$

On définit l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(f) = \int_0^1 x(1-x)f(x)\, dx, \qquad f \in E.$$

a) Montrer que l'application φ est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme.

b) Même question si on munit E de la norme

(i) $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx$, $f \in E$.

(ii) $\|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$, $f \in E$.

Indication : on pourra considérer la suite de fonctions $f_n(x) = x^n(1-x)^n$.

Exercice 9 Soit A une matrice carrée $n \times n$ d'éléments du corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$, on note $\|A\|_{p,q}$ sa norme d'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_p$ vers $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_q$. On rappelle que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ si } 1 \leqslant p < \infty, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

On note A^* la matrice transposée conjuguée de A, et $\rho(A)$ le rayon spectral de A, i.e. le plus grand module des valeurs propres de A.

On considère d'abord l'exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Représenter sur un même dessin les images par A des sphères $\|x\|_1 = 1$ et $\|x\|_\infty = 1$. En déduire $\|A\|_{1,1}$, $\|A\|_{1,\infty}$, $\|A\|_{\infty,1}$ et $\|A\|_{\infty,\infty}$.

2. Calculer de même $\|A\|_{1,2}$ et $\|A\|_{\infty,2}$.
3. Calculer $\|A\|_{2,2}$.

On revient maintenant au cas général $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

4. Vérifier que
$$\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} |a_{i,j}|\right) \quad \text{et} \quad \|A\|_{1,1} = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{i,j}|\right).$$
5. On note $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$. Montrer que
$$\|x\|_1 = \max_{\|y\|_\infty=1} |x\cdot y|, \qquad \|y\|_\infty = \max_{\|x\|_1=1} |x\cdot y|,$$
et retrouver l'égalité $\|A^*\|_{1,1} = \|A\|_{\infty,\infty}$.
6. Si A est hermitienne (i.e. $A^* = A$), montrer que
$$\|A\|_{2,2} = \rho(A).$$
(On pourra diagonaliser A dans une base orthonormale.)
7. Montrer qu'on a toujours
$$\|A\|_{2,2} = (\rho(A^*A))^{1/2}.$$
(On poura utiliser 6. en notant que $\|Ax\|_2^2 = A^*Ax \cdot x$.)

3 Séries dans les espaces de Banach.

Definition 3.1 *Soit X un espace vectoriel normé, et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de X. On note $S_N := \sum_{n=1}^{N} x_n$, $N \geqslant 1$.*

(i) *On dit que la série de terme général x_n converge si la suite $(S_N)_N$ converge dans X.*

(ii) *On dit que la série de terme général x_n converge normalement si la série, à valeurs réelles, de terme général $\|x_n\|$, converge.*

Exercice 10 a) Montrer que dans un espace de Banach X, toute série normalement convergente est convergente.

b) Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|T\| < 1$. Montrer que $Id - T$ est inversible dans l'algèbre $L(E)$.

c) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n!}T^n$ converge. On notera $\exp(T)$ sa somme.

Exercice 11 Soient E et F deux espaces de Banach. Notons par $\mathrm{Isom}(E;F)$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F.

a) Montrer que $\mathrm{Isom}(E;F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E;F)$.

b) Montrer que l'application $u \mapsto u^{-1}$ de $\mathrm{Isom}(E;F)$ dans $\mathcal{L}(F;E)$ est continue.

Exercice 12 Soit E un espace de Banach.

a) Montrer que si $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)$ tels que $T_1T_2 = T_2T_1$, alors
$$\exp(T_1)\exp(T_2) = \exp(T_2)\exp(T_1) = \exp(T_1 + T_2).$$

b) Montrer que, pour tout élément $T \in \mathcal{L}(E)$, on a $\exp(T) \in GL(E)$ et
$$(\exp(T))^{-1} = \exp(-T).$$

c) Montrer que l'application $\exp : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ est continue.

Exercice 13 Soit E l'espace des fonctions (réelles ou complexes) continues sur $[0,1]$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit T l'application de E dans E qui à $u \in E$ associe $T(u)$ définie, pour $x \in [0,1]$, par

$$T(u)(x) := \int_0^x u(t)\,dt.$$

a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $u \in E$, on a, pour tout $x \in [0,1]$,

$$T^n(u)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)\,dt.$$

b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, T^n est un élément de $\mathcal{L}(E)$. Déterminer $\|T^n\|$.

c) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} T^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$, et calculer sa somme.

d) Utiliser ces résultats pour résoudre l'équation

$$(Id - T)(u) = g,$$

où g est un élément donnée de E et u est l'inconnue qu'on cherche dans E.

1 Cas de la dimension finie.

Exercice 1 Pour chacune des fonctions f suivantes, trouver l'ensemble des points où f est continue (resp. possède des dérivées partielles premières, est différentiable, est de classe C^1) :

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{(x-1)^3-(y-1)^3}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right) & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\}, \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ (2\sin\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) & \text{si } (x,y) = (1,1). \end{cases}$

Exercice 2 La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 3 Etudier la continuité et la différentiabilité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1+y^2\tan^2 x} & \text{si } (x,y) \in D := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\times \mathbb{R}\right), \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Exercice 4 Etudier la continuité et la différentiabilité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| < |y|, \\ y^2 & \text{si } |x| \geqslant |y|. \end{cases}$$

Exercice 5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur I. On définit une fonction $g : I \times I \to \mathbb{R}$ par

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y, \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue sur $I \times I$.
b) Montrer que g est de classe C^1 sur $(I \times I) \setminus \cup_{x\in I}\{(x,x)\}$.
c) Soit $x_0 \in I$. On suppose que $f"(x_0)$ existe. Montrer que g possède des dérivées partielles premières en (x_0,x_0).
d) En déduire que g est différentiable en (x_0,x_0).

Exercice 6 Soient f et g deux applications de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } g(x,y) > 0, \\ f(x,y) + (g(x,y))^2 & \text{si } g(x,y) \leqslant 0. \end{cases}$$

Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x,y) = \frac{1}{x}\int_x^{xy} f(t)\,dt.$$

a) Etudier la continuité de g. Montrer qu'on peut prolonger g en une fonction continue $\widetilde{g}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
b) Calculer les dérivées partielles premières de g en $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
c) On suppose que $f'(0)$ existe. Calculer les dérivées partielles premières de g en $(0,y_0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$.
d) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x,y) = \varphi(y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 8 Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

Exercice 9 On désigne par $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$N_1(x) = |x_1| + \cdots + |x_n|,\ N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},\ N_\infty(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

a) Montrer que N_2 est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer $\mathrm{d}N_{2,x}(\zeta)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$.
b) (i) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_i \neq 0$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que N_1 est différentiable au point x et calculer $\mathrm{d}N_{1,x}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$. (On pourra utiliser la définition de la différentiabilité et utiliser des vecteurs h tels que $N_1(h) \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.)
(ii) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe $m \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_m = 0$. Calculer

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{N_1(x+th) - N_1(x)}{t}, \quad \text{avec } h = e_m \text{ et avec } h = -e_m.$$

En déduire que N_1 n'est pas différentiable au point x.
c) (i) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe un unique $m \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|x_m| = N_\infty(x)$. Montrer que, si $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ est suffisamment petit, on a

$$N_\infty(x+h) - N_\infty(x) = \operatorname{sgn}(x_m) h_m.$$

En déduire que N_∞ est différentiable au point x.
(ii) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe au moins deux entiers l et m, $1 \leqslant l, m \leqslant n$, tels que $|x_l| = |x_m| = N_\infty(x)$. Montrer que N_∞ n'est pas différentiable au point x. (On pourra raisonner par l'absurde et utiliser une méthode analogue à celle employée en b)(ii).

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ rapporté à une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Montrer que l'application

$$(v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \varphi(v_1, \ldots, v_n) := \text{dét}_{\,\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

est différentiable en tout point de E^n et calculer sa différentielle.

Exercice 11 Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n. Si on pose, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|A\| = n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|, \qquad A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$

rappelons que $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ devient une algèbre de Banach.

Montrer, par différentes méthodes, que l'application $M \to M^m$, où $m \in \mathbb{N}$, est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 12 On note φ la fonction déterminant et tr la fonction trace sur l'espace E des matrices réelles $n \times n$.

a) Montrer que φ est de classe C^1 sur E et que $\mathrm{d}\varphi_{Id} = \mathrm{tr}$, où Id est la matrice identité.
b) En déduire que, pour tous X, H de E, on a

$$\mathrm{d}\varphi_X(H) = \mathrm{tr}({}^t\overline{X}H),$$

où $\overline{X}$ est la comatrice de X.
(On pourra supposer d'abord X inversible, puis étendre le résultat par densité des matrices inversibles dans E.)

2 Cas de la dimension infinie

Exercice 13 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ normé par $f \to \|f\| = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$. Montrer que l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f) = \int_a^b (f(t))^2\, dt$$

est différentiable en tout point $f \in E$ et calculer $\mathrm{d}\Phi_f(h)$, $h \in E$.

Exercice 14 Soient E et F des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, $a \in U$, $f : U \to E$. On dira que f admet en a une dérivée suivant le vecteur $v \in E$ si et seulement si

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

existe. On la notera $f'_v(a)$.

a) Montrer que si f est différentiable au point a, f possède en a une dérivée suivant tout vecteur de E.

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Montrer que f a en $(0,0)$ une dérivée suivant tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ et que f n'est pas continue en $(0,0)$.

c) Que pensez-vous de la réciproque de a) ?

Exercice 15 Soient $F = \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $E = \{\varphi \in \mathrm{C}^2([0,1],\mathbb{R}) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ munis respectivement des normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|,\ (f\in F) \quad \text{et} \quad \|\varphi\| = |\varphi'(0)| + \|\varphi''\|_\infty,\ (\varphi \in E).$$

Montrer que l'application $f : E \to F$ définie par $f(\varphi) = \varphi'' - \varphi^3$ est différentiable et calculer $\mathrm{d}f_\varphi(h)$, $(\varphi, h) \in E^2$.

Exercice 16 On désigne par ℓ^1 l'espace vectoriel des suites réelles $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ telles que $\sum_{n\geqslant 1} |x_n| < \infty$, muni de la norme

$$\|x\|_1 = \sum_{n\geqslant 1} |x_n|.$$

On rappelle que $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.

a) Soit $c = (c_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombre réels telle que $\sup_{n\geqslant 1} |c_n| < \infty$. Pour tout $x \in \ell^1$, on pose

$$\Phi_c(x) = \sum_{n\geqslant 1} c_n x_n.$$

(i) Montrer que l'on définit ainsi une forme linéaire continue Φ_c sur ℓ^1, de norme $\|\Phi_c\| = \sup_{n\geqslant 1} |c_n|$.

(ii) Montrer que toute forme linéaire continue sur ℓ^1 est de la forme Φ_c, où c est comme indiqué ci-dessus.

b) (i) Montrer que si l'application $f : x \longmapsto \|x\|_1$ de ℓ^1 dans $\mathbb{R}_+$ est différentiable en un point $z = (z_n)_{n\geqslant 1}$ de ℓ^1, alors $z_n \neq 0$, pour tout $n \geqslant 1$, et on a $\mathrm{d}f_z = \Phi_c$, avec $c_n := \mathrm{sgn}(z_n)$.

(ii) Déterminer l'ensemble des points où f est différentiable.

Exercice 17 Soit $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. On définit $F : \ell^1 \to \ell^1$ par

$$F(x) = (f(x_i))_{i\geqslant 1}, \qquad x = (x_i)_{i\geqslant 1} \in \ell^1.$$

a) Montrer que F est bien définie.

b) Montrer que F est différentiable en tout point $a \in \ell^1$ et calculer $\mathrm{d}F_a(h)$, $h \in \ell^1$.

Exercice 18 Pour $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^1$, on pose

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} |x_n|^2.$$

a) Montrer que $f : \ell^1 \to \mathbb{R}$ est bien définie.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur ℓ^1 et calculer $\mathrm{d}f_a(h)$, où $(a,h) \in \ell^1 \times \ell^1$.

Exercice 19 Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x,y) \to \langle x,y\rangle$ et de la norme associée $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$. Soit u un endomorphisme continu, auto-adjoint de E, c'est-à-dire vérifiant, pour tous x et y de E :

$$\langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle.$$

Enfin soit $f : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\langle x, x\rangle}$.

a) Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$, $x \longmapsto \langle x, u(x)\rangle$ est différentiable sur E. Calculer sa différentielle.

b) Montrer que f est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.

c) Montrer qu'un élément non nul a de E vérifie $\mathrm{d}f_a = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Exercice 20 L'espace vectoriel $E = \mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$, $f \in E$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Montrer que l'application $G : E \to \mathbb{R}$,

$$G(f) := \int_a^b \varphi(f(x))\,dx$$

est différentiable sur E et que sa différentielle au point f est donnée, pour $u \in E$ par

$$\mathrm{d}G_f(u) = \int_a^b \varphi'(f(x))u(x)\,dx.$$

Exercice 21 Soit $\varphi : \ell^1 \to \varphi^1$ l'application définie par $\varphi(u) = v$, où $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$, avec pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = \sum_{p=1}^{n} u_p u_{n-p}.$$

a) Montrer que φ est bien définie.

b) Montrer que φ est de classe C^1 sur ℓ^1 et déterminer sa différentielle.

Exercice 1 Soient U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé E, F un espace de Banach et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications différentiables de U dans F vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) il existe un point $a \in U$ tel que la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;

(ii) la suite des différentielles $(df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers une application $g : U \to \mathcal{L}(E, F)$.

a) Soient $M > 0$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n, m \geqslant N_0$ et tout $x \in U$, $\|x - a\| < M$, on a
$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

b) En déduire que, pour tout $x \in U$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément, noté $f(x)$, de F, la convergence étant uniforme sur tout partie bornée de U.

c) Soit $x \in U$ fixé et $\varepsilon > 0$.

c1) Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n, m \geqslant N_1$ implique que pour tout $y \in U$, on a
$$\|(f_m - f_n)(y) - (f_m - f_n)(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\|y - x\|.$$

c2) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant N_2$ et $y \in U$, $\|y - x\| \leqslant \eta$ impliquent que
$$\|f_m(y) - f_m(x) - g(x)(y - x)\| \leqslant \varepsilon\|y - x\|.$$

c3) En déduire que l'application f est différentiable sur U et que sa différentielle est g.

Exercice 2 Soient U un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé E, F un espace de Banach et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications différentiables de U dans F vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) il existe un point $a \in U$ tel que la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;

(ii) la suite des différentielles $(df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément sur U vers une application $g : U \to \mathcal{L}(E, F)$ (cela signifie que tout point de U possède un voisinage sur lequel la suite $(df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g).

Montrer que, pour tout $x \in U$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément, noté $f(x)$, de F, la convergence étant localement uniforme. De plus, l'application $f : U \to F$ est différentiable sur U et sa différentiable n'est autre que g.

Exercice 3 Soient E un espace vectoriel normé de dimension (finie ou infinie) au moins égale à 2, F un espace de Banach, a un point de E, r, k des réels strictement positifs, $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r. Soit f une application différentiable définie sur l'ensemble $\Omega = B(a, r) \setminus \{a\}$, à valeurs dans F, vérifiant, pour tout $x \in \Omega$, $\|df_x\| \leqslant k$.

(a) Montrer que pour $x, y \in \Omega$, on a
$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|, .$$
Indication : si $y - a = \lambda(x - a)$, $\lambda < 0$, on choisira un vecteur z linéairement indépendant de $x - a$ et on majorera $\|f(x) - f(a + \varepsilon z)\|$, pour $0 < \varepsilon < \frac{r}{\|z\|}$.

(b) Montrer que f a une limite α lorsque x tend vers a.

(c) On suppose que df_x tend vers une limite l lorsque x tend vers a, et on considère l'application g définie sur $B(a, r)$ par $g(a) = \alpha$ et $g(x) = f(x)$ si $x \neq a$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, si x et y sont suffisamment proches de a, on a
$$\|g(x) - g(y) - l(x - y)\| \leqslant \varepsilon\|x - y\|.$$
En déduire que l'application g est différentiable en a et que $dg_a = l$

Exercice 4 Montrer que le système d'équations
$$x = \frac{1}{2}\sin(x + y), \quad y = \frac{1}{2}\cos(x - y)$$
admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Soient U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé E et f une application de U dans $\mathbb{R}$. Elle est dite convexe sur U si, pour tous $x, y \in U$ et tout $t \in [0, 1]$, on a
$$f((1 - t)x + ty) \leqslant (1 - t)f(x) + tf(y).$$

a) On suppose f différentiable sur U. Montrer que f est convexe sur U si et seulement si

$$f(y) - f(x) \geqslant df_x(y - x), \quad \text{pour tous } x, y \in U\,.$$

b) Si $E = \mathbb{R}$, montrer qu'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si sa dérivée est une fonction croissante sur U.

c) **Application :** On donne $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit F l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe C^1 et telles que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. Montrer que

$$\min_{f \in F} \left(\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt \right)$$

est atteint par la seule fonction affine qui appartient à F.

Exercice 6 L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

a) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $u : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable, k une constante positive et t_0 un point de I. On suppose que

$$\|u'(t)\| \leqslant k\|u(t)\| \quad \text{pour tout } t \in I, \text{ et } u(t_0) = 0.$$

Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que u soit indentiquement nulle sur l'intervalle $[t_0 - h, t_0 + h]$ (On pourra raisonner sur $M := \max \|u(t)\|$, où le maximum est pris sur $[t_0 - h, t_0 + h]$).
En déduire que u est identiquement nulle sur I.

b) Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue, supposée k-lipschitzienne par rapport à y, i.e.

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leqslant k\|y - z\|$$

pour tous $(t, y), (t, z) \in U$. Déduire de a) que le système différentiel

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y'(t_0) = x$$

(avec $(t_0, x) \in U$ donné) admet au plus une solution définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0.

Exercice 7 Soient E un espace normé, Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : \Omega \to E$ une application continue telle que

(i) $\forall (t, x) \in \Omega$, $D_2 f(t, x)$ existent ;

(ii) $D_2 f : \Omega \to \mathcal{L}(E)$ est continue.

Montrer que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur Ω.

Exercice 8 Soient E et F des espaces normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application continue. On suppose que, $\forall a \in U$, $\forall v \in E$,

$$L_v f(a) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

existe.

a) On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $\|L_v f(a)\| \leqslant k\|v\|$, $\forall a \in U$, $\forall v \in E$. Montrer que si x et y sont des points de U tels que le segment $[x, y]$ soit contenu dans U, on a

$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

b) On suppose que, $\forall x \in U$, l'application $v \longmapsto L_v f(x)$ est linéaire et continue (on dit alors que f est différentiable au sens de Gâteaux sur U). On pose alors $L_v f(x) := M(x)(v)$. Montrer que si $M : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue au point $a \in U$, alors f est différentiable en a.

1 Théorème d'inversion locale.

Exercice 1 Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$ et $g : U \to G$ deux applications de classe C^1.

a) On suppose que pour tout $x \in U$, df_x est un isomorphisme de E vers F. Montrer que $f(U)$ est un ouvert de F.

b) On suppose de plus qu'il existe une application $\Phi : f(U) \to G$ telle que $g = \Phi \circ f$. Montrer que Φ est de classe C^1.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle suivante

$$x''(t) - (x(t))^3 = g(t), \tag{1}$$

où $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue. On voudrait trouver une condition sur g assurant que l'équation différentielle (1) possède une solution définie sur $[0,1]$ et s'annulant en 0 et en 1. On considère pour cela $F = \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme infinie, et

$$E = \{\varphi \in \mathrm{C}^2([0,1], \mathbb{R}) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\},$$

muni de la norme $\|\varphi\|_E := |\varphi'(0)| + \|\varphi''\|_\infty$, $(\varphi \in E)$. On admettra que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach.

a) Montrer que, si $\varphi \in E$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_E$.

b) Soit $\Phi : E \to F$ définie par $\Phi(\varphi) = \varphi'' - \varphi^3$. Montrer que Φ est de classe C^1 sur E et calculer $d\Phi_\varphi(h)$, pour $(\varphi, h) \in E^2$.

c) Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction $g \in F$ vérifiant $\|g\|_\infty \leqslant \varepsilon$, il existe une fonction $\varphi \in E$ solution de l'équation différentielle (1).

Exercice 3 Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (\sin x + \operatorname{sh} y, \operatorname{sh} x + \sin y)$$

est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On définit

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ par } F(x_1, x_2) := (x_1 + f(x_2), x_2 + f(x_1)).$$

Montrer que F est un C^1-difféormorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\langle df_x(h), h\rangle \geqslant \alpha \langle h, h\rangle \qquad \forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

a) En appliquant le théorème des accroissements finis à $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \langle f(tb + (1-t)a), b - a\rangle,$$

montrer que, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle f(b) - f(a), b - a\rangle \geqslant \alpha \|b - a\|_2^2.$$

En déduire que f est une application fermée.

b) Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df_x \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$.

c) Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6 On considère l'espace de Banach $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs rèelles, muni de la norme infinie et l'espace vectoriel $\mathrm{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, nulles en 0, et normé par $\|f\|_1 := \|f'\|_\infty$.

a) Montrer que $\mathrm{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

b) Soit $\Phi : \mathrm{C}_0^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'application définie par $\Phi(f) = f' + ff'$, $\forall f \in \mathrm{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que Φ est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

c) Montrer que Φ est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathrm{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$ sur un voisinage de 0 dans $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x,y,z) = (e^y + e^z, e^x - e^z, x - y).$$

a) Calculer le rang de la matrice jacobienne de f en un point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Montrer qu'au voisinage de tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, f est un difféomorphisme local de classe C^1.

c) L'application f est-elle un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$.

2 Théorème des fonctions implicites.

Exercice 8 Montrer qu'au voisinage du point $(1,1,1,1,1)$ les équations

$$\begin{cases} xu^2 + yzv + x^2 z = 3 \\ xyv^3 + 2zu - u^2 v^2 = 2 \end{cases}$$

permettent de définir (u,v) comme une fonction de classe C^1 de (x,y,z) et calculer la différentielle au point $(1,1,1)$ de cette fonction.

Exercice 9 Montrer que l'équation

$$xy - y\log z + \sin(xz) = 0$$

permet de définir une fonction $(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$ de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $(0,2)$ et valant 1 en $(0,2)$. Calculer $df_{(0,2)}(\xi,\eta)$, $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 10 On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels de la norme

$$A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \longmapsto \|A\| = n \sup_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|.$$

Soit $D \in E$. Montrer que, si $B \in E$ est suffisamment petit (au sens de la norme précédente), l'équation en Y

$$Y + YDY = B$$

a une solution.

Exercice 11 Soit $E = \mathrm{C}([a,b]\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On pose

$$U := \{\varphi \in E : \varphi(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]\}.$$

a) Montrer que U est un ouvert de E.

b) Soit $f : U \to E$ définie par $f(\varphi) = \dfrac{1}{\varphi}$. Montrer que f est de classe C^1 sur U.

(On pourra utiliser le théorème des fonctions implicites et l'application $B : U \times U \to E$ définie par $B(\varphi,\psi) = \varphi\psi$).

Exercice 12 Montrer qu'au voisinage de $(0,0)$ la relation

$$e^{x-y} = x + y + 1$$

permet de définir y comme fonction de classe C^1 de x. Soit φ cette fonction. Trouver un équivalent simple de $\varphi(x)$ quand $x \to 0$.

Exercice 13 Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 peut-t-elle être injective ?

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = 1 + xy - \log\left(e^{xy} + e^{-xy}\right), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer qu'au voisinage du point $(1,1)$ la relation

$$f(x,y) = 3 - \log\left(e^2 + 1\right)$$

permet de définir y comme fonction de classe C^1 de x. Calculer la dérivée première de cette fonction sur son ouvert de définition. Déterminer explicitement cette fonction.

Exercice 15 Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathrm{C}^2(V, \mathbb{R})$ une fonction telle que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial y}(u,y) \neq 0, \qquad \forall (u,y) \in V.$$

Montrer que l'on peut résoudre localement le système

$$\begin{cases} x = \dfrac{\partial g}{\partial y}(u,y) \\ v = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,y) \end{cases}$$

en (u,v) et calculer le jacobien de l'application $(y,x) \longmapsto (u,v)$ ainsi définie.

Exercice 16 Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles $n \times n$. On définit l'application $F : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par

$$F(\lambda, A) = \text{dét}(\lambda Id - A).$$

a) Montrer que F est de classe C^1.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A possède une valeur propre réelle λ de multiplicité 1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une fonction $\phi : V \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\phi(A) = \lambda$ et que, pour toute matrice $B \in V$, $\phi(B)$ soit une valeur propre réelle de B.

c) Soit U le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices ayant n valeurs propres réelles deux à deux distinctes. Montrer que U est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) Soit $A \in U$, $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)$ les n valeurs propres de A rangées par ordre croissant. On définit ainsi n applications λ_i de U dans $\mathbb{R}$. Montrer que ces applications sont de classe C^1 sur U.

Exercice 17 Soit $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application $F(A) = A^2$, où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices réelles $n \times n$.

a) Montrer que F est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

b) On se place au point I (matrice unité $n \times n$). Montrer qu'il existe une fonction différentiable G, définie dans un voisinage V de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que, pour tout $A \in V$, on ait $G(A)^2 = A$.

c) Dans cette question $n = 2$. On donne les matrices :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $dF_J(H)$. En déduire qu'il n'existe pas de fonction différentiable G, définie au voisinage de I, telle que $G(I) = J$ et que $G(A)^2 = A$, pour A voisin de I.

Exercice 1 Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application, $a \in U$, V un ouvert de E tel que $a \in V \subset U$. On suppose que $f_{|V}$ est différentiable et que f est 2 fois différentiables au point a. Soit $(h,k) \in E^2$. On note $\varphi : V \to F$ l'application définie par $\varphi(x) = df_x(k)$. Montrer que φ est différentiable en a et que $d\varphi_a(h) = d^2f_a(h,k)$.

Remarque : ce résultat permet de calculer plus simplement des différentielles secondes.

Exercice 2 Soient E, F, G des espaces normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : V \to G$ et $g : U \to F$ deux applications telles que $g(U) \subset V$. On suppose que g est deux fois différentiable au point $a \in U$ et que f est deux fois différentiable au point $g(a)$. On sait (voir cours) que $f \circ g$ est deux fois différentiable au point a. Exprimer $d^2(f \circ g)_a(h,k)$, $(h,k) \in E^2$, à l'aide des différentielles premières et secondes de f (resp. de g) en $g(a)$ (resp. en a).

Exercice 3 Soient E un espace normé, U un ouvert convexe de E, $f : U \to \mathbb{R}$. On rappelle que f est dite convexe si et seulement si $\forall (a,b) \in U^2$, $\forall t \in [0,1]$, on a :

$$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b).$$

a) On suppose que f est différentiable sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si, $\forall (x,y) \in U^2$,
$$f(x) \geqslant f(y) + df_y(x-y).$$
b) On suppose que f est deux fois différentiable sur U.
   - b1) Montrer que si f est convexe alors $\forall x \in U$, $\forall h \in E$,
   $$d^2f_x(h,h) \geqslant 0.$$
   - b2) On suppose que E est un espace de Banach. Montrer réciproquement que si f est de classe C^2 sur U et si elle vérifie, $\forall x \in U$, $\forall h \in E$, $d^2f_x(h,h) \geqslant 0$, alors f est convexe sur U.

c) On suppose que f est convexe et différentiable sur U. Soit $a \in U$ tel que $df_a = 0$. Montrer que f a un minimum absolu en a.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle $n \times n$ symétrique et $B \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$f(X) := \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle B, X\rangle.$$
Montrer que f est convexe si et seulement si A est positive, i.e. vérifie, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\langle AX, X\rangle \geqslant 0$.

Exercice 4 Soit E un espace de Banach, $I =]-a,a[$ (avec $a > 0$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I vers E. Soit $y \in]0,a[$.

a) On suppose que f est de classe C^2 et qu'il existe deux constantes positives A et B telles que, pour tout $x \in I$, on a
$$\|f(x)\| \leqslant A, \quad \|df_x\| \leqslant B.$$
Montrer que si $x \in [-y,y]$, alors
$$\|df_x\| \leqslant \frac{A}{y} + By.$$

b) On suppose que f est de classe C^∞ et qu'il existe deux constantes positives M et K telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$,
$$\|d^{2n}f_x\| \leqslant M(2n)!K^n.$$

b1) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-y, y]$, majorer $\|d^{2n+1} f_x\|$.

b2) Montrer que, si $y^2 K < 1$, la série $\sum_n \frac{1}{n!} d^n f_0(x, x, \ldots, x)$ converge sur $[-y, y]$ et a pour somme $f(x)$.

Exercice 5 Trouver toutes les applications $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Indication : on pourra poser $\varphi(u, v) = ((u + v)/2, (u - v)/2)$ et $G = F \circ \varphi$.

Exercice 6 Soient E et F des espaces normés et C un cône ouvert de E (i.e. un ouvert de E tel que si $x \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\lambda x \in C$). On rappelle qu'une application $f : C \to F$ est dite **positivement homogène de degré** $m \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x \in C, \forall t > 0, f(tx) = t^m f(x).$$

a) Montrer que si $f : C \to F$ est positivement homogène de degré $m \in \mathbb{R}$ et si f est différentiable sur C, alors $df : C \to \mathcal{L}(E, F)$ est positivement homogène de degré $m - 1$.

b) Soit $f : E \to F$ une application positivement homogène de degré $m \in \mathbb{N}^*$ et de classe C^m. Montrer que f est alors de classe C^∞ et que $d^n f = 0$ si $n > m$.

c) Soit $f : E \to F$ une application positivement homogène de degré $m \in \mathbb{N}^*$ et de classe C^m. Montrer que

$$d^p f_0 = 0, \text{ si } p < m \quad \text{et } d^m f_x(x, x, \ldots, x) = m! f(x), \forall x \in E.$$

Exercice 7 Soient E un espace normé et $f : E \to \mathcal{L}(E)$ une application deux fois différentiable et $\varphi : E \to E$ l'application définie par $\varphi(x) = f(x)(x)$, $x \in E$. Montrer que φ est deux fois différentiable et calculer $d^2\varphi_x(h, k)$, $(x, h, k) \in E^3$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (x^4 + y^2 + z^3, e^x \sin(yz)).$$

Calculer $d^2 f_{(0,\pi,1)}((1, 2, 1), (0, 1, 0))$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = (\cos x \operatorname{ch} y, -\sin x \operatorname{sh} y).$$

Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $d^2 f_{(0,0)}((1, 0), (0, 1))$.

Exercice 10 On rappelle que $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est appelée une isométrie si et seulement si

$$\langle S(h), S(k)\rangle = \langle h, k\rangle, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

On note $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ est un groupe (pour la composition des applications).

b) Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $H : U \to \mathbb{R}^n$ une application deux fois différentiable. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}^*$ et $T : U \to \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$\forall x \in U, \quad dH_x = cT(x).$$

(i) Montrer que, $\forall (h, k, l) \in (\mathbb{R}^n)^3$, $\forall x \in U$, on a :

$$\langle d^2 H_x(l, h), dH_x(k)\rangle + \langle dH_x(h), d^2 H_x(l, k)\rangle = 0.$$

(ii) En déduire (par permutation circulaire sur les vecteurs h, k, l) que

$$\langle dH_x(l), d^2 H_x(h, k)\rangle = 0, \quad \forall (h, k, l) \in (\mathbb{R}^n)^3, \forall x \in U,$$

puis que $d^2 H_x = 0$, $\forall x \in U$.

(iii) En conclure que H est égale à la restriction à U de la composée d'une isométrie, d'une homothétie et d'une translation.

Exercice 11 Soit E un espace normé et $f : E \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que $f(x) > 0$, $\forall x \in E$. On suppose qu'il existe $M > 0$ telle que

$$\|d^2 f_x\| \leqslant M, \quad \forall x \in E.$$

Montrer que

$$\|df_x\| \leqslant \sqrt{2Mf(x)}, \forall x \in E.$$

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, df_x est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ (on dit que f est une isométrie infinitésimale). On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien.

a) Montrer que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

b) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage ouvert U_a de a et un voisinage ouvert $U'_{f(a)}$ de $f(a)$ tels que $f_{|U_a}$ soit un C^1-difféomorphisme de U_a sur $U'_{f(a)}$.

c) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V_a de a contenu dans U_a tel que

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \qquad \forall (x, y) \in V_a \times V_a.$$

d) On définit une application $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(x, y) = \|f(x) - f(y)\|^2, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Montrer que la différentielle partielle $d^2_{12}\Phi_{(x,y)}$ existe en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En déduire que

$$\langle df_y(h), df_x(k) \rangle = \langle h, k \rangle, \qquad \forall (x, y, h, k) \in V_a \times V_a \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

e) Calculer $\|df_x(h) - df_y(h)\|^2$ pour $(x, y, h) \in V_a \times V_a \times \mathbb{R}^n$. En déduire que si $x \in V_a$ et $y \in V_a$, $df_x = df_y$.

f) Montrer qu'il existe une isométrie A de $\mathbb{R}^n$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$f(x) = A(x) + \xi, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

i.e. f est une isométrie affine.

Exercice 1 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz.$$

a) Trouver les points critiques de f.

b) Déterminer les extrema relatifs de f.

c) La fonction f admet-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 Trouver tous les extrema de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz.$$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

a) Déterminer les extrema relatifs de f.

b) La fonction f possède-t-elle un maximum absolu ou un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$?

c) Soit $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\}$. Justifier l'existence du maximum absolu M et du minimum absolu m de $f_{|T}$. Déterminer M et m et préciser en quels points de T ils sont atteints.

Exercice 4 Etudier les extrema relatifs puis les extrema absolus de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Exercice 5 a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et $s > 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

On pose $\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n : \sum_{i=1}^n x_i = s\}$. Etudier le maximum global de $f_{|\Gamma}$. Retrouver ainsi l'inégalité arithmético-géométrique.

b) On se donne maintenant un entier $n \geqslant 2$ et n réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On note

$$\Gamma = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1 \right\}.$$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, déterminer le maximum global de $f_{|\Gamma}$.

c) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Démontrer que

$$\prod_{i=1}^n a_i(1 - a_i) \leqslant \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}.$$

Exercice 6 Soient f et g les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz) \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = xyz - 1000.$$

Soient $P = (]1, 1000[)^3$, $A = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 : g(x, y, z) = 0\}$ et $B = P \cap g^{-1}(0)$.

a) Montrer que A est un fermé de $\mathbb{R}^3$, que $A \cap \overline{P}$ est compact et que le maximum de $f_{|A\cap\overline{P}}$ n'est atteint en aucun point de $(A \cap \overline{P}) \setminus (A \cap P)$.

b) Trouver les extrema de $f_{|B}$.

c) En déduire les dimensions d'une boîte parallélépipédique rectangle ayant pour volume 1000 et ayant une aire minimale.

Exercice 7 On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'éllipsoïde E d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Trouver parmi les parélłélépipèdes rectangles de côtés parallèles aux axes et inscrits dans cet ellipsoïde, celui dont le volume est maximum.

Exercice 8 Soient m, n, p trois réels tous non nuls. On considère l'application $f : (\mathbb{R}_+^*)^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^m + y^n + z^p$. Trouver les extrema de f sur le plan d'équation $x + y + z = 1$.

Exercice 9 On considère, dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ et de la distance euclidienne d, le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et la droite Δ d'équation $x + y = 4$. Trouver les points $P \in \Gamma$ et $Q \in \Delta$ tels que $d(P, Q)$ soit minimum.

Equations différentielles
Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 1 Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y'' = F(t, y, y').$$

On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F(t, 0, 0) = 0$ (en d'autre termes, la fonction nulle est solution). Montrer que toute solution non identiquement nulle a ses zéros isolés.

Exercice 2 Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle $y' = F(t, y)$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) < g(t_0)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) < g(t)$.

Exercice 3 Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 vérifiant

$$\exists T > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad F(t + T, \cdot) = F(t, \cdot).$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y' = F(t, y)$. Montrer que la suite $(\varphi(kT))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone ou est constante. Dans ce dernier cas, montrer que φ est une solution T-périodique.

Exercice 4 Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 et bornée sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que toute solution maximale de l'équation $X' = F(X)$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 5 Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 et on considère l'équation différentielle (E) :

$$X' = F(X)\,.$$

On suppose, de plus que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\| = 1$, alors $\langle F(X), X\rangle < 0$. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\|X_0\| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe une solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = X_0$ et définie sur un intervalle de la forme $]-\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$, vérifiant $\|\varphi(t)\| < 1$ pour tout $t > 0$.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{R}$-espace de Banach. On note Id_E l'application identique de E et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'équation différentielle, dans l'espace $\mathcal{L}(E)$,

$$X'(t) = -X(t) \circ A \circ X(t).$$

a) Montrer que cette équation possède une unique solution maximale φ satisfaisant la donnée de Cauchy $(0, Id_E)$.

b) Montrer que l'intervalle de définition de φ contient $I_0 :=]-\dfrac{1}{4\|A\|}, \dfrac{1}{4\|A\|}[$.

c) Donner l'expression de φ sur I_0 (On pourra étudier l'application ψ de I_0 dans $\mathcal{L}(E)$, définie par $\psi(t) = (Id_E + tA) \circ \varphi(t) - Id_E$.

1 Corrections d'exercices sur la feuille numéro 2 : différentielle d'une fonction.

Correction de l'exercice "à faire à la maison" : rappelons d'abord l'énoncé. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathcal{L}(E)$ une application différentiable sur E. On définit $\varphi : E \to E$ par $\varphi(x) := f(x)(x)$, $x \in E$. Il s'agit de montrer que φ est différentiable sur E.

Première méthode : à partir de la définition.

Comme f est différentiable sur E, cela signifie, qu'en tout point a de E, on a

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

où $df_a \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E))$ et ε est une application de E dans $\mathcal{L}(E)$, qui tend vers 0 quand $\|h\| \to 0$. Ecrivons alors

$$\begin{aligned}
\varphi(a+h) - \varphi(a) &= f(a+h)(a+h) - f(a)(a) \\
&= f(a+h)(a) + f(a+h)(h) - f(a)(a) && \text{(par linéarité de } f(a+h)) \\
&= (f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h))(a) + (f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h))(h) - f(a)(a) && \text{(par différentiabilité de } f) \\
&= df_a(h)(a) + f(a)(h) + \|h\|(\varepsilon(h)(a) + \varepsilon(h)(h)) + df_a(h)(h) \\
&= L_a(h) + R_a(h),
\end{aligned}$$

où $L_a(h) := df_a(h)(a) + f(a)(h)$ et $R_a(h) := \|h\|(\varepsilon(h)(a) + \varepsilon(h)(h)) + df_a(h)(h)$.

Montrons que L_a est une application linéaire et continue de E dans E. La linéarité de L_a vient du fait que $f(a)$ et df_a sont linéaires. La continuité vient du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\|L_a(h)\| &\leqslant \|df_a(h)(a)\| + \|f(a)(h)\| \\
&\leqslant \|df_a(h)\|_{\mathcal{L}(E)}\|a\| + \|f(a)\|_{\mathcal{L}(E)}\|h\| \\
&\leqslant \|df_a\|_{\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E))}\|h\|\|a\| + \|f(a)\|_{\mathcal{L}(E)}\|h\| \\
&= \left(\|a\|\|df_a\|_{\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E))} + \|f(a)\|_{\mathcal{L}(E)}\right)\|h\|,
\end{aligned}$$

ce qui montre que L_a est continue et $\|L_a\| \leqslant \|a\|\|df_a\|_{\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E))} + \|f(a)\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrons que $R_a(h) = o(\|h\|)$. Ecrivons que

$$\begin{aligned}
\|R_a(h)\| &\leqslant \|h\|(\|\varepsilon(h)(a)\| + \|\varepsilon(h)(h)\|) + \|df_a(h)(h)\| \\
&\leqslant \|h\|\|\varepsilon(h)\|_{\mathcal{L}(E)}(\|a\| + \|h\|) + \|df_a\|_{\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E))}\|h\|^2 \\
&= \|h\|\left(\|\varepsilon(h)\|_{\mathcal{L}(E)}(\|a\| + \|h\|) + \|df_a\|_{\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E))}\|h\|\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\|\varepsilon(h)\|_{\mathcal{L}(E)}$ tend vers 0 quand $\|h\| \to 0$, on obtient ainsi que $R_a(h) = o(\|h\|)$. Par conséquent, φ est différentiable en a et on a

$$d\varphi_a(h) = L_a(h) = f(a)(h) + df_a(h)(a).$$

Deuxième méthode : en décomposant φ à l'aide de fonctions "simples".

Introduisons $\psi : E \to \mathcal{L}(E) \times E$ et $\phi : \mathcal{L}(E) \times E \to E$ définies par

$$\psi(x) = (f(x), x),\ x \in E \quad \text{et } \phi(T, a) = T(a),\ (T, a) \in \mathcal{L}(E) \times E.$$

On a clairement $\varphi = \phi \circ \psi$. De plus, comme f est différentiable sur E, l'application ψ est différentiable sur E, et on a

$$d\psi_a(h) = (df_a(h), h), \qquad \forall (a, h) \in E \times E.$$

D'autre part, l'application ϕ est 2-linéaire. Vérifions qu'elle est continue. Pour tout $(T, a) \in \mathcal{L}(E) \times E$, on a

$$\|\phi(T, a)\| = \|T(a)\| less \|T\|_{\mathcal{L}(E)}\|a\|,$$

ce qui montre que ϕ est continue. On en déduit donc que ϕ est différentiable sur $\mathcal{L}(E) \times E$ et on a

$$d\phi_{(T_1,a)}(T_2, h) = \phi(T_1, h) + \phi(T_2, a) = T_1(h) + T_2(a).$$

Par le théorème de différentiabilité des fonctions composées, on obtient donc que φ est différentiable sur E, et on a

$$d\varphi_a(h) = d\phi_{\psi(a)}(d\psi_a(h)) = d\phi_{(f(a),a)}(df_a(h), h) = f(a)(h) + df_a(h)(a).$$

$\square$

Correction de l'exercice 6 : soient f et g deux applications de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } g(x,y) > 0, \\ f(x,y) + (g(x,y))^2 & \text{si } g(x,y) \leqslant 0. \end{cases}$$

Il s'agit de montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Notons

$$\Omega_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) > 0\}, \quad \Omega_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) < 0\}, \quad \Omega_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}.$$

Comme $\Omega_1 = g^{-1}(]0,+\infty[)$, $\Omega_2 = g^{-1}(]-\infty,0[)$ et $\Omega_3 = g^{-1}(\{0\})$, la continuité de g implique que Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et Ω_3 est un fermé de $\mathbb{R}^2$. D'autre part, sur Ω_1, la fonction F coincide avec f qui est de classe C^1, et sur Ω_2, la fonction F coincide avec $f+g^2$ qui est aussi de classe C^1. Finalement, on obtient que F est de classe C^1 sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Il reste à examiner ce qui se passe au voisinage d'un point $(x_0,y_0) \in \Omega_3$.

Pour cela, introduisons la fonction $h(x,y) = f(x,y) + (g(x,y))^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme f et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$, l'application h est diiférentiable sur $\mathbb{R}^2$, et on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$dh_{(x,y)} = df_{(x,y)} + 2g(x,y)dg_{(x,y)}.$$

Remarquons maintenant que, si $(x_0,y_0) \in \Omega_3$ et $(\zeta,\eta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$F(x_0+\zeta, y_0+\eta) - F(x_0,y_0) = \begin{cases} f(x_0+\zeta,y_0+\eta) - f(x_0,y_0) & \text{si } (x_0+\zeta,y_0+\eta) \in \Omega_1, \\ h(x_0+\zeta,y_0+\eta) - f(x_0,y_0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La différentiabilité de f entraine que

$$f(x_0+\zeta,y_0+\eta) - f(x_0,y_0) = df_{(x_0,y_0)}(\zeta,\eta) + \|(\zeta,\eta)\|\alpha(\zeta,\eta),$$

avec $\lim_{(\zeta,\eta)\to(0,0)} \alpha(\zeta,\eta) = 0$. De même, la différentiabilité de h implique que

$$\begin{aligned} h(x_0+\zeta,y_0+\eta) - f(x_0,y_0) &= h(x_0+\zeta,y_0+\eta) - h(x_0,y_0) \\ &= dh_{(x_0,y_0)}(\zeta,\eta) + \|(\zeta,\eta)\|\beta(\zeta,\eta), \qquad \text{avec} \lim_{(\zeta,\eta)\to(0,0)} \beta(\zeta,\eta) = 0 \\ &= df_{(x_0,y_0)}(\zeta,\eta) + 2g(x_0,y_0)dg_{(x_0,y_0)}(\zeta,\eta) + \|(\zeta,\eta)\|\beta(\zeta,\eta), \\ &= df_{(x_0,y_0)}(\zeta,\eta) + \|(\zeta,\eta)\|\beta(\zeta,\eta). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $(\zeta,\eta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$F(x_0+\zeta,y_0+\eta) - F(x_0,y_0) = df_{(x_0,y_0)}(\zeta,\eta) + o(\|(\zeta,\eta)\|).$$

Ceci signifie que F est différentiable au point (x_0,y_0) et $dF_{(x_0,y_0)} = df_{(x_0,y_0)}$. D'où, on obtient :

$$dF_{(x,y)} = \begin{cases} df_{(x,y)} & \text{si } (x,y) \in \Omega_1 \cup \Omega_3 \\ dh_{(x,y)} = df_{(x,y)} + 2g(x,y)dg_{(x,y)} & \text{si } (x,y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Il reste donc à remarquer que si $(x_0,y_0) \in \Omega_3$, la continuité de df, de dg et de g au point (x_0,y_0) montre que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} dF_{(x,y)} = df_{(x_0,y_0)} = dF_{(x_0,y_0)},$$

i.e. que dF est continue en (x_0,y_0), et par conséquent F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$\square$

Correction de l'exercice 19 :

a) on doit montrer que l'application φ de E dans $\mathbb{R}$, $x \longmapsto \varphi(x) = \langle x, u(x)\rangle$ est différentiable. Pour cela, on introduit les deux applications

$$\psi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \times E \\ x & \longmapsto & (x, u(x)) \end{array} \quad \text{et} \quad \theta : \begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \langle a,b\rangle. \end{array}$$

Comme u est linéaire et continue de E dans E, elle est différentiable sur E et donc ψ est aussi clairement différentiable sur E et on a

$$d\psi_a(h) = (h, u(h)), \quad \forall (a,h) \in E \times E.$$

D'autre part, les propriétés d'un produit scalaire assurent que θ est bilinéaire et continue (la continuité provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Donc θ est différentiable sur $E \times E$ et on a

$$d\theta_{(a,b)}(h_1,h_2) = \theta(a,h_2) + \theta(h_1,b) = \langle a,h_2\rangle + \langle h_1,b\rangle.$$

Le théorème sur la différentiabilité d'une application composée permet d'en déduire que φ est différentiable sur E et on a, pour tous $(a,h) \in E \times E$,

$$d\varphi_a(h) = d(\theta\circ\psi)_a(h) = d\theta_{\psi(a)}(d\psi_a(h)) = d\theta_{(a,u(a))}(h,u(h)) = \langle a,u(h)\rangle + \langle h,u(a)\rangle = \langle u(a),h\rangle + \langle h,u(a)\rangle = 2\langle h,u(a)\rangle.$$

b) On doit montrer que l'application $f : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\langle x, x\rangle}$ est différentiable. Pour cela, considérons ϑ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\vartheta(x) = \langle x, x\rangle$. On peut appliquer la question a) à ϑ, en prenant comme endomorphisme continu et autoadjoint particulier $u = Id_E$!! On obtient alors que ϑ est différentiable sur E et on a $d\vartheta_a(h) = 2\langle h, a\rangle$. Comme $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\vartheta(x)}$ et que si $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\vartheta(x) \neq 0$, on en déduit que f est différentiable sur $E \setminus \{0\}$. De plus, pour tous $(x, h) \in E \setminus \{0\} \times E$, on a :

$$\begin{aligned} df_x(h) &= \frac{d\varphi_x(h)\vartheta(x) - d\vartheta_x(h)\varphi(x)}{(\vartheta(x))^2} \\ &= \frac{2\langle h, u(x)\rangle \|x\|^2 - 2\langle h, x\rangle\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^4} \end{aligned}$$

c) Soit $a \in E \setminus \{0\}$. On doit montrer que $df_a = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} df_a = 0 &\Longleftrightarrow \forall h \in E,\ \langle h, u(a)\rangle \|a\|^2 - \langle h, a\rangle\langle a, u(a)\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall h \in E,\ \langle h, \|a\|^2 u(a) - \langle a, u(a)\rangle a\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \|a\|^2 u(a) - \langle a, u(a)\rangle a = 0. \end{aligned}$$

D'où comme $a \neq 0$, on en déduit que si $df_a = 0$ alors

$$u(a) = \frac{\langle a, u(a)\rangle}{\|a\|^2} a,$$

c'est-à-dire que a est un vecteur propre de u.

Réciproquement si a est un vecteur propre de u, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(a) = \lambda a$. On en déduit donc que

$$\langle a, u(a)\rangle = \langle a, \lambda a\rangle = \lambda \|a\|^2,$$

d'où $\lambda = \dfrac{\langle a, u(a)}{\|a\|^2}$ et donc

$$\|a\|^2 u(a) - \langle a, u(a)\rangle a = 0,$$

ce qui, d'après les calculs précédents, implique que $df_a = 0$.

□

2 Corrections d'exercices sur la feuille numéro 3 : Théorème des accroissements finis.

Exercice 3 :

a) Attention, on ne peut pas appliquer directement le théorème des accroissements finis car l'ensemble $B(a, r) \setminus \{a\}$ n'est pas convexe !! Fixons $x, y \in \Omega$.

<u>Premier cas :</u> $a \notin]x, y[$. Alors, par convexité de $B(a, r)$, on obtient que $[x, y] \subset \Omega$. L'application f étant différentiable sur Ω, on peut appliquer le théorème des accroissements finis qui implique que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \sup_{z \in [x,y]} \|df_z\| \|x - y\| \leqslant k\|x - y\|.$$

<u>Deuxième cas :</u> $a \in]x, y[$. Alors il existe $\lambda < 0$ tel que $y - a = \lambda(x - a)$. En effet, comme $a \in]x, y[$, il existe $t \in]0, 1[$ tel que $a = tx + (1 - t)y$. On calcule alors $y - a$ et on obtient $y - a = \lambda(x - a)$, avec $\lambda = -\dfrac{t}{1 - t} < 0$. Comme $\dim E \geqslant 2$, il existe $z \in E$ tel que z et $x - a$ soient linéairement indépendants.
Pour $0 < \varepsilon < \frac{r}{\|z\|}$, on a :

$$\|a + \varepsilon z - a\| = \varepsilon \|z\| < r,$$

d'où $a + \varepsilon z \in B(a, r) \setminus \{a\} = \Omega$. D'autre part, remarquons que $a \notin [x, a + \varepsilon z]$. En effet, sinon il existerait $t \in [0, 1]$ tel que $a = tx + (1 - t)(a + \varepsilon z)$, et donc $(1 - t)\varepsilon z + t(x - a) = 0$. Comme z et $x - a$ sont linéairement indépendants, on obtient que soit $t = 1$, soit $t = 0$ c'est à dire soit $a = a + \varepsilon z$, soit $a = x$. Dans les deux cas, on obtient une contradiction et donc on en déduit que $a \notin [x, a + \varepsilon z]$. Par conséquent, on a $[x, a + \varepsilon z] \subset \Omega$. On montre de même que $[y, a + \varepsilon] \subset \Omega$. On peut alors appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x, a\varepsilon z]$, puis sur $[y, a\varepsilon z]$. On obtient :

$$\|f(x) - f(a + \varepsilon z)\| \leqslant k\|x - (a + \varepsilon z)\|, \quad \text{et} \quad \|f(y) - f(a + \varepsilon z)\| \leqslant k\|y - (a + \varepsilon z)\|,$$

et l'inégalité triangulaire permet d'écrire que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\left(\|x - (a + \varepsilon z)\| + \|y - (a + \varepsilon z)\|\right).$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\left(\|x-a\| + \|y-a\|\right).$$

Or $a \in]x,y[$, d'où $\|x-a\| + \|y-a\| = \|x-y\|$, ce qui donne

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x-y\|.$$

b) On doit montrer que f a une limite α lorsque x tend vers a. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite quelconque d'éléments de Ω convergeant vers a. En utilisant la question a), pour tout $m, n \geqslant 1$, on a

$$\|f(x_m) - f(x_n)\| \leqslant k\|x_m - x_n\|.$$

Comme la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, elle est de Cauchy et l'inégalité précédente implique que $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ est aussi une suite de Cauchy, dans F complet. Par conséquent, elle converge vers disons un élément $\alpha \in F$. Remarquons que la limite α ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ choisie car si $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ est une autre suite convergente vers a, on a

$$\|f(x'_n) - f(x_n)\| \leqslant k\|x_n - x'_n\| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

et donc $(f(x'_n))_{n\geqslant 1}$ et $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ ont la même limite. Par conséquent, on a montré que $\forall (x_n)_{n\geqslant 1} \subset \Omega$, $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to \alpha$. Ceci prouve que f a une limite α lorsque $x \to a$.

c) On suppose que df_x tend vers l lorsque x tend vers a. Il s'agit de montrer que f peut se prolonger en une application différentiable sur $B(a,r)$. Posons

$$\begin{array}{rccl} g: & B(a,r) & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B(a,r) \setminus \{a\}, \\ \alpha & \text{si } x = a, \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} h: & B(a,r) & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & h(x) := g(x) - l(x-a). \end{array}$$

Attention, ici bien sûr $l \in \mathcal{L}(E,F)$! ! Sur l'ouvert $\Omega \subset B(a,r)$, g coincide avec f qui par hypothèse est supposée différentiable. Par conséquent, g est différentiable sur Ω. Comme l est linéaire et continue, l'application $x \to l(x-a) = l(x) - l(a)$ est aussi différentiable et sa différentielle en un point quelconque de E n'est autre que l. On en déduit donc que h est différentiable sur Ω et $\forall x \in \Omega$, on a $dh_x = df_x - l$. D'autre part, par hypothèse, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r'$, $0 < r' < r$ tel que

$$x \in B(a,r') \setminus \{a\} \Longrightarrow \|dh_x\| = \|df_x - l\| \leqslant \varepsilon.$$

La question a) appliquée à h sur $B(a,r') \setminus \{a\}$ implique que, pour tous $x, y \in B(a,r') \setminus \{a\}$, on a

$$\|h(x) - h(y)\| \leqslant \varepsilon\|x-y\|,$$

c'est-à-dire que

$$\|g(x) - g(y) - l(x-y)\| \leqslant \varepsilon\|x-y\|.$$

Comme g et l sont continues en a, cette inégalité se prolonge sur $B(a,r')$. Donc, $\forall x,y \in B(a,r')$, on a

$$\|g(x) - g(y) - l(x-y)\| \leqslant \varepsilon\|x-y\|.$$

Pour $y = a$, en particulier, on obtient que si $\|x-a\| \leqslant r'$, alors

$$\|g(x) - g(a) - l(x-a)\| \leqslant \varepsilon\|x-a\|,$$

ce qui prouve que $g(x) = g(a) + l(x-a) + o(\|x-a\|)$. Donc g est différentiable en a et $dg_a = l$.

$\square$

Exercice 6 :

a) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $u : I \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable, $k \geqslant 0$ et $t_0 \in I$. On suppose que

$$\|u('t)\| \leqslant k\|u(t)\|, \quad \forall t \in I, \text{ et } u(t_0) = 0.$$

Il s'agit de montrer que u est identiquement nulle sur I.

Commençons par choisir $h > 0$, suffisamment petit, pour que $[t_0 - h, t_0 + h] \subset I$ (ce qui est possible car $t_0 \in I$ qui est ouvert). Notons alors $M := \sup_{t\in[t_0-h,t_0+h]} \|u(t)\|$. Remarquons que M est fini (et même atteint) car u est continue sur le compact $[t_0 - h, t_0 + h]$. De plus, on a

$$\|u'(t)\| \leqslant kM, \quad \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Le théorème des accroissements finis implique alors que pour tout $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, on a

$$\|u(t) - u(t_0)\| \leqslant kM|t - t_0|,$$

d'où comme $u(t_0) = 0$, on obtient que

$$\|u(t)\| \leqslant kM|t - t_0| \leqslant kMh.$$

On en déduit alors que $M \leqslant kMh$ et donc si $h > 0$ est tel que $kh < 1$, on en déduit que $M = 0$, c'est-à-dire que $u(t) = 0$, $\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Considérons alors $J := \{t \in I : u(t) = 0\}$. Comme u est continue, $J = u^{-1}(\{0\})$ est fermé. De plus, J est non vide car $t_0 \in J$. Enfin, J est ouvert, car on a montré dans ce qui précède que si $u(t_0) = 0$, alors il existe $h > 0$ tel que $u(t) = 0$, pour tout $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Par conséquent, J est ouvert, fermé et non vide dans I connexe. Donc $J = I$, c'est-à-dire que, $\forall t \in I$, $u(t) = 0$.

b) Supposons que le système différentiel

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = x$$

admette deux solutions y_1 et y_2 définies sur un intervalle ouvert I contenant t_0. Alors, en posant $u(t) = y_1(t) - y_2(t)$, $t \in I$, on a

$$\|u'(t)\| = \|y_1'(t) - y_2'(t)\| = \|f(t, y_1(t) - f(t, y_2(t)\| \leqslant k\|y_1(t) - y_2(t)\| = k\|u(t)\|.$$

De plus, on a $u(t_0) = y_1(t_0) - y_2(t_0) = x - x = 0$. La question a) implique donc que $u \equiv 0$ sur I et donc $y_1 \equiv y_2$ sur I.

$\square$

Pour l'exercice 8, nous allons avoir besoin d'une version du théorème des accroissements finis un peu différente de celle vue en cours....

Théorème 1 (Une version du théorème des accroisements finis) *Soient a et b deux points de $\mathbb{R}$, $a < b$, F un espace de Banach et $f : [a, b] \to F$ une application continue. Supposons que f admette une dérivée à droite en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et que*

$$\|f_d'(x)\| \leqslant M, \qquad a < x < b,$$

où M est une constante positive. Alors, on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b - a).$$

Remarque : rappelons qu'une application $f : [a, b] \to F$ admet une dérivée à droite en un point $x \in]a, b[$ si

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}$$

existe ; cette limite se note alors $f_d'(x)$ et s'appelle la dérivée à droite de f au point x. Remarquons bien sûr que $f_d'(x) \in F$.

Attention : cette version du théorème des accroissements finis n'est valable que pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un Banach. Elle ne peut pas se généraliser aux fonctions définies sur un convexe d'un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2 ! !

Preuve : Donnons-nous un nombre $\varepsilon > 0$. On va montrer que

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant M(x - a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon, \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{1}$$

Une fois cela prouvé, on appliquera cette inégalité pour $x = b$, puis on fera tendre ε vers 0, ce qui, à la limite, donnera l'inégalité de l'énoncé.

Introduisons l'ensemble U des $x \in [a, b]$ pour lesquels l'inégalité (1) est fausse, c'est-à-dire pour lesquels on a

$$\|f(x) - f(a)\| > M(x - a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon.$$

On veut montrer que U est vide. Remarquons que U est ouvert dans $[a, b]$. En effet, la fonction

$$x \longmapsto \|f(x) - f(a)\| - M(x - a) - \varepsilon(x - a)$$

est continue sur $[a, b]$ et U est l'image réciproque par cette fonction de l'intervalle ouvert $]\varepsilon, +\infty[$. Raisonnons par l'absurde, en supposant que U est non vide. Alors U a une borne inférieure c. On peut dire trois choses :

(i) $c > a$; en effet, l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels que

$$\|f(x) - f(a)\| < M(x - a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon$$

est un ouvert qui contient a et qui est contenu dans U^c. Donc il existe $r > 0$ tel que $[a, a + r[\subset U^c$. Cela implique que pour tout $x \in U$, on a $x \geqslant a + r$ et donc $c \geqslant a + r > a$.

(ii) $c \notin U$, parce que U est ouvert et donc si c appartenait à U, il existerait $r > 0$ tel que $]c-r, c+r[\subset U$ et c ne serait pas la borne inférieure de U.

(iii) $c < b$, sinon U se réduirait au point b, et ne serait pas ouvert.

Puisque $a < c < b$, on peut appliquer à c l'hypothèse de l'énoncé. Donc il existe $\eta > 0$ tel que si $c < x \leqslant c + \eta$, on a

$$\left\| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'_d(c) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

D'où

$$M \geqslant \|f'_d(c)\| \geqslant \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| - \varepsilon,$$

ce qui implique que, pour tout $x \in [c, c + \eta]$,

$$\|f(x) - f(c)\| \leqslant M(x - c) + \varepsilon(x - c).$$

Comme $c \notin U$, on a :

$$\|f(c) - f(a)\| \leqslant M(c - a)\varepsilon(c - a) + \varepsilon,$$

ce qui donne (avec l'inégalité triangulaire) que, pour tout $x \in [c, c + \eta]$,

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant M(x - a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon.$$

On obtient donc que $[c, c + \eta] \subset U^c$ et donc si $x \in U$, alors $x > c + \eta$. Cela implique donc que $c > c + \eta$!! Par conséquent, U est vide et la preuve du théorème achevée.

$\square$

Exercice 8 :

On considère E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application continue. On suppose que, $\forall a \in U$, $\forall v \in E$,

$$L_v f(a) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

existe.

a) On suppose, dans cette question, qu'il existe $k > 0$ tel que $\|L_v f(a)\| \leqslant k\|v\|$, $\forall a \in U$, $\forall v \in E$. Soient $x, y \in U$ tels que $[x, y] \subset U$. On introduit la fonction $\varphi : [0, 1] \to E$ définie par $\varphi(t) := f(tx + (1 - t)y)$. Cette fonction est continue sur $[0, 1]$ comme composée de fonctions continues. De plus, pour $t_0 \in]0, 1[$, et $h > 0$ suffisamment petit, on a :

$$\frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} = \frac{f(t_0 x + (1 - t_0)y + h(x - y)) - f(t_0 x + (1 - t_0)y)}{h},$$

qui tend, par hypothèse, vers $L_{x-y} f(t_0 x + (1 - t_0)y)$, quand $h \to 0^+$. On en déduit donc que φ est dérivable à droite, en tout point t_0 de $]0, 1[$ et on a :

$$\|\varphi'_d(t_0)\| = \|L_{x-y} f(t_0 x + (1 - t_0)y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

Le théorème des accroissements finis (théorème 1) appliqué à φ montre donc que

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| = \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

b) On suppose, dans cette question, que, $\forall x \in U$, l'application $v \longmapsto L_v f(x)$ est linéaire et continue (on dit alors que f est différentiable au sens de Gâteaux sur U). On pose alors $M(x)(v) := L_v f(x)$. On suppose, alors de plus que $M : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue en un point $a \in U$. Il s'agit de montrer que f est différentiable en a.

La continuité de l'application M en a se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \text{ tel que } x \in B(a, r) \Longrightarrow \|M(x) - M(a)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \varepsilon.$$

Considérons alors $g : B(a, r) \to F$ l'application définie par

$$g(x) := f(x) - M(a)(x - a).$$

Il est clair que g est continue sur $B(a, r)$ car f l'est et $M(a)$ est linéaire, continue. Montrons que g vérifie les hypothéses de la question précèdente, en remplaçant l'ouvert U par $B(a, r)$ (qui est convexe !!). Tout d'abord, on doit montrer que $L_v g(x)$ existe, pour tout vecteur $v \in E$ et tout point $x \in B(a, r)$. En utilisant la linéarité de $M(a)$, on obtient :

$$\frac{g(x + tv) - g(x)}{t} = \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} - M(a)(v),$$

et donc $L_v g(x)$ existe et $L_v g(x) = L_v f(x) - M(a)(v) = M(x)(v) - M(a)(v)$. D'où

$$\|L_v g(x)\| \leqslant \|M(a) - M(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|v\| \leqslant \varepsilon\|v\|.$$

Comme $B(a,r)$ est convexe, pour tout $h \in E$ tel que $\|h\| \leqslant r$, on a $[a, a+h] \subset B(a,r)$ et donc la question précédente implique que $\|g(a+h) - g(a)\| \leqslant \varepsilon\|h\|$. Or

$$g(a+h) - g(a) = f(a+h) - f(a) - M(a)(h).$$

Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que si $h \in E$, $\|h\| \leqslant r$, on a

$$\|f(a+h) - f(a) - M(a)(h)\| \leqslant \varepsilon\|h\|,$$

ce qui montre bien, car $M(a) \in \mathcal{L}(E,F)$, que f est différentiable en a et que $df_a = M(a)$.

□

Remarque : On a donc montré que si $f : U \to F$ est Gâteaux-différentiable sur U et si l'application, de U dans $\mathcal{L}(E,F)$, $x \to M(x)$, est continue en un point a, alors f est différentiable en a. De plus, le raisonnement précédent montre que si M est continue sur U alors f est de classe C^1 sur U. En effet, si M est continue sur U, cela signifie que M est continue en tout point a de U. Le raisonnement précédent montre alors que f est différentiable en a et que $df_a = M(a)$. Autrement dit, f est différentiable sur U et sa différentielle $df : U \to \mathcal{L}(E,F)$ n'est autre que l'application M et donc est continue sur U. Ceci signifie exactement que f est de classe C^1 sur U.

La réciproque est vraie. En effet, si f est de classe C^1 sur U, alors en particulier, on a, pour tout point a de U,

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

où ε est une fonction définie sur un voisinage de 0 dans E qui tend vers 0 quand $\|h\| \to 0$. On en déduit, par linéarité de df_a, que pour $t > 0$ suffisamment petit, et tout vecteur v de E, on a

$$f(a+tv) = f(a) + df_a(tv) + \|tv\|\varepsilon(tv) = f(a) + t df_a(v) + t\|v\|\varepsilon(tv).$$

D'où

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = df_a(v) + \|v\|\varepsilon(tv),$$

et donc $L_v f(a)$ existe et $L_v f(a) = df_a(v)$.Comme $df_a \in \mathcal{L}(E,F)$, l'application $v \longmapsto L_v f(a)$ est linéaire et continue, ce qui signifie que f est Gâteaux-différentiable sur U. Enfin, pour tout vecteur $v \in E$ et tout point a de U, on a $M(a)(v) = L_v f(a) = df_a(v)$, ce qui signifie que $M(a) = df_a$. Le fait que f soit de classe C^1 implique alors que M est continue sur U.

En résumé, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application continue. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est de classe C^1 sur U ;*

(ii) *f est Gâteaux différentiable sur U et l'application $M : U \to \mathcal{L}(E,F)$ est continue sur U, où $M(x)(v) := L_v f(x)$, $x \in U$, $v \in E$.*

UE Calcul différentiel **CC 13 avril 2005**

Aucun document n'est autorisé. *Durée : 3h*

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 . On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire habituel $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne associée $||.||$. Soit $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Montrer que l'application $N : U \to \mathbb{R}$ définie par $N(x) = ||x||$ est différentiable sur U et calculer $\mathrm{d}N_x(h)$, $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi(x) := \dfrac{N(x)+1}{N(x)^2} \end{array}$
   est différentiable sur U et calculer $\mathrm{d}\varphi_x(h)$, $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2 . Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x) \neq g'(y)$. Montrer que la fonction

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & F(x,y) := (x+y, f(x)+g(y)) \end{array}$$

est un ($\mathcal{C}^1$) difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

Exercice 3 . Soit $F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & F(x,y) := \mathrm{e}^{x-y} - 1 - x - y\,. \end{array}$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer qu'au voisinage de $(0,0)$, $F(x,y) = 0$ équivaut à $y = \phi(x)$, où ϕ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer $\phi'(0)$.

Exercice 4 . Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des application linéaires continues sur E, $\mathrm{I}_E : x \in E \mapsto x$ et $\mathrm{I} : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto u\,.$

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ u & \mapsto & f(u) := u^3 = u \circ u \circ u \end{array}$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{L}(E)$ et calculer sa différentielle en u, notée $\mathrm{d}f_u$, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$.
2. Démontrer l'inégalité :
   $$\|\mathrm{d}f_u - 3\,\mathrm{I}\,\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))} \leq 6\,\|u - \mathrm{I}_E\|_{\mathcal{L}(E)} + 3\,\|u - \mathrm{I}_E\|^2_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{L}(E)\,.$$
   Indication : on pourra écrire $u = \mathrm{I} + v$.
3. Soit B la boule ouverte dans $\mathcal{L}(E)$, de centre I_E et de rayon $1/3$. Montrer que pour tout $u \in B$, $\mathrm{d}f_u$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.
4. (a) Pour $u \in B$, on pose $g(u) = f(u) - 3\,u$. Montrer que pour tout $(u,v) \in B \times B$,
   $$\|g(u) - g(v)\| \leq \frac{7}{3}\,\|u - v\|\,.$$

(b) En déduire que f est injective sur B.

5. Montrer que f est un ($\mathcal{C}^1$) difféomorphisme de B sur $f(B)$.

Exercice 5 . Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et 1-périodiques (c'est-à-dire telles que $f(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
On admettra que $\|f\|_E = \max_{x\in[0,1]} (|f(x)|, |f'(x)|)$ définit une norme pour laquelle E est un espace de Banach.
Pour tout $f \in E$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on note f^s la fonction $x \mapsto f_s(x) := f(x+s)$.
Soit $g \in E$ et

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}\times E & \to & \mathbb{R} \\ (s,f) & \mapsto & F(s,f) := \displaystyle\int_0^1 f_s(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x \,. \end{array}$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle $\mathrm{d}F_{(s,f)}$ en tout point $(s,f) \in \mathbb{R}\times E$.
2. Montrer que, au voisinage de $(0,g)$, l'égalité $F(x,f) = 0$ équivaut à $s = \sigma(f)$, où σ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.