1 Applications du lemme de Zorn

Définition 1.1 *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie E de X est dite linéairement indépendante (ou libre) si pour toute partie finie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de E et toute suite finie $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{K}$, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Longrightarrow (\alpha_i = 0, \quad \textit{pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\}) .$$

Une base de Hamel (ou base algébrique) de X est une partie linéairement indépendante maximale (au sens de l'inclusion) de X.

Exercice 1.1 (Existence de base algébrique dans tout espace vectoriel normé). Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(a) Soit E une partie de X linéairement indépendante. Montrer que E est une base de Hamel de X si et seulement si tout vecteur x de X peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k,$$

avec $\alpha_k \in \mathbb{K}$ et $e_k \in E$, $1 \leq k \leq n$. Montrer de plus que l'écriture est alors unique.

(b) Soit E_0 une partie linéairement indépendante de X. Montrer qu'il existe une base de Hamel E de X qui contient E_0.

(c) En déduire que X possède une base de Hamel.

Exercice 1.2 Soit V un sous-espace d'un espace vectoriel E (de dimension finie ou infinie). Montrer que V possède un supplémentaire algébrique, c-à-d, $\exists\, W \subset E$, W espace vectoriel, tel que $V \cap W = \emptyset$ et $E = V + W$.

Exercice 1.3 Soit E un espace vectoriel réel normé de dimension infinie. Montrer que l'on peut construire sur E une forme linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ non continue.

Indication : montrer qu'il existe une suite infinie $(e_n)_{n \geq 1}$ de vecteurs unitaires libres de E et considérer f définie par $f(e_n) = n$.

Exercice 1.4 Soit (K, d) un espace métrique compact et T une application continue de K dans K.

(a) En utilisant le lemme de Zorn, montrer l'existence d'un fermé F non vide de K, stable par T, et minimal au sens de l'inclusion pour cette propriété.

(b) Montrer que l'on peut trouver $x \in K$ et une application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} T^{\varphi(n)}(x) = x$$

Indication : pour (b), on pourra considérer $x \in F$ et $F_k := \overline{\{T^n(x) : n \geq k\}}$, $k \in \mathbb{N}$.

2 Applications du théorème de Baire

Définition 2.1 *Soient E un espace de Baire et A une partie de E. On dit que A est*

1. *un **résiduel** si elle contient une intersection dénombrable d'ouverts denses dans E.*
2. ***maigre** si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés de E d'intérieurs vides.*

Exercice 2.1 Soit E un espace topologique.

a) Montrer que E est un espace de Baire si toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide dans E.

b) Montrer qu'une partie A d'un espace de Baire E est maigre si et seulement si $E \backslash A$ est un résiduel.

c) Soit E un espace de Baire et $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés de E telle que $\bigcup_{n\geq 1} F_n = E$. Montrer que $\bigcup_{n\geq 1} \overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense dans E.

Exercice 2.2 Soit E un espace de Banach de dimension infinie et $(e_i)_{i\in I}$ une base de Hamel de E. Montrer que I est non dénombrable.

Exercice 2.3 Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques. On suppose que (E,d) est complet. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications continues de E dans F, convergeant simplement vers une application $f : E \to F$.

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in E : \forall p \geq n, \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Montrer que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense dans E et que $\forall x_0 \in \Omega_\varepsilon, \exists V$ voisinage de x_0 tel que

$$\delta(f(x_0), f(x)) \leq 3\varepsilon \qquad (x \in V).$$

b) En déduire que l'ensemble des points de continuité de f est un résiduel.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

Exercice 2.4 On considère une application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et on suppose que pour tout $x > 0$ la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Le but de l'exercice est de montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$F_n := \{x \geq 0 : \forall p \geq n,\, |f(px)| \leq \varepsilon\}.$$

a) Montrer que F_n est un fermé de $[0, +\infty[$ et que

$$]0, +\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n.$$

b) En déduire qu'il existe $a, b > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < b$ et $]a, b[\subset F_{n_0}$.

c) Montrer que

$$x \in F_n \Longrightarrow lx \in F_n,\, l = 1, 2, \ldots.$$

En déduire que $]la, lb[\subset F_{n_0},\, l = 1, 2, \ldots.$

d) Soit $m := E\left(\frac{a}{b-a}\right) + 1$. Montrer que, si $l \geq m$, alors

$$]la, lb[\cap](l+1)a, (l+1)b[\neq \emptyset,$$

puis que

$$\bigcup_{l\geq m}]la, lb[=]ma, +\infty[.$$

e) Conclure.

Exercice 2.5 On note $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $I = [0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$.
Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble

$$U_{\varepsilon,n} = \left\{ f \in \mathcal{C} : \forall x \in I, \exists y \in I, 0 < |y-x| < \varepsilon, \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| > n \right\}.$$

a) Montrer que $U_{\varepsilon,n}$ est un ouvert de $\mathcal{C}$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}$ et $\delta > 0$.

(i) Montrer qu'il existe $\alpha \in (0, \varepsilon)$ tel que

$$x, y \in I, |x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{4}.$$

(ii) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N > 8\pi$, $\frac{4\pi}{N} < \alpha$ et $\frac{\delta N}{8\pi} > n$. Soit $x \in I$. Montrer qu'il existe $y \in [0,1]$ tel que

$$2\pi \leq |Nx - Ny| \leq 4\pi \quad \text{et} \quad |\sin(Nx) - \sin(Ny)| = 1.$$

(Indication : on pourra considérer les différents cas $\sin(Nx) \geq 0$ et $x \in [0, 1/2]$, $\sin(Nx) \geq 0$ et $x \in [1/2, 1]$ et $\sin(Nx) < 0$).

(iii) Considérons

$$g(x) = f(x) + \delta \sin(Nx), \qquad (x \in I).$$

Montrer que $g \in U_{\varepsilon,n}$.

(iv) Conclure que $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans $\mathcal{C}$.

c) En déduire que l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}$ nulle part dérivables est un résiduel dans $\mathcal{C}$.

Exercice 2.6 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ \varphi^{(n)}(x) = 0.$$

On veut montrer que φ est une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$.
On pose $F_n = \{x \in \mathbb{R} : \varphi^{(n)}(x) = 0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F_n}$ et $F = \mathbb{R} \setminus \Omega$.

a) Soit $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de points distincts de $\mathbb{R}$ tendant vers $x \in \mathbb{R}$ telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\varphi^{(n_0)}(x_p) = 0$ pour tout p. Montrer que $\varphi^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.

b) Montrer que sur toute composante connexe de Ω, φ est polynômiale.

c) Montrer que F n'a aucun point isolé.

d) En supposant $F \neq \emptyset$, obtenir une absurdité. Conclure.

Espaces topologiques.

Exercice 1 (Prébase d'une topologie) Soit X un ensemble et $\mathcal{S}$ une partie de X. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ l'ensemble des réunions (finies ou infinies) d'éléments de $\mathcal{B}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine contenant $\mathcal{S}$.
(Terminologie : on dit que $\mathcal{S}$ est une prébase, ou sous-base, pour $\mathcal{T}$ et que $\mathcal{B}$ est une base pour $\mathcal{T}$).

Exercice 2 Soient X un ensemble et $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une collection d'espaces topologiques. On se donne des applications $f_i \colon X \to Y_i$. On munit X de la topologie $\mathcal{T}$ la *moins fine* telle que toutes les applications f_i, $i \in I$ soient continues.

(a) Décrire la forme d'un ouvert pour cette topologie.

(b) Soit $W \xrightarrow{g} X$ une application entre un espace topologique W et X (muni de la topologie $\mathcal{T}$ ci-dessus). Montrer que g est continue ssi $f_i \circ g \colon W \to Y_i$ est continue pour tout $i \in I$.

(c) Soit $(x_n)_n$ une suite de X. Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers x pour $\mathcal{T}$ si et seulement si chaque suite $(f_i(x_n))_n$ converge vers $f_i(x)$ pour tout $i \in I$.

Définition 1 (topologie produit) *Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une collections d'espace topologiques. On note $X = \prod_{i\in I} X_i \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_i)_{i\in I} \colon x_i \in X_i\}$ l'espace produit. On note $p_i \colon X \to X_i$ la projection sur X_i définie par : $(x_i)_{i\in I} \stackrel{p_i}{\mapsto} x_i$. La topologie produit $\mathcal{T}$ sur X est la topologie la moins fine telle que toutes les projections sont continues.*

Exercice 3 Soit $X = \{(x_1, x_2, \ldots\}$ l'espaces des suites réelles. On peut écrire $X = \prod_{\mathbb{N}^*} \mathbb{R}$. On pose

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ U_1 \times U_2 \times \ldots \quad \text{tels que} \quad U_n \text{ est ouvert de } \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est la base d'une topologie $\widetilde{\mathcal{T}}$ sur X. Comparer $\widetilde{T}$ avec la topologie produit $\mathcal{T}$ sur X.
2. Soit $K = \{(x_1, x_2, \ldots) \colon x_n \in [-1, 1]\ \forall\, n\}$. K est-il compact dans $(X, \mathcal{T})$? Et dans $(X, \widetilde{\mathcal{T}})$?

Exercice 4 Soit $W \xrightarrow{g} X$ une application entre un espace topologique W et $X = \prod_{i\in I} X_i$. On suppose X muni de la topologie produit. Montrer que g est continue si et seulement si toutes les composantes $g_i = p_i \circ g \colon W \to X_i$ sont continues.

Exercice 5

1. On suppose que $X_1, \ldots X_n$ sont des espaces métriques. Montrer que la "distance infini" sur $X = \prod_{i=1}^n X_i$ (obtenue en prenant le maximum des distances des composantes) induit la topologie produit. (En particulier, le produit fini d'espaces topologiques métrisables est métrisable).
2. Soit $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques. Soit $X = \prod_{n=1}^\infty X_n$ l'espace topologique produit. On se propose de montrer que X est métrisable. Soit

$$D(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}, \qquad x = (x_1, x_2, \ldots), \quad y = (y_1, y_2, \ldots).$$

   (a) Montrer que D définit une distance sur X et que les projections $p_n \colon (X, D) \to (X_n, d_n)$ sont continues.

   (b) Soit $B(x, r)$ une boule de (X, D) et $y \in B(x, r)$. Construire un ouvert U_y de la topologie produit tel que $y \in U_y \subset B(x, r)$.

   (c) Conclure.

Exercice 6 Considérons $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions définies sur $[0,\pi]$ et à valeurs dans $[-1,1]$. On peut voir $\mathcal{F}$ comme l'espace produit

$$\mathcal{F} = \prod_{\alpha\in[0,\pi]} \mathcal{F}_\alpha,$$

avec $\mathcal{F}_\alpha = [-1,1]$, $\alpha \in [0,\pi]$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{F}$ muni de la topologie produit n'est pas métrisable.

(a) Rappeler la définition de la topologie produit et montrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{F}$ alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f pour la topologie produit si et seulement si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers f.

(b) Supposons que $\mathcal{F}$ soit métrisable et considérons la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(\alpha) = \sin(n\alpha), \qquad \alpha \in [0,\pi].$$

- (i) Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge dans $\mathcal{F}$ vers une fonction f.
- (ii) Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^\pi f(x)\sin(n_k x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

- (iii) Conclure en utilisant le théorème de Riemann-Lebesgue.

Définition 2 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une application $p : X \longrightarrow [0,+\infty[$ est une semi-norme sur X si*

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$.
2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ *et* $x \in X$.

Si $\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$ est une famille de semi-normes sur X, on appelle topologie engendrée par $\mathcal{P}$ la topologie la plus faible qui rend continue chaque application p_i, $i \in I$. On dit que cette famille est séparante si $\forall x \neq 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x) \neq 0$.

Exercice 7 Soit X l'espace des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et pour $x \in [0,1]$, on pose

$$p_x(f) := |f(x)|, \qquad f \in X.$$

(a) Montrer que $(p_x)_{x\in[0,1]}$ définit une famille séparante de semi-normes sur X et rappeler la définition de la topologie définie par cette famille de semi-normes.

(b) Montrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions de X, alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f pour la topologie définie par la famille de semi-normes si et seulement si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers f.

(c) Montrer que cette topologie n'est pas normable.

(d) On considère A l'ensemble des éléments de X qui sont nuls sauf sur un ensemble fini.

- (i) Montrer que $\overline{A} = X$.
- (ii) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de A qui converge vers f. Montrer que f est nulle sauf sur un ensemble fini ou dénombrable.
- (iii) Conclure qu'un point de l'adhérence d'une partie A de X n'est pas toujours la limite d'une suite d'éléments de A.

Exercice 8 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

(a) Montrer qu'il existe une suite de compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ de Ω vérifiant les trois propriété suivantes :

- (i) tout compact K de Ω est inclus dans un K_n ;
- (ii) pour tout $n \geq 1$, le compact K_n est inclus dans l'intérieur du compact K_{n+1} ;
- (iii) on a

$$\Omega = \bigcup_{n\geq 1} K_n.$$

(**Indication :** on pourra considérer

$$K_n := \{z \in \Omega : |z| \leq n \text{ et } d(z, {}^c\Omega) \geq 1/n\}.)$$

Une telle suite $(K_n)_{n\geq 1}$ est appelée suite exhaustive de compacts associée à Ω.

(b) Pour $h \in C(\Omega)$ et $n \geq 1$, on pose

$$p_n(h) := \sup_{z\in K_n} |h(z)|,$$

et on définit $d : C(\Omega) \times C(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}, \qquad (f,g) \in C(\Omega) \times C(\Omega).$$

Montrer que $(C(\Omega), d)$ est un espace métrique et que la convergence d'une suite dans cet espace métrique traduit la convergence uniforme sur tout compact.

(c) Montrer que $(C(\Omega), d)$ est un espace métrique complet.

(d) Montrer que la topologie de $C(\Omega)$ n'est pas normable.

1 Théorème de Dini.

Exercice 1 Le but de l'exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.1 (de Dini) *soit (E, d) un espace métrique compact. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions continues sur E, à valeurs réelles, qui converge simplement vers une fonction continue f, alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f.*

a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in E$, il existe un entier $n(x) \geq 1$ et un réel $\eta(x) > 0$ tel que

$$d(x, y) \leq \eta(x) \Longrightarrow 0 \leq g(y) - f_{n(x)}(y) \leq \varepsilon.$$

b) En utilisant la compacité de E, en déduire que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f.

Exercice 2 Soit $(p_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de polynômes tels que

$$p_0(t) = 0, \quad \text{et } p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t^2 - p_n^2(t)).$$

a) Montrer que
$$0 \leqslant p_n(t) \leqslant p_{n+1}(t) \leqslant |t|, \qquad t \in [-1, 1].$$

b) En déduire que la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $t \to |t|$.

Remarque 1.1 *On a ainsi construit explicitement une suite de polynômes qui converge uniformément vers $t \to |t|$ (voir Théorème de Stone-Weierstrass).*

2 Théorème de Stone–Weierstrass

Exercice 3 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_a^b t^n f(t)\, dt = 0, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Montrer que $f \equiv 0$.

Exercice 4 Soit (E, d) un espace métrique compact et soit a un point fixé de E. Soit A une sous-algèbre de $C(E, \mathbb{R})$ vérifiant :

(i) pour tout $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(ii) pour toute fonction $f \in A$, $f(a) = 0$.

Montrer que $\overline{A} = \{f \in C(E, \mathbb{R}) : f(a) = 0\}$.

Exercice 5 Soit $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\varphi_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \varphi_n(t)\, dt = 1$.

(iii) La suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers 0 sur tout compact ne contenant pas 0.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$(\varphi_n \star f)(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)\varphi_n(t)\,dt.$$

a) Montrer que la suite $(\varphi_n \star f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact.

b) Montrer que la suite $\Phi_n(t) = \dfrac{(1-t^2)^n}{c_n}$, $n \in \mathbb{N}$, vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) où c_n est une constante convenablement choisie.

c) On suppose que f est nulle en dehors de $[-1/2, 1/2[$. Montrer que $\Phi_n \star f_{|[-1/2,1/2[}$ est un polynôme. En déduire une démonstration du théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction réelle définie et continue sur un compact de $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exercice 6 (Théorème de Fejèr) On note $\mathbb{T}$ le cercle unité du plan complexe et on appelle polynôme trigonométrique une fonction définie sur $\mathbb{T}$ et du type

$$p(\zeta) = \sum_{k=-m}^{n} a_k \zeta^k, \qquad \text{où } m, n \in \mathbb{N}, \text{ et } a_k \in \mathbb{C},\ \zeta \in \mathbb{T}.$$

Montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{T}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques. Autrement dit, l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $C(\mathbb{T})$ (pour la topologie naturelle, i.e. celle de la convergence uniforme).

Exercice 7 (Théorème de prolongement de Tietze) Soient Y un espace métrique et X une partie compacte non vide de Y. On désigne par $C_b(Y)$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées de Y dans $\mathbb{C}$ muni de la norme définie par

$$\|f\| = \sup_{y\in Y} |f(y)|.$$

$C(X)$ est aussi muni de la norme uniforme, notée aussi $\|\cdot\|$. On considère l'application linéaire Φ de $C_b(Y)$ dans $C(X)$ définie par $\Phi(f) = f_{|X}$, $f \in C_b(Y)$ (restriction de f à X).

a) Démontrer que $C_b(Y)$ est un espace de Banach.

b) Démontrer que si $f \in C_b(Y)$, il existe un élément $\widetilde{f}$ de $C_b(Y)$ tel que $\Phi(\widetilde{f}) = \Phi(f)$ et $\|\widetilde{f}\| = \|\Phi(f)\|$.

c) Démontrer que l'image de Φ est dense dans $C(X)$.

d) Soit g un élément de $C(X)$, limite uniforme d'une suite $(\Phi(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) Démontrer que l'on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que pour tout n, $\|\Phi(f_{n+1}) - \Phi(f_n)\| \leqslant 2^{-n}$.

(ii) Démontrer que la série

$$\widetilde{f}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (\widetilde{f_{n+1} - f_n})$$

converge dans l'espace $C_b(Y)$ (où $\widetilde{\ }$ est défini ce-dessus). On note f sa somme.

(iii) Démontrer que $\Phi(f) = g$.

e) Déduire de ce qui précède que toute fonction $g \in C(X)$ admet un prolongement en une fonction $f \in C_b(Y)$ telle que $\|f\| = \|g\|$.

3 Théorème d'Ascoli

Exercice 8 Les ensembles de fonctions suivantes sont-ils relativement compacts dans $C([0,1])$?

(i) $x_n(t) = t^n$, $(n \in \mathbb{N})$.

(ii) $x_n(t) = \sin(nt)$, $(n \in \mathbb{N})$.

(iii) $x_n(t) = \sin(t+n)$, $(n \in \mathbb{N})$.

(iv) $x_\alpha(t) = \sin(\alpha t)$, $(\alpha \in [1,2])$.

Remarque 3.1 *Dans l'exercice suivant, nous allons donner deux applications du théorème d'Ascoli dans le cadre de l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Mais tout d'abord, rappelons (voir feuille d'exercice 2) que si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, il existe une suite de compacts $(K_n)_{n\geqslant 1}$ (dite suite exhaustive de compacts) telle que tout compact est inclus dans un K_n et on a aussi*

$$K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}, \quad \text{et} \quad U = \bigcup_{n\geqslant 1} K_n.$$

Pour $h \in C(U)$ et $n \geqslant 1$, on pose

$$p_n(h) = \sup_{z\in K_n} |h(z)|,$$

et on définit $d : C(U) \times C(U) \to \mathbb{R}_+$ par

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}, \qquad (f,g) \in C(U) \times C(U).$$

On montre alors que $(C(U), d)$ est un espace métrique complet et que la convergence d'une suite dans cet espace métrique traduit la convergence uniforme sur tout compact.

Exercice 9 Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. On note par $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U muni de la métrique induite par $(C(U), d)$.

a) Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est complet.

b) Pour K compact non vide inclus dans U, on note

$$\delta = \frac{1}{2} d(K, \mathbb{C} \setminus U) \text{ et } K_\delta = \{ z \in \mathbb{C} \mid d(z,K) \leq \delta \}.$$

(i) Vérifier que K_δ est un compact inclus dans U.

(ii) Montrer que pour tout K compact non vide inclus dans U et toute f holomorphe dans U, on a :

$$\sup\{|f'(z)| : z \in K\} \leq 1/\delta \sup\{|f| : z \in K_\delta\}.$$

(iii) Si A est une partie de $\mathcal{H}(U)$, on dit que A est uniformément bornée si, pour tout compact $K \subset U$, il existe une constante $M(K) \geqslant 0$ telle que

$$\sup_{f\in A} \sup_{z\in K} |f(z)| \leqslant M(K).$$

En utilisant le théorème d'Ascoli, démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1 *(de Montel) Une partie de $\mathcal{H}(U)$ est relativement compacte dans $\mathcal{H}(U)$ si et seulement si elle est uniformément bornée.*

d) En déduire le résultat suivant :

Théorème 3.2 *(de Vitali) Soit U un ouvert non vide et connexe de $\mathbb{C}$, et $A \subset U$ une partie de U ayant au moins un point d'accumulation. Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{H}(U)$ uniformément bornée. Si pour tout z de A la suite $(f_n(z))$ converge dans $\mathbb{C}$, alors la suite (f_n) converge dans $\mathcal{H}(U)$.*

Exercice 10 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $E = \mathcal{C}([a,b])$ et $K \in C([a,b] \times [a,b])$. Pour $f \in E$, on définit

$$Af(s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\, dt, \qquad (s \in [a,b]).$$

a) Montrer $A \in \mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que A est un opérateur compact (i.e. l'image par A de la boule unité de E est relativement compact dans E).

Exercice 11 Soit X un espace métrique compact et soit H une famille équicontinue d'éléments de $C(X)$.

a) Soit J l'ensemble des points x de X tels que l'ensemble $\{f(x) : f \in H\}$ est borné. Démontrer que J est ouvert et fermé.

b) On suppose que X est connexe. Démontrer que si J n'est pas vide, alors H est une partie relativement compact de $C(X)$.

Définition. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *séparable* s'il contient une partie A au plus dénombrable qui est dense dans X.

Exercice 1 (Préliminaires)

(a) Soit $(A_i)_{i\in I}$ un ensemble au plus dénombrable de parties d'un ensemble E. Montrer que si A_i est au plus dénombrable pour tout $i \in I$, alors la réunion $\bigcup_{i\in I} A_i$ est au plus dénombrable.

(b) Est-ce que ce résultat subsiste pour le produit cartésien ? On pourra considérer $E_n = \{0, 1\}$, $n \geq 0$ et
$$E = \prod_{n\geq 0} E_n = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Exercice 2 Soit I un ensemble fini ou dénombrable et pour tout $i \in I$, X_i un espace topologique, $X_i \neq \emptyset$. Considérons
$$X := \prod_{i\in I} X_i$$
muni de la topologie produit. Montrer que si pour chaque $i \in I$, X_i est séparable, alors X est séparable.

Exercice 3 Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que si X est compact, alors X est séparable.

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et notons par F le sous-espace vectoriel engendré par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supposons que F est dense dans E. Montrer alors que E est séparable.

Exercice 5 Soit X un espace métrique compact. Montrer que $C(X, \mathbb{R})$ est séparable.
(*Indication :* prendre une suite (x_n) dense dans X et considérer l'algèbre engendrée par les fonctions $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = d(x_n, x)$).

Exercice 6 Soit (X, d) un espace métrique. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, un ensemble I infini non dénombrable et $(x_i)_{i\in I} \subset X$ tels que
$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon, \qquad \forall i, j \in I, i \neq j.$$
Montrer que (X, d) n'est pas séparable.

Exercice 7

(a) Montrer que pour $1 \leq p < +\infty$, les espaces ℓ^p et c_0 sont séparables.

(b) En considérant les suites formées de 0 et de 1, montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si E est séparable et de dimension infinie, alors il existe une suite dense $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs linéairement indépendants de E.
(Rappelons qu'une famille infinie est dite linéairement indépendante si toute sous-famille finie est linéairement indépendante).

Exercice 9 Soit (X, d) un espace métrique.

(a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'espace (X, d) est séparable.

(ii) La topologie de X est à base dénombrable, c'est-à dire qu'il existe une suite d'ouverts $(U_n)_{n\geq 1}$ de X tel que tout ouvert U de X s'écrive comme la réunion d'ouverts U_n.

(b) On suppose maintenant que (X, d) est séparable. En déduire que toute partie de E, munie de la topologie induite, est séparable.

Nous allons voir dans l'exercice suivant que ce résultat n'est plus vrai dans un espace topologique quelconque.

Exercice 10 Soit $\mathcal{B}$ la famille des rectangles semi-ouverts du plan $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$[a, b) \times [c, d) = \{(x, y) : a \leq x < b, \, c \leq y < d\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'une topologie τ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que la topologie induite τ_D sur la droite

$$D = \{(x, y) : x + y = 0\}$$

est la topologie discrète.

(c) Montrer que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est séparable mais que (D, τ_D) n'est pas séparable.

1 Théorème de Hahn-Banach : forme analytique

Exercice 1 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace normé réel $(E, \|\cdot\|)$ et $g : F \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue. Un prolongement de Hahn-Banach de g est une application linéaire continue $f \colon E \to \mathbb{R}$ telle que $f|_F = g$ et $\|f\| = \|g\|$.

Montrer qu il n'y a pas, en général, unicité du prolongement. Discuter en particulier le cas $E = \mathbb{R}^2$, avec de différentes normes.

Exercice 2 Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Montrer que E^* est de dimension infinie.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. Comparer les formules

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{x \in E,\, \|x\|_E = 1} |\varphi(x)|$$

et

$$\|x\|_E = \max_{\varphi \in E^*,\, \|\varphi\|_{E^*} = 1} |\varphi(x)|.$$

Laquelle est une conséquence de Hahn-Banach ? Montrer qu'en général le sup n'est pas un max dans la première formule.
(*Indication :* on pourra chercher un exemple d'une application $\varphi \in (\ell^1)^*$ de la forme $\varphi(x) = \sum_k \alpha_k x_k$ où (α_k) est bien choisie).

Exercice 4 Soient E et F deux e.v.n. Montrer que

$$F \text{ est de Banach } \iff \mathcal{L}(E, F) \text{ est de Banach .}$$

Pour l'implication "$\Leftarrow$" on considérer une suite de Cauchy (y_n) dans F. Considérer ensuite les opérateurs linéaires $T_n \colon E \to F$ de la forme $T_n(x) = f(x) y_n$, où $f \in E^*$, $f \neq 0$.

Exercice 5 Soient E et F des espaces normés et soit $T : E \to F$ une application linéaire continue. On note $T^* \colon F^* \to E^*$ l'opérateur linéaire adjoint, défini par $\langle T^* v, x \rangle = \langle v, Tx \rangle$.

1. Démontrer que $\|T\| = \|T^*\|$.
2. Démontrer que $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans F si et seulement si T^* est injectif.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, M un sous-espace vectoriel fermé de E et soient $x_0 \in E \backslash M$. Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que

$$\varphi|_M = 0,\ \|\varphi\| = 1,\ \varphi(x_0) = d(x_0, M).$$

Exercice 7 Soit E un espace normé tel que E^* est séparable.

1. Montrer, en utilisant la séparabilité de $S^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| = 1\}$ qu'il existe une famille $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de S^* dense dans S^* et une famille $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ telles que $|x_n^*(x_n)| \geq \frac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que E est séparable.

Remarque : la réciproque est fausse, c'est-à-dire qu'un espace normé E peut-être séparable sans que son dual le soit (ℓ^1 est séparable mais son dual ℓ^∞ ne l'est pas).

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel normé, soit E^* son dual et soit E^{**} le dual de E^*, que l'on appelle aussi le bidual de E. Montrer que l'application $J : E \to E^{**}$ définie par

$$[J(x)](f) = f(x), \qquad f \in E^*$$

est une application linéaire isométrique, c.-à-d. $\|J(x)\| = \|x\|$.

Interpreter cette égalité dans le cas $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

Il est d'usage d'identifier E avec $J(E)$, sous-espace de E^{**}, et ainsi de considérer, via cette identification, X comme un sous-espace de E^{**}. Lorsque J est surjective, et donc $E = E^{**}$, on dit que E est un espace réflexif.

Montrer que si E *n'est pas* de Banach, alors J *n'est pas* surjective.

Exercice 9 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, A une partie de E, $f : A \to \mathbb{K}$ une application et $c \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $\tilde{f} \in E^*$ telle que

$$\tilde{f}|_A = f \quad \text{ et } \quad \|\tilde{f}\| \leq c$$

si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \cdots, x_n) \in A^n, \forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left|\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\right| \leq c \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\|.$$

2 Théorèmes de Hahn-Banach : forme géométrique, séparation de convexes disjoints

Dans cette partie tous les e.v.n. sont réels.

Définition. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, un hyperplan (affine) sur E est un ensemble de la forme $H = \{x \in E \colon \varphi(x) = \gamma\}$, où $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ est une application linéaire, $\varphi \neq 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

1. Montrer que tous les hyperplans de E sont de la forme $H = \mathrm{Ker}(\varphi) + \{x_0\}$, avec $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ linéaire, et réciproquement.
2. Soit $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ une application linéaire *non continue*. Démontrer que $\mathrm{Ker}\varphi$ est dense dans E.
3. Conclure qu'un hyperplan $\mathrm{Ker}\varphi + \{x_0\}$ est fermé si et seulement si $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$.

Rappelons les résultats du cours suivants :

Théorème 1 (Hahn–Banach). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et soient A et B deux convexes non vides de E. On suppose que $d(A, B) > 0$ (en particulier, A et B sont disjoints). Il existe alors un hyperplan affine fermé séparant A et B au sens large, i.e.

$$\exists\, \varphi \in E^* \backslash \{0\}, \quad \exists \gamma \in \mathbb{R}, \quad \text{t.q. } \forall\, x \in A, \ \forall\, y \in B, \ \varphi(x) \leq \gamma \leq \varphi(y).$$

De plus, dans ce cas A et B peuvent être séparés même au sens strict :

$$\exists\, \varphi \in E^*, \quad \exists \gamma \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \quad \text{t.q. } \forall\, x \in A, \ \forall\, y \in B, \ \varphi(x) \leq \gamma - \epsilon < \gamma + \epsilon \leq \varphi(y).$$

Voici une variante de ce théorème (voir [Brezis]), utile quand $d(A, B) = 0$:

Théorème 2 (Hahn–Banach). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et soient A et B deux convexes *disjoints* non vides de E. On suppose A *ouvert*. Il existe alors un hyperplan affine fermé séparant A et B au sens large.

Exercice 11

1. Montrer que E est de dimension infinie, il existe deux parties A et B de E convexes et denses, telles que $A \cap B = \emptyset$ et $E = A \cup B$. (*Indication :* il existe une application linéaire $f\colon E \to \mathbb{R}$ *non continue*...)
2. Peut-on séparer A et B avec un hyperplan fermé ? Comparer votre réponse avec les théorèmes de Hahn–Banach géométriques ci-dessus.

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel normé et soit E^* son dual. Pour $A \subset E$ on pose :

$$A^\perp = \{f \in E^* \mid f(x) = 0,\ x \in A\}.$$

Pour $B \subset E^*$ on pose :

$${}^\perp B = \{x \in E \mid f(x) = 0,\ f \in B\}.$$

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E alors son adhérence $\overline{F} = {}^\perp(F^\perp)$.

Exercice 13 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et soit A un ensemble convexe fermé non vide de E. Montrer que A est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant A. On rappelle qu'un demi-espace D est défini par la donnée de $\varphi \in E^*\backslash\{0\}$ et de $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $D = \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \gamma\}$ ou $D = \{x \in E \mid \varphi(x) \geq \gamma\}$.
(*Interpretation :* Tout convexe fermé (avec la topologie forte) est faiblement fermé.)

Exercice 14 (Jauge d'un convexe) Soit E un e.v.n. et $C \subset E$ un ouvert convexe, tel que $0 \in C$. On pose

$$\forall x \in E \quad p(x) = \inf\{\alpha > 0 \colon \alpha^{-1}x \in C\}.$$

1. Montrer que $\exists\, M > 0$ telle que $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$.
2. Montrer que $C = \{x \in E \colon p(x) < 1\}$.
3. Vérifier que $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ et $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $\lambda > 0$ et $x, y \in E$.

Exercice 15 (Hyperplan d'appui à un ouvert convexe)

1. Soit C un ouvert convexe non vide et $x_0 \in \partial C$. Montrer qu'il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$.
(*Indication :* On peut se ramener au cas $0 \in C$. Considérer ensuite l'application linéaire $g\colon \mathrm{Vect}\{x_0\} \to \mathbb{R}$, définie par $g(tx_0) = t$ et considérer un prolongement de Hahn–Banach.)
2. Comparer ce résultat avec les théorèmes de Hahn-Banach géométriques 1 et 2 ci-dessus.

Exercice 16 Soient A et B deux convexes disjoints non vides d'un e.v.n réel E. On suppose A ouvert.

1. Montrer que $C = A - B$ est un ouvert convexe et que $0 \notin C$.
2. Supposons maintenant $0 \in \partial C$. Montrer qu'il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) < f(y)$ pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$.
(*Indication :* utiliser l'exercice précédent.)
3. Supposons maintenant $0 \notin \partial C$. Démontrer que la conclusion de la question précédente reste vraie (utiliser le théorème de Hahn–Banach géométrique N. 1).
4. En déduire une (petite) amélioration du théorème de Hahn–Banach N. 2.

Exercice 17 (janvier 2004) Soit E un espace vectoriel normé et soit C un ensemble non vide convexe et compact de E. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, soit $f_i : E \to \mathbb{R}$ une application continue et convexe. On définit

$$G = \Big\{ y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in C \text{ pour lequel } f_i(x) \leq y_i \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, m\} \Big\}$$

et

$$S = \Big\{ x \in C \mid f_i(x) \leq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, m\} \Big\}\ .$$

On suppose $S = \emptyset$.

1. Montrer que G est convexe et exprimer en termes de G l'hypothèse $S = \emptyset$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ non tous nuls tels que pour tout $x \in C$:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq \varepsilon \ .$$

   Indication : on montrera tout d'abord que G est fermé.

1 Dualité. Espaces réflexifs.

Notation. Soient E et F deux e.v.n. On écrit $E \simeq F$ lorsqu'il existe une isométrie linéaire surjective $\psi \colon E \to F$. On dit aussi que E s'identifie à F.

On rappelle les résultats du cours suivants.

Théorème. Soient E et F deux e.v.n., $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ l'opérateur adjoint. On a $\|T\| = \|T^*\|$. De plus, si T est inversible alors T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T est une isométrie alors T^* est une isométrie. En particulier,

$$E \simeq F \quad \Longrightarrow \quad E^* \simeq F^*.$$

Théorème. Soit E un Banach. Alors E est reflexif si et seulement si E^* est reflexif.

Théorème. Soit E un e.v.n. reflexif et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors F est reflexif si et seulement si F est fermé.

Exercice 1 (Dualité des espaces ℓ^p) Soit $p \in]1, \infty[$ et q son exposant conjugué. On va montrer dans cet exercice que le dual de $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ s'identifie à $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$, c'est à dire $(\ell^p)^* \simeq \ell^q$.

1. Pour tout $f \in \ell^q$, on définit $L_f : \ell^p \to \mathbb{C}$ par la relation
$$L_f(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)\varphi(n) \qquad \forall \varphi \in \ell^p \ .$$
Montrer que L_f est une application linéaire continue, et montrer que $\|L_f\| = \|f\|_q$, où $\|L_f\|$ désigne la norme de L_f comme application de ℓ^p dans $\mathbb{C}$. On a ainsi obtenu que $L_f \in (\ell^p)^*$.
2. Montrer que l'application $L : \ell^q \to (\ell^p)^*$ est linéaire et injective. On a ainsi montré qu'il existe une inclusion naturelle $\ell^q \subset (\ell^p)^*$ qui préserve la norme.
3. Montrer que l'application L est surjective. Il s'agit donc de montrer que pour tout $F \in (\ell^p)^*$ il existe $f \in \ell^q$ tel que $L_f = F$. Pour ce faire on considérera pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'élément e_n de ℓ^p de la forme $e_n(m) = \delta_{n,m}$ pour $m \in \mathbb{N}$. On posera $f(n) := F(e_n)$ et on montrera alors que $f \in \ell^q$ et que $L_f = F$.

Exercice 2 Déduire de l'exercice précédent que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, pour $1 < p < \infty$, est reflexif.

Exercice 3 Soit A un sous-espace vectoriel *dense* dans un e.v.n. E. Démontrer que $A^* \simeq E^*$.

Exercice 4 Soit $1 < p_1 < p_2 < \infty$. Soit q_1 et q_2 les exposants conjugués de p_1 et p_2 respectivement.

Êtes-vous d'accord avec l'argument suivant ?

`On a` $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$ `et` ℓ^{p_1} `est dense dans` ℓ^{p_2}`. D'après l'exercice précédent,` $(\ell^{p_1})^* \simeq (\ell^{p_2})^*$`. D'autre part,` $(\ell^{p_1})^* \simeq \ell^{q_1}$ `et` $(\ell^{p_2})^* \simeq \ell^{q_2}$`. Donc` $\ell^{q_1} \simeq \ell^{q_2}$`.`

Exercice 5 Etablir les identifications

1. $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$,
2. $(c_0)^* \simeq \ell^1$,
3. $(c_{00})^* \simeq \ell^1$,

Noter que le prédual d'un espace de Banach n'est pas unique

Exercice 6

1. Démontrer que $(\ell^\infty)^*$ *n'est pas homéomorphe* à ℓ^1.
   (*Indication :* on pourra utiliser un argument de séparabilité). En déduire que ℓ^1 n'est pas reflexif, puis que ℓ^∞ n'est pas reflexif.
2. Donner une autre démonstration de la non reflexivité de ℓ^1 :
   (a) Soit $f \in (\ell^\infty)^*$ tel que $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ pour toute suite $x = (x_n)$ convergente. Justifier l'existence d'un tel f.
   (b) Montrer qu'*il n'y a pas* $\alpha \in \ell^1$ vérifiant $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k x_k$ pour tout $x \in \ell^\infty$.
   (c) En déduire que l'injection canonique $J\colon \ell^1 \to (\ell^1)^{**}$ n'est pas surjective.

Exercice 7

1. Démontrer que dans un e.v.n. reflexif $(E, \|\cdot\|)$, toute fonctionnelle $f \in E^*$ réalise la norme. Autrement dit : $\exists\, x_0 \in E$, $\|x_0\|_E = 1$ tel que $\|f\|_{E^*} = |f(x_0)|$ (et donc, dans la définition de la norme $\|f\|_{E^*}$, le sup est aussi un max).
   Retrouver par cette méthode que ℓ^1 n'est pas reflexif.
2. Déduire de l'exercice précédent que l'espace de Banach $C([0,1])$ n'est pas reflexif.
   (*Indication :* Considérer la fonctionnelle $\Phi = \int_0^{1/2} - \int_{1/2}^1$).
3. Montrer que $C^1([0,1])$, muni de sa norme naturelle $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, n'est pas reflexif.
   (*Indication :* on pourra commencer par démontrer que l'espace $E = \{f \in C^1([0,1])\colon f(0) = 1\}$ n'est pas reflexif avec la norme $\|f\|_E = \|f'\|_\infty$).

Remarque. La réciproque de la première question est vraie aussi : un théorème de James affirme qu'*un espace de Banach E est reflexif si et seulement si toute fonctionnelle $f \in E^*$ réalise la norme.*

Exercice 8 Démontrer que si E et F sont deux espaces vectoriels normés isomorphes (=linéairement homéomorphes), alors E est reflexif si et seulement si F est reflexif.

Définition. Soit C un convexe d'un e.v.n. On dit que $x \in C$ est un point extrémal de C s'il n'y a pas de segment de C contenant x dans son intérieur.

Exercice 9

1. Quels sont les points extrémaux de la boule fermée de c et de c_0 ? (Comme toujours, on munit ces espaces de la norme $\|\cdot\|_\infty$).
2. Démontrer que c_0 est isomorphe à c.
3. Démontrer que $(c_0, \|\cdot\|_\infty) \not\cong (c, \|\cdot\|_\infty)$ (autrement dit, il n'y a pas d'isomorphisme isométrique). On pourra utiliser les points extrémaux.

Remarque On peut déduire du Théorème de Krein–Milman (voir [Rudin, *Functional Analysis*]), du théorème de Banach–Alaoglu et de l'exercice précédent que c_0 n'a pas de prédual.

De la même manière, on montre que $L^1([0,1])$ n'a pas de prédual.

2 Topologies faibles.

Notation. La topologie faible sur un e.v.n. E est notée $\mathcal{T}(E, E^*)$. On note aussi E_{f} l'espace E lorsqu'il est muni de sa topologie faible. Sur E^*, on note $\mathcal{T}(E^*, E)$ la topologie faible-*.

On rappelle les résultats du cours suivants :
Théorème (Banach-Alaoglu). Soit E un e.v.n. et E^* son dual topologique. La boule fermée de E^*, $\overline{B} = \{x \in E^*\colon \|x\| \le 1\}$, est compacte pour la topologie faible-*.

Théorème. Soit E un espace de Banach. Alors E est reflexif si et seulement si la boule $\overline{B} = \{x \in E\colon \|x\| \le 1\}$ est compacte avec la topologie faible.

Corollaire. Soit F un e.v.n. et $E = F^*$. Les topologies faibles et faible-* sur E coïncident si et seulement si E est reflexif.

Exercice 10 Soient E et F deux e.v.n. Démontrer que $L \in \mathcal{L}(E, F) \;\Rightarrow\; L \in \mathcal{L}(E_{\mathrm{f}}, F_{\mathrm{f}})$.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel normé et $C \subset E$ un convexe. Montrer que l'adhérence de C pour la topologie faible coïncide avec l'adhérence de C pour la topologie forte. En particulier :
C est faiblement fermé si et seulement si C est fermé et
C est dense pour la topologie faible si et seulement si C est dense.

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel *de dimension finie*

a) Montrer que la topologie faible et usuelle coïncident sur E.
b) Montrer que les trois topologies sur E^* (forte, faible et faible*) coïncident.

En dimension infinie, nous allons voir ci-dessous qu'il existe *toujours* des ensembles fermés/ouverts pour la topologie forte qui ne sont pas fermés/ouverts pour la topologie faible.

Exercice 13 (les boules ne sont pas faiblement ouvertes) Soit E est un espace vectoriel normé *de dimension infinie*. Soit V un voisinage de 0 pour la topologie faible.

Démontrer qu'il existe $f_1, \dots, f_n \in E^*$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$V \supset f_1^{-1}(B_\epsilon) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(B_\epsilon)$$

où $B_\epsilon = B(0,\epsilon)$ désigne la boule de $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

En déduire que V contient une droite. Conclure que la boule $B_E = \{x \in E \colon \|x\| < 1\}$ n'est pas ouverte dans la topologie faible.

Exercice 14 (les sphères ne sont pas faiblement fermées) Considérons $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$, où E est un espace vectoriel normé *de dimension infinie*.

Soit $x_0 \in E$, $\|x_0\| < 1$. Considérons un voisinage V de x_0 pour la topologie faible.

i) Montrer qu'il existe une droite de E passant par x_0 contenue dans V.
ii) En déduire que S n'est pas fermée pour la topologie faible. Quelle est l'adhérence faible de S_E ?

Exercice 15 On rappelle que $c_0^* \simeq \ell^1$ et $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$.

Soit

$$\Sigma = \{f \in \ell^1 \colon \textstyle\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n} = 0\}, \qquad S = \{f \in \ell^1 \colon \sum_{n=1}^\infty f(n) = 0\}.$$

1. Etablir si Σ est fermé avec la topologie forte, avec la topologie $\mathcal{T}(\ell^1, \ell^\infty)$, et avec la topologie $\mathcal{T}(\ell^1, c_0)$.
2. Mêmes questions pour S.
   (*Indication* : soit $f \in \ell^1$. Construire $(f_k) \subset S$ telle que $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$).
3. Conclure qu'il existe un ensemble $C \subset E^*$, avec C convexe et fermé dans E^*, mais tel que C n'est pas fermé dans $\mathcal{T}(E^*, E)$. Le théorème de Mazur n'est donc plus vrai pour la topologie faible-*.

Exercice 16 Vrai ou faux ?

1. Soit E un e.v.n reflexif. Soit $C \subset E$, avec C convexe, fermé et borné. Alors C est compact pour la topologie faible.
2. Soit E un e.v.n. Soit $C \subset E^*$ avec C convexe, fermé et borné. Alors C est compact pour la topologie faible-*.

2.1 Applications. Un théorème de minimisation des fonctionnelles convexes

Motivation. Soit E un e.v.n. et $\phi \colon E \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{\|x\| \to \infty} \phi(x) = +\infty$. Il est clair que si $\dim(E) < \infty$ alors ϕ possède un minimum absolu (parce que les fermés bornés sont compacts). Que peut-on dire si $\dim(E) = \infty$?

Exercice 17 Montrer que si E est un e.v.n de dimension infinie et $\phi \colon E \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\phi \colon E_{\mathrm{f}} \to \mathbb{R}$ n'est pas continue, en général. Comparer avec l'exercice 10.
(*Indication :* Considérer l'application $\|\cdot\|$).

Définition. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\phi\colon X \to \mathbb{R}$. On dit que ϕ est semicontinue inférieurement (s.c.i.) si et seulement si $\forall\, x \in X \quad \phi(x) \leq \liminf_{y\to x} \phi(y)$.

Exercice 18 (semicontinuité)

1. Montrer que $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ est s.c.i. si et seulement si : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \{x \in X : \phi(x) > \lambda\}$ est ouvert.
2. Soit $(\phi_i)_{i\in I}$ une collection de fonctions s.c.i. Soit $\phi\colon x \mapsto \sup_{i\in I} \phi(x)$. On suppose que $\phi(x) < +\infty$. Montrer que ϕ est s.c.i. Peut-on remplacer ici "s.c.i." par "continue" ?
3. (Weierstrass) On suppose $(X, \mathcal{T})$ compact. Montrer que toute fonction $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ s.c.i. possède un minimum absolu dans X.

Exercice 19 Soit E un e.v.n. et $\phi\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue (ou seulement s.c.i.) Montrer que $\phi\colon E_{\mathrm{f}} \to \mathbb{R}$ est encore s.c.i.
Application : montrer que $x_n \rightharpoonup x \;\Rightarrow\; \|x\| \leq \liminf \|x_n\|$. Montrer qu'en général l'inégalité est stricte.

Exercice 20 Déduire des exercices précédents le théorème suivant :
Théorème *Soit E un e.v.n. reflexif. Soit $C \subset E$ une partie non vide convexe et fermée. Soit $\phi\colon C \to \mathbb{R}$ convexe et continue (ou seulement s.c.i.) telle que*

$$\lim_{x\in C,\, \|x\|\to\infty} \phi(x) = +\infty \qquad \textit{(cette hypothèse est inutile si } C \textit{ est bornée)}$$

Montrer que ϕ atteint son minimum absolu : $\exists\, x_0 \in C$ tel que $\phi(x_0) = \min_{x\in C} \phi(x)$.

Exercice 21 (Un résultat d'approximation) Soit E un e.v.n. reflexif et $C \subset E$ convexe et fermé. Montrer que si $x_0 \in E$ il existe dans C un élément de meilleure approximation, c'est à dire : $\exists\, c \in C$ tel que $\|x_0 - c\| = d(x_0, C)$.

Montrer qu'il n'y a pas unicité (on pourra considérer la boule fermée de $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
Remarque. Dans les espaces de Hilbert, il y a existence et unicité (voir le cours).

Exercice 22 (Un contrexemple au théorème) Dans l'espace ℓ^1, on considère l'hyperplan $H = \{f \in \ell^1 \colon \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \arctan(n) = 1\}$. Démontrer que H est un convexe fermé, mais qu'il n'y a pas dans H d'élément de meilleure approximation pour 0_{ℓ^1}.

En déduire un contrexemple au théorème ci-dessus, en l'absence de reflexivité.

1 Théorème de Banach–Steinhaus

Théorème de Banach-Steinhaus : Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Supposons que E soit un espace de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une collection de $\mathcal{L}(E,F)$. Si pour tout $x\in E$, on a $\sup_{i\in I}\|T_i(x)\|<\infty$, alors $\sup_{i\in I}\|T_i\|<\infty$.

Théorème de Banach-Steinhaus sur la convergence : Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{D}$ un ensemble dense de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall x\in E$, $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe.
b) $\forall x\in\mathcal{D}$, $\lim_{n\to+\infty} T_n(x)$ existe et $\sup_{n\geq 1}\|T_n\|<\infty$.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, l'application $T : E\to F$ définie par $T(x)=\lim_{n\to\infty}T_n(x)$ est linéaire et continue avec $\|T\|\leq\liminf_{n\to\infty}\|T_n\|$.

Exercice 1 (les suites faiblement convergentes sont bornées) Soit E un espace de Banach et E^* son dual. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de E, et $(\Lambda_n)_n$ une suite de E^*.

a) Montrer que si $\Lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \Lambda$ alors $(\|\Lambda_n\|)_n$ est bornée et $\|\Lambda\|\leq\liminf_{n\to\infty}\|\Lambda_n\|$.
b) Montrer que si $x_n\rightharpoonup x$ alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée et $\|x\|\leq\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$.

Exercice 2 Soit E un espace de Banach et E^* son dual. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de E, et $(\Lambda_n)_n$ une suite de E^*.

a) Montrer que si $\Lambda_n\to\Lambda$ pour la topologie forte et si $x_n\rightharpoonup x$ alors $\langle\Lambda_n,x_n\rangle\rightharpoonup\langle\Lambda,x\rangle$.
b) Montrer que si $\Lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \Lambda$ et si $x_n\to x$ fortement dans E, alors $\langle\Lambda_n,x_n\rangle\to\langle\Lambda,x\rangle$.
c) Construire un exemple d'une suite $x_n\rightharpoonup x$ et d'une suite $\Lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \Lambda$ telles que $\langle\Lambda_n,x_n\rangle\not\to\langle\Lambda,x\rangle$.

Exercice 3 Soit $1<p\leq\infty$. Soit $(f_k)\subset\ell^p$.

1. Montrer que, si $1<p<\infty$, $f_k\rightharpoonup f$ si et seulement si (f_k) est bornée dans $(\ell^p,\|\cdot\|_p)$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$ on a $f_k(n)\to f(n)$.
2. Montrer que si $p=+\infty$, $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ (dans la topologie $\mathcal{T}(\ell^\infty,\ell^1)$) si et seulement si (f_k) est bornée dans $(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$ on a $f_k(n)\to f(n)$.

Remarque. Pour l'espace ℓ^1, on peut démontrer le résultat inattendu suivant : $f_k\rightharpoonup f \iff f_k\to f$ (propriété de Schur). En particulier, (i) la sphère $\{x\in\ell^1 \colon \|x\|_1=1\}$ est *séquentiellement fermée* avec la topologie faible de ℓ^1 (mais non-fermée avec cette même topologie !). (ii) l'application $x\mapsto\|x\|_1$ est *séquentiellement continue* (mais non continue !) avec la topologie faible de ℓ^1,

Exercice 4 Soit E_1 un espace de Banach et soient E_2 et F deux espaces vectoriels normés. Soit $B : E_1\times E_2\to F$ une application bilinéaire dont les applications partielles sont continues, c.-à-d. pour tout $x\in E_1$, l'application de E_2 dans F qui à y associe $B(x,y)$ est continue et pour tout $y\in E_2$, l'application de E_1 dans F qui à x associe $B(x,y)$ est continue.
Montrer que B est continue sur $E_1\times E_2$.

Exercice 5 (La série de Fourier d'une fonction continue peut diverger) On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, qui sont 2π-périodiques et continues dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty=\sup_{-\pi\leq t\leq\pi}|f(t)|$. Pour tout $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$, on note

$$\forall p\in\mathbb{Z},\ c_p(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ipt}dt,$$

le p-ième coefficient de Fourier de f. Pour tout $n \in N^*$, on considère l'application $T_n\colon \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}$ telle que

$$T_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f).$$

1. Supposons l'existence d'une suite $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de fonctions continues, 2π-périodiques, telles que $\|g_n\|_\infty \leq 1$ et $|T_n(g_n)| \to \infty$. Déduire du théorème de Banach–Steinhaus qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier $\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(f)e^{ipt}$ diverge en $t = 0$.
2. On se propose de construire la suite (g_n).
   (a) Soit E l'espace des fonctions 2π-périodiques, continues par morceaux, muni de la norme $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$. Montrer que $T_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.
   (b) Soit $D_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} e^{ipt}$. Montrer, en utilisant une série géométrique, que $D_n(t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$. Conclure que $\|D_n\|_1 \to \infty$ (ne pas calculer l'intégrale, mais chercher une minoration).
   (c) Soit $h_n(t) = \mathrm{sign}(D_n(t))$. Démontrer que $T_n(h_n) = \|D_n\|_1$.
   (d) Construire une suite (g_n) de fonctions continues dans $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques vérifiant $\|g_n\|_\infty = 1$ et $\|h_n - g_n\| \leq \frac{1}{n}$. Conclure que $|T_n(g_n)| \to \infty$.

2 Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé

Théorème de l'application ouverte : Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue et surjective. Alors :

a) Il existe $C > 0$ tel que $\forall y \in Y$, $\exists x : T(x) = y$ avec $\|x\| \leq C\|y\|$.
b) Si $\mathcal{V}$ est un ouvert de X, $T(\mathcal{V})$ est un ouvert de Y.

Exercice 6 Démontrer le théorème de Banach qui affirme que : *si E et F sont deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*

Soit E l'espace des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Construire une application linéaire $T\colon E \to F$ continue et bijective, avec inverse $T^{-1}\colon F \to E$ discontinue.

Exercice 7 (Rigidité de la norme)

1. Montrer que, dans un e.v.n. de dimension infinie, on peut toujours construire une nouvelle norme strictement plus forte (autrement dit, la topologie induite par la nouvelle norme est strictement plus fine). (*Indication :* définir une nouvelle norme en considérant une application linéaire discontinue).
2. En appliquant le théorème de l'application ouverte à l'identité, démontrer le fait suivant : *On ne peut pas mettre sur un e.v. deux normes de Banach dont l'une est strictement plus forte que l'autre.*

Exercice 8 Soient E et F deux espaces de Banach et $T\colon E \to F$ une application linéaire.

1. On suppose que
$$\big(x_n \to x \ \text{ et } \ Tx_n \to y\big) \quad \Rightarrow \quad y = Tx. \tag{$*$}$$
Montrer que $\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ définit une nouvelle norme de Banach sur E.
2. En déduire que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ si et seulement si T vérifie $(*)$.
3. Donner une interpretation topologique de la condition $(*)$.

Théorème du graphe fermé : Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Si $G(T) := \{(x, T(x) : x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$, alors T est continue.

Exercice 9 Soit $T\colon C^1([0,1]) \to C([0,1])$ l'opérateur de dérivation, $T(f) = f'$. Montrer que si $C^1([0,1])$ et $C([0,1])$ sont munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors le graphe $G(T)$ est fermé, mais T n'est pas continu.

Exercice 10 Pour $x = (x_n) \in \ell^\infty$ et $(a_n) \subset \mathbb{C}$, on pose $\|x\| = \sum_1^\infty |a_n x_n|$.

1. Donner une c.n.s. sur la suite (a_n) pour que $\|\cdot\|\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ définisse une norme.

2. Démontrer que $\| \cdot \|$ n'est jamais équivalente à $\| \cdot \|_\infty$ dans ℓ^∞.
3. Démontrer que $\| \cdot \|$ n'est jamais une norme de Banach sur ℓ^∞.

Exercice 11 (Rigidité de la topologie) Soit X un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. On suppose que $(X, \mathcal{T}_1)$ est séparé et que $(X, \mathcal{T}_2)$ est compact. Montrer que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.
(En particulier : *Si X est un espace topologique compact et séparé, lorsqu'on rajoute des ouverts on perd la compacité, lorsqu'on en enlève on perd la propriété de séparation*).

Exercice 12 Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On suppose que, pour toute suite $(x_n)_n$ de E convergeant vers 0 et pour toute forme linéaire continue $\varphi^* \in F^*$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(Tx_n) = 0.$$

Montrer que T est continue (on pourra utiliser le théorème du graphe fermé).

Exercice 13 Soit E un espace de Banach, A et B deux sous-espaces fermés de E. Supposons que $E = A + B$. Montrer qu'il existe une constante $\gamma < +\infty$ telle que, pour tout $x \in E$, il existe $(a, b) \in A \times B$ avec

$$x = a + b \qquad \text{et} \qquad \|a\| + \|b\| \leq \gamma \|x\|.$$

Exercice 14 Soit M un sous-espace fermé d'un espace vectoriel normé E. On dit que M admet un *supplémentaire topologique* s'il existe un sous-espace fermé N de X tel que

$$E = M + N \qquad \text{et} \qquad M \cap N = \{0\}.$$

On utilise dans ce cas la notation $E = M \oplus N$.

1. Soit P une projection sur E, c'est à dire une application linéaire $P \colon E \to E$ telle que $P \circ P = P$. On suppose que P est continue. Montrer que alors

$$E = \mathrm{Im}(P) \oplus \ker(P).$$

2. Réciproquement si E est un espace de Banach et si $E = A \oplus B$ (avec A et B deux sous-espaces fermés de E), alors la projection d'image A et de noyau B est continue.
3. En déduire qu'un sous-espace fermé d'un espace de Banach E admet un supplémentaire topologique si et seulement si il est l'image d'une projection continue sur E.

Exercice 15 Soit E un e.v.n. et M un sous-espace fermé de E
Montrer que M admet un supplémentaire topologique dans E, dans les deux cas suivant :

$$\text{(i)} \quad \dim M < +\infty \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \dim\,(E/M) < +\infty.$$

Indication : pour (i) si $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base de M, on pourra considérer les applications coordonnées $x \longmapsto \alpha_i(x)$, où

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) e_i.$$

Remarque. Un théorème du cours affirme que dans un espace de Hilbert tout sous-espace fermé possède un supplémentaire topologique. On peut démontrer que ce n'est pas le cas en général (même dans les espaces reflexifs).

1 Projections sur une partie fermée convexe

Théorème (projection sur un convexe fermé). Soit H un espace de Hilbert et C une partie non vide, convexe et fermé de H. Pour tout $x \in H$ il existe un unique point de C, noté $P_C(x)$, tel que $\|x - P_C(x)\| = \mathrm{dist}(x, C)$.

Théorème (projection sur un sous-espace fermé). Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert. Alors la projection P_M sur M, définie comme ci-dessus, est linéaire, continue de norme égale à 1. De plus, pour tout $x \in H$, $P_M(x)$ est l'unique élément de M tel que $\forall\, y \in M,\ \langle x - P_M(x), y\rangle = 0$. De plus, $\mathrm{Id} - P_M$ est la projection sur $M^\perp = \{x \in H\colon \langle x, y\rangle = 0\ , \forall y \in M\}$.

Exercice 1 Soit $E = \ell^2$ et $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $a_n = (1 + \frac{1}{n})e_n$ où e_n est l'élément de ℓ^2 dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la nième qui vaut 1.

a) Montrer que 0 n'a pas de projection sur A.

b) Vérifier que A est fermé.

Exercice 2 Considérons $X = C([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \int_0^1 |f(t)|\, dt, \qquad f \in X,$$

et $F := \{f \in X : f(0) = 0\}$. On note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1.

a) Vérifier que F est une partie convexe, fermée de X.

b) Calculer $\mathrm{dist}(\mathbf{1}, F)$. Est-ce que $\mathbf{1}$ possède une projection sur F ?.

Exercice 3 Soient H un espace de Hilbert et A une partie convexe, fermée de H. Montrer que la projection a d'un point x sur A est caractérisée par l'inégalité suivante :

$$\Re\mathrm{e}\langle \mathrm{x} - \mathrm{a}, \mathrm{y} - \mathrm{a}\rangle \leqslant 0, \qquad \forall \mathrm{y} \in \mathrm{A}.$$

Montrer que pour tous $(x, y) \in H \times H$ ayant pour projection sur A les points a et b respectivement, on a

$$\|a - b\| \leqslant \|x - y\|.$$

Nous allons à présent calculer explicitement l'expression de certaines projections d'un espace de Hilbert sur un convexe fermé non vide.

Exercice 4 Soit H un espace de Hilbert.

a) Soit $A = B(0, 1]$, la boule unité fermée de H. Calculer $P_A(x)$ pour tout $x \in H$.

b) Soit $\{a_1, \cdots, a_n\}$ une famille orthonormale et soit A le sous-espace vectoriel de H engendré par $\{a_1, \cdots, a_n\}$. Calculer $P_A(x)$ pour tout $x \in H$.

Exercice 5 Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de convexes, fermés d'un espace de Hilbert H, $F_1 \neq H$. On suppose que $F = \cap_{n\geqslant 1} F_n \neq \emptyset$ et soit $x \notin F_1$. On considère enfin x_n la projection de x sur F_n, $n \geqslant 1$.

a) Soient C_1 et C_2 deux convexes fermés non vides tels que $C_1 \subset C_2$. Montrer, à l'aide de l'identité du parallélogramme, que pour tout $x \in H$, on a

$$\|P_{C_1}(x) - P_{C_2}(x)\|^2 \leq 2(d(x, C_1)^2 - d(x, C_2)^2).$$

b) Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy.

c) En déduire que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers x_0, la projection de x sur F.

Exercice 6 Montrer que si A et B sont deux sous-espaces vectoriels fermés et orthogonaux d'un espace de Hilbert H, alors $A+B$ est fermé.

Exercice 7 Soient H un espace de Hilbert et $p \in \mathcal{L}(H)$.

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) il existe un sous-espace vectoriel fermé F de H tel que $p = p_F$ (projecteur orthogonal de H sur F) ;
   (ii) $p^2 = p$ et $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$, $\forall (x,y) \in H^2$ (i.e. $p^* = p$).

b) Montrer que ces assertions sont encore équivalentes aux suivantes :
   (iii) $p^2 = p$ et $\|p\| = 1$;
   (iv) $p^2 = p$ et $\langle p(x), (Id - p)(x)\rangle = 0$, $\forall x \in H$.

Exercice 8 Soient H un espace de Hilbert, E et F deux sous-espaces vectoriels fermés de H, $p = p_E$, $q = p_F$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall x \in H$, $\langle p(x), x\rangle \leqslant \langle q(x), x\rangle$;
b) $\forall x \in H$, $\|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|$;
c) $E \subset F$;
d) $q \circ p = p$;
e) $p \circ q = p$.

2 Convergence faible dans un espace de Hilbert

Exercice 9 Soit $(f_n) \subset H$ et $f \in H$, où H est un espace de Hilbert. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f_n \to f$
2. $f_n \rightharpoonup f$ et $\|f_n\| \to \|f\|$.
3. $\lim_{n\to\infty} \langle f_n, g\rangle = \langle f, g\rangle$ uniformément pour tout g avec $\|g\| = 1$.

Exercice 10 Soient H un espace de Hilbert séparable et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H. Le but de l'exercice est de montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente.

On considère $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.

a) Montrer, par récurrence, qu'il existe une suite d'applications strictement croissante $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que les suites
$$\left(\langle x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}, e_m\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad 0 \leqslant m \leqslant k,$$
soient convergentes.

b) Posons alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi(n) := (\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n)$. Vérifier que Φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

c) Montrer que la suite $(x_{\Phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente.

d) Supposons à présent que H est un Hilbert non séparable. En considérant F le sous-espace vectoriel fermé de H contenant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente.

Exercice 11 Soit $u_n \rightharpoonup 0$ dans un espace de Hilbert H.

1. Montrer que l'on peut extraire de (u_n) une suite (v_n) telle que
$$|\langle v_1, v_k\rangle| \le k^{-1}\,,\ \ldots\ ,\ |\langle v_{k-1}, v_k\rangle| \le k^{-1}$$
pour tout $k = 2, 3, \ldots$.

2. En exprimant $\|v_1 + \cdots + v_n\|^2$ à l'aide des produits scalaires $\langle v_j, v_k\rangle$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|v_1 + \cdots + v_n\| \leq C\sqrt{n}$.
3. En déduire le résultat suivant (Banach–Sacks) : *Si* $u_n \rightharpoonup u$ *alors on peut extraire de* (u_n) *une suite* (v_n) *telle que* $\frac{1}{n}(v_1 + \cdots + v_n) \to u$.
4. Montrer que si E est un espace vectoriel normé et si $(x_n)_n$ est une suite de E qui converge faiblement vers x alors il existe une suite $(y_n)_n$ formée par des combinaisons linéaires convexes de $(x_n)_n$ telle que $(y_n)_n$ converge fortement vers x.

Exercice 12 Soit S un ensemble d'un espace de Hilbert H. Montrer que S est borné si et seulement si

$$\forall\, h \in H \quad \exists\, C_h > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, g \in S \quad |\langle h, g\rangle| \leq C_h.$$

3 Applications linéaires continues sur un Hilbert

Exercice 13

a) Soient G et H deux espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(H, G)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) u est inversible à gauche ;
   (ii) $\exists c > 0$, $\forall x \in H$, $\|u(x)\| \geqslant c\|x\|$;
   (iii) $\mathrm{Im}u$ est fermée dans G et $u : H \to \mathrm{Im}u$ est inversible.

b) En déduire que, si H est un espace de Hilbert et si $u \in \mathcal{L}(H)$ est telle qu'il existe $c > 0$ tel que $|\langle u(x), x\rangle| \geqslant c\|x\|^2$, $\forall x \in H$, alors u est inversible.

Exercice 14 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, avec produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et norme notée $\|\cdot\|$. Soit $\mathcal{G}$ un sous-espace dense dans $\mathcal{H}$, et soit T une application linéaire continue T de $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}$.

1) Vérifier l'identité de polarisation suivante :

$$4\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), (x+y)\rangle - \langle T(x-y), (x-y)\rangle - i\langle T(ix+y), (ix+y)\rangle + i\langle T(ix-y), (ix-y)\rangle\ .$$

2) Montrer que

$$\|T\| = \sup_{x,y\in\mathcal{G}, \|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|\ .$$

3) L'opérateur T est dit *auto-adjoint* si pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ on a $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$. Montrer que pour les opérateurs auto-adjoints, on a

$$\|T\| = \sup_{x\in\mathcal{G}, \|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|\ .$$

4) L'opérateur T est dit positif si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. Dans ce cas on écrit $T \geq 0$, et $T \geq S$ si $T - S \geq 0$, pour S une autre application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Montrer que tout opérateur positif est auto-adjoint.

5) Si T est positif, montrer que T^n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6) Vérifier que tout projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ est un opérateur positif.

Exercice 15 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, tel que $\langle Tx, x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$. Peut-on conclure que $T = 0$? (Distinguer le cas d'un espace de Hilbert réel ou complexe).

Exercice 16 (Opérateurs d'Hilbert-Schmidt) Soit H un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(H)$. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base orthonormée de H. On dit que T est un opérateur d'Hilbert-Schimdt lorsque

$$\|T\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\Big)^{1/2} < \infty.$$

1. Soit $T^* \in \mathcal{L}(H)$ l'adjoint (hilbertien) de T, défini par la relation $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pour tout $x, y \in H$. Montrer que l'on a $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$. Montrer que $\|T\|_2$ est indépendante du choix de la base orthonormée de H chosie.
2. Soit P_F la projection orthogonale sur le sous-espace fermé F. Calculer $\|P_F\|_2$.
3. Montrer que pour $S, T \in \mathcal{L}(H)$, on a
$$\|S\| \leq \|S\|_2, \qquad \|ST\|_2 \leq \|S\|\ \|T\|_2, \qquad \|TS\|_2 \leq \|S\|\ \|T\|_2.$$
Conclure que l'ensemble des opérateurs d'Hilbert–Schmidt est un idéal dans l'ensemble des opérateurs linéaires bornés.
4. (*Un exemple*) Soit $H = \ell^2$, $h\colon \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle que $\|h\|^2_{\ell^2(\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n,m=1}^{\infty} |h(n,m)|^2 < \infty$. Pour $f \in \ell^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $K(f)(n) = \sum_{m=1}^{\infty} h(n,m)f(m)$.
   (a) Montrer que $K \in \mathcal{L}(H)$ et $\|K\| \leq \|h\|_{\ell^2(\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*)}$.
   (b) Calculer $\|K\|_2$.

4 Bases hilbertiennes

Exercice 17 Calculer
$$M := \inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2\, dx.$$

Exercice 18 (Base de Haar dans $L^2([0,1])$). Soit $\psi = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}$. Pour $j \in \mathbb{N}$ et $k = 0, \ldots, 2^j - 1$, on considère l'intervalle dyadique $\Delta_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ et on pose $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$. On pose ensuite $e_n = \psi_{j,k}$, où $n = 2^j + k$ (avec $j \in \mathbb{N}$ et $k = 0, \ldots, 2^j - 1$) et $e_0 = \mathbf{1}_{[0,1]}$.

1. Démontrer que le système $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonal dans $L^2([0,1])$
2. Démontrer que $\mathrm{Vect}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions à escalier, constantes sur les intervalles dyadiques $\Delta_{j,k}$.
3. Conclure que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée pour $L^2([0,1])$.

Exercice 19 Soit $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-1,1]$.

1. Montrer que $P_n \in L^2([-1,1])$ est orthogonal à tout polynôme de degré $\leq n-1$.
2. Montrer qu'il existe des constantes c_n, $n \in \mathbb{N}$, telles que la base orthonormale obtenue en appliquant le procédé de Graham–Schmidt au système $\{1, x, x^2, \ldots\}$ est $\{c_n P_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$.
(*Indication :* on pourra admettre que $\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\, dx = 2^{2n}(n!)^2 \cdot \frac{2}{2n+1}$).
3. Si $f \in L^2([-1,1])$, calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\, dx.$$

1 Espaces L^p

Exercice 1 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. Soit $1 \leq p < q \leq \infty$. Démontrer que les affirmations suivantes sont équivalentes

1. $\mu(X) < \infty$.
2. $L^q(X) \subset L^p(X)$.
3. $L^q(X) \subset L^p(X)$ et l'inclusion est continue.

Exercice 2 (espaces l^p à poids) Soit $w = (w_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs (on appellera w un poids). Soit $1 \leq p \leq \infty$ et soit q son exposant conjugué, c'est-à-dire, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ avec la convention $q = 1$ si $p = \infty$ et $q = \infty$ si $p = 1$. On définit $\ell^\infty(w)$ comme étant l'ensemble des suites bornées $x := (x_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes et pour p fini on définit $\ell^p(w)$ comme étant l'ensemble des suites telles que $\sum_{n\geq 1} |x_n|^p w_n$ est fini. On définit $N_\infty(x)$ par $N_\infty(x) = \sup_{n\geq 1} |x_n|$ et $N_p(x) = \left(\sum_{n\geq 1} |x_n|^p w_n\right)^{1/p}$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

1. Montrer que, pour $1 \leq p \leq \infty$, $\ell^p(w)$ muni des opérations usuelles sur les suites est un espace vectoriel.
2. Pour $p \in [1, \infty[$, montrer que N_p est une norme sur $\ell^p(w)$.
3. Montrer que si $p \in [1, +\infty]$ et $w_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, $(\ell^p(w), N_p)$ est un espace de Banach.
4. Montrer que si $p \in [1, \infty]$, pour $x \in \ell^p(w)$ et $y \in \ell^q(w)$, on a
$$xy \in \ell^1(w) \text{ et } N_1(xy) \leq N_p(x) N_q(y).$$
5. Supposons $p \leq q$.
   (a) Montrer que si $\sum_{n\geq 1} w_n < \infty$ alors $\ell^q(w) \subset \ell^p(w)$ en comparant $N_p(x)$ et $N_q(x)$.
   (b) Montrer que s'il existe $\delta > 0$ tel que $w_n \geq \delta$ alors $\ell^p(w) \subset \ell^q(w)$.

Exercice 3 (Espaces de Lorentz) Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction Lebesgue mesurable. On considère la fonction $F\colon [0, \infty) \to [0, \infty]$, définie par
$$F(t) = m\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\right),$$
où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Soit $1 \leq p < \infty$.

1. Montrer que $\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} F(t)\, dt$.
2. On note $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions mesurables $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (quotienté par la relation d'équivalence p.p.) telles que
$$\|f\|_{p,\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t>0} t\, F(t)^{1/p} < \infty.$$
Montrer que $L^p \subset L^{p,\infty}$.
3. Observer que l'inclusion est stricte (considérer la fonction $x \mapsto |x|^{-n/p}$).
4. Démontrer que $\|\cdot\|_{p,\infty}$ est une *quasi-norme*, autrement dit, elle vérifie les propriétés de nullité, d'homogénéité, et la "quasi-inégalité triangulaire" : $\exists C > 1 : \|f + g\| \leq C(\|f\| + \|g\|)$.
(*Indication :* $|f(x) + g(x)| > t \Rightarrow |f(x)| > \frac{t}{2}$ ou $|g(x)| > \frac{t}{2}$).

Définition. Un *espace vectoriel topologique* est un couple $(V, \mathcal{T})$, où V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathcal{T}$ est une topologie séparée sur V, telle que la somme $V \times V \to V$ et le produit par un scalaire $\mathbb{K} \times V \to V$ sont deux applications continues.

Exemples : (i) tout e.v.n est un espace vectoriel topologique avec la topologie induite par la norme. (ii) L'espace des fonctions continues sur un ouvert $C(\Omega)$ est un espace vectoriel topologique (non normable) avec la topologie induite par la distance d (voir la section **??**). (iii) Tout e.v.n. muni de sa topologie faible. (iv) Les espace L^p avec $0 < p < 1$ sont des espaces vectoriels topologiques (mais la topologie n'est pas issue d'une norme).

Exercice 4 (Les espaces $L^p([0,1])$, $0 < p < 1$). Pour $0 < p < 1$ et $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ Lebesgue mesurable, on note $\|f\|_p^p = \int_0^1 |f(t)|^p \, dt$.

1. Démontrer que $L^p([0,1])$ est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_p$ est une quasi-norme.
2. Montrer que $(f,g) \mapsto \|f - g\|_p^p$ définit une distance sur $L^p([0,1])$ et que cette distance donne à $L^p([0,1])$ la structure d'espace vectoriel topologique.
3. Démontrer qu'avec cette distance $L^p([0,1])$ est complet.
4. Soit $f \in L^p([0,1])$ et $r > 0$. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des fonctions $g_1, \dots, g_n \in L^p([0,1])$ telles que
$$f = \frac{1}{n}(g_1 + \cdots + g_n), \qquad \text{et} \qquad \forall k, \ \|g_k\|_p^p < r.$$
(*Indication :* poser $g_k = nf(x)\mathbf{1}_{I_k}$ où I_k est un intervalle de $[0,1]$ bien choisi).
5. En déduire de la question précédente que tout convexe C, avec $C \neq L^p([0,1])$, est d'intérieur vide.
6. On définit comme d'habitude $(L^p)^*$ comme l'espace de toutes les applications $f\colon L^p([0,1]) \to \mathbb{C}$ linéaires et continues. Déduire de la question précédente que $(L^p)^* = \{0\}$.

Exercice 5 Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction Lebesgue mesurable. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on pose $\tau_h f = f(\cdot - h)$. Soit $1 \le p < \infty$. Démontrer que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.

2 Convolution et approximations de l'identité

Définition. Une approximation de l'identité est une famille $(\phi_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ telle que $\phi_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi_\epsilon \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon = 1$, et $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \ge \delta} \phi_\epsilon = 0$ pour tout $\delta > 0$.

Exemple. Si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi \ge 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$ alors $\phi_\epsilon = \epsilon^{-n}\phi(\cdot/\epsilon)$ est une approximation de l'identité.

Exercice 6 (Théorème d'approximation) Soit (ϕ_ϵ) une approximation de l'identité.

1. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\phi_\epsilon * f \xrightarrow{L^1} f$ pour $\epsilon \to 0$. (On pourra utiliser l'exercice précédent).
2. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\phi_\epsilon * f$ est continue et que $\phi_\epsilon * f \to f$ uniformément dans $\mathbb{R}^n$ pour $\epsilon \to 0$.
3. Soit $1 < p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\phi_\epsilon * f \xrightarrow{L^p} f$ pour $\epsilon \to 0$.

Exercice 7 Soit f une fonction localement intégrable dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $f = 0$ p.p. (ii) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, et $\forall\, r > 0$, $\int_{B(x,r)} f = 0$ (iii) $\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi = 0$ pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 8 (L'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$) Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur s'écrit
$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u|_{t=0} = f, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$
Ici $f = f(x)$, où $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est une fonction donnée ($1 \le p < \infty$) et l'inconnue $u = u(x,t)$ exprime la température au point x et à l'instant t.

1. Soit, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, $K_t(x) = \frac{e^{-|x|^2/(4t)}}{(4\pi t)^{n/2}}$. Vérifier que $(x,t) \mapsto K_t(x,t)$ est solution de l'équation de la chaleur dans $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ (cette solution est dite "solution fondamentale").
2. Justifier les identités dans $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$:
$$\partial_t(K_t * f) = (\partial_t K_t * f) \qquad \text{et} \qquad D^m_{x_j}(K_t * f) = (D^m_{x_j} K_t * f), \quad (m = 1, 2).$$
3. En déduire que $u = K_t * f$ est solution de l'équation de la chaleur $\partial_t u = \Delta u$.
4. Vérifier que $(K_t)_{t>0}$ est une approximation de l'identité pour $t \to 0$. En déduire que $u(\cdot, t) \stackrel{L^p}{\to} f$ pour $t \to 0$ (ceci permet de donner un sens à la condition $u|_{t=0} = f$). Montrer que si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ alors $u(x,t) \to f(x)$ pour $t \to 0$, uniformément pour $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition (produit de convolution dans le tore). On note $L^1(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et intégrables dans $[0, 2\pi)$, normé par $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|\, d\theta$. Pour $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, on définit $f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\, dt$. On définit ensuite (comme dans $\mathbb{R}^n$) les approximations de l'idéntité (ϕ_ϵ) dans le tore.

Remarque. Les inégalités de Young et le théorème d'approximation restent valables dans le tore avec les mêmes démonstrations.

Exercice 9 (Le problème de Dirichlet pour le Laplacien dans le disque) On se propose de trouver une fonction v, harmonique dans l'intérieur du disque $\{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| < 1\}$ (c'est à dire, v de classe C^2 et $\Delta v = 0$), telle que $v|_{\{x\colon |x|=1\}} = g$, où g est une fonction donnée sur le cercle.

Pour $0 \le r < 1$, et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$.

1. Démontrer que
$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$
2. Démontrer que P_r est une approximation de l'identité pour $r \to 1$ (c'est à dire, $\phi_\epsilon = P_{1-\epsilon}$ est une approximation de l'identité).
3. On considère l'opérateur différentiel $L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. Vérifier que $LP_r = 0$.
4. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On pose $u(r,\theta) = P_r * f(\theta)$. Vérifier que $Lu = 0$ et que $u(r,\theta) \to f(\theta)$ pour $r \to 1$ dans $L^1(\mathbb{T})$. Que peut-on dire de plus si f est est continue sur le cercle ?
5. Conclure.