Université Claude Bernard Lyon I   UFR de Mathématiques

MASTER “Mathématiques et Applications”, $2^{\text{ème}}$ année Recherche, filière “Maths avancées”   année 2008-2009

Espaces de de Branges–Rovnyak et applications.

EXAMEN

–Durée 3h.–

Le sujet comporte 3 exercices indépendants et qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Les notes de cours sont autorisées. Les théorèmes du cours utilisés devront être explicitement mentionnés.

Exercice 1 Soient b un point non extrême de la boule unité de H^∞, $\lambda \in \mathbb{D}$ et notons k_λ le noyau reproduisant de H^2, $k_\lambda(z) = (1 - \bar{\lambda} z)^{-1}$, $z \in \mathbb{D}$.

1) Montrer que les fonctions k_λ et bk_λ appartiennent à $\mathcal{H}(b)$.

2) Montrer que
$$k_\lambda^+ = \frac{\overline{b(\lambda)}}{\overline{a(\lambda)}} k_\lambda \quad \text{et} \quad (bk_\lambda)^+ = \left(\frac{1}{\overline{a(\lambda)}} - a \right) k_\lambda.$$

3) En déduire que, pour toute fonction $h \in \mathcal{H}(b)$, on a
$$\langle h, k_\lambda \rangle_b = h(\lambda) + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} h^+(\lambda) \quad \text{et} \quad \langle h, bk_\lambda \rangle_b = \frac{h^+(\lambda)}{a(\lambda)}.$$

Exercice 2

Soient b un point non extrême de la boule unité de H^∞ et u une fonction intérieure non constante. Considérons μ et ν les deux mesures de Borel positives sur $\mathbb{T}$ telles que
$$\Re\mathrm{e} \left(\frac{1 + b(z)}{1 - b(z)} \right) = P[d\mu](z) \quad \text{et} \quad \Re\mathrm{e} \left(\frac{1 + u(z)}{1 - u(z)} \right) = P[d\nu](z), \quad (z \in \mathbb{D}). \qquad (\star)$$

1) Montrer que la fonction $\dfrac{1-b}{1-u} k_0^u$ appartient à $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si la fonction $\dfrac{1-b}{1-u}$ appartient à $\mathcal{H}(b)$.

   Indication : on pourra montrer que $\dfrac{1-b}{1-u} k_0^u = (1 - \overline{u(0)}) \dfrac{1-b}{1-u} + \overline{u(0)}(1-b)$.

2) (a) Montrer que $\dfrac{1}{1-b}$ est une fonction extérieure de H^p, pour tout $p \in]0, 1[$.

   (b) Montrer que $\dfrac{a}{1-b}$ est une fonction de $L^2(\mathbb{T})$.

   Indication : on pourra utiliser $(\star)$.

   (c) En déduire que $\dfrac{a}{1-b}$ est une fonction extérieure de H^2.

3) On suppose dans cette question que les fonctions $\dfrac{1-b}{1-u}$ et $\dfrac{a}{1-u}$ sont dans H^2.

   (a) Montrer que $\dfrac{|a|^2}{1-u} = \bar{b}\dfrac{1-b}{1-u} - \bar{u}\dfrac{1-\bar{b}}{1-\bar{u}}$ presque partout sur $\mathbb{T}$.

   (b) En déduire que $\frac{|a|^2}{1-u} \in L^2(\mathbb{T})$ puis qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que
$$P_+\left(\frac{|a|^2}{1-u}\right) = P_+\left(\bar{b}\frac{1-b}{1-u}\right) + c.$$

   (c) En déduire que $\dfrac{1-b}{1-u} \in \mathcal{H}(b)$.

4) On suppose maintenant dans cette question que $\dfrac{1-b}{1-u} \in \mathcal{H}(b)$.

   (a) Montrer qu'il existe $f \in H^2$ tel que $T_{\bar{b}}\left(\dfrac{1-b}{1-u}\right) = T_{\bar{a}}f$.

   (b) Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que
$$T_{\bar{a}}f = P_+\left(\frac{|a|^2}{1-u}\right) + c.$$

   (c) En déduire que si $g := f - \dfrac{c}{\overline{a(0)}}$ alors la fonction $\bar{a}\left(g - \dfrac{a}{1-u}\right) \in \overline{H_0^2}$.

   (d) En utilisant la question 2), montrer que $\dfrac{a}{1-u} \in H^1$ puis en déduire que $g - \dfrac{a}{1-u} \in H^1$.

   (e) En utilisant 4)(c), montrer que $\bar{g} - \dfrac{\bar{a}}{1-\bar{u}} \in H_0^1$.

   (f) Conclure que $g = \dfrac{a}{1-u}$ puis que $\dfrac{a}{1-u} \in H^2$.

5) Montrer finalement que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) la mesure ν est absolument continue par rapport à la mesure μ et $\dfrac{d\nu}{d\mu} \in L^2(\mu)$.

   (ii) Les fonctions $\dfrac{1-b}{1-u}$ et $\dfrac{a}{1-u}$ appartiennent à H^2.

<u>Exercice 3</u> Soient b un point extrême de la boule unité de H^∞ et $X := S^*|\mathcal{H}(b)$.

1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, on a
$$X^*Xk_\lambda^b = k_\lambda^b - k_\lambda^b(0) - \langle k_\lambda^b, X^*S^*b\rangle_b b.$$

2) Montrer que $X^*S^*b = -b(0)k_0^b$.

3) En déduire que
$$X^*Xk_\lambda^b = k_\lambda^b - k_\lambda^b(0)k_0^b,$$
puis que
$$X^*X = Id - k_0^b \otimes k_0^b.$$

4) Montrer que pour tout $h \in \mathcal{H}(b)$, on a $\|Xh\|_b^2 = \|h\|_b^2 - |h(0)|^2$.

5) En déduire que pour tout $h \in \mathcal{H}(b)$, pour tout $n \geq 1$, on a $\|X^n h\|_b^2 = \|h\|_b^2 - \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{h}(k)|^2$ puis

$$\lim_{n \to +\infty} \|X^n h\|_b^2 = \|h\|_b^2 - \|h\|_2^2.$$

6) On suppose dans cette question qu'il existe un opérateur unitaire U sur un espace de Hilbert H et un isomorphisme V de H sur $\mathcal{H}(b)$ tel que $XV = VU$ (on dit dans ce cas que X est similaire à un unitaire). On suppose également que $T_{\bar{b}}$ n'est pas inversible.

   (a) Montrer qu'il existe une constante δ, $0 < \delta < 1$, telle que $\|X^n h\|_b \geq \delta \|h\|_b$, pour tout $h \in \mathcal{H}(b)$.

   (b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f \in H^2$, $\|f\|_2 = 1$, telle que $\|T_{\bar{b}} f\|_2 \leq \varepsilon$.
   <u>Indication :</u> on pourra raisonner par l'absurde.

   (c) Considérons alors $h := (Id - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} f$. Vérifier que $\|h\|_b \leq 1$ et $\|h\|_2^2 \geq 1 - \varepsilon^2$.

   (d) En utilisant les questions 5) et 6)(a), montrer que

$$\delta^2 \|h\|_b^2 \leq \|h\|_b^2 - \|h\|_2^2$$

   puis $(1 - \varepsilon^2)\delta^2 \leq \varepsilon^2$.

   (e) Conclure à une absurdité.

7) On suppose dans cette question que $T_{\bar{b}}$ est inversible.

   (a) Montrer que T_b est aussi inversible. En admettant que $\mathcal{M}(H^2) = H^\infty$, en déduire que $b^{-1} \in H^\infty$.

   (b) Montrer alors que $T_{\bar{b}^{-1}} T_{\bar{b}} = Id$.

   (c) En écrivant que $\mathcal{H}(b) = T_{\bar{b}^{-1}} T_{\bar{b}} \mathcal{H}(b)$, montrer que $\mathcal{H}(b) \subset \mathcal{H}(\bar{b})$ (en tant qu'ensemble).

8) En utilisant les questions 6) et 7), montrer que si X est similaire à un unitaire, alors $\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(\bar{b})$ (en tant qu'ensemble).