Université LYON I

cours de DEA

Interpolation et bases de noyaux reproduisant dans les espaces de Hardy

Emmanuel Fricain

—-2002-2003—

Table des matières

Chapitre 1

Généralités sur les bases dans les espaces de Banach

Soient X un espace de Banach complexe, séparable, de dimension infinie et $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de vecteurs de X. Nous noterons par $\mathfrak{Lin}(x_n \ : \ n\geqslant 1)$ l'espace vectoriel (non fermé) engendré par les x_n, $n\geqslant 1$ et par $\mathtt{Span}(x_n : n\geqslant 1)$ la fermeture de $\mathfrak{Lin}(x_n \ : \ n\geqslant 1)$.

1.1 Complétude et indépendance linéaire

Définition 1.1.1 *La suite $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est dite :*

1. **complète** *dans X si*
$$\mathtt{Span}(x_n : n\geqslant 1) = X\,;$$
2. **finiment libre** *si toute sous-suite finie de $\mathfrak{X}$ est linéairement indépendante ;*
3. **ω-topologiquement libre** *si*
$$\left((\alpha_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \alpha_n x_n = 0\right) \Longrightarrow \alpha_n = 0,\ \forall n\geqslant 1\,;$$
4. **minimale** *si, pour tout $n\geqslant 1$, $x_n \notin \mathtt{Span}(x_k : k \in \mathbb{N} \setminus \{n\})$;*
5. **uniformément minimale** *si*
$$\delta(\mathfrak{X}) := \inf_{n\geqslant 1} dist \left(\frac{x_n}{\|x_n\|}, \mathtt{Span}(x_k : k \in \mathbb{N} \setminus \{n\})\right) > 0\,.$$

$\delta(\mathfrak{X})$ est appelée **la constante d'uniforme minimalité** *de la suite $\mathfrak{X}$.*
Enfin, si $\mathfrak{X}^* = (x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments du dual de X, on dit que $\mathfrak{X}^*$ est une **suite biorthogonale** *associé à $\mathfrak{X}$ si*
$$x_k^*(x_n) = \delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & si\ n = k\,; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Donnons tout de suite un lemme caractérisant les suites minimales et uniformément minimales.

Lemme 1.1.2 *Soient X un espace de Banach et $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de vecteurs de X.*

(a) *$\mathfrak{X}$ est minimale si et seulement si $\mathfrak{X}$ admet une suite biorthogonale $\mathfrak{X}^*$. Cette dernière est uniquement déterminée si et seulement si la suite $\mathfrak{X}$ est complète dans X.*

(b) *$\mathfrak{X}$ est uniformément minimale si et seulement si $\mathfrak{X}$ admet une suite biorthogonale $\mathfrak{X}^* = (x_n^*)_{n\geqslant 1}$ telle que $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|x_n\|\|x_n^*\| < +\infty$.*

Preuve : (a) : On applique le théorème de Hahn-Banach (corollaire A.1.2) : $x_n \notin \mathtt{Span}(x_k \,:\, k \in \mathbb{N} \setminus \{n\})$ si et seulement si il existe $f_n \in X^*$ telle que $f_n(x_k) = \delta_{n,k}$. L'équivalence entre l'unicité de la biorthogonale et la complétude de la suite vient également du théorème de Hahn-Banach.

(b) : De plus, dans la forme plus précise du théorème de Hahn-Banach (théorème A.1.4), on a pour un sous espace fermé $E \subset X$:

$$\min\{\|f\| \,:\, f \in X^*,\, f_{|E} = 0,\, f(x) = 1\} = \frac{1}{\mathrm{dist}(x, E)}\,.$$

Ainsi, pour une suite biorthogonale $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ qui réalise le minimum, on a :

$$\mathrm{dist}\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}, \mathtt{Span}(x_k \,:\, k \neq n)\right) = \frac{1}{\|x_n\|\|x_n^*\|}\,. \tag{1.1}$$

Pour conclure, il reste à remarquer que, pour toute suite biorthogonale $(f_n)_{n\geqslant 1}$ associé à $(x_n)_{n\geqslant 1}$, on a

$$\inf_{n\geqslant 1} \mathrm{dist}\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}, \mathtt{Span}(x_k \,:\, k \neq n)\right) = \frac{1}{\sup\limits_{n\geqslant 1} \|x_n\|\|x_n^*\|} \geqslant \frac{1}{\sup\limits_{n\geqslant 1} \|x_n\|\|f_n\|}\,.$$

□

Remarque 1.1.3 D'après la preuve du lemme 1.1.2, il est clair que si $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite minimale, on a, pour toute suite biorthogonale $(f_n)_{n\geqslant 1}$ associé à $(x_n)_{n\geqslant 1}$,

$$\sup_{n\geqslant 1} \|x_n\|\|f_n\| \geqslant \delta(\mathfrak{X})^{-1},$$

De plus, si $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est une biorthogonale associée à $(x_n)_{n\geqslant 1}$ par (1.1), on a

$$\sup_{n\geqslant 1} \|x_n\|\|x_n^*\| = \delta(\mathfrak{X})^{-1}, \tag{1.2}$$

Il est évident que l'uniforme minimalité implique la minimalité, que toute suite minimale est ω-topologiquement libre et enfin que toute suite ω-topologiquement libre est finiment libre. Pour les suites finies toutes ces propriétés coïncident. Par contre, pour les suites infinies, cela n'est plus vrai comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 1 *Si $(e_n)_{n\geqslant 1}$ désigne la base orthonormale canonique de ℓ^2, posons, pour tout $n\geqslant 2$,*

$$x_n := e_1 + \frac{e_n}{n}.$$

Il est facile de montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est complète et minimale dans ℓ^2. Sa famille biorthogonale est $(ne_n)_{n\geqslant 2}$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ n'est pas uniformément minimale.

Exemple 2 *Considérons $X = C(0,1)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ munie de la norme uniforme et $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite strictement croissante de réels positifs satisfaisant*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty.$$

Définissons alors une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans X par

$$x_0(t) := 1 \quad et \quad x_n(t) := t^{\lambda_n}, \qquad (t \in [0,1],\, n\geqslant 1).$$

Le théorème de Muntz-Szasz ((Rudin, 1980), p.293) montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complète dans X, mais qu'elle n'est pas minimale (par exemple, la suite $(x_n)_{n\neq 1}$ est encore complète dans X). D'autre part, il est facile de voir que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ω-topologiquement libre.

Exemple 3 *Considérons $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormale d'un espace de Hilbert E et x un élément de E tel que pour tout $n\geqslant 1$, $\langle x, x_n\rangle \neq 0$; on peut par exemple choisir*

$$x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n} x_n\,.$$

La suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$y_1 = x, \quad y_n = x_{n-1} \quad (n = 2,\, 3\ldots)$$

est complète et finiment libre. Par contre, elle n'est pas ω-topologiquement libre car

$$x = \sum_{n\geqslant 1} \langle x, x_n\rangle x_n\,.$$

1.2 Bases de Schauder

Définition 1.2.1 *Une suite* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *d'un espace de Banach* X *est dite* **base de Schauder** *de* X *(ou parfois simplement base de* X*) si, pour tout élément* $x \in X$*, il existe une unique suite de nombres complexes* $(c_n)_{n\geqslant 1} = (c_n(x))_{n\geqslant 1}$ *telle que :*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \,, \tag{1.3}$$

où la série converge pour la topologie de la norme.
Une **suite basique** *est une suite qui est une base de son enveloppe linéaire fermée.*
Enfin, si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *est une base d'un espace de Banach* X*, la suite de fonctionnelles linéaires* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *définie par*

$$f_j(x) = c_j \qquad \left(x = \sum_{n\geqslant 1} c_n x_n \in X,\ j = 1, 2, \ldots\right)$$

est appelée **suite de fonctionnelles coordonnées associée à la base** $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Par conséquent, si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base d'un espace de Banach X et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sa suite de fonctionnelles coordonnées, alors pour tout $x \in X$, on a :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n \,.$$

Notre but va être de montrer que ces fonctionnelles coordonnées sont continues et donc sont des éléments du dual de X. Tout d'abord, prouvons le résultat suivant :

Proposition 1.2.2 *Soit* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite d'un espace de Banach* X *telle que pour tout* $n = 1, 2, \ldots,\ x_n \neq 0$*, et soit* A_1 *l'espace vectoriel des suites de scalaires défini par*

$$A_1 = \left\{ (c_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C} \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \text{ converge en norme } \right\}$$

équipé de la norme

$$\|(c_n)_n\| = \sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| \,. \tag{1.4}$$

Alors A_1 *est un espace de Banach.*

Preuve : Tout d'abord, remarquons que, si $(c_n)_n \in A_1$,

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| < \infty$$

puisque, par définition, la suite $\sum_{n=1}^{N} c_n x_n$ converge lorsque $N \to \infty$. D'autre part, comme tous les $x_n \neq 0$, il n'est pas difficile de voir que (1.4) définit une norme sur l'espace vectoriel A_1. Il reste à montrer que A_1 est un espace de Banach. Pour cela, considérons $(c_n^{(k)})_{n\geqslant 1}$ $(k = 1, 2, \dots)$ une suite de Cauchy d'éléments de A_1 et montrons qu'elle converge. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif $N(\varepsilon)$ tel que

$$\|(c_n^{(k)})_n - (c_n^{(m)})_n\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^{(k)} - c_i^{(m)}) x_i \right\| < \varepsilon \quad (k, m > N(\varepsilon))\,.$$

D'où pour tout $k, m > N(\varepsilon)$, $n = 1, 2, \dots$, on a

$$\|(c_n^{(k)} - c_n^{(m)}) x_n\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^{(k)} - c_i^{(m)}) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} (c_i^{(k)} - c_i^{(m)}) x_i \right\| < 2\varepsilon.$$

Comme tous les $x_n \neq 0$, il suit que

$$|c_n^{(k)} - c_n^{(m)}| < \frac{2\varepsilon}{\|x_n\|} \quad (k, m > N(\varepsilon); n = 1, 2, \dots)\,.$$

Par conséquent, pour chaque $n \geqslant 1$, la suite de scalaires $(c_n^{(k)})_{k\geqslant 1}$ est de Cauchy et donc converge vers un nombre complexe, disons c_n. Dans les inégalités

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^{(k)} - c_i^{(m)}) x_i \right\| < \varepsilon \quad (k, m > N(\varepsilon); n = 1, 2, \dots)$$

en faisant tendre $m \to +\infty$, on obtient

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^{(k)} - c_i) x_i \right\| \leqslant \varepsilon \quad (k > N(\varepsilon); n = 1, 2, \dots)\,. \tag{1.5}$$

En particulier, cela implique, que pour tout $n, l = 1, 2, \dots$, on a

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{n+l} c_i x_i \right\| \leqslant 2\varepsilon + \left\| \sum_{i=n+1}^{n+l} c_i^{(k)} x_i \right\| \quad (k > N(\varepsilon)),$$

et puisque chaque série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(k)} x_i$ est convergente et que X est complet, il suit que la série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ converge, i.e. $(c_n)_{n\geqslant 1} \in A_1$. D'autre part, l'inégalité (1.5) implique que

$$\|(c_n^{(k)})_n - (c_n)_n\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^{(k)} - c_i) x_i \right\| \leqslant \varepsilon \quad (k > N(\varepsilon)),$$

ce qui montre que la suite $(c_n^{(k)})_{n\geqslant 1}$ $(k = 1, 2, \dots)$ converge vers la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ dans A_1 et achève de prouver que A_1 est un espace de Banach. □

Proposition 1.2.3 *Soient X un espace de Banach, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une base de X et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sa suite de fonctionnelles coordonnées. Alors*

(a) *Si A_1 est l'espace de Banach introduit dans la proposition 1.2.2, l'application*

$$(c_n)_{n\geqslant 1} \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \tag{1.6}$$

définit un isomorphisme de A_1 sur X.

(b) *Pour $x \in X$, posons*

$$|||x||| := \sup_{n\geqslant 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i \right\| . \tag{1.7}$$

Alors $|||\cdot|||$ définit sur l'espace X une norme, équivalente à la norme initiale sur X.

Preuve : (a) : Puisque $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base, nous avons $x_n \neq 0$ $(n = 1,\, 2 \dots)$ (d'après l'unicité des décompositions $\sum_{i\geqslant 1} c_i x_i$). La proposition 1.2.2 implique donc que A_1 est un espace de Banach. L'application définie par (1.6) est clairement une application linéaire et continue, de norme 1. D'autre part, la propriété de base de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ montre aussi que l'application (1.6) est une bijection de A_1 sur X (à cause de l'unicité et de l'existence des décompositions $\sum_{i\geqslant 1} c_i x_i$). Le théorème d'inversion de Banach (théorème A.2.3) implique alors que l'application (1.6) est un isomorphisme de A_1 sur X.
(b) : D'après (a), il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \right\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right\| \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \right\| \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \in X \right),$$

et pour conclure, il reste à observer que, pour tout $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \in X$, on a $f_n(x) = c_n$ $(n = 1,\, 2,\, \dots)$. □

Théorème 1.2.4 (S. Banach, 1932) *Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une base d'un espace de Banach X. Alors les fonctionnelles coordonnées f_n, associées à $(x_n)_{n\geqslant 1}$, sont continues sur X, i.e. $f_n \in X^*$ $(n = 1,\, 2,\, \dots)$. De plus, il existe une constante $M \geqslant 1$ telle que*

$$1 \leqslant \|x_n\| \|f_n\| \leqslant M \quad (n = 1,\, 2,\, \dots).$$

Preuve : Soit $|||\cdot|||$ la norme sur X définie par (1.7). Alors il existe, d'après la proposition 1.2.3 (b), une constante $C\geqslant 1$ telle que

$$|||x|||\leqslant C\|x\| \quad (x \in X).$$

Puisque $x_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), on a :

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= \frac{\|f_n(x)x_n\|}{\|x_n\|} \\
&\leqslant \frac{\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n-1} f_i(x)x_i\right\|}{\|x_n\|} \\
&\leqslant \frac{2|||x|||}{\|x_n\|}\leqslant\frac{2C}{\|x_n\|}\|x\| \quad (x \in X,\, n = 1, 2, \ldots),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $f_n \in X^*$ et $\|f_n\|\leqslant\frac{2C}{\|x_n\|}$ ($n = 1, 2, \ldots$). D'autre part, par définition des f_n, on a $1 = f_n(x_n)\leqslant\|f_n\|\|x_n\|$ ($n = 1, 2, \ldots$), ce qui achève la preuve de ce théorème. □

Corollaire 1.2.5 *Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une base d'un espace de Banach X et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sa suite de fonctionnelles coordonnées. Alors $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément minimale et sa biorthogonale coïncide avec la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$.*

Preuve : D'après le théorème 1.2.4, $f_n \in X^*$ ($n = 1, 2, \ldots$) et

$$\sup_{n\geqslant 1} \|x_n\|\|f_n\| < \infty.$$

D'autre part, par définition des f_n, il est clair que $f_n(x_p) = \delta_{n,p}$ (p, $n = 1, 2, \ldots$). Ceci prouve que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est la biorthogonale à $(x_n)_{n\geqslant 1}$ (qui est unique car $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans X).
Comme $\sup_{n\geqslant 1} \|x_n\|\|f_n\| < \infty$, le lemme 1.1.2 implique que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément minimale. □

Par conséquent, si $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base d'un espace de Banach X, alors, pour chaque $x \in X$, nous avons

$$x = \sum_n x_n^*(x)x_n, \tag{1.8}$$

où la suite $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ constitue la biorthogonale à $\mathfrak{X}$. Les coefficients $x_n^*(x)$ sont appelés **coefficients de Fourier** de x relativement aux suites (x_n) et (x_n^*).

Remarque 1.2.6 Nous venons de voir que la propriété de base implique l'uniforme minimalité. En fait, elle est strictement plus forte comme le montre l'exemple suivant : considérons $X = C(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues sur le cercle unité $\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$, équipé de la norme uniforme $\|x\| = \sup_{\xi\in\mathbb{T}} |x(\xi)|$. Posons alors

$$x_n(\zeta) = \zeta^n \quad (\zeta \in \mathbb{T},\, n \in \mathbb{Z}).$$

Par le théorème de Stone-Weiertrass, il est facile de voir que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est complète dans X. De plus, elle possède une biorthogonale donnée par

$$x_n^*(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(e^{it})e^{-int}\,dt \quad (x \in X,\, n \in \mathbb{Z}).$$

Comme $\sup_n \|x_n\|\|x_n^*\| \leqslant 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément minimale. Par contre, elle n'est pas une base de Schauder de X car il existe des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ dont la série de Fourier n'est pas uniformément convergente.

Donnons maintenant une caractérisation des bases de Schauder à l'aide des projections sur les coefficients de Fourier.

Théorème 1.2.7 *Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite minimale dans un espace de Banach X. Notons par $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ une biorthogonale à $(x_n)_{n\geqslant 1}$. On définit une suite d'opérateurs continus $(s_n)_{n\geqslant 1}$ par :*

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i \quad (x \in X,\, n = 1, 2, \ldots). \tag{1.9}$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *$(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de X.*

(ii) *Pour chaque $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = x$.*

(iii) *$(x_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans X et $\sup_{n\geqslant 1} \|s_n(x)\| < \infty$, pour tout $x \in X$.*

(iv) *$(x_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans X et $\sup_{n\geqslant 1} \|s_n\| < \infty$.*

Preuve :
$(i) \Longrightarrow (ii)$: c'est précisément l'égalité (1.8).
$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Pour chaque $x \in X$, la suite $(s_n(x))_{n\geqslant 1}$ est convergente (vers x) donc bornée. Il reste à montrer la complétude de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, cela revient à montrer que si $f \in X^*$, $f(x_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ alors $f \equiv 0$. Il suffit alors de remarquer que, pour $x \in X$, on a :

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} s_n(x)) = \lim_{n\to\infty} f(s_n(x)) = 0.$$

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: c'est une simple application du théorème de Banach-Steinhaus (théorème A.2.1).

$(iv) \Longrightarrow (i)$: Remarquons que, pour toute combinaison linéaire finie $p = \sum_{j=1}^m c_j x_j$ et tout $n \geqslant m$, on a :

$$s_n(p) = \sum_{i=1}^n x_i^*(p) x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_j \delta_{i,j} x_i = \sum_{j=1}^m c_j x_j = p,$$

d'où $\lim_{n\to\infty} s_n(p) = p$. Comme la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans X et que $\sup_{n\geqslant 1} \|s_n\| < \infty$, on peut appliquer le corollaire A.2.2 et en déduire que $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = x$, pour tout $x \in X$, ce qui implique évidemment (i). $\square$

Pour finir ce paragraphe, nous allons introduire la notion de multiplicateurs associée à une suite minimale. D'une part, les multiplicateurs vont nous donner une nouvelle caractérisation des bases de Schauder mais, d'autre part, ils vont nous permettre de faire le lien avec certains problèmes d'interpolation que nous étudierons aux Chapitres 2 et 3.

Définition 1.2.8 *Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite minimale et complète d'un espace de Banach X. Une suite $\mu = (\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ est appelée* **multiplicateur** *de $(x_n)_{n\geqslant 1}$ si l'application linéaire*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Lin}(x_n : n\geqslant 1) & \longrightarrow & \mathfrak{Lin}(x_n : n\geqslant 1) \\ \sum_n a_n x_n & \longmapsto & \sum_n a_n \mu_n x_n \end{array}$$

s'étend en un opérateur M_μ continu sur X.
Autrement dit, $\mu = (\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ est un multiplicateur de $(x_n)_{n\geqslant 1}$ s'il existe $M_\mu \in \mathcal{L}(X)$ tel que $M_\mu(x_n) = \mu_n x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.
L'ensemble des multiplicateurs de $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est noté $\mathrm{mult}(\mathfrak{X})$.
Si $\mu = (\mu_n)_{n\geqslant 1} \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X})$, on note aussi

$$\|\mu\|_{\mathrm{mult}} := \|M_\mu\|.$$

Remarque 1.2.9 Il est clair que, la suite $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ étant minimale, l'application

$$\sum_n a_n x_n \longmapsto \sum_n a_n \mu_n x_n$$

est bien définie sur $\mathfrak{Lin}(x_n : n\geqslant 1)$. D'autre part, si $\mu = (\mu_n)_{n\geqslant 1} \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X})$, la complétude de $\mathfrak{X}$ assure l'unicité de l'opérateur M_μ et donc $\|\cdot\|_{\mathrm{mult}}$ est également bien définie.

Théorème 1.2.10 *Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite minimale et complète d'un espace de Banach X. Alors $(\mathrm{mult}(\mathfrak{X}), \|\cdot\|_{\mathrm{mult}})$ est un espace de Banach et $\mathrm{mult}(\mathfrak{X}) \hookrightarrow \ell^\infty$, i.e. $\mathrm{mult}(\mathfrak{X})$ s'injecte continûment dans ℓ^∞, l'espace des suites complexes et bornées.*

Preuve : Montrons tout d'abord que $\mathrm{mult}(\mathfrak{X})$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel. Pour cela, remarquons tout d'abord que, si $(\mu_n)_{n\geqslant 1} \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X})$, on a :

$$|\mu_n|\|x_n\| = \|M_\mu(x_n)\|\leqslant\|M_\mu\|\|x_n\| \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots).$$

D'où, comme $x_n \neq 0$ (car la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est minimale), on obtient

$$\sup_{n\geqslant 1} |\mu_n|\leqslant\|M_\mu\|. \tag{1.10}$$

Ceci montre que $\mathrm{mult}(\mathfrak{X}) \subset \ell^\infty$. Vérifions alors que $\mathrm{mult}(\mathfrak{X})$ est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu^{(1)} = (\mu_n^{(1)})_{n\geqslant 1}$, $\mu^{(2)} = (\mu_n^{(2)})_{n\geqslant 1} \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X})$, l'opérateur $\lambda M_{\mu^{(1)}} + M_{\mu^{(2)}} \in \mathcal{L}(X)$ et

$$\begin{aligned} (\lambda M_{\mu^{(1)}} + M_{\mu^{(2)}})(x_n) &= \lambda M_{\mu^{(1)}}(x_n) + M_{\mu^{(2)}}(x_n) \\ &= \lambda\mu_n^{(1)} x_n + \mu_n^{(2)} x_n \\ &= (\lambda\mu_n^{(1)} + \mu_n^{(2)})x_n \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots), \end{aligned} \tag{1.11}$$

ce qui prouve que $\lambda\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X})$. Par conséquent, $\mathrm{mult}(\mathfrak{X})$ est un espace vectoriel muni de la structure induite par ℓ^∞. Il est facile de voir que $\|\cdot\|_{\text{mult}}$ définit une norme sur cet espace vectoriel (laissé en exercice!). L'égalité 1.11 montre aussi que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)} \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X})$, on a :

$$M_{\lambda\mu^{(1)}+\mu^{(2)}} = \lambda M_{\mu^{(1)}} + M_{\mu^{(2)}}.$$

Vérifions maintenant que $(\mathrm{mult}(\mathfrak{X}), \|\cdot\|_{\text{mult}})$ est complet. Pour cela, on procède classiquement en considérant une suite de Cauchy $(\mu^{(m)})_{m\geqslant 1}$ dans $\mathrm{mult}(\mathfrak{X})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que

$$\|\mu^{(m)} - \mu^{(l)}\|_{\text{mult}} = \|M_{\mu^{(m)}} - M_{\mu^{(l)}}\| < \varepsilon \quad (n, l > N(\varepsilon)).$$

Par conséquent, $(M_{\mu^{(m)}})_{m\geqslant 1}$ est une suite Cauchy dans $\mathcal{L}(X)$ et donc converge vers un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$.

D'autre part, pour tout $i\geqslant 1$, on a, d'après (1.10) :

$$|\mu_i^{(m)} - \mu_i^{(l)}|\leqslant\|M_{\mu^{(m)}} - M_{\mu^{(l)}}\| < \varepsilon \quad (m, l > N(\varepsilon)),$$

ce qui montre que $(\mu_i^{(m)})_{m\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc converge vers μ_i. Remarquons alors que

$$T(x_i) = \lim_{m\to\infty} M_{\mu^{(m)}}(x_i) = \lim_{m\to\infty} \mu_i^{(m)} x_i = \mu_i x_i \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots).$$

Comme $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, ceci montre que $\mu = (\mu_i)_{i\geqslant 1} \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X})$ et $M_\mu = T$. On a alors

$$\|\mu^{(m)} - \mu\|_{\text{mult}} = \|M_{\mu^{(m)}} - M_\mu\| = \|M_{\mu^{(m)}} - T\|,$$

et donc $(\mu^{(m)})_{m\geqslant 1}$ converge dans $\mathrm{mult}(\mathfrak{X})$ vers μ.

Il reste à voir que si $\mu=(\mu_n)_{n\geqslant 1}\in\mathrm{mult}(\mathfrak{X})$, on a, d'après (1.10) :

$$\|\mu\|_{\ell^\infty}=\sup_{n\geqslant 1}|\mu_n|\leqslant\|M_\mu\|=\|\mu\|_{\mathrm{mult}}, \tag{1.12}$$

ce qui montre que $\mathrm{mult}(\mathfrak{X})\hookrightarrow\ell^\infty$. □

Comme nous l'avons déjà signalé, l'espace des multiplicateurs va nous permettre de donner une nouvelle caractérisation des bases. Pour cela, nous introduisons l'espace bv, des suites à variation bornée, défini par

$$bv=\left\{(\mu_n)_{n\geqslant 1}\subset\mathbb{C}\,:\,\sum_{n\geqslant 1}|\mu_n-\mu_{n+1}|<\infty\right\}.$$

Posons alors, pour $\mu=(\mu_n)_{n\geqslant 1}\in bv$,

$$\|\mu\|_{bv}:=\sum_{n\geqslant 1}|\mu_n-\mu_{n+1}|+\lim_{n\to\infty}|\mu_n|.$$

Il est alors bien connu que $(bv,\|\cdot\|_{bv})$ est un espace de Banach. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.2.11 *Soit $\mathfrak{X}=(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite minimale et complète d'un espace de Banach X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *est une base de* X *;*

(ii) $bv\subset\mathrm{mult}(\mathfrak{X})$.

Preuve : Nous noterons par $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ la biorthogonale associée à $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et par $(s_n)_{n\geqslant 1}$ la suite d'opérateurs définie par (1.9).
(i) $\Longrightarrow$ *(ii)* : soit $\mu=(\mu_n)_{n\geqslant 1}\in bv$. En utilisant le procédé d'Abel, on a, pour tout $x\in X$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i^*(x)\mu_i x_i &= \sum_{i=1}^n \mu_i\left(\sum_{j=1}^i x_j^*(x)x_j-\sum_{j=1}^{i-1}x_j^*(x)x_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^n(\mu_i-\mu_{i+1})\sum_{j=1}^i x_j^*(x)x_j+\mu_{n+1}\sum_{j=1}^n x_j^*(x)x_j\\ &= \sum_{i=1}^n(\mu_i-\mu_{i+1})s_i(x)+\mu_{n+1}s_n(x).\end{aligned}$$

D'après le théorème 1.2.7, il existe une constante $C>0$ telle que $\|s_n\|\leqslant C$ $(n=1,\,2,\,\ldots)$, ce qui donne

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i^*(x)\mu_i x_i\right\|\leqslant C\|x\|\left(\sum_{i=1}^n|\mu_i-\mu_{i+1}|+|\mu_{n+1}|\right)\leqslant C\|x\|\|\mu\|_{bv}.$$

Ceci montre que l'application

$$\sum_i a_i x_i \longmapsto \sum_i a_i \mu_i x_i,$$

définie sur $\mathfrak{Lin}(x_n \,:\, n\geqslant 1)$, est continue, de norme inférieure ou égale à $C\|\mu\|_{bv}$. Elle se prolonge donc en une application linéaire continue L sur X, de norme $\|L\|\leqslant C\|\mu\|_{bv}$. Par conséquent, $\mu \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X})$, avec $M_\mu = L$, ce qui prouve (ii). Remarquons, de plus, que

$$\|\mu\|_{\mathrm{mult}}\leqslant C\|\mu\|_{bv}\,.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$: soit j l'injection canonique qui envoie bv dans $\mathrm{mult}(\mathfrak{X})$. Montrons que le graphe de cette application est fermé.
Soit $(\mu^{(m)})_{m\geqslant 1}$ une suite qui converge vers μ dans bv et vers λ dans $\mathrm{mult}(\mathfrak{X})$. Il s'agit de montrer que $\lambda_p = \mu_p$ $(p = 1,\, 2,\, \dots)$. Tout d'abord, d'après (1.12), on a $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_p^{(m)} = \lambda_p$ $(p = 1,\, 2,\, \dots)$. D'autre part, en écrivant

$$\mu_p^{(m)} - \mu_p = \sum_{i=p}^{l-1} \Big((\mu_i^{(m)} - \mu_i) - (\mu_{i-1}^{(m)} - \mu_{i-1}) \Big) + \mu_l^{(m)} - \mu_l,$$

on obtient $|\mu_p^{(m)} - \mu_p|\leqslant\|\mu^{(m)} - \mu\|_{bv}$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_p^{(m)} = \mu_p$ et donc $\lambda_p = \mu_p$ $(p = 1,\, 2,\, \dots)$.
Par conséquent, d'après le théorème du graphe fermé (théorème A.2.5), l'application j est continue et il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute suite $\mu \in bv$, on a

$$\|\mu\|_{\mathrm{mult}}\leqslant C\|\mu\|_{bv}.$$

Considérons alors, pour $i\geqslant 1$, le vecteur $e_i = (\underbrace{0,\dots 0}_{i-1}, 1, 0 \dots) \in bv$. Par hypothèse, $e_i \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X})$ et on a $M_{e_i}(x_p) = x_i^*(x_p)x_i$ $(p = 1,\, 2,\, \dots)$. Par linéarité et continuité, en utilisant la complétude de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, on a donc, pour tout $x \in X$, $M_{e_i}(x) = x_i^*(x)x_i$. D'où, en posant $\mu^{(m)} = \sum\limits_{i=1}^{m} e_i$, on obtient

$$\begin{aligned} \|s_m(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} x_i^*(x)x_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m} M_{e_i}(x) \right\| \\ &= \|M_{\mu^{(m)}}(x)\| \\ &\leqslant \|\mu^{(m)}\|_{\mathrm{mult}} \|x\| \\ &\leqslant C\|\mu^{(m)}\|_{bv}\|x\| = C\|x\|, \end{aligned}$$

ce qui prouve, d'après le théorème 1.2.7, que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de X. $\square$

1.3 Bases inconditionnelles

La plupart du temps, nous utiliserons la notion de base inconditionnelle dans le cadre des espaces de Banach. Cependant, pour le théorème 1.3.3 (assertion (iv)), nous aurons besoin du cadre un peu plus général des espaces vectoriels topologiques.

Définition 1.3.1 *Soit X un espace vectoriel topologique, munie d'une topologie τ. Une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de X est dite* **base de inconditionnelle** *de (X,τ) si, pour tout élément $x \in X$, il existe une unique suite de nombres complexes $(c_n)_{n\geqslant 1} = (c_n(x))_{n\geqslant 1}$ telle que :*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \,, \tag{1.13}$$

où la série converge inconditionnellement dans X pour la topologie τ. Rappelons que la convergence inconditionnelle signifie que, quelque soit le voisinage V de 0 pour τ, il existe une partie finie $\sigma_0 \subset \mathbb{N}$ telle que pour toute partie finie $\sigma \subset \mathbb{N}$ vérifiant $\sigma_0 \subset \sigma$, on a :

$$x - \sum_{n\in\sigma} c_n x_n \in V.$$

Une **suite basique inconditionnelle** *est une suite qui est une base inconditionnelle de son enveloppe linéaire fermée.*

Remarque 1.3.2 Si X est un espace vectoriel de Banach, une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de X est une base inconditionnelle de X si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe une unique suite de nombres complexes $(c_n)_{n\geqslant 1} = (c_n(x))_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $\sigma_0 \subset \mathbb{N}$ telle que pour toute partie finie $\sigma \subset \mathbb{N}$ vérifiant $\sigma_0 \subset \sigma$, on a :

$$\left\| x - \sum_{n\in\sigma} c_n x_n \right\| < \varepsilon. \tag{1.14}$$

D'autre part, si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite minimale et complète de X et $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ sa biorthogonale, il est facile de voir que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de X est une base inconditionnelle de X si et seulement si pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $\sigma_0 \subset \mathbb{N}$ telle que pour toute partie finie $\sigma \subset \mathbb{N}$ vérifiant $\sigma_0 \subset \sigma$, on a :

$$\left\| x - \sum_{n\in\sigma} x_n^*(x) x_n \right\| < \varepsilon. \tag{1.15}$$

Autrement dit, si la suite $(c_n(x))_{n\geqslant 1}$ qui apparaît dans (1.14) existe, nécessairement $c_n(x) = x_n^*(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

La notion de base inconditionnelle a donné lieu à toute une théorie et a fait l'objet d'une grande littérature (voir par exemple (et L. Tzafriri, 1977), (Singer, 1970) ou (Singer, 1981)). Nous n'entrerons pas dans les détails car ce n'est pas l'objet de ce cours ! Nous allons simplement donner une caractérisation des bases inconditionnelles qui est un analogue des théorèmes 1.2.7 et 1.2.11. Pour énoncer ce résultat, précisons deux notations.

L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est désigné par $\mathfrak{F}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{F}$, si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite minimale et complète d'un espace de Banach X et $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ sa biorthogonale, on note, par s_σ, l'opérateur continu sur X défini par

$$s_\sigma(x) = \sum_{n\in\sigma} x_n^*(x) x_n \quad (x \in X).$$

Théorème 1.3.3 *Soient X un espace de Banach, $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite minimale et complète dans X et $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ la biorthogonale de $\mathfrak{X}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de X.*
- (ii) $\sup_{\sigma\in\mathfrak{F}} \|s_\sigma(x)\| < \infty$, *pour tout $x \in X$.*
- (iii) $\sup_{\sigma\in\mathfrak{F}} \|s_\sigma\| < \infty$.
- (iv) *La suite $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de X^*, pour la topologie faible étoile.*
- (v) $\mathrm{mult}(\mathfrak{X}) = \ell^\infty$.

Preuve : nous allons procéder comme suit : $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (i)$, puis $(i) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (ii)$ et enfin $(iii) \Longrightarrow (v) \Longrightarrow (iii)$.
$(i) \Longrightarrow (ii)$: soit $x \in X$. D'après (1.15), il existe $\sigma_0 \in \mathfrak{F}$ tel que pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$ vérifiant $\sigma_0 \subset \sigma$, on a :

$$\left\| x - \sum_{n\in\sigma} x_n^*(x) x_n \right\| < 1.$$

Pour $\sigma \in \mathfrak{F}$, on a alors

$$\begin{aligned} \|s_\sigma(x)\| &= \left\| \sum_{n\in\sigma} x_n^*(x) x_n \right\| \\ &= \left\| \sum_{n\in\sigma\cup\sigma_0} x_n^*(x) x_n - \sum_{n\in\sigma_0'} x_n^*(x) x_n \right\|, \end{aligned}$$

où $\sigma_0' = \begin{cases} \sigma_0, & \text{si } \sigma \cap \sigma_0 = \emptyset\,; \\ \sigma_0 \setminus (\sigma\cap\sigma_0), & \text{sinon.} \end{cases}$

D'où

$$\begin{aligned}\|s_\sigma(x)\| &\leqslant \left\|\sum_{n\in\sigma\cup\sigma_0} x_n^*(x)x_n\right\| + \sum_{n\in\sigma_0'} |x_n^*(x)|\|x_n\| \\ &< 1+\|x\|+\sum_{n\in\sigma_0}|x_n^*(x)|\|x_n\|,\end{aligned}$$

ce qui prouve (ii).
$(ii) \Longrightarrow (iii)$: c'est le théorème de Banach-Steinhaus.
$(iii) \Longrightarrow (i)$: posons $C := \sup_{\sigma\in\mathfrak{F}} \|s_\sigma\| < \infty$ et soit $x \in X$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $\widetilde{x} \in \mathfrak{Lin}(x_n \,:\, n\geqslant 1)$ tel que

$$\|x-\widetilde{x}\| < \min(\frac{\varepsilon}{2C}, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Il est facile de voir qu'il existe alors $\widetilde{\sigma} \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$, $\widetilde{\sigma} \subset \sigma$, on a $s_\sigma(\widetilde{x}) = s_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$. D'où

$$\begin{aligned}\|x-s_\sigma(x)\| &\leqslant \|x-\widetilde{x}\| + \|\widetilde{x}-s_\sigma(x)\| \\ &= \|x-\widetilde{x}\| + \|s_\sigma(\widetilde{x})-s_\sigma(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon \quad (\sigma\in\mathfrak{F},\, \widetilde{\sigma}\subset\sigma),\end{aligned}$$

ce qui prouve (i).
$(i) \Longrightarrow (iv)$: tout d'abord, remarquons que $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de X^*, pour la topologie faible étoile, si et seulement si pour tout $x^* \in X^*$, on a

$$x^* = \sum_{n\geqslant 1} x^*(x_n)x_n^*,$$

où la série converge inconditionnellement pour la topologie faible étoile. Par conséquent, par définition de la topologie faible étoile, on en déduit que l'assertion (iv) est vraie si et seulement si $\forall x^* \in X^*$, $\forall x \in X$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\sigma_0 \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$, $\sigma_0 \subset \sigma$, on a

$$\left|x^*(x) - \sum_{n\in\sigma} x^*(x_n)x_n^*(x)\right| < \varepsilon. \tag{1.16}$$

Or, par hypothèse, pour tous $x^* \in X^*$, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\sigma_0 \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$, $\sigma_0 \subset \sigma$, on a

$$\|x-s_\sigma(x)\| < \frac{\varepsilon}{\|x^*\|}.$$

et donc

$$\left|x^*(x) - \sum_{n\in\sigma} x^*(x_n)x_n^*(x)\right| = |x^*(x-s_\sigma(x))| < \|x^*\|\frac{\varepsilon}{\|x^*\|} = \varepsilon,$$

ce qui prouve (1.16) et par conséquent (iv).
$(iv) \Longrightarrow (ii)$: soit $x \in X$. Par hypothèse, pour tout $x^* \in X^*$, il existe $\sigma_0 \in \mathfrak{F}$ tel que

$$|x^*(x - s_\sigma(x))| < 1 \quad (\sigma \in \mathfrak{F},\, \sigma_0 \subset \sigma).$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{F}$, on décompose alors s_σ comme dans la preuve de $(i) \Longrightarrow (ii)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} |x^*(x - s_\sigma(x))| &= \left| x^* \left(x - \sum_{n\in\sigma} x_n^*(x) x_n \right) \right| \\ &\leqslant \left| x^* \left(x - \sum_{n\in\sigma\cup\sigma_0} x_n^*(x) x_n \right) \right| + \left| x^* \left(\sum_{n\in\sigma_0'} x_n^*(x) x_n \right) \right| \quad \text{où } \sigma_0' \subset \sigma_0 \\ &< 1 + \|x^*\| \sum_{n\in\sigma_0} |x_n^*(x)| \|x_n\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\sup_{\sigma\in\mathfrak{F}} |x^*(x - s_\sigma(x))| \leqslant C$, où C est une constante strictement positive, dépendant de x et x^* mais pas de σ.
Pour $\sigma \in \mathfrak{F}$, considérons alors T_σ la forme linéaire définie sur X^* par :

$$\begin{array}{rccl} T_\sigma : & X^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x^* & \longmapsto & x^*(x - s_\sigma(x)). \end{array}$$

Il est clair que T_σ est continue. De plus, on vient de montrer que, pour tout $x^* \in X^*$, $\sup_{\sigma\in\mathfrak{F}} \|T_\sigma(x^*)\| < \infty$. Le théorème de Banach-Steinhaus appliqué à la famille $(T_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{F}}$ implique alors que $\sup_{\sigma\in\mathfrak{F}} \|T_\sigma\| < \infty$. Mais, d'après le théorème de Hahn-Banach, on a $\|T_\sigma\| = \|x - s_\sigma(x)\|$ et donc

$$\sup_{\sigma\in\mathfrak{F}} \|x - s_\sigma(x)\| < \infty,$$

ce qui prouve (ii).
$(iii) \Longrightarrow (v)$: tout d'abord, le théorème 1.2.10 fournit, sans aucune hypothèse, l'inclusion $\mathrm{mult}(\mathfrak{X}) \subset \ell^\infty$. D'autre part, pour $\sigma \in \mathfrak{F}$, notons par $\chi^\sigma = (\chi_n^\sigma)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$\chi_n^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in \sigma\,; \\ 0, & \text{si } n \notin \sigma. \end{cases}$$

Montrons, tout d'abord, que $\chi^\sigma \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X})$ $(\sigma \in \mathfrak{F})$. Par définition des multiplicateurs, il s'agit de montrer que l'application,

$$\begin{array}{rccc} f_\sigma : & \mathfrak{Lin}(x_n : n\geqslant 1) & \longrightarrow & \mathfrak{Lin}(x_n : n\geqslant 1) \\ & \displaystyle\sum_n a_n x_n & \longmapsto & \displaystyle\sum_n a_n \chi_n^\sigma x_n \end{array}$$

s'étend en un opérateur continu sur X.

Or, pour tout $x = \sum_{k=1}^{p} a_k x_k \in \mathfrak{Lin}(x_n \,:\, n\geqslant 1)$, on

$$\begin{aligned} s_\sigma(x) &= \sum_{k=1}^{p} a_k s_\sigma(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_k \left(\sum_{n\in\sigma} x_n^*(x_k)x_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_k \chi_k^\sigma x_k \\ &= f_\sigma(x). \end{aligned}$$

Comme $s_\sigma \in \mathcal{L}(X)$, ceci prouve que $\chi^\sigma \in \text{mult}(\mathfrak{X})$. De plus, on a $\|\chi^\sigma\|_{\text{mult}} = \|s_\sigma\|$ et, par hypothèse, on a donc

$$c := \sup_{\sigma\in\mathfrak{F}} \|\chi^\sigma\|_{\text{mult}} < \infty.$$

Considérons alors $\mathcal{E}$ l'espace des suites complexes à support fini et $\mu \in \mathcal{E}$. Alors, il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi^{\sigma_k}, \tag{1.17}$$

où $\sigma_k = \{k\}$. Comme $\text{mult}(\mathfrak{X})$ est un espace vectoriel et que $\chi^\sigma \in \text{mult}(\mathfrak{X})$ $(\sigma \in \mathfrak{F})$, on a $\mathcal{E} \subset \text{mult}(\mathfrak{X})$. Nous allons montrer, de plus, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\mu \in \mathcal{E}$, on a

$$\|\mu\|_{\text{mult}} \leqslant C\|\mu\|_\infty.$$

Pour $\mu \in \mathcal{E}$, nous allons, dans un premier temps supposer que dans la décomposition (1.17), $a_k \in \mathbb{R}$, $(k = 1, \dots, n)$. Sans perte de généralité supplémentaire, on peut également supposer dans ce cas que les a_k sont rangés par ordre croissant $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$. On peut alors écrire

$$\mu = a_1\chi^{\sigma'_1} + \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1})\chi^{\sigma'_k}, \quad \text{avec } \sigma'_k = \{k, k+1, \dots, n\},\ (1\leqslant k\leqslant n).$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{\text{mult}} &\leqslant |a_1|\|\chi^{\sigma'_1}\|_{\text{mult}} + \sum_{k=2}^{n} |a_k - a_{k-1}|\|\chi^{\sigma'_k}\|_{\text{mult}} \\ &\leqslant c(|a_1| + a_n - a_1) \leqslant 3c\|\mu\|_\infty. \end{aligned}$$

Si les a_k sont complexes, en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient

$$\|\mu\|_{\text{mult}} \leqslant 6c\|\mu\|_\infty \quad (\mu \in \mathcal{E}). \tag{1.18}$$

Maintenant, soit $\mu \in \ell^\infty$. Comme $\mathcal{E}$ est dense dans ℓ^∞, il existe une suite $(\mu^{(m)})_{m\geqslant 1}$ de $\mathcal{E}$ qui converge vers μ dans ℓ^∞. L'inégalité (1.18) permet d'en déduire que $(\mu^{(m)})_{m\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $\text{mult}(\mathfrak{X})$ et donc d'après le théorème 1.2.10, converge vers un élément $\lambda \in \text{mult}(\mathfrak{X})$. De plus, toujours d'après le théorème 1.2.10, $\text{mult}(\mathfrak{X}) \hookrightarrow \ell^\infty$ et donc $(\mu^{(m)})_{m\geqslant 1}$ tend aussi vers λ dans ℓ^∞. Par unicité de la limite, on en déduit donc que $\mu = \lambda \in \text{mult}(\mathfrak{X})$, ce qui prouve (v).
$(v) \Longrightarrow (iii)$: Considérons j l'injection canonique de ℓ^∞ dans $\text{mult}(\mathfrak{X})$. En utilisant une nouvelle fois le théorème 1.2.10 et le théorème du graphe fermé, on voit que l'application j est continue. Il existe donc une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\mu \in \ell^\infty$, on a

$$\|\mu\|_{\text{mult}} \leqslant c\|\mu\|_\infty. \tag{1.19}$$

Considérons maintenant $\sigma \in \mathfrak{F}$. Il est clair que $\chi^\sigma \in \ell^\infty = \text{mult}(\mathfrak{X})$ et

$$\sup_{\sigma \in \mathfrak{F}} \|\chi^\sigma\|_{\text{mult}} \leqslant c. \tag{1.20}$$

D'autre part, $\chi^\sigma \in \text{mult}(\mathfrak{X})$ signifie par définition, qu'il existe un opérateur T continu sur X tel que $Tx_n = \chi_n^\sigma x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $\|\chi^\sigma\|_{\text{mult}} = \|T\|$. Or

$$\begin{aligned} s_\sigma(x_n) &= \sum_{p\in\sigma} x_p^*(x_n)x_p \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin \sigma \\ x_n & \text{si } n \in \sigma \end{cases} \\ &= \chi_n^\sigma x_n, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $s_\sigma(x_n) = Tx_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Par complétude de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, on en déduit que $T = s_\sigma$. Donc $\|s_\sigma\| = \|T\| = \|\chi^\sigma\|_{\text{mult}}$, ce qui conclut, d'après (1.20) la preuve de (iii) et du théorème ! □

1.4 Bases de Riesz

Pour finir ce chapitre, nous allons introduire, dans le contexte des espaces de Hilbert, la notion de base de Riesz.

Définition 1.4.1 *Soit H un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de H. On dit que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une* **base de Riesz** *de H s'il existe un isomorphisme U de H sur lui-même tel que $(Ux_n)_{n\geqslant 1}$ forme une base orthonormale de H.*
L'opérateur U est appelé un **orthogonalisateur** *de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.*

Remarque 1.4.2 Bien sûr, le terme base n'a pas été choisi au hasard. En effet, remarquons que $(Ux_n)_{n\geqslant 1}$ étant une base orthonormale, c'est en particulier une base inconditionnelle de H (c'est très facile à voir directement ou en appliquant le théorème 1.3.3 car, par exemple, les projections s_σ associées à une base orthonormale sont de norme 1). Donc, pour tout $x \in H$, on a :

$$Ux = \sum_{n\geqslant 1} \langle Ux, Ux_n\rangle Ux_n,$$

où la série converge en norme et inconditionnellement. Par conséquent, par continuité de U^{-1}, on a, pour tout $x \in H$:

$$x = U^{-1}Ux = U^{-1}\left(\sum_{n\geqslant 1} \langle Ux, Ux_n\rangle Ux_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \langle x, U^*Ux_n\rangle x_n,$$

où la série converge en norme et inconditionnellement.

Une base de Riesz est donc, en particulier, une base inconditionnelle. Nous verrons à la fin du chapitre, qu'en fait, ces deux notions coïncident.

Donnons tout de suite une proposition élémentaire qui montre, en particulier, un premier lien entre les bases de Riesz et un certain problème d'interpolation. Pour cela, nous devons introduire une notation. Si $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite dans un espace de Hilbert H, on notera $J_{\mathfrak{X}}$ l'application linéaire sur H, à valeurs dans l'espace des suites, définie par

$$J_{\mathfrak{X}}x := (\langle x, x_n\rangle)_{n\geqslant 1}, \quad x \in H,$$

Proposition 1.4.3 *Soient H un espace de Hilbert, $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une base de Riesz de H et U un orthogonalisateur associé à $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Alors :*

(a) *La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément minimale et sa biorthogonale $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est donnée par*

$$x_n^* = U^*Ux_n \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots);$$

(b) *La suite $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de H ;*

(c) *L'application $J_{\mathfrak{X}^*}$ définit un isomorphisme de H sur ℓ^2.*

Preuve :
(a) : on a

$$\langle U^*Ux_n, x_p\rangle = \langle Ux_n, Ux_p\rangle = \delta_{n,p},$$

ce qui prouve que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est minimale et $(U^*Ux_n)_{n\geqslant 1}$ est sa biorthogonale (qui est unique car $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans H). De plus, on a

$$\|x_n\|\|U^*Ux_n\| = \|U^{-1}Ux_n\|\|U^*Ux_n\| \leqslant \|U^{-1}\|\|U^*\| \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots),$$

ce qui prouve que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément minimale.

(b) : l'opérateur U^{*-1} est un isomorphisme de H sur H qui envoie la suite $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ sur la base orthonormale $(Ux_n)_{n\geqslant 1}$ de H et donc, par définition, $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de H.
(c) : pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{X}^*}x &= (\langle x, x_n^*\rangle)_{n\geqslant 1} \\ &= (\langle x, U^*Ux_n\rangle)_{n\geqslant 1} \\ &= (\langle Ux, Ux_n\rangle)_{n\geqslant 1}. \end{aligned}$$

Considérons alors l'opérateur T défini par

$$\begin{array}{rccl} T: & H & \longrightarrow & \ell^2 \\ & x & \longmapsto & (\langle x, Ux_n\rangle)_{n\geqslant 1}. \end{array}$$

Le théorème de Riesz-Fischer assure que l'opérateur T est un isomorphisme isométrique de H sur ℓ^2 et il reste à remarquer que $J_{\mathfrak{X}^*} = TU$. □

Avant de donner la principale caractérisation des bases de Riesz dans un espace de Hilbert, introduisons une définition.

Définition 1.4.4 *Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans un espace de Hilbert H.* **La matrice de Gram** *de $\mathfrak{X}$ est la matrice (infinie), notée $\Gamma_{\mathfrak{X}}$, définie par*

$$\Gamma_{\mathfrak{X}} = (\langle x_i, x_k\rangle)_{i,j\geqslant 1},$$

où $\langle x_i, x_k\rangle$ représente le coefficient sur la ième ligne et jème colonne.

Nous pouvons maintenant donner le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 1.4.5 (N. Bari, 1951) *Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite minimale et complète dans un espace de Hilbert H et $\mathfrak{X}^* = (x_n^*)_{n\geqslant 1}$ sa biorthogonale. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *$\mathfrak{X}$ est une base de Riesz de H.*
- (ii) *Il existe deux constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que, pour toute suite $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$, à support fini, on a :*

$$c\sum_{n\geqslant 1}|a_n|^2 \leqslant \Big\|\sum_{n\geqslant 1}a_nx_n\Big\|^2 \leqslant C\sum_{n\geqslant 1}|a_n|^2.$$

- (iii) *$\mathfrak{X}^*$ est complet dans H et $J_{\mathfrak{X}^*}H = \ell^2$.*
- (iv) *$J_{\mathfrak{X}}H = \ell^2$.*
- (v) *$J_{\mathfrak{X}}H \subset \ell^2$ et $J_{\mathfrak{X}^*}H \subset \ell^2$.*
- (vi) *Les matrices de Gram $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ et $\Gamma_{\mathfrak{X}^*}$ définissent des opérateurs continus de ℓ^2 dans lui-même.*

(vii) La matrice de Gram $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ définit un opérateur continu et inversible sur ℓ^2.

Avant d'entamer la preuve de ce théorème, précisons quelques notations utiles. On désigne par $\ell^2_{\mathfrak{F}}$ l'espace des suites à support fini, muni de la norme de ℓ^2. La base canonique (orthonormale) de ℓ^2 est noté $(e_n)_{n\geqslant 1}$ et est définie par $e_n = (\underbrace{0,\dots 0}_{n-1}, 1, 0\dots)$.

Preuve : nous allons procéder comme suit : $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (i)$, puis $(i) \Longleftrightarrow (iv)$, et enfin $(i) \Longrightarrow (v) \Longrightarrow (vi) \Longrightarrow (vii) \Longrightarrow (i)$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: par hypothèse, il existe un isomorphisme U, de H sur lui-même, tel que $(Ux_n)_{n\geqslant 1}$ forme une base orthonormale de H. En particulier, il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que

$$c\|x\|^2 \leqslant \|U^{-1}x\|^2 \leqslant C\|x\|^2 \quad (x \in H).$$

Considérons alors $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ une suite à support fini. On a

$$c\sum_{n\geqslant 1}|a_n|^2 = c\left\|\sum_{n\geqslant 1} a_n U x_n\right\|^2 \leqslant \left\|U^{-1}\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n U x_n\right)\right\|^2 \leqslant C\left\|\sum_{n\geqslant 1} a_n U x_n\right\|^2 = C\sum_{n\geqslant 1}|a_n|^2,$$

ce qui donne (ii).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: considérons $V_{\mathfrak{X}}$ l'application linéaire définie par

$$V_{\mathfrak{X}} : \begin{array}{rl} \ell^2_{\mathfrak{F}} & \longrightarrow H \\ (a_n)_{n\geqslant 1} & \longmapsto \sum_{n\geqslant 1} a_n x_n. \end{array}$$

Par hypothèse, il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que, pour tout $a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}$, on a

$$c\|a\|^2 \leqslant \|V_{\mathfrak{X}} a\|^2 \leqslant C\|a\|^2,$$

et donc $V_{\mathfrak{X}}$ est un isomorphisme de $\ell^2_{\mathfrak{F}}$ sur $\mathfrak{Lin}(x_n \,:\, n\geqslant 1)$. Par densité de $\ell^2_{\mathfrak{F}}$ dans ℓ^2 et complétude de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, on peut prolonger $V_{\mathfrak{X}}$ en un isomorphisme de ℓ^2 sur H. Il reste à utiliser le théorème de Riesz-Fischer qui donne une isométrie W de ℓ^2 sur H telle que $(We_n)_{n\geqslant 1}$ forme une base orthonormale de H. L'opérateur $WV_{\mathfrak{X}}^{-1}$ est un isomorphisme sur H et $(WV_{\mathfrak{X}}^{-1}x_n)_{n\geqslant 1} = (We_n)_{n\geqslant 1}$ est une base orthonormale de H, ce qui prouve (i).

$(i) \Longrightarrow (iii)$: c'est la proposition 1.4.3.

$(iii) \Longrightarrow (i)$: la complétude de la suite $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ dans H montre que l'application $J_{\mathfrak{X}^*}$ est injective. Par hypothèse, elle est aussi surjective sur ℓ^2 donc bijective de H sur ℓ^2. Montrons que son graphe est fermé. Soit $(g_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans H telle que $g_n \xrightarrow[\text{dans } H]{} g$ et $J_{\mathfrak{X}^*} g_n \xrightarrow[\text{dans } \ell^2]{} a = (a_p)_{p\geqslant 1}$, quand $n \to \infty$. Pour tout $p\geqslant 1$, on a

$$|\langle g_n, x_p^*\rangle - a_p|^2 \leqslant \sum_{k\geqslant 1} |\langle g_n, x_k^*\rangle - a_k|^2 = \|J_{\mathfrak{X}^*} g_n - a\|^2.$$

Donc, d'une part, on a $\lim_{n\to\infty}\langle g_n, x_p^*\rangle = a_p$ et d'autre part, on a $\lim_{n\to\infty}\langle g_n, x_p^*\rangle = \langle g, x_p^*\rangle$ $(p = 1, 2, \ldots)$. D'où $a_p = \langle g, x_p^*\rangle$ et donc $a = J_{\mathfrak{X}^*}g$. Par conséquent, le théorème du graphe fermé implique que $J_{\mathfrak{X}^*}$ est continu et le théorème de Banach (théorème A.2.3) assure que l'opérateur $J_{\mathfrak{X}^*}$ est un isomorphisme de H sur ℓ^2. Comme $J_{\mathfrak{X}^*}x_n = e_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, il reste comme dans la preuve de $(ii) \Longrightarrow (i)$ à appliquer le théorème de Riesz-Fischer pour conclure que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de H.
$(i) \Longleftrightarrow (iv)$: d'après la proposition 1.4.3, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de H si et seulement si $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est aussi une base de Riesz de H. Pour conclure il reste à appliquer $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ (que l'on vient de montrer !) à la suite $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$.
$(i) \Longrightarrow (v)$: il suffit d'appliquer la proposition 1.4.3.
Afin de montrer les implications restantes $((v) \Longrightarrow (vi) \Longrightarrow (vii) \Longrightarrow (i))$, nous allons utiliser les deux équations suivantes : si $a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}$, on a

$$\|V_{\mathfrak{X}}a\|^2 = \Big\langle \sum_{n\geqslant 1} a_n x_n, \sum_{k\geqslant 1} a_k x_k \Big\rangle = \sum_{n,k\geqslant 1} a_n \overline{a_k}\langle x_n, x_k\rangle = \langle \Gamma_{\mathfrak{X}}a, a\rangle, \tag{1.21}$$

et

$$\langle V_{\mathfrak{X}}a, b\rangle = \Big\langle \sum_{n\geqslant 1} a_n x_n, b \Big\rangle = \sum_{n\geqslant 1} a_n \overline{\langle b, x_n\rangle} = \langle a, J_{\mathfrak{X}}b\rangle \quad (b \in H). \tag{1.22}$$

$(v) \Longrightarrow (vi)$: en raisonnant comme dans la preuve de $(iii) \Longrightarrow (i)$, il est facile de voir que l'hypothèse $J_{\mathfrak{X}}H \subset \ell^2$ permet de montrer que le graphe de $J_{\mathfrak{X}}$ est fermé et donc, en appliquant une nouvelle fois le théorème du graphe fermé, on obtient que l'opérateur $J_{\mathfrak{X}}$ est continu de H dans ℓ^2. En utilisant (1.22), on obtient, pour tout $a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}$,

$$\|V_{\mathfrak{X}}a\| = \sup_{b\in H,\, \|b\|\leqslant 1} |\langle V_{\mathfrak{X}}a, b\rangle| = \sup_{b\in H,\, \|b\|\leqslant 1} |\langle a, J_{\mathfrak{X}^*}b\rangle| \leqslant \|a\|\|J_{\mathfrak{X}}\|.$$

Ceci montre que l'opérateur $V_{\mathfrak{X}}$ est continu de $\ell^2_{\mathfrak{F}}$ dans H et peut donc se prolonger naturellement par densité, en un opérateur continu de ℓ^2 dans H. Remarquons maintenant, en utilisant (1.21), que, pour tout $a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}$, on a

$$\langle \Gamma_{\mathfrak{X}}a, a\rangle = \langle V_{\mathfrak{X}}a, V_{\mathfrak{X}}a\rangle = \langle V_{\mathfrak{X}}^* V_{\mathfrak{X}}a, a\rangle,$$

ce qui implique que $\Gamma_{\mathfrak{X}}a = V_{\mathfrak{X}}^* V_{\mathfrak{X}}a$, $\forall a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}$. Par conséquent, l'opérateur $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ se prolonge à ℓ^2 en un opérateur continu. Par symétrie, on montre de même que l'opérateur $\Gamma_{\mathfrak{X}^*}$ se prolonge aussi en un opérateur continu sur ℓ^2.
$(vi) \Longrightarrow (vii)$: par symétrie, on a, d'après (1.21),

$$\|V_{\mathfrak{X}^*}a\|^2 = \langle \Gamma_{\mathfrak{X}^*}a, a\rangle, \quad (a \in \ell^2_{\mathfrak{F}})$$

où $V_{\mathfrak{X}^*}a = \sum_{n\geqslant 1} a_n x_n^*$. Par conséquent, la continuité de $\Gamma_{\mathfrak{X}^*}$ permet d'écrire que

$$\|V_{\mathfrak{X}^*}a\|^2 \leqslant \|\Gamma_{\mathfrak{X}^*}\|\|a\|^2,$$

et donc $V_{\mathfrak{X}^*}$ est continu sur $\ell^2_{\mathfrak{F}}$ et se prolonge en un opérateur continu sur ℓ^2. Maintenant, toujours par symétrie, on obtient d'après (1.22),

$$\langle V_{\mathfrak{X}^*}a, b\rangle = \langle a, J_{\mathfrak{X}^*}b\rangle \quad (a \in \ell^2_{\mathfrak{F}},\, b \in H),$$

soit

$$\langle a, V^*_{\mathfrak{X}^*}b\rangle = \langle a, J_{\mathfrak{X}^*}b\rangle \quad (a \in \ell^2_{\mathfrak{F}},\, b \in H). \tag{1.23}$$

(Remarquez que l'adjoint $V^*_{\mathfrak{X}^*}$ est bien défini car $V_{\mathfrak{X}^*}$ est continu!!!). Par continuité, on obtient (1.23), pour tout $a \in \ell^2$ et donc, on en déduit que

$$J_{\mathfrak{X}^*} = V^*_{\mathfrak{X}^*} \tag{1.24}$$

et l'opérateur $J_{\mathfrak{X}^*}$ est donc continu sur H. Maintenant, on voit que la continuité de $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ permet de prolonger $V_{\mathfrak{X}}$ en un opérateur continu sur ℓ^2 (même raisonnement que ci-dessus) et de plus, on a les deux relations suivantes (immédiates à vérifier avec les définitions) :

$$J_{\mathfrak{X}^*}V_{\mathfrak{X}}a = a \quad (a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}) \tag{1.25}$$

et

$$V_{\mathfrak{X}}J_{\mathfrak{X}^*}x = x \quad (x \in \mathfrak{Lin}(x_n \,:\, n\geqslant 1)), \tag{1.26}$$

Les opérateurs $J_{\mathfrak{X}^*}$ et $V_{\mathfrak{X}}$ étant continu, on peut prolonger la relation (1.25) à ℓ^2 et la relation (1.26) à $\mathtt{Span}(x_n \,:\, n\geqslant 1) = H$. Ceci permet donc de montrer que l'opérateur $V_{\mathfrak{X}}$ est un isomorphisme de ℓ^2 sur H et

$$V_{\mathfrak{X}}^{-1} = J_{X^*}. \tag{1.27}$$

Pour conclure, il reste à utiliser la relation $\Gamma_{\mathfrak{X}}a = V^*_{\mathfrak{X}}V_{\mathfrak{X}}a$, $\forall a \in \ell^2_{\mathfrak{F}}$ qui est une conséquence de 1.21 et donc par continuité, on a $\Gamma_{\mathfrak{X}} = V^*_{\mathfrak{X}}V_{\mathfrak{X}}$, ce qui permet d'en déduire que $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ est un opérateur inversible sur ℓ^2.
$(vii) \Longrightarrow (i)$: nous avons déjà vu que la continuité de $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ implique, en utilisant (1.21), la continuité de $V_{\mathfrak{X}}$. Montrons que l'opérateur $V_{\mathfrak{X}}$ est bijectif.

L'égalité (1.21) montre que l'opérateur $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ est un opérateur positif. D'après un résultat classique de théorie des opérateurs (voir par exemple (Rudin, 1991), p.313), il admet une unique racine carré, c'est à dire qu'il existe un opérateur positif T sur ℓ^2 tel que $T^2 = \Gamma_{\mathfrak{X}}$. De plus, l'inversibilité de $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ implique celle de T. Par conséquent, il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que

$$c\|a\|\leqslant\|Ta\|\leqslant C\|a\|, \quad (a \in \ell^2). \tag{1.28}$$

On en déduit, en utilisant encore une fois (1.21), que, pour tout $a \in \ell^2$, on a

$$\begin{aligned}\|V_{\mathfrak{X}}a\|^2 &= \langle \Gamma_{\mathfrak{X}}a, a\rangle\\ &= \langle T^2a, a\rangle\\ &= \langle T^*Ta, a\rangle\\ &= \|Ta\|^2,\end{aligned}$$

car T est positif, donc en particulier auto-adjoint, i.e. que $T^* = T$. D'où, on en déduit, en utilisant (1.28) que

$$c\|a\| \leqslant \|V_{\mathfrak{X}} a\| \leqslant C\|a\|, \quad (a \in \ell^2).$$

Il est alors clair que $V_{\mathfrak{X}}$ est injectif et il n'est pas difficile de voir que son image est fermée (exercice!!). Or, on a

$$\mathfrak{L}\mathrm{in}(x_n \,:\, n \geqslant 1) = V_{\mathfrak{X}} \ell^2_{\mathfrak{F}} \subset V_{\mathfrak{X}} \ell^2 \subset H,$$

ce qui implique, en utilisant la complétude des $(x_n)_{n\geqslant 1}$, que $V_{\mathfrak{X}}\ell^2 = H$. Par conséquent, $V_{\mathfrak{X}}$ est un isomorphisme de ℓ^2 sur H et on a, par définition, $V_{\mathfrak{X}} e_n = x_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). En appliquant le théorème de Riesz-Fischer, on obtient (i). □

Remarque 1.4.6 Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite minimale et complète dans un espace de Hilbert H. Le théorème de Bari montre donc que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de H si et seulement si

le problème d'interpolation abstrait suivant

$$J_{\mathfrak{X}} x := (\langle x, x_n \rangle)_{n\geqslant 1} = (a_n)_{n\geqslant 1} \tag{1.29}$$

a une solution dans H si et seulement si $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^2$.

Définition 1.4.7 *Si $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz d'un espace de Hilbert H, on appelle* **constante d'interpolation** *de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la constante $i(\mathfrak{X})$ définie par*

$$i(\mathfrak{X}) := \|J_{\mathfrak{X}}^{-1}\|.$$

La constante $i(\mathfrak{X})$ est appelée constante d'interpolation car elle donne une estimation sur la norme des solutions du problème d'interpolation (1.29). En effet, étant donnée $a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^2$, si $x \in H$ est une solution du problème (1.29), on a

$$\|x\| = \|J_{\mathfrak{X}}^{-1} a\| \leqslant i(\mathfrak{X}) \|a\|.$$

Remarque 1.4.8 Si $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz d'un espace de Hilbert H et si U désigne un orthogonalisateur de $\mathfrak{X}$, alors $\|U\|^{-1}$ et $\|U^{-1}\|$ sont les meilleures constantes dans l'inégalité

$$c\left(\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \left\|\sum_{n\geqslant 1} a_n x_n\right\| \leqslant C\left(\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^2\right)^{1/2}. \tag{1.30}$$

En effet, tout d'abord, remarquons que, pour $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^2_{\mathfrak{F}}$, on a

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^2\right)^{1/2} = \left\|\sum_{n\geqslant 1} a_n U x_n\right\| \leqslant \|U\| \left\|\sum_{n\geqslant 1} a_n x_n\right\|,$$

et

$$\left\|\sum_{n\geqslant 1} a_n x_n\right\| = \left\|U^{-1}\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n U x_n\right)\right\| \leqslant \|U^{-1}\| \left(\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Donc $\|U\|^{-1}$ et $\|U^{-1}\|$ sont des constantes vérifiant l'inégalité (1.30).
D'autre part, si c et C sont deux constantes vérifiant (1.30), on a

$$c \leqslant \|U\|^{-1} \quad \text{et} \quad \|U^{-1}\| \leqslant C.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\|U\| &= \sup_{(a_n)\in\ell^2_{\mathfrak{F}}} \frac{\|\sum_{n\geqslant 1} a_n U x_n\|}{\|\sum_{n\geqslant 1} a_n x_n\|} \\
&= \sup_{(a_n)\in\ell^2_{\mathfrak{F}}} \frac{(\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^2)^{1/2}}{\|\sum_{n\geqslant 1} a_n x_n\|} \\
&\leqslant \frac{1}{c}.
\end{aligned}$$

De plus, d'après le théorème de Riesz-Fischer, l'opérateur T défini par

$$\begin{array}{rccl}
T: & H & \longrightarrow & \ell^2 \\
 & x & \longmapsto & (\langle x, Ux_n\rangle)_{n\geqslant 1}.
\end{array}$$

est un isomorphisme isométrique de H sur ℓ^2 et on a $T(Ux_n) = e_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.
Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
\|U^{-1}\| &= \sup_{x\in H} \frac{\|U^{-1}x\|}{\|x\|} \\
&= \sup_{a\in\ell^2} \frac{\|U^{-1}T^{-1}a\|}{\|a\|} \\
&= \sup_{(a_n)\in\ell^2_{\mathfrak{F}}} \frac{\|U^{-1}(\sum_{n\geqslant 1} a_n U x_n)\|}{(\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^2)^{1/2}} \\
&\leqslant C.
\end{aligned}$$

Remarque 1.4.9 Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une base de Riesz d'un espace de Hilbert H. Si U_1 et U_2 sont deux orthogonalisateurs de $\mathfrak{X}$, alors la remarque 1.4.8 implique que

$$\|U_1\| = \|U_2\| \quad \text{et} \quad \|U_1^{-1}\| = \|U_2^{-1}\|.$$

Cette remarque conduit donc à la définition suivante.

Définition 1.4.10 *Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une base de Riesz d'un espace de Hilbert H et U un orthogonalisateur de $(x_n)_{n\geqslant 1}$. On appelle* **constante de Riesz** *de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la constante $r(\mathfrak{X})$ définie par*

$$r(\mathfrak{X}) := \|U\|\|U^{-1}\|.$$

Remarque 1.4.11 Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une base de Riesz d'un espace de Hilbert H. Alors la constante de Riesz $r(\mathfrak{X})$ caractérise la proximité de la suite $\mathfrak{X}$ d'une base orthonormale dans le sens suivant :

Proposition 1.4.12 *Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une base de Riesz d'un espace de Hilbert H telle que $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *est une base orthonormale de H.*

(ii) $r(\mathfrak{X}) = 1$.

Preuve : $(i) \Longrightarrow (ii)$: si $\mathfrak{X}$ est une base orthonormale de H alors on peut prendre comme orthogonalisateur $U = Id$ et par définition, on a donc $r(\mathfrak{X}) = 1$.
$(ii) \Longrightarrow (i)$: remarquons que

$$1 = \|x_n\| \leqslant \|U^{-1}\| \|Ux_n\| = \|U^{-1}\| \quad \text{et} \quad 1 = \|Ux_n\| \leqslant \|U\|.$$

Donc si $r(\mathfrak{X}) = \|U\| \|U^{-1}\| = 1$, nécessairement $\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$, ce qui implique que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base orthonormale. □

Proposition 1.4.13 *Soit $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une base de Riesz d'un espace de Hilbert H. Alors, on a les relations suivantes entre les différentes constantes :*

(a) $r(\mathfrak{X}) = i(\mathfrak{X}) i(\mathfrak{X}^*)$.

(b) $i(\mathfrak{X}) \geqslant \delta(\mathfrak{X})^{-1}$ *si de plus* $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Preuve : (a) : on a vu dans la preuve de la proposition 1.4.3, que $J_{\mathfrak{X}^*} = TU$ où T est l'isomorphisme isométrique de H sur ℓ^2 qui envoie la base orthonormale $(Ux_n)_{n\geqslant 1}$ sur la base orthonormale $(e_n)_{n\geqslant 1}$. Par conséquent, on obtient $\|J_{\mathfrak{X}^*}\| = \|U\|$ et $\|J_{\mathfrak{X}^*}^{-1}\| = \|U^{-1}\|$ (car T est unitaire). D'autre part, d'après (1.24) et (1.27), on a

$$J_{\mathfrak{X}}^{-1} = V_{\mathfrak{X}^*} = J_{\mathfrak{X}^*}^*,$$

d'où

$$r(\mathfrak{X}) = \|J_{\mathfrak{X}^*}^{-1}\| \|J_{\mathfrak{X}^*}\| = i(\mathfrak{X}^*) \|J_{\mathfrak{X}^*}^*\| = i(\mathfrak{X}^*) \|J_{\mathfrak{X}}^{-1}\| = i(\mathfrak{X}) i(\mathfrak{X}^*),$$

ce qui prouve (a).
(b) : notons que, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ Étant complète dans H, la biorthogonale est unique et donc la remarque 1.1.3 implique

$$\delta(\mathfrak{X})^{-1} = \sup_{n\geqslant 1} \|x_n^*\|.$$

Or $J_{\mathfrak{X}} x_n^* = e_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, d'où

$$\|x_n^*\| \leqslant \|J_{\mathfrak{X}}^{-1}\| = i(\mathfrak{X}),$$

ce qui donne (b). □

Pour conclure ce chapitre, montrons que les deux notions de base que nous avons vu (inconditionnelle et Riesz) coïncident dans le cadre des espaces de Hilbert.

Théorème 1.4.14 (de Köthe-Toeplitz) *Soient H un espace de Hilbert et $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de H telle que*

$$0 < \inf_{n\geqslant 1} \|x_n\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|x_n\| < \infty.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de H.*

(ii) *La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de H.*

Preuve :
$(i) \Longrightarrow (ii)$: c'est la remarque 1.4.2.
$(ii) \Longrightarrow (i)$: si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de H, on a d'après le théorème 1.3.3, $\mathrm{mult}(\mathfrak{X}) = \ell^\infty$. De plus, d'après (1.19), il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute $\mu \in \ell^\infty$, on a

$$\|\mu\|_{\mathrm{mult}} \leqslant c\|\mu\|_\infty.$$

En particulier, si M_μ désigne l'opérateur continu sur $\mathfrak{X}$ associé à $\mu = (\mu_k)_{k\geqslant 1}$, on a, pour toute suite $(a_k)_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n a_k \mu_k x_k \right\| &= \left\| M_\mu \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) \right\| \\ &\leqslant \|M_\mu\| \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| \\ &\leqslant c\|\mu\|_\infty \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|, \end{aligned}$$

ce qui donne en particulier, si $\mu = (\varepsilon_k)_{k\geqslant 1}$ $(\varepsilon_k = \pm 1)$,

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k x_k \right\| \leqslant c \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|. \tag{1.31}$$

Nous allons maintenant utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.4.15 *Soient H un espace de Hilbert et $(x_k)_{k=1}^n$ une suite finie de vecteurs de H. Alors on a*

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2,$$

où $\sum_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}}$ *signifie qu'on somme sur tous les choix possibles de* $\varepsilon_k = \pm 1$.

Preuve du lemme : on raisonne par récurrence.
Supposons que $n = 2$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}} \left\| \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k x_k \right\|^2 &= \frac{1}{4}(\|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 + \| - x_1 - x_2\|^2 + \| - x_1 + x_2\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2\right) \\
&= \|x_1 + x_2\|^2 \quad \text{d'après l'identité du parallélogramme.}
\end{aligned}$$

Une récurrence très simple sur le nombre de vecteurs permet alors de conclure.

□

En combinant le lemme et (1.31), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \|a_k x_k\|^2 &= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k x_k \right\|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}} c^2 \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\|^2 \\
&= c^2 \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\|^2 .
\end{aligned}$$

D'où, en notant $k_1 = \inf_{n \geqslant 1} \|x_n\|$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \frac{c^2}{k_1^2} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\|^2 . \tag{1.32}$$

Nous allons montrer que ceci permet d'en déduire que $J_{\mathfrak{X}^*} H \subset \ell^2$, où $J_{\mathfrak{X}^*}$ est l'opérateur défini sur H par $J_{\mathfrak{X}^*} x = (\langle x, x_k^* \rangle)_{k \geqslant 1}$.

Pour tout $x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \in \mathfrak{Lin}(x_n \,:\, n\geqslant 1)$, on a, en utilisant (1.32),

$$\begin{aligned} \|J_{\mathfrak{X}^*}x\|^2 &= \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \\ &\leqslant \frac{c^2}{k_1^2}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\|^2 \\ &= \frac{c^2}{k_1^2}\|x\|^2, \end{aligned} \tag{1.33}$$

Soit maintenant $x \in H$. La complétude de $(x_n)_{n\geqslant}$ permet d'affirmer qu'il existe $(u_p)_{p\geqslant 1} \subset \mathfrak{Lin}(x_n \,:\, n\geqslant 1)$ telle que $\lim_{p\to\infty} u_p = x$. L'inégalité (1.33) montre que la suite $(J_{\mathfrak{X}^*}u_p)_{p\geqslant 1}$ est de Cauchy dans ℓ^2 donc converge vers $a = (a_k)_{k\geqslant 1} \in \ell^2$. Montrons que $J_{\mathfrak{X}^*}x = a$. On a, pour tout $k\geqslant 1$:

$$\langle J_{\mathfrak{X}^*}x, e_k\rangle = \langle x, x_k^*\rangle = \lim_{p\to\infty}\langle u_p, x_k^*\rangle = \lim_{p\to\infty}\langle J_{\mathfrak{X}}u_p, e_k\rangle = \langle a, e_k\rangle,$$

ce qui prouve $J_{\mathfrak{X}^*}x = a$ et donc $J_{\mathfrak{X}^*}H \subset \ell^2$.

Il reste à remarquer que d'après le théorème 1.2.4 et le corollaire 1.2.5, on a

$$0 < \inf_{n\geqslant 1}\|x_n^*\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\|x_n^*\| < \infty.$$

D'autre part, le théorème 1.3.3 implique que $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est aussi une base inconditionnelle et donc par symétrie, on obtient que $J_{\mathfrak{X}}H \subset \ell^2$. Le théorème de Bari 1.4.5 permet alors de conclure que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz. □

Remarque 1.4.16 L'hypothèse

$$0 < \inf_{n\geqslant 1}\|x_n\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\|x_n\| < \infty$$

dans le théorème de Köthe-Toeplitz est essentielle. En effet, la propriété de base de Riesz impose, par définition, ce contrôle sur les normes alors que la propriété de base inconditionnelle ne dépend pas des normes. Plus précisément, considérons $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une base de Riesz d'un espace de Hilbert H. Alors, si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$, il se peut que $(\lambda_n x_n)_{n\geqslant 1}$ ne soit pas une base de Riesz de H, alors que, quelque soit la suite de scalaires choisie dans $\mathbb{C}^*$, $(\lambda_n x_n)_{n\geqslant 1}$ reste toujours une base inconditionnelle. Ainsi, $\left(n\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle mais ne peut pas être une base de Riesz car elle n'est pas bornée.

Chapitre 2

Noyaux reproduisant dans les espaces H^p

Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés géométriques des suites de noyaux reproduisant dans les espaces de Hardy H^p. Nous allons montrer que, pour $1 < p < +\infty$, $(H^p)^*$ peut s'identifier avec H^q par la formule

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta, \qquad (f \in H^p, g \in H^q).$$

D'autre part, étant donné $f \in H^p$ et $\lambda \in \mathbb{D}$, on a

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda\rangle,$$

avec $k_\lambda(z) = \dfrac{1}{1-\overline{\lambda}z} \in H^q$. La fonction k_λ s'appelle le noyau reproduisant de H^p au point λ. Après avoir rappelé quelques résultats généraux concernant les espaces de Hardy, nous allons donner une caractérisation pour qu'une suite de noyaux reproduisant $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ soit minimale (uniformément minimale) dans H^q. Puis, dans la section 3, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas hilbertien H^2 et nous donnerons une caractérisation sur $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ pour que la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ forme une base inconditionnelle dans son span.

2.1 Quelques rappels sur les espaces de Hardy

2.1.1 Formule de Cauchy et de Poisson

Pour $1\leqslant p\leqslant\infty$, H^p désigne l'espace de Hardy du disque unité défini par

$$H^p = \left\{ f\,:\,\mathbb{D} \longmapsto \mathbb{C} \text{ holomorphe} : \|f\|_p^p := \sup_{0\leqslant r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta < \infty \right\}, \quad (1\leqslant p < \infty)$$

et

$$H^\infty := \{f \,:\, \mathbb{D} \longmapsto \mathbb{C} \text{ holomorphe} : \|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty\}.$$

D'après le théorème de Fatou, si $f \in H^p$, alors $f^*(\zeta) = \lim_{r\to 1} f(r\zeta)$ existe pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$. De plus, on a $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ et

$$\widehat{f^*}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = 0, \quad (n < 0). \tag{2.1}$$

Si $z = re^{i\theta}$ et $f \in H^p$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it})\,dt \tag{2.2}$$

et

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \tag{2.3}$$

où $P_r(\theta - t) = \dfrac{1 - r^2}{|1 - re^{i(\theta - t)}|^2}$ désigne le noyau de Poisson et Γ le cercle unité positivement orienté.

Réciproquement, les formules (2.2) et (2.3) définissent des fonctions de H^p, pour toute fonction $f^* \in L^p$ telle que $\widehat{f^*}(n) = 0$, $n < 0$. Rappelons enfin que, pour $1 \leqslant p < \infty$ et $f \in H^p$, on a

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^p\,d\theta = 0,$$

On identifiera donc H^p avec le sous-espace des fonctions $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour lesquelles $\hat{f}(n) = 0$, $n < 0$ et on désignera (la plupart du temps) par la même lettre f et f^*.

2.1.2 Suites de Blaschke

Rappelons que si $f \in H^p$, $f \not\equiv 0$, et si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ désigne la suite des zéros de f, on a

$$\sum_{n\geqslant 1} (1 - |\lambda_n|) < \infty. \tag{2.4}$$

Réciproquement, soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $\mathbb{D}$, $\lambda_n \neq 0$, satisfaisant (2.4). Si $k \in \mathbb{N}$ et si l'on pose

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\frac{\lambda_n - z}{1 - \overline{\lambda_n} z} \quad (z \in \mathbb{D}), \tag{2.5}$$

la fonction $B \in H^\infty$ et ne possède pas d'autre zéros que les points λ_n (outre l'origine si $k > 0$).
Une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ satisfaisant (2.4) est appelée **suite de Blaschke** et la fonction B qui lui est associée par (2.5) est appelée un **produit de Blaschke**.

Notation : pour $\lambda \in \mathbb{D}$, on posera b_λ le facteur de Blaschke élémentaire associé à λ et défini par

$$b_\lambda(z) := \frac{|\lambda|}{\lambda}\frac{\lambda - z}{1 - \overline{\lambda} z} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

2.1.3 Séries de Fourier

Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on considére la série de Fourier formelle associée à f définie par

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{in\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

et s_n les sommes partielles définies par

$$s_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)e^{in\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

La question naturelle qui se pose est : peut-on reconstruire f à partir de sa série de Fourier ? En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, on peut montrer qu'il existe une fonction continue sur $\mathbb{T}$, donc en particulier dans $L^1(\mathbb{T})$, dont la série de Fourier diverge en un point. Cependant, en utilisant les moyennes arithmétiques des sommes partielles, on peut construire un procédé de sommation.

Théorème 2.1.1 ((Hoffman, 1965), p.17) *Soit $1\leqslant p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$. On note, pour $n\geqslant 1$,*

$$\sigma_n := \frac{1}{n}(s_0 + \cdots + s_{n-1}).$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n - f\|_p = 0.$$

Si de plus, f est continue sur $\mathbb{T}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n - f\|_\infty = 0.$$

Notons par Pol_+ l'ensemble des polynômes analytiques sur $\mathbb{T}$, c'est-à-dire

$$Pol_+ = \mathfrak{Lin}(e^{in\theta} : n\geqslant 0),$$

et par $A(\mathbb{D})$ l'algèbre du disque, c'est-à-dire

$$A(\mathbb{D}) = \{f \in H^\infty : f \text{ est continue sur } \mathbb{T}\}.$$

En utilisant le théorème précédent, on obtient :

Théorème 2.1.2 *Soit* $1\leqslant p < \infty$*. Alors* Pol_+ *est dense dans* H^p *pour la norme* $\|\cdot\|_p$ *et dense dans* $A(\mathbb{D})$ *pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$*.*

Preuve : Soit $f \in H^p$. D'après le théorème 2.1.1,

$$\lim_{n\geqslant 1} \|\sigma_n - f\|_p = 0,$$

où

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(s_0 + \cdots + s_{n-1}).$$

Or

$$s_k(e^{i\theta}) = \sum_{p=-k}^{k} \widehat{f}(p)e^{ip\theta} = \sum_{p=0}^{k} \widehat{f}(p)e^{ip\theta} \quad \text{car } f \in H^p.$$

Par conséquent, $s_k \in Pol_+$ et donc $\sigma_n \in Pol_+$ $(n\geqslant 0)$. Toute fonction de H^p est donc limite pour la norme $\|\cdot\|_p$ d'une suite de polynômes analytiques. La preuve pour $A(\mathbb{D})$ est exactement la même. □

2.1.4 Dual des espaces H^p, $1\leqslant p < \infty$

Dans ce paragraphe, nous allons donner deux descriptions du dual des espaces H^p et montrer que, pour $1 < p < \infty$, ces espaces sont réflexif.

Rappelons tout d'abord que les espaces de Hardy H^p sont des espaces de Banach pour $1\leqslant p\leqslant\infty$. En utilisant l'identification introduite au paragraphe 2.1.1, H^p peut être vu comme un sous-espace fermé de L^p. En utilisant un résultat classique de dualité (voir théorème A.3.1), on obtient que

$$(H^p)^* \text{ est isométriquement isomorphe à } (L^p)^*/H^{p\perp}.$$

D'autre part, d'après le théorème de représentation de Riesz, toute forme linéaire continue Φ sur L^p $(1\leqslant p < \infty)$ a une unique représentation sous la forme

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})\,d\theta,$$

où $g \in L^q$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De plus, on a $\|\Phi\| = \|g\|_q$. Par conséquent, $(L^p)^*$ est isométriquement isomorphe à L^q. Pour déterminer le dual de H^p, il reste donc à trouver l'annihilateur de H^p dans $(L^p)^*$.

Si $g \in (H^p)^\perp$, on a, en particulier

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}g(e^{i\theta})\,d\theta = 0, \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

Cela signifie que $\widehat{g}(n) = 0$, $n < 0$. La fonction $g(e^{i\theta})$ est donc la limite au bord d'une fonction $g(z) \in H^q$. De plus, on a

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})\, d\theta = 0.$$

Par conséquent, si on note par

$$H_0^q = \{g \in H^q \,:\, g(0) = 0\}$$

on a $(H^p)^\perp \subset H_0^q$. Réciproquement, si $g \in H_0^q$, on a d'après (2.1)

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} g(e^{i\theta}) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Comme les polynômes sont denses dans H^p (voir théorème 2.1.2), $(1 \leqslant p < \infty)$, on en déduit que

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) = 0, \quad (f \in H^p),$$

c'est à dire que $g \in (H^p)^\perp$ et donc $(H^p)^\perp = H_0^q$. Par conséquent, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.1.3 *Pour $1 \leqslant p < \infty$,*

l'espace $(H^p)^*$ est isométriquement isomorphe à L^q/H_0^q,

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit π_1 (resp. π_2) la surjection canonique de L^q sur L^q/H^q (resp. sur L^q/H_0^q). Nous allons montrer que L^q/H_0^q est isométriquement isomorphe à L^q/H^q. Considérons φ l'application définie par

$$\begin{array}{rll} \varphi \,: & L^q/H^q & \longrightarrow L^q/H_0^q \\ & \pi_1(g) & \longmapsto \pi_2(zg), \end{array}$$

où $z : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $z(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Remarquons tout d'abord que φ est bien définie car si $\pi_1(f) = \pi_2(g)$, on a $f - g \in H^q$, ce qui implique que $z(f-g) \in H_0^q$ et donc $\pi_2(zf) = \pi_2(zg)$. Il est clair que φ est linéaire. D'autre part, cette application est injective car si $\varphi(\pi_1(g)) = 0$, on a $\pi_2(zg) = 0$, c'est à dire que $zg \in H_0^q$, soit $g \in H^q$ et donc $\pi_1(g) = 0$. Montrons que φ est surjective.

Soit $f \in L^q$ et définissons $g = \overline{z} f$. On a bien sûr $g \in L^q$ et $\varphi(\pi_1(g)) = \pi_2(z\overline{z}f) = \pi_2(f)$. L'application φ est donc une bijection de L^q/H^q sur L^q/H_0^q.

Remarquons enfin que, pour $g \in L^q$, on a, par définition de la norme quotient,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(\pi_1(g))\|_{L^q/H_0^q} &= \|\pi_2(zg)\|_{L^q/H_0^q} \\
&= \inf_{h \in H_0^q} \|zg + h\|_q \\
&= \inf_{h_1 \in H^q} \|zg + zh_1\|_q \quad \text{car } H_0^q = zH^q \\
&= \inf_{h_1 \in H^q} \|g + h_1\|_q \\
&= \|\pi_1(g)\|_{L^q/H^q},
\end{aligned}$$

ce qui montre que φ est isométrique. On obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.4 *Pour* $1 \leqslant p < \infty$,

l'espace $(H^p)^*$ *est isométriquement isomorphe à* L^q/H^q,

Pour $1 < p < \infty$,

l'espace $(L^q/H^q)^*$ *est isométriquement isomorphe à* H^p.

Preuve : La première assertion du corollaire découle immédiatement du théorème 2.1.3 et des considérations précédentes. Pour la deuxième assertion, remarquons que

$$(L^q/H^q)^* \cong (L^q/H_0^q)^* \cong ((L^p)^*/H_0^q)^*,$$

le symbôle $\cong$ signifiant isométriquement isomorphe. Une application du théorème A.3.1 (b) à $X = (L^p)^*$ et $M = H_0^q$ montre que $((L^p)^*/H_0^q)^*$ est isométriquement isomorphe à $(H_0^q)^\perp$, vu comme sous-espace de $(L^{p*})^*$. D'où

$$(L^q/H^q)^* \cong (H_0^q)^\perp.$$

Or

$$\begin{aligned}
(H_0^q)^\perp &= \{y \in (L^{p*})^* \,:\, y(x^*) = 0, \forall x^* \in H_0^q\} \\
&\cong \{x \in L^p \,:\, x^*(x) = 0, \forall x^* \in H_0^q\} \quad \text{car } L^p \text{ est réflexif } (1 < p < \infty) \\
&= {}^\perp H_0^p \\
&= {}^\perp (H^p)^\perp \\
&= H^q \quad \text{d'après un résultat classique de dualité (voir par exemple (Rudin, 1991), p. 96).}
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.5 Ce corollaire montre en particulier que, pour $1 < p < \infty$, l'espace H^p est réflexif.

Pour finir sur ces résultats de dualité, donnons un dernier théorème.

Théorème 2.1.6 *Soit $1 < p < \infty$. Alors*

$$\text{l'espace } (H^p)^* \text{ est isomorphe à l'espace } H^q,$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pour la démonstration de ce résultat, nous allons utiliser le théorème suivant dû à M. Riesz :

Théorème 2.1.7 ((Hoffman, 1965), p.151) *Soit $1 < p < \infty$. La projection de Riesz P_+ définie par*

$$P_+ \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{in\theta}$$

est une projection bornée de L^p sur H^p. En particulier, on a :

$$L^p = H_0^p \oplus \overline{H^p} = H^p \oplus \overline{H_0^p},$$

où $\oplus$ désigne une somme directe. De plus, dans le cas $p = 2$, la somme directe est en fait une somme orthogonale.

Preuve du théorème 2.1.6 : soit L l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccc} L : & H^q & \longrightarrow & (H^p)^* \\ & g & \longmapsto & \Phi_g, \end{array}$$

où

$$\Phi_g(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} \, d\theta, \quad (f \in H^p).$$

Nous allons montrer que L définit un isomorphisme de H^q sur $(H^p)^*$. Tout d'abord, remarquons que, d'après l'inégalité de Hölder, on a, pour $f \in H^p$ et $g \in H^q$,

$$|\Phi_g(f)| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Ceci montre que $\Phi_g \in (H^p)^*$, avec $\|\Phi_g\| \leqslant \|g\|_q$. Donc L est bien à valeurs dans $(H^p)^*$ et est continue avec $\|L\| \leqslant 1$.

Montrons que L est injective. Soit $g \in H^q$ telle que $L(g) = 0$. Ceci signifie que, pour toute fonction $f \in H^p$, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} \, d\theta = 0,$$

c'est à dire que $\bar{g} \in (H^p)^\perp = H_0^q$. D'où $\bar{g} \in H_0^q \cap \overline{H^q}$, ce qui implique, par le théorème 2.1.7, que $g = 0$.

Montrons que L est surjective. Soit $\Phi \in (H^p)^*$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger Φ en une application $\widetilde{\Phi} \in (L^p)^*$ telle que $\widetilde{\Phi}_{|H^p} = \Phi$ et

$\|\widetilde{\Phi}\| = \|\Phi\|$. Le théorème de représentation de Riesz montre alors qu'il existe une unique fonction $\widetilde{g} \in L^q$ telle que $\|\widetilde{\Phi}\| = \|\widetilde{g}\|_q$ et

$$\widetilde{\Phi}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\widetilde{g}(e^{i\theta})\, d\theta, \quad (f \in L^p).$$

En utilisant le théorème 2.1.7, il existe deux fonctions $g_1 \in H_0^q$ et $g_2 \in H^q$ telles que $\widetilde{g} = g_1 + \overline{g_2}$. On obtient, alors, pour toute fonction $f \in H^p$,

$$\begin{aligned}
\Phi(f) = \widetilde{\Phi}(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\widetilde{g}(e^{i\theta})\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})g_1(e^{i\theta})\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g_2(e^{i\theta})}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g_2(e^{i\theta})}\, d\theta \quad \text{car } g_1 \in H_0^q = (H^p)^\perp \\
&= \Phi_{g_2}(f).
\end{aligned}$$

D'où $\Phi = \Phi_{g_2} = L(g_2)$. L'application L est donc surjective et réalise un isomorphisme entre H^q et $(H^p)^*$. $\square$

Remarque 2.1.8 En utilisant le théorème le théorème A.3.1 et le théorème de représentation de Riesz, pour toute fonction $g \in H^q$, on a

$$\|\Phi_g\| = \|\pi(\bar{g})\|_{L^q/H_0^q} = \inf_{h \in H_0^q} \|\bar{g} + h\|_q = \inf_{h \in H_0^q} \|g + \bar{h}\|_q,$$

où π est la surjection canonique de L^q sur L^q/H_0^q. Si P_+ désigne la projection de Riesz de L^q sur H^q, on obtient, pour toute fonction $h \in H_0^q$:

$$\|g\|_q = \|P_+(g + \bar{h})\|_q \leqslant A_q \|g + \bar{h}\|_q$$

où A_q désigne la norme de la projection de Riesz. On obtient donc

$$\|\Phi_g\| \leqslant \|g\|_q \leqslant A_q \|\Phi_g\|. \tag{2.6}$$

L'isomorphisme L entre H^q et $(H^p)^*$ n'est donc pas une isométrie, sauf pour $p = 2$.

Remarque 2.1.9 Dans la suite du cours, on identifiera le dual de H^p avec H^q $(1 < p < \infty)$, par la formule :

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta, \quad (f \in H^p,\ g \in H^q). \tag{2.7}$$

2.1.5 Noyaux reproduisants de H^p

Soit $1 < p < \infty$ et $f \in H^p$. D'après la relation (2.3), on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-\lambda} ie^{i\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-\lambda e^{-i\theta}}\,d\theta \\ &= \langle f, k_\lambda\rangle, \end{aligned}$$

où $k_\lambda(z) := \frac{1}{1-\bar{\lambda}z}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le crochet de dualité défini par (2.7).

Définition 2.1.10 *Soient $1 < p < \infty$. On appelle* **noyau reproduisant** *de H^p au point $\lambda \in \mathbb{D}$ la fonction $k_\lambda \in H^q$ définie par*

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\bar{\lambda}z} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Pour toute fonction $f \in H^p$ et tout $\lambda \in \mathbb{D}$, on a

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda\rangle.$$

Il sera utile pour la suite d'obtenir une estimation de la norme H^q des noyaux reproduisants.

Lemme 2.1.11 *Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. Alors*

$$\|k_\lambda\|_2 = \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda|^2}},$$

et, pour $1 < q < \infty$, $q \neq 2$, on a

$$\frac{1}{(1-|\lambda|^2)^{1/p}} \leqslant \|k_\lambda\|_q \leqslant A_q \frac{1}{(1-|\lambda|^2)^{1/p}},$$

où $\|\cdot\|_q$ désigne la norme dans H^q et A_q la norme de la projection de Riesz P_+ dans L^q.

Preuve : Pour $q = 2$, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \|k_\lambda\|_2^2 &= \langle k_\lambda, k_\lambda\rangle \\ &= k_\lambda(\lambda) \\ &= \frac{1}{1-|\lambda|^2}. \end{aligned}$$

Pour $1 < q < \infty$, $q \neq 2$, on utilise la relation (2.6), ce qui donne

$$\|\Phi_{k_\lambda}\| \leqslant \|k_\lambda\|_q \leqslant A_q \|\Phi_{k_\lambda}\|,$$

où

$$\Phi_{k_\lambda}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{k_\lambda(e^{i\theta})}\, d\theta = f(\lambda), \quad (f \in H^p).$$

On a donc

$$\|\Phi_{k_\lambda}\| = \sup_{\substack{f \in H^p \\ \|f\|_p \leqslant 1}} |f(\lambda)|,$$

et il reste donc à prouver que

$$\sup_{\substack{f \in H^p \\ \|f\|_p \leqslant 1}} |f(\lambda)| = \frac{1}{(1 - |\lambda|^2)^{1/p}}.$$

Pour $1 < r, s < \infty$, montrons que

$$\sup_{\substack{f \in H^r \\ \|f\|_r \leqslant 1}} |f(\lambda)|^r = \sup_{\substack{h \in H^s \\ \|h\|_s \leqslant 1}} |h(\lambda)|^s. \tag{2.8}$$

Soit $f \in H^r$ et soit B le produit de Blaschke formé des zéros de f. Le théorème de factorisation de Nevanlinna implique qu'il existe $g \in H^r$, $g \neq 0$ dans $\mathbb{D}$, telle que $f = Bg$ et $\|f\|_r = \|g\|_r$. Puisque g ne possède pas de zéros dans $\mathbb{D}$ et puisque $\mathbb{D}$ est simplement connexe, il existe φ, holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $e^\varphi = g$. Posons alors

$$h = e^{\frac{r}{s}\varphi}.$$

La fonction h est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et on a $|h|^s = |e^\varphi|^r = |g|^r$. Par conséquent, $h \in H^s$ et on a $\|h\|_s^s = \|g\|_r^r = \|f\|_r^r$. Comme

$$|f(\lambda)|^r \leqslant |g(\lambda)|^r = |h(\lambda)|^s,$$

on obtient que

$$\sup_{\substack{f \in H^r \\ \|f\|_r \leqslant 1}} |f(\lambda)|^r \leqslant \sup_{\substack{h \in H^s \\ \|h\|_s \leqslant 1}} |h(\lambda)|^s.$$

L'égalité (2.8) suit alors de la symétrie entre r et s. Il reste à appliquer cette égalité avec $r = p$ et $s = 2$, ce qui donne

$$\sup_{\substack{f \in H^p \\ \|f\|_p \leqslant 1}} |f(\lambda)| = \sup_{\substack{h \in H^2 \\ \|h\|_2 \leqslant 1}} |h(\lambda)|^{2/p} = \|k_\lambda\|_2^{2/p} = \frac{1}{(1 - |\lambda|^2)^{1/p}}.$$

$\square$

2.1.6 Sous-espaces fermés de H^p, invariants par le backward-shift

L'étude des propriétés géométriques des suites de noyaux reproduisant dans H^p va nécessiter un certain nombre de résultats sur les sous-espaces fermés de H^p, invariants par le backward-shift. Pour $1 < p < \infty$, on note S le shift sur H^p, défini par

$$\begin{array}{rccl} S: & H^p & \longrightarrow & H^p \\ & f & \longmapsto & zf, \end{array}$$

où $z : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $z(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Rappelons le théorème de Beurling qui donne la description des sous-espaces fermés de H^p, invariants par S.

Théorème 2.1.12 (Beurling, voir (Nikolski, 1986), p.27) *Soient $1 < p < +\infty$ et E un sous-espace fermé de H^p. Alors*

$$SE \subset E \Longleftrightarrow \exists \Theta \text{ intérieure} : E = \Theta H^p.$$

Donnons un premier résultat qui montre que le sous-espace ΘH^p peut être complémenté dans H^p.

Lemme 2.1.13 *Soient $1 < p < \infty$ et Θ une fonction intérieure dans H^∞. Le sous-espace ΘH^p est un sous-espace fermé de H^p et il peut-être complémenté dans H^p. Plus précisément, on a*

$$H^p = \Theta H^p \oplus K^p_\Theta,$$

où $K^p_\Theta = P_\Theta H^p$, $P_\Theta = Id - \Theta P_+ \overline{\Theta}$, avec $P_+ : L^p \to H^p$ la projection de Riesz.

De plus, dans le cas $p = 2$, la somme directe est une somme orthogonale.

Preuve : Soit

$$\begin{array}{rccl} Q: & H^p & \longrightarrow & H^p \\ & f & \longmapsto & Qf := \Theta P_+ \overline{\Theta} f. \end{array}$$

Comme P_+ est continue, Q est une application linéaire continue. D'autre part, en utilisant le fait que $\Theta\overline{\Theta} = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$, on a

$$Q^2 = \Theta P_+ \overline{\Theta} \Theta P_+ \overline{\Theta} = \Theta P_+^2 \overline{\Theta} = \Theta P_+ \overline{\Theta} = Q.$$

Donc Q est une projection continue. Montrons que $\operatorname{Im} Q = \Theta H^p$. Il est clair que $\operatorname{Im} Q \subset \Theta H^p$. Réciproquement, soit $g = \Theta f$, $f \in H^p$. On a

$$Qg = \Theta P_+ \overline{\Theta} g = \Theta P_+ \overline{\Theta} \Theta f = \Theta P_+ f = \Theta f = g,$$

d'où $g \in \operatorname{Im} Q$. Par conséquent, ΘH^p est l'image d'une projection continue dans H^p. Le sous-espace ΘH^p est donc fermé et peut être complémenté dans H^p (voir (Rudin, 1991), page 133-134). Plus précisément,

$$\begin{aligned} H^p &= \operatorname{Im} Q \oplus \operatorname{Im}(Id - Q) \\ &= \Theta H^p \oplus K^p_\Theta, \end{aligned}$$

où $K^p_\Theta = (Id - Q)H^p = P_\Theta H^p$.
Dans le cas $p = 2$, il suffit de remarquer que $\operatorname{Im} Q \perp \operatorname{Im}(Id - Q)$. $\square$

En fait, le sous-espace qui va intervenir dans l'étude des propriétés géométriques des suites de noyaux reproduisant est le sous-espace K^p_Θ. On peut donner d'autres descriptions utiles de ce sous-espace.

Lemme 2.1.14 *Soient $1 < p < \infty$ et Θ une fonction intérieure dans H^∞. On a*

$$K^p_\Theta = {}^\perp(\Theta H^q),$$

où ΘH^q est vu comme un sous-espace de $(H^p)^*$. On a également

$$K^p_\Theta = H^p \cap \Theta \overline{H^p_0}.$$

Preuve : Par définition, on a

$${}^\perp(\Theta H^q) = \{f \in H^p : \langle \Theta g, f\rangle = 0, \forall g \in H^q\},$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le crochet de dualité entre H^p et H^q. Soit $f \in K^p_\Theta$, $f = P_\Theta h$, $h \in H^p$. On a

$$\begin{aligned}
\langle \Theta g, f\rangle &= \langle \Theta g, h - \Theta P_+ \overline{\Theta} h\rangle \\
&= \langle \Theta g, h\rangle - \langle g, P_+ \overline{\Theta} h\rangle \\
&= \langle \Theta g, h\rangle - \langle g, \overline{\Theta} h\rangle \quad \text{car } g \in H^q \\
&= \langle \Theta g, h\rangle - \langle \Theta g, h\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où $K^p_\Theta \subset {}^\perp(\Theta H^q)$. Réciproquement, soit $f \in {}^\perp(\Theta H^q)$. Comme $f \in H^p$, il existe, d'après le lemme 2.1.13, g_1, $g_2 \in H^p$ telles que $f = \Theta g_1 + P_\Theta g_2$. Pour $g \in H^q$, on a

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \Theta g, f\rangle \\
&= \langle \Theta g, \Theta g_1\rangle + \langle \Theta g, P_\Theta g_2\rangle \\
&= \langle g, g_1\rangle + \langle \Theta g, P_\Theta g_2\rangle.
\end{aligned}$$

Comme $P_\Theta g_2 \in K^p_\Theta \subset {}^\perp(\Theta H^q)$, on a $\langle \Theta g, P_\Theta g_2\rangle = 0$, ce qui donne

$$\langle g, g_1\rangle = 0, \quad (g \in H^q).$$

D'où $\overline{g_1} \in (H^q)^\perp = H^p_0$, c'est-à-dire $g_1 \in \overline{H^p_0} \cap H^p = \{0\}$. Donc $f = P_\Theta g_2 \in K^p_\Theta$. Par conséquent, on a $K^p_\Theta = {}^\perp(\Theta H^q)$.

Pour montrer que $K^p_\Theta = H^p \cap \Theta\overline{H^p_0}$, remarquons que, si $f \in H^p$, on a

$$\begin{aligned} f \in K^p_\Theta &\iff \langle \Theta g, f\rangle = 0, \quad (g \in H^q) \\ &\iff \langle g, \overline{\Theta} f\rangle = 0, \quad (g \in H^q) \\ &\iff \Theta\overline{f} \in (H^q)^\perp = H^p_0 \\ &\iff \overline{\Theta} f \in \overline{H^p_0} \\ &\iff f \in \Theta\overline{H^p_0}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Enfin, pour finir avec ces lemmes préparatoires, précisons le dual de K^p_Θ.

Lemme 2.1.15 *Soient $1 < p < \infty$ et Θ une fonction intérieure dans H^∞. Alors l'espace $(K^p_\Theta)^*$ est isomorphe à l'espace K^q_Θ, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dans le cas $p = 2$, cet isomorphisme est aussi isométrique.*

Preuve : D'après le théorème A.3.1, on a

$$(K^p_\Theta)^* \cong (H^p)^*/(K^p_\Theta)^\perp.$$

D'autre part, en utilisant le théorème 2.1.6, on a $H^{p*} \simeq H^q$ et d'après le lemme 2.1.14, on a $(K^p_\Theta)^\perp = \Theta H^q$. D'où

$$(K^p_\Theta)^* \simeq H^q/\Theta H^q.$$

Comme $H^q = K^q_\Theta \oplus \Theta H^q$, on obtient

$$H^q/\Theta H^q \simeq K^q_\Theta,$$

d'où

$$(K^p_\Theta)^* \simeq K^q_\Theta.$$

Dans le cas $p = 2$, il est clair que tous les isomorphismes précédents sont en fait isométriques. □

2.2 Suites minimales et uniformément minimales de noyaux reproduisants dans H^p

La proposition suivante donne une caractérisation pour qu'une suite de noyaux reproduisant $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ soit minimale dans H^p et précise également le sous-espace vectoriel fermé engendré par $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$.

Proposition 2.2.1 *Soient $1 < q < \infty$ et $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de points distincts de $\mathbb{D}$.*

(a) *Si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas une suite de Blaschke, alors $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est complète dans H^q et n'est pas minimale.*

(b) *Si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke et si B désigne le produit de Blaschke associé, alors $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est minimale dans H^q et*

$$\mathtt{Span}_{H^q}(k_{\lambda_n} : n\geqslant 1) = K_B^q.$$

Preuve : (a) : soit $f \in H^p$ et $f(\lambda_n) = 0$ $(n\geqslant 1)$. Si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas une suite de Blaschke, alors nécessairement, $f \equiv 0$, ce qui prouve d'après le théorème de Hahn-Banach que $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est complète dans H^q. Supposons maintenant que $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est une suite minimale dans H^q. Cela implique en particulier qu'il existe une fonction $f \in H^p$ telle que $f(\lambda_1) = 1$ et $f(\lambda_n) = 0$, $n\geqslant 2$. On en déduit donc que $f \not\equiv 0$ et donc

$$\sum_{n\geqslant 2}(1 - |\lambda_n|) < \infty,$$

ce qui est absurde si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas une suite de Blaschke.

(b) : si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke, notons par B_n le produit de Blaschke associé à la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ sans le facteur correspond à λ_n, c'est-à-dire que

$$B_n = \frac{B}{b_{\lambda_n}} = \prod_{k\neq n} b_{\lambda_k}.$$

On a alors, bien sûr, $B_n \in H^p$ et, pour tout $n, p\geqslant 1$, on a

$$\left\langle \frac{B_n}{B_n(\lambda_n)}, k_{\lambda_p} \right\rangle = \frac{B_n(\lambda_p)}{B_n(\lambda_n)} = \delta_{n,p}.$$

Ceci prouve que $\left(\frac{B_n}{B_n(\lambda_n)}\right)_{n\geqslant 1}$ est une biorthogonale de $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ dans H^p et donc la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est minimale dans H^q.

Montrons maintenant que $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est complète dans K_B^q, c'est-à-dire que $\mathtt{Span}_{H^q}(k_{\lambda_n} : n\geqslant 1) = K_B^q$. Pour tout $g \in H^p$, on a :

$$\langle Bg, k_{\lambda_n} \rangle = B(\lambda_n)g(\lambda_n) = 0 \quad (n\geqslant 1),$$

et donc

$$BH^p \subset (\mathtt{Span}_{H^q}(k_{\lambda_n} : n\geqslant 1))^{\perp}.$$

Réciproquement, soit $f \in H^p$ telle que $\langle f, k_{\lambda_n} \rangle = 0$ $(n\geqslant 1)$. On a donc $f(\lambda_n) = 0$ $(n\geqslant 1)$ et par conséquent, il existe $g \in H^p$ telle que $f = Bg$. On obtient donc

$$(\mathtt{Span}_{H^q}(k_{\lambda_n} : n\geqslant 1))^{\perp} \subset BH^p.$$

Par conséquent, on a $(\mathtt{Span}_{H^q}(k_{\lambda_n} : n\geqslant 1))^{\perp} = BH^p$. D'où, en utilisant le lemme 2.1.14, on obtient

$$\mathtt{Span}_{H^q}(k_{\lambda_n} : n\geqslant 1) = {}^{\perp}(BH^p) = K_B^q.$$

□

On obtient le corollaire immédiat suivant

Corollaire 2.2.2 *Soient $1 < q < +\infty$ et $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de points distincts de $\mathbb{D}$. La suite $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est minimale dans H^q si et seulement si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke. De plus, dans ce cas, on a*

$$\mathtt{Span}_{H^q}(k_{\lambda_n} : n\geqslant 1) = K_B^q,$$

où B désigne le produit de Blaschke associé à $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$.

Nous allons maintenant chercher un critère pour qu'une suite de noyaux reproduisant $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ soit uniformément minimale dans H^q. D'après ce qui précède, nécessairement $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke et si B désigne le produit de Blaschke associé, on a

$$\mathtt{Span}(k_{\lambda_n} : n\geqslant 1) = K_B^q.$$

Pour obtenir une caractérisation de l'uniforme minimalité, il sera donc utile de connaitre la biorthogonale de $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ qui vit dans le dual de K_B^q, à savoir d'après le lemme 2.1.15, celle qui vit dans K_B^p. La proposition suivante répond à cette question.

Proposition 2.2.3 *Soient $1 < q < \infty$, $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$ et B le produit de Blaschke associé à $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$. Alors la biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ dans K_B^p est unique et est donnée par*

$$y_n = \frac{(1-|\lambda_n|^2)}{B_n(\lambda_n)}\frac{B_n}{1-\overline{\lambda_n}z}, \quad (n\geqslant 1), \tag{2.9}$$

où $B_n = \dfrac{B}{b_{\lambda_n}}$.

Preuve : Tout d'abord, remarquons que $y_n \in H^p$ et, pour tout $g \in H^q$, on a

$$\begin{aligned}
\langle Bg, y_n\rangle &= \frac{1-|\lambda_n|^2}{\overline{B_n(\lambda_n)}}\langle Bg, B_n k_{\lambda_n}\rangle\\
&= \frac{1-|\lambda_n|^2}{\overline{B_n(\lambda_n)}}\langle b_{\lambda_n} g, k_{\lambda_n}\rangle \quad \text{car } B = B_n b_{\lambda_n} \text{ et } B_n\overline{B_n} = 1\\
&= \frac{1-|\lambda_n|^2}{\overline{B_n(\lambda_n)}} b_{\lambda_n}(\lambda_n) g(\lambda_n) = 0,
\end{aligned}$$

d'où $y_n \in {}^{\perp}(BH^p) = K_B^p$. D'autre part, on a, pour $n, p\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\langle y_n, k_{\lambda_p}\rangle &= \frac{1-|\lambda_n|^2}{B_n(\lambda_n)}\langle B_n k_{\lambda_n}, k_{\lambda_p}\rangle\\
&= \frac{1-|\lambda_n|^2}{B_n(\lambda_n)} B_n(\lambda_p)\frac{1}{1-\overline{\lambda_n}\lambda_p}\\
&= \delta_{n,p},
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$. Il reste à montrer l'unicité de la biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ dans K^p_B. Soit donc $(g_n)_{n\geqslant 1}$ une biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ dans K^p_B. On a $y_n - g_n \in (\mathtt{Span}(k_{\lambda_n} : n\geqslant 1)^{\perp} = BH^p$. Comme $BH^p \cap K^p_B = \{0\}$ (d'après le lemme 2.1.13), on a $g_n = y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

□

Nous allons maintenant donner la caractérisation de l'uniforme minimalité pour une suite de noyaux reproduisants.

Théorème 2.2.4 *Soient $1 < q < \infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$ et B le produit de Blaschke associé à $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$. La suite $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est uniformément minimale dans H^q si et seulement si*

$$d(\Lambda) := \inf_{n\geqslant 1} |B_n(\lambda_n)| > 0.$$

Définition 2.2.5 *Nous dirons qu'une suite de Blaschke $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ de points distincts de $\mathbb{D}$ satisfait* **la condition de Carleson** *(ou est* **une suite de Carleson***) si*

$$\text{(C)} \qquad d(\Lambda) := \inf_{n\geqslant 1} |B_n(\lambda_n)| > 0,$$

et on écrira $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in$ (C). La constante $d(\Lambda)$ s'appelle la **constante de Carleson** *de la suite Λ.*

Preuve du théorème 2.2.4 : supposons que $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est uniformément minimale. Par le lemme 1.1.2, il existe $f_n \in H^p$ telle que $f_n(\lambda_p) = \delta_{n,p}$ et

$$C := \sup_{n\geqslant 1} \|k_{\lambda_n}\|_q \|f_n\|_p < +\infty.$$

Comme $f_n(\lambda_p) = 0$, $p \neq n$, il existe $h_n \in H^p$ telle que $f_n = B_n h_n$, $\|f_n\|_p = \|h_n\|_p$. D'où, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$1 = |f_n(\lambda_n)| = |B_n(\lambda_n)||h_n(\lambda_n)| \leqslant |B_n(\lambda_n)|\|h_n\|_p \|k_{\lambda_n}\|_q = B_n(\lambda_n)|\|f_n\|_p\|k_{\lambda_n}\|_q \leqslant C|B_n(\lambda_n)|,$$

ce qui implique que

$$\inf_{n\geqslant 1} |B_n(\lambda_n)| \geqslant \frac{1}{C},$$

et donc $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in (C)$.

Réciproquement, supposons que $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in (C)$. Soit $(y_n)_{n\geqslant 1}$ l'unique biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ dans K^p_B, donnée par la proposition 2.2.3 par

$$y_n = \frac{(1 - |\lambda_n|^2)}{B_n(\lambda_n)} \frac{B_n}{1 - \overline{\lambda_n} z}, \quad (n\geqslant 1).$$

On a

$$\begin{aligned}\|y_n\|_p &= \frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|}\left|\frac{B_n}{1-\overline{\lambda_n}z}\right|_p \\ &= \frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|}\left|\frac{1}{1-\overline{\lambda_n}z}\right|_p \\ &= \frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|}\|k_{\lambda_n}\|_p,\end{aligned}$$

d'où

$$\|y_n\|_p\|k_{\lambda_n}\|_q = \frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|}\|k_{\lambda_n}\|_p\|k_{\lambda_n}\|_q.$$

Le lemme 2.1.11 implique alors que

$$\|y_n\|_p\|k_{\lambda_n}\|_q \leqslant \frac{A_pA_q}{|B_n(\lambda_n)|}\frac{1-|\lambda_n|^2}{(1-|\lambda_n|^2)^{1/p}(1-|\lambda_n|^2)^{1/q}} = \frac{A_pA_q}{|B_n(\lambda_n)|} \leqslant \frac{A_pA_q}{d(\Lambda)} < +\infty.$$

Le lemme 1.1.2 permet alors de conclure que $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est uniformément minimale. □

2.3 Bases de noyaux reproduisants dans H^2

Dans cette section, nous allons étudier le problème suivant :

étant donné une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, trouver une caractérisation géométrique pour que la suite de noyaux reproduisant $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ soit une suite de Riesz.

Pour alléger les notations, si Θ est une fonction intérieure, nous désignerons par K_Θ le sous-espace : $K_\Theta = K^2_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$.

2.3.1 Théorème de Newman

Commençons par une remarque qui montre qu'il est nécessaire de normaliser les noyaux reproduisants.

Remarque 2.3.1 La proposition 2.2.1 montre que si $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est minimale, alors la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke, donc en particulier $|\lambda_n| \to 1$ $(n\to\infty)$. Le lemme 2.1.11 implique alors que $\|k_{\lambda_n}\|_2 \to \infty$ $(n\to\infty)$ et donc $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ ne peut pas être une suite de Riesz. Nous devons donc normaliser cette suite pour espérer obtenir un critère pour que la suite de noyaux reproduisants normalisés forme une suite de Riesz.

En utilisant le théorème de Bari, on peut donner un premier critère pour qu'une suite de noyaux reproduisant forme une suite de Riesz.

Théorème 2.3.2 (Théorème de Newman) *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$. Notons par $x_n := \frac{k_{\lambda_n}}{\|k_{\lambda_n}\|_2}$ le noyau reproduisant normalisé dans H^2. La suite $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de K_B si et seulement si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la condition de Carleson et*

$$\text{(CN)} \qquad \sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|^2)|f(\lambda_n)|^2 < \infty, \quad (f \in H^2).$$

Preuve : D'après la proposition 2.2.1, la suite $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est minimale et complète dans K_B. On peut donc appliquer le théorème de Bari (assertion (v)) et on obtient que $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de K_B si et seulement si

$$J_{\mathfrak{X}}K_B \subset \ell^2 \quad \text{et} \quad J_{\mathfrak{X}^*}K_B \subset \ell^2,$$

où $J_{\mathfrak{X}}f = (\langle f, x_n\rangle)_{n\geqslant 1} = ((1-|\lambda_n|^2)^{1/2}f(\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ et $J_{\mathfrak{X}^*}f = (\langle f, x_n^*\rangle)_{n\geqslant 1}$, avec $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ l'unique biorthogonale à $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans K_B. D'après la proposition 2.2.3, on sait que l'unique biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ dans K_B est donnée par

$$y_n = \frac{1-|\lambda_n|^2}{B_n(\lambda_n)}\frac{B_n}{1-\overline{\lambda_n}z},$$

où $B_n = \dfrac{B_n}{k_{\lambda_n}}$. Il est alors facile de voir que

$$x_n^* = \|k_{\lambda_n}\|y_n = \frac{(1-|\lambda_n|^2)^{1/2}}{B_n(\lambda_n)}\frac{B_n}{1-\overline{\lambda_n}z}.$$

On obtient donc, pour toute fonction $f \in K_B$:

$$\begin{aligned}
|\langle f, x_n^*\rangle|^2 &= \frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|^2}\left|\langle f, \frac{B_n}{1-\overline{\lambda_n}z}\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|^2}\left|\langle f, \frac{B}{z-\lambda_n}\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|^2}\left|\langle f, \frac{\overline{z}B}{1-\lambda_n\overline{z}}\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|^2}\left|\langle z\overline{B}f, \frac{1}{1-\lambda_n\overline{z}}\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|^2}\left|\langle \overline{zf}B, \frac{1}{1-\overline{\lambda_n}z}\rangle\right|^2.
\end{aligned}$$

Posons $g := \overline{zf}B$. D'après le lemme 2.1.14, $g \in H^2$ et donc

$$|\langle f, x_n^*\rangle|^2 = \frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|^2}|g(\lambda_n)|^2.$$

Par conséquent, on obtient que $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de K_B si et seulement si, pour toute fonction $f \in K_B$, on a

$$\sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|^2)|f(\lambda_n)|^2 < \infty, \tag{2.10}$$

et

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|^2}|g(\lambda_n)|^2 < \infty, \tag{2.11}$$

où $g = \overline{zf}B$. Il est clair que l'inégalité (2.10) est vraie pour toute fonction $f \in K_B$ si et seulement si elle est vraie pour toute fonction $f \in H^2$ (car si $f \in K_B^\perp = BH^2$, on a $f(\lambda_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$).

Remarquons maintenant que si $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de K_B alors en particulier, c'est une suite uniformément minimale et donc d'après le théorème 2.2.4, $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in$ (C). Ce qui précède montre que la condition (CN) est également vérifiée.

Réciproquement, si (C) et (CN) sont satisfaites, alors évidemment l'inégalité (2.10) est vraie et d'autre part, on a

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1-|\lambda_n|^2}{|B_n(\lambda_n)|^2}|g(\lambda_n)|^2 \leqslant \frac{1}{d(\Lambda)^2}\sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|^2)|g(\lambda_n)|^2 < \infty,$$

ce qui montre que l'inégalité (2.11) est également satisfaite et donc $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de K_B. $\square$

Pour finir de caractériser les bases de Riesz de noyaux reproduisants de H^2, il reste donc à étudier les suites $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ du disque unité qui vérifient à la fois la condition de Carleson (C) et la condition (CN). En fait, nous allons voir que la condition de Carleson (C) implique la condition (CN). Pour cela, nous allons introduire le concept fondamental de mesure de Carleson.

2.3.2 Mesures de Carleson

Définition 2.3.3 *Soit ν une mesure borélienne positive sur le disque unité $\mathbb{D}$. On dit que ν est une* **mesure de Carleson** *si*

$$f \in H^2 \Longrightarrow f \in L^2(\nu).$$

Remarque 2.3.4 Si ν est une mesure de Carleson, alors, en particulier, on a $1 \in L^2(\nu)$, ce qui implique que ν est une mesure finie. Pour caractériser les mesures de Carleson, on pourra donc sans perte de généralité supposer que les mesures sont finies.

D'autre part, nous allons avoir besoin de la théorie des fonctions harmoniques. Plus précisément, pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$, on définit le prolongement harmonique $\mathfrak{H}f$ sur $\mathbb{D}$ par

$$(\mathfrak{H}f)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})P_r(\theta - t)\,dt, \quad (z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}),$$

où $P_r(s) = \dfrac{1-r^2}{|1-re^{is}|^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{ins}$ $(s \in \mathbb{R},\, 0\leqslant r < 1)$ est le noyau de Poisson. On peut alors formuler le résultat suivant.

Théorème 2.3.5 *Soit ν une mesure borélienne, positive et finie sur $\mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{H}L^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\nu)$.

(ii) *ν est une mesure de Carleson.*

(iii)

$$a := \sup_{\zeta\in\mathbb{D}}(1-|\zeta|^2)^{1/2}\|k_\zeta\|_{L^2(\nu)} < \infty.$$

(iv)

$$C := \sup_{\zeta\in\mathrm{supp}(\nu)}(1-|\zeta|^2)^{1/2}\|k_\zeta\|_{L^2(\nu)} < \infty.$$

De plus, $C\leqslant a\leqslant\|\mathfrak{H}\|\leqslant 4\sqrt{2}C$.

Preuve : $(i) \Longrightarrow (ii)$: est évident car $\mathfrak{H}_{|H^2} = Id$, d'après la formule (2.2).

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: soit $i : H^2 \to L^2(\nu)$ l'injection canonique (qui existe par définition des mesures de Carleson). Nous allons montrer que i est nécessairement continue. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions de H^2, qui converge dans H^2 vers une fonction $f \in H^2$ et qui converge dans $L^2(\nu)$ vers une fonction $g \in L^2(\nu)$. Comme ν est une mesure positive et finie, la convergence dans $L^2(\nu)$ implique la convergence presque partout d'une sous-suite ; c'est-à-dire qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ qui converge vers g, ν-presque partout sur $\mathbb{D}$. D'autre part, la convergence de $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ vers f dans H^2 implique évidemment que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $(f_{n_k}(z))_{k\geqslant 1}$ converge vers $f(z)$. On en déduit donc que $g(z) = f(z)$, ν-p.p., c'est-à-dire que $g = f$ dans $L^2(\nu)$. Le théorème du graphe fermé implique alors que l'application i est continue. Il existe donc une constante $K > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in H^2$, on a

$$\|f\|_{L^2(\nu)}\leqslant K\|f\|_{H^2}.$$

En particulier, pour $f = (1-|\zeta|^2)^{1/2}k_\zeta$, $(\zeta \in \mathbb{D})$ on obtient

$$(1-|\zeta|^2)^{1/2}\|k_\zeta\|_{L^2(\nu)}\leqslant K,$$

ce qui donne (iii).

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: est évident.

Pour montrer la dernière implication ($(iv) \Longrightarrow (i)$), nous allons utiliser le critère suivant sur la continuité d'un opérateur intégral.

Lemme 2.3.6 (Test de Vinogradov-Seničkin) *Soient Z un espace mesurable, μ une mesure positive sur Z et k une fonction mesurable, positive sur $Z \times Z$. Supposons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\int_Z k(s,t)k(s,x)\,d\mu(s) \leqslant c(k(t,x) + k(x,t)) \quad \mu\text{-p.p. } (t,x) \in Z \times Z.$$

Alors si $g : Z \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, positive telle que

$$Q_g := \iint_{Z\times Z} k(s,t)g(s)g(t)\,d\mu(s)d\mu(t) < +\infty,$$

on a

$$Q_g \leqslant 2c\|g\|^2_{L^2(\mu)}.$$

$(iv) \Longrightarrow (i)$: posons, pour toute fonction $g \in L^2(\nu)$,

$$L(g)(e^{it}) := \int_{\mathbb{D}} g(z)P(ze^{-it})\,d\nu(z), \quad e^{it} \in \mathbb{T},$$

où $P(re^{i\theta}) = P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}$, $(\theta \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant r < 1)$.
Nous allons montrer que L est un opérateur continu de $L^2(\nu)$ dans $L^2(\mathbb{T})$ et que son adjoint n'est autre que $\mathfrak{H}$. On a

$$\begin{aligned}
\|L(g)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(g)(e^{it})\overline{L(g)(e^{it})}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} g(z)\overline{g(\omega)}P(ze^{-it})P(\omega e^{-it})\,d\nu(z)\,d\nu(\omega)\,dt \\
&= \iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} g(z)\overline{g(\omega)}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(ze^{-it})P(\omega e^{-it})\,dt\right)\,d\nu(z)\,d\nu(\omega) \\
&= \iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} g(z)\overline{g(\omega)}P(\omega\overline{z})\,d\nu(z)\,d\nu(\omega) \\
&\leqslant \iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} |g(z)||g(\omega)|P(\omega\overline{z})\,d\nu(z)\,d\nu(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |g(z)|\left(\int_{|\omega|\leqslant|z|} |g(\omega)|P(\omega\overline{z})\,d\nu(\omega)\right)\,d\nu(z) + \\
&\quad \int_{\mathbb{D}} |g(z)|\left(\int_{|\omega|>|z|} |g(\omega)|P(\omega\overline{z})\,d\nu(\omega)\right)\,d\nu(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\|L(g)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &\leqslant \int_{\mathbb{D}} |g(z)| \left(\int_{|\omega|\leqslant|z|} |g(\omega)| P(\omega\overline{z})\, d\nu(\omega) \right) d\nu(z) + \\ &\quad \int_{\mathbb{D}} |g(z)| \left(\int_{|\omega|\geqslant|z|} |g(\omega)| P(\omega\overline{z})\, d\nu(\omega) \right) d\nu(z).\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli pour la deuxième intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}\|L(g)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &\leqslant \int_{\mathbb{D}} |g(z)| \left(\int_{|\omega|\leqslant|z|} |g(\omega)| P(\omega\overline{z})\, d\nu(\omega) \right) d\nu(z) + \\ &\quad \int_{\mathbb{D}} |g(\omega)| \left(\int_{|z|\leqslant|\omega|} |g(z)| P(z\overline{\omega})\, d\nu(z) \right) d\nu(\omega) \\ &= 2\int_{\mathbb{D}} |g(z)| \left(\int_{|\omega|\leqslant|z|} |g(\omega)| P(\omega\overline{z})\, d\nu(\omega) \right) d\nu(z).\end{aligned}$$

En posant

$$k(z,\omega) := \begin{cases} \frac{P(\omega\overline{z})}{1+|\omega z|} = \frac{1-|z\omega|}{|1-\overline{z}\omega|^2} & \text{si } |z|\geqslant|\omega| \\ 0 & \text{si } |z| < |\omega|, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\|L(g)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &\leqslant 2\int_{\mathbb{D}}\int_{|\omega|\leqslant|z|} |g(z)||g(\omega)|(1+|\omega z|)k(z,\omega)\, d\nu(\omega)\, d\nu(z) \\ &\leqslant 4\iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} |g(z)||g(\omega)|k(z,\omega)\, d\nu(\omega)\, d\nu(z).\end{aligned}$$

Nous allons appliquer le lemme de Vinogradov-Seničkin à l'espace $(Z,\mu) = (\mathbb{D},\nu)$ et au noyau k. Tout d'abord, remarquons que, pour $(s,t,x) \in \mathbb{D}^3$, on a :

$$\begin{aligned}|1-x\overline{t}| &= |1-s\overline{t}+s\overline{t}-x\overline{t}| \\ &\leqslant |1-s\overline{t}| + |\overline{t}||s-x| \\ &\leqslant |1-s\overline{t}| + |s-x| \\ &\leqslant |1-s\overline{t}| + |1-s\overline{x}|,\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{|1-s\overline{t}||1-s\overline{x}|} \leqslant \frac{1}{|1-x\overline{t}|}\left(\frac{1}{|1-s\overline{t}|} + \frac{1}{|1-s\overline{x}|}\right),$$

ce qui donne finalement

$$\frac{1}{|1-s\overline{t}|^2|1-s\overline{x}|^2} \leqslant \frac{2}{|1-x\overline{t}|^2}\left(\frac{1}{|1-s\overline{t}|^2} + \frac{1}{|1-s\overline{x}|^2}\right).$$

Nous pouvons maintenant vérifier les hypothèses du lemme de Vinogradov-Seničkin. On a, pour $|t|\geqslant|x|$, $t,x\in\operatorname{supp}(\nu)$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} k(s,t)k(s,x)\,d\nu(s) &= \int_{|s|\geqslant|t|}\frac{1-|st|}{|1-s\bar{t}|^2}\frac{1-|sx|}{|1-s\overline{x}|^2}\,d\nu(s)\\ &\leqslant \frac{2}{|1-x\bar{t}|^2}\left(\int_{|s|\geqslant|t|}\frac{(1-|st|)(1-|sx|)}{|1-s\bar{t}|^2}\,d\nu(s)+\right.\\ &\qquad\left.\int_{|s|\geqslant|t|}\frac{(1-|st|)(1-|sx|)}{|1-s\overline{x}|^2}\,d\nu(s)\right).\end{aligned}$$

En utilisant les estimations suivantes $1-|st|\leqslant1-|t|^2\leqslant1-|x|^2$ et $1-|sx|\leqslant1-|tx|$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} k(s,t)k(s,x)\,d\nu(s) &\leqslant \frac{2(1-|xt|)}{|1-x\bar{t}|^2}\left(\int_{|s|\geqslant|t|}\frac{1-|t|^2}{|1-s\bar{t}|^2}\,d\nu(s)+\int_{|s|\geqslant|x|}\frac{1-|x|^2}{|1-s\overline{x}|^2}\,d\nu(s)\right)\\ &\leqslant 2k(t,x)\left((1-|t|^2)\|k_t\|^2_{L^2(\nu)}+(1-|x|^2)\|k_x\|^2_{L^2(\nu)}\right)\\ &\leqslant 4C^2k(t,x).\end{aligned}$$

Si $|t|\leqslant|x|$, $t,x\in\operatorname{supp}(\nu)$, on obtient par symétrie

$$\int_{\mathbb{D}} k(s,t)k(s,x)\,d\nu(s)\leqslant4C^2k(x,t),$$

d'où, finalement, si $t,x\in\operatorname{supp}(\nu)$, on a

$$\int_{\mathbb{D}} k(s,t)k(s,x)\,d\nu(s)\leqslant4C^2(k(t,x)+k(x,t)). \tag{2.12}$$

Pour appliquer le lemme de Vinogradov-Seničkin, il reste à vérifier que, pour toute fonction $g\in L^2(\nu)$, on a

$$Q_g:=\iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}}|g(s)||g(t)|k(s,t)\,d\nu(t)\,d\nu(s)<\infty.$$

Pour cela, écrivons (en appliquant deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned}
Q_g &= \int_{\mathbb{D}} |g(s)| \left(\int_{\mathbb{D}} |g(t)| k(s,t)\, d\nu(t) \right) d\nu(s) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{D}} |g(s)| \left\{ \left(\int_{\mathbb{D}} |g(t)|^2\, d\nu(t) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{D}} k(s,t)^2\, d\nu(t) \right)^{1/2} \right\} d\nu(s) \\
&= \|g\|_{L^2(\nu)} \int_{\mathbb{D}} |g(s)| \left(\int_{\mathbb{D}} k(s,t)^2\, d\nu(t) \right)^{1/2} d\nu(s) \\
&\leqslant \|g\|_{L^2(\nu)}^2 \left(\iint_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} k(s,t)^2\, d\nu(t)\, d\nu(s) \right)^{1/2} \\
&= \|g\|_{L^2(\nu)}^2 \left\{ \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{|s|\geqslant|t|} \frac{1-|st|}{|1-\overline{s}t|^2}\, d\nu(t) \right) d\nu(s) \right\}^{1/2} \\
&\leqslant \|g\|_{L^2(\nu)}^2 \left\{ \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{|s|\geqslant|t|} \frac{1-|t|^2}{|1-\overline{s}t|^2}\, d\nu(t) \right) d\nu(s) \right\}^{1/2} \\
&\leqslant \|g\|_{L^2(\nu)}^2 \left\{ \int_{\mathbb{D}} \left((1-|t|^2) \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\overline{s}t|^2}\, d\nu(s) \right) d\nu(t) \right\}^{1/2} \\
&\leqslant \|g\|_{L^2(\nu)}^2 C \sqrt{\nu(\mathbb{D})} < \infty.
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le lemme de Vinogradov-Seničkin. On obtient que pour toute fonction $g \in L^2(\nu)$, on a :

$$\|L(g)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leqslant 32 C^2 \|g\|_{L^2(\nu)}^2.$$

Ceci montre que l'opérateur L est un opérateur continu de $L^2(\nu)$ dans $L^2(\mathbb{T})$, de norme $\|L\| \leqslant 4\sqrt{2}C$. Vérifions maintenant que $L^* = \mathfrak{H}$. Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $g \in L^2(\nu)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle f, L(g) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{L(g)(e^{it})}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{\int_{\mathbb{D}} g(z) P(ze^{-it})\, d\nu(z)}\, dt \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) P(ze^{-it})\, dt \right) \overline{g(z)}\, d\nu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \mathfrak{H}(f)(z) \overline{g(z)}\, d\nu(z) \\
&= \langle \mathfrak{H}(f), g \rangle_{L^2(\nu)}.
\end{aligned}$$

Ceci montre donc que $L^* = \mathfrak{H}$. Par conséquent, $\mathfrak{H}$ est un opérateur continu de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\nu)$ et on a $\|\mathfrak{H}\| = \|L\| \leqslant 4\sqrt{2}C$, ce qui montre (i).

Pour terminer la preuve, il reste à démontrer l'inégalité $a \leqslant \|\mathfrak{H}\|$. Pour cela, il suffit de remarquer que $\mathfrak{H}(k_\zeta) = k_\zeta$, $\zeta \in \mathbb{D}$. $\square$

Preuve du lemme de Vinogradov-Seničkin : soit $g : Z \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, positive telle que $Q_g < \infty$. On a

$$\begin{aligned}
Q_g^2 &= \left(\int_Z g(s)\left(\int_Z k(s,t)g(t)\,d\mu(t)\right)\,d\mu(s)\right)^2 \\
&\leqslant \|g\|^2_{L^2(\mu)}\left\|\int_Z k(s,t)g(t)\,d\mu(t)\right\|^2_{L^2(\mu)} \\
&= \|g\|^2_{L^2(\mu)}\int_Z\left|\int_Z k(s,t)g(t)\,d\mu(t)\right|^2\,d\mu(s) \\
&= \|g\|^2_{L^2(\mu)}\int_Z\left(\iint_{Z\times Z} k(s,t)k(s,x)g(t)g(x)\,d\mu(t)\,d\mu(x)\right)\,d\mu(s) \\
&= \|g\|^2_{L^2(\mu)}\iint_{Z\times Z} g(t)g(x)\left(\int_Z k(s,t)k(s,x)\,d\mu(s)\right)\,d\mu(t)\,d\mu(x) \\
&\leqslant c\|g\|^2_{L^2(\mu)}\iint_{Z\times Z}(k(t,x)+k(x,t))g(t)g(x)\,d\mu(t)\,d\mu(x) \\
&= 2c\|g\|^2_{L^2(\mu)}\iint_{Z\times Z} k(t,x)g(t)g(x)\,d\mu(t)\,d\mu(x) \\
&= 2c\|g\|^2_{L^2(\mu)}Q_g,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. $\square$

2.3.3 Critère de Carleson-Shapiro-Shields

Nous pouvons maintenant donner le critère final pour qu'une suite de noyaux reproduisant normalisés dans H^2 forme une suite de Riesz.

Théorème 2.3.7 (Théorème de Carleson-Shapiro-Shields.) *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke de points distincts dans $\mathbb{D}$. Notons par B le produit de Blaschke associé à la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ et $x_n = \frac{k_{\lambda_n}}{\|k_{\lambda_n}\|_2}$ le noyau reproduisant normalisé dans H^2. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ *est une base de Riesz de* K_B.

(ii) $\mathfrak{X} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ *est unifomément minimale.*

(iii) $J_{\mathfrak{X}} H^2 = \ell^2$, *où*

$$J_{\mathfrak{X}} f = \left((1-|\lambda_n|^2)^{1/2} f(\lambda_n)\right)_{n\geqslant 1}, \qquad (f \in H^2).$$

(iv) $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *vérifie la condition de Carleson.*

Preuve : $(i) \Longleftrightarrow (iii)$: est immédiat d'après le théorème de N. Bari.

$(ii) \Longleftrightarrow (iv)$: c'est le théorème 2.2.4.

$(i) \Longleftrightarrow (iv)$: remarquons que d'après le théorème 2.3.2, il suffit de montrer que $(C) \Longrightarrow (CN)$. Considérons pour cela, ν la mesure positive définie sur les boréliens B de $\mathbb{D}$ par

$$\nu(B) := \sum_{\lambda_n \in B} (1 - |\lambda_n|^2).$$

Autrement dit, $\nu = \sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|^2)\delta_{\lambda_n}$, où δ_{λ_n} est la mesure de Dirac au point λ_n. La mesure ν est finie, car $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke, et son support est supp $(\nu) = \Lambda$. Montrons que ν est une mesure de Carleson. On a, pour tout $p\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
(1-|\lambda_p|^2)\|k_{\lambda_p}\|^2_{L^2(\nu)} &= (1-|\lambda_p|^2)\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\overline{\lambda_p}z|^2}\, d\nu(z) \\
&= (1-|\lambda_p|^2)\sum_{n\geqslant 1} \frac{1-|\lambda_n|^2}{|1-\overline{\lambda_p}\lambda_n|^2} \\
&= 1 + \sum_{n\neq p} \frac{(1-|\lambda_n|^2)(1-|\lambda_p|^2)}{|1-\overline{\lambda_p}\lambda_n|^2}.
\end{aligned}$$

Remarquons alors que

$$\frac{(1-|\lambda_n|^2)(1-|\lambda_p|^2)}{|1-\overline{\lambda_p}\lambda_n|^2} = 1 - |b_{\lambda_p}(\lambda_n)|^2 \in (0,1). \tag{2.13}$$

D'où, en utilisant l'inégalité $x \leqslant -\log(1-x)$, $x \in (0,1)$, on obtient

$$(1-|\lambda_p|^2)\|k_{\lambda_p}\|^2_{L^2(\nu)} \leqslant 1 - \sum_{n\neq p} \log\left(1 - \frac{(1-|\lambda_n|^2)(1-|\lambda_p|^2)}{|1-\overline{\lambda_p}\lambda_n|^2}\right).$$

En utilisant une nouvelle fois (2.13), on a

$$\begin{aligned}
(1-|\lambda_p|^2)\|k_{\lambda_p}\|^2_{L^2(\nu)} &\leqslant 1 - \sum_{n\neq p} \log|b_{\lambda_p}(\lambda_n)|^2 \\
&= 1 - \sum_{n\neq p} \log|b_{\lambda_n}(\lambda_p)|^2 \\
&= 1 - \log\prod_{n\neq p} |b_{\lambda_n}(\lambda_p)|^2 \\
&= 1 - \log|B_p(\lambda_p)|^2.
\end{aligned}$$

Comme $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in (C)$, on a $d(\Lambda) = \inf_{p\geqslant 1}|B_p(\lambda_p)| > 0$, d'où

$$(1-|\lambda_p|^2)\|k_{\lambda_p}\|^2_{L^2(\nu)} \leqslant 1 - 2\log(d(\Lambda)) = 1 + 2\log\frac{1}{d(\Lambda)}.$$

Finalement, on obtient

$$\sup_{p\geqslant 1}(1-|\lambda_p|^2)^{1/2}\|k_{\lambda_p}\|_{L^2(\nu)}\leqslant\sqrt{1+2\log\frac{1}{d(\Lambda)}}.$$

Le théorème 2.3.5 implique alors que ν est une mesure de Carleson et on a, pour toute $f\in H^2$:

$$\|f\|^2_{L^2(\nu)}=\|\mathfrak{H}f\|^2_{L^2(\nu)}\leqslant\|\mathfrak{H}\|^2\|f\|^2_{H^2}\leqslant 32C^2\|f\|^2_{H^2}.$$

Cette inégalité dit exactement que

$$\sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|^2)|f(\lambda_n)|^2\leqslant 32(1+2\log\frac{1}{d(\Lambda)})\|f\|^2_{H^2}, \tag{2.14}$$

ce qui prouve (CN) et achève la preuve du théorème. $\square$

Chapitre 3

Interpolation et bases inconditionnelles de noyaux reproduisant dans H^p

Dans ce chapitre, nous allons revenir aux problèmes d'interpolation (I1) et (I2) posés dans l'introduction ainsi qu'au problème de la caractérisation des suites $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telle que la suite de noyaux reproduisant associée $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ forme une suite inconditionnelle dans H^q $(1 < q < +\infty)$. Pour résoudre ces questions, nous allons développer l'approche opératorielle de Sarason, basée sur les opérateurs de Hankel.

3.1 Approche opératorielle de D. Sarason

3.1.1 Opérateurs de Hankel

Notons par $Pol_+ = \mathfrak{L}\mathrm{in}(z^n : n\geqslant 0)$ l'ensemble des polynômes analytiques sur $\mathbb{T}$, par $H^2_- = L^2(\mathbb{T}) \ominus H^2$ et par P_- la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2_-. Comme $L^2(\mathbb{T}) = H^2 \oplus H^2_-$, on a $P_- = Id - P_+$, où P_+ est la projection de Riesz. Enfin, on désigne par S_z l'opérateur de multiplication par la variable indépendante sur $L^2(\mathbb{T})$ défini par

$$(S_z f)(\zeta) = \zeta f(\zeta), \quad (\zeta \in \mathbb{T}, f \in L^2(\mathbb{T})).$$

Définition 3.1.1 *On appelle* **opérateur de Hankel** *un opérateur linéaire* $\Gamma : H^2 \to H^2_-$ *tel que*

$$(\Gamma S_z)(p) = (P_- S_z \Gamma)(p), \quad (p \in Pol_+).$$

Lemme 3.1.2 *Un opérateur* $\Gamma : H^2 \to H^2_-$ *est un opérateur de Hankel si et seulement si la matrice de* Γ *(relativement aux bases canoniques)* $(\gamma_{n,k})_{k\geqslant 0, n\geqslant 1} =$

$(\langle \Gamma z^k, z^{-n}\rangle)_{k\geqslant 0, n\geqslant 1}$ *est de la forme*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_3 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ *telle que*

$$\gamma_{n,k} = a_{n+k}, \quad k\geqslant 0,\ n\geqslant 1.$$

Preuve : Soit Γ un opérateur de Hankel, $n\geqslant 1$ et $k\geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned} \gamma_{n,k} &= \langle \Gamma z^k, z^{-n}\rangle = \langle \Gamma z z^{k-1}, z^{-n}\rangle = \langle \Gamma S_z z^{k-1}, z^{-n}\rangle = \langle P_- S_z \Gamma z^{k-1}, z^{-n}\rangle \\ &= \langle S_z \Gamma z^{k-1}, z^{-n}\rangle = \langle \Gamma z^{k-1}, z^{-n-1}\rangle = \gamma_{n+1,k-1}. \end{aligned}$$

On définit alors, pour $n\geqslant 1$, $a_n := \gamma_{n,0}$. On a donc $a_{n+k} = \gamma_{n+k,0} = \gamma_{n,k}$, d'après le calcul précédent.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ telle que

$$\gamma_{n,k} = a_{n+k}, \quad k\geqslant 0,\ n\geqslant 1.$$

Cela signifie que, pour $n\geqslant 1$ et $k\geqslant 1$, on a $\gamma_{n,k} = \gamma_{n+1,k-1}$. D'où :

$$\langle \Gamma z^k, z^{-n}\rangle = \langle \Gamma z^{k-1}, z^{-n-1}\rangle,$$

ce qui donne

$$\langle \Gamma S_z z^{k-1}, z^{-n}\rangle = \langle P_- S_z \Gamma z^{k-1}, z^{-n}\rangle, \quad (k\geqslant 1, n\geqslant 1).$$

D'où $\Gamma S_z z^{k-1} = P_- S_z \Gamma z^{k-1}$, $(k\geqslant 1)$. Par linéarité, on en déduit que $(\Gamma S_z)(p) = (P_- S_z \Gamma)(p)$, $(p \in Pol_+)$, c'est-à-dire que Γ est un opérateur de Hankel. □

3.1.2 Théorème de Nehari

Considérons maintenant un exemple générique d'opérateur de Hankel continu. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. On définit alors l'opérateur $H_\varphi : H^2 \to H^2_-$ par

$$H_\varphi f := P_-(\varphi f), \quad (f \in H^2).$$

On a alors la proposition suivante

Proposition 3.1.3 *L'opérateur H_φ est un opérateur de Hankel continu. De plus, si $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, on a*

$$H_\varphi = H_\psi \Longleftrightarrow \varphi - \psi \in H^\infty,$$

et

$$\|H_\varphi\| \leqslant \mathrm{dist}(\varphi, H^\infty).$$

Preuve : Tout d'abord, montrons que H_φ est un opérateur de Hankel. On a, pour $p \in Pol_+$,

$$\begin{aligned}
(H_\varphi S_z)(p) &= P_-(\varphi z p) = P_-(z(P_- + P_+)(\varphi p)) \\
&= P_-(zP_-(\varphi p)) + P_-(zP_+(\varphi p)) = P_-(zP_-(\varphi p)) \quad \text{car } zP_+(\varphi p) \in H^2 \\
&= (P_- S_z H_\varphi)(p),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que H_φ est un opérateur de Hankel. Il est clairement continu sur H^2, car si $f \in H^2$, on a

$$\|H_\varphi f\|_2 = \|P_-(\varphi f)\|_2 \leqslant \|\varphi f\|_2 \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_2.$$

De plus, on a $\|H_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$.

Montrons maintenant que si $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, on a

$$H_\varphi = H_\psi \Longleftrightarrow \varphi - \psi \in H^\infty.$$

Si $\varphi - \psi \in H^\infty$, pour tout $f \in H^2$, on a

$$(H_\varphi - H_\psi)f = P_-(\varphi - \psi)f = 0, \quad \text{car } (\varphi - \psi)f \in H^2,$$

d'où $H_\varphi = H_\psi$. Réciproquement, si $H_\varphi = H_\psi$, alors, en particulier, on a

$$P_-(\varphi) = H_\varphi 1 = H_\psi 1 = P_-(\psi),$$

soit $P_-(\varphi - \psi) = 0$. Donc $\varphi - \psi \in H^2 \cap L^\infty(\mathbb{T}) = H^\infty$.

Il reste à montrer que $\|H_\varphi\| \leqslant \mathrm{dist}(\varphi, H^\infty)$. Pour tout $\psi \in H^\infty$, d'après ce qui précède, on a $H_\varphi = H_{\varphi+\psi}$, d'où

$$\|H_\varphi\| = \|H_{\varphi+\psi}\| \leqslant \|\varphi + \psi\|_\infty,$$

ce qui donne

$$\|H_\varphi\| \leqslant \inf_{\psi \in H^\infty} \|\varphi + \psi\|_\infty = \mathrm{dist}(\varphi, H^\infty).$$

□

Le résultat fondamental sur les opérateurs de Hankel est que les opérateurs du type H_φ ($\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$) sont l'exemple générique des opérateurs de Hankel continu sur H^2. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.4 (Théorème de Z. Nehari, 1957) *Soit Γ un opérateur de Hankel continu sur H^2. Alors il existe une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ telle que*

$$\Gamma = H_f \ \textit{et}\ \|\Gamma\| = \|f\|_\infty.$$

La fonction f s'appelle **un symbôle** *de Γ.*

Preuve : Pour tout polynôme $p \in Pol_+$, on a :

$$(\Gamma S_z)(p) = (P_- S_z \Gamma)(p).$$

Comme Pol_+ est dense dans H^2, on en déduit par continuité que $\Gamma S_z = P_- S_z \Gamma$. Il est alors facile de voir que, par récurrence, on a

$$\Gamma S_z^n = P_- S_z^n \Gamma, \quad (n \geqslant 0).$$

En particulier, on en déduit que $(\Gamma S_z^n)(1) = (P_- S_z^n \Gamma)(1)$, soit $\Gamma z^n = P_-(z^n \Gamma 1)$, $(n \geqslant 0)$. Par linéarité, on obtient

$$\Gamma(p) = P_-(p\Gamma 1), \quad (p \in Pol_+).$$

Considérons $Pol_+^0 := \{q \in Pol_+ : q(0) = 0\}$. Alors, si $q \in Pol_+^0$, on a $\overline{q} \in H_-^2$ et

$$\begin{aligned} \langle \Gamma p, \overline{q} \rangle &= \langle P_-(p\Gamma 1), \overline{q} \rangle = \langle p\Gamma 1, \overline{q} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) q(e^{i\theta}) (\Gamma 1)(e^{i\theta})\, d\theta, \qquad (p, q \in Pol_+, q(0) = 0). \end{aligned}$$

Montrons que cette égalité peut se prolonger aux fonctions de $A(\mathbb{D})$.

Soit $x, y \in A(\mathbb{D})$, $y(0) = 0$. D'après le théorème 2.1.2, il existe $(p_n)_{n \geqslant 1}, (q_n)_{n \geqslant 1} \subset Pol_+$, $q_n(0) = 0$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \|p_n - x\|_\infty = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \|q_n - y\|_\infty = 0.$$

Comme $\Gamma 1 \in H_-^2 \subset L^2(\mathbb{T})$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_n(e^{i\theta}) q_n(e^{i\theta}) (\Gamma 1)(e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{i\theta}) y(e^{i\theta}) (\Gamma 1)(e^{i\theta})\, d\theta.$$

De plus, en utilisant le fait que $\|\Gamma p_n - \Gamma x\|_2 \leqslant \|\Gamma\| \|p_n - x\|_2 \leqslant \|\Gamma\| \|p_n - x\|_\infty$ et $\|\overline{q_n} - \overline{y}\|_2 \leqslant \|q_n - y\|_\infty$, on obtient, avec Cauchy-Schwarz,

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \Gamma p_n, \overline{q_n} \rangle = \langle \Gamma x, \overline{y} \rangle.$$

D'où

$$\langle \Gamma x, \overline{y} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{i\theta}) y(e^{i\theta}) (\Gamma 1)(e^{i\theta})\, d\theta, \qquad (x, y \in A(\mathbb{D}), y(0) = 0). \tag{3.1}$$

Considérons maintenant L la forme linéaire définie sur Pol_+^0 par

$$L(Q) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(e^{i\theta}) (\Gamma 1)(e^{i\theta})\, d\theta, \quad (Q \in Pol_+^0).$$

Nous allons montrer que L est continue pour la norme $\| \cdot \|_1$. Pour cela, nous allons utiliser le lemme suivant d'analyse complexe.

Lemme 3.1.5 *Soit $Q \in Pol_+^0$. Alors il existe $x, y \in A(\mathbb{D})$, $y(0) = 0$ telle que*

$$Q = xy \quad et \quad \|x\|_2 = \|y\|_2 = \|Q\|_1^{1/2}.$$

En utilisant ce lemme, on a

$$\begin{aligned}
|L(Q)| &= |L(xy)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(e^{i\theta})y(e^{i\theta})(\Gamma 1)(e^{i\theta})\,d\theta\right| \\
&= |\langle \Gamma x, \overline{y}\rangle| \quad \text{en utilisant (3.1)} \\
&\leqslant \|\Gamma\|\|x\|_2\|y\|_2 \quad \text{en utilisant Cauchy-Schwarz} \\
&= \|\Gamma\|\|Q\|_1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, L est continue sur $(Pol_+^0, \|\cdot\|_1)$ et $\|L\|\leqslant\|\Gamma\|$. Le théorème de Hahn-Banach permet de prolonger L en une forme linéaire $\widetilde{L}$ continue sur L^1 telle que $\|\widetilde{L}\| = \|L\|\leqslant\|\Gamma\|$. Le théorème de Riesz affirme alors qu'il existe $f \in L^\infty$ telle que

$$\widetilde{L}(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta, \quad (g \in L^1),$$

et $\|\widetilde{L}\| = \|f\|_\infty$. Pour $p \in Pol_+$ et $q \in Pol_+^0$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma p, \overline{q}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})q(e^{i\theta})(\Gamma 1)(e^{i\theta})\,d\theta \\
&= L(pq) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})q(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta \\
&= \langle pf, \overline{q}\rangle \\
&= \langle P_-(pf), \overline{q}\rangle \quad \text{car } \overline{q} \in H_-^2.
\end{aligned}$$

Comme Pol_+^0 est dense dans H_0^2, on en déduit que

$$\Gamma p = P_-(pf) = H_f(p), \quad (p \in Pol_+),$$

soit $\Gamma = H_f$. De plus, en utilisant la proposition 3.1.3, remarquons que

$$\|f\|_\infty\leqslant\|\Gamma\| = \|H_f\|\leqslant\text{dist}(f, H^\infty)\leqslant\|f\|_\infty,$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

Preuve du lemme 3.1.5 : Soit $Q \in Pol_+^0$, $Q \not\equiv 0$. Factorisons Q en regroupant les zéros (éventuels) qui se trouvent dans $\mathbb{D}$, ceux qui se trouvent sur $\mathbb{T}$ et enfin ceux qui se trouvent dans $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$:

$$Q(z) = \alpha z^m \prod_{s=1}^{n}(z - a_s)\prod_{j=1}^{p}(z - b_j)\prod_{k=1}^{l}(z - c_k),$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $m\geqslant 1$, $|a_s|<1$, $|b_j|=1$ et $|c_k|>1$. Ecrivons alors

$$Q(z)=\alpha \underbrace{z^m\prod_{s=1}^n b_{a_s}(z)}_{\substack{\| \\ B(z)}} \underbrace{\prod_{j=1}^p (z-b_j)}_{\substack{\| \\ Q_1(z)}} \underbrace{\prod_{k=1}^l (z-c_k)\prod_{s=1}^n \frac{a_s}{|a_s|}(1-\overline{a_s}z)}_{\substack{\| \\ Q_2(z)}},$$

où b_{a_s} est le facteur de Blaschke élémentaire associé à a_s. Il existe $r>0$ tel que le polynôme Q_2 ne s'annule pas dans $D(0,1+r)$, ouvert simplement connexe. Par conséquent, on peut définir une branche analytique de $Q_2^{1/2}$ dans $D(0,1+r)$ et donc, en particulier, $Q_2^{1/2}\in A(\mathbb{D})$. D'autre part, considérons pour $1\leqslant j\leqslant p$, D_j la demi-droite, issue de $b_j=e^{i\theta j}$ partant à l'infini, définie par

$$D_j := \{te^{i\theta_j} : t\geqslant 1\},$$

et notons par $\Omega := \bigcup_{j=1}^p D_j$. L'ouvert Ω est simplement connexe et la fonction Q_1 est holomorphe et ne s'annule pas sur Ω. Par conséquent, on peut définir une branche analytique de $Q_1^{1/2}$ dans Ω. Comme $\mathbb{D}\subset\Omega$, en particulier la fonction $Q_1^{1/2}$ est analytique dans $\mathbb{D}$ et de plus continue sur $\mathbb{T}\setminus\{b_j : 1\leqslant j\leqslant p\}$. Par conséquent, $Q_1^{1/2}\in H^\infty$. D'autre part, remarquons que, pour $z\in\Omega$, on a

$$|Q_1^{1/2}(z)| = e^{\frac{1}{2}\ln|Q_1(z)|},$$

et donc $\lim_{z\to b_j}|Q_1^{1/2}(z)|=0$. Par conséquent, en posant $Q_1^{1/2}(b_j):=0$, on obtient une fonction continue sur $\mathbb{T}$. D'où $Q_1^{1/2}\in A(\mathbb{D})$. Définissons alors

$$x:=\alpha^{1/2}Q_1^{1/2}Q_2^{1/2} \quad \text{et} \quad y:=\alpha^{1/2}BQ_1^{1/2}Q_2^{1/2}.$$

D'après ce qui précède, on a $x,y\in A(\mathbb{D})$, $y(0)=0$ et $Q=xy$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|x\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|x(e^{i\theta})|^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\alpha||Q_1(e^{i\theta})||Q_2(e^{i\theta})|\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\alpha||Q_1(e^{i\theta})||Q_2(e^{i\theta})||B(e^{i\theta}|\,d\theta \quad \text{car } |B(e^{i\theta})|=1 \\
&= \|Q\|_1,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\|x\|_2=\|Q\|_1^{1/2}$. On montre de même que $\|y\|_2=\|Q\|_1^{1/2}$, ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

Corollaire 3.1.6 *Soit $\varphi \in L^\infty$. Alors*

$$\|H_\varphi\| = \mathrm{dist}(\varphi, H^\infty).$$

De plus, la distance est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $\psi \in H^\infty$ telle que

$$\|H_\varphi\| = \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Preuve : D'après la proposition 3.1.3, on a

$$\|H_\varphi\| \leqslant \mathrm{dist}(\varphi, H^\infty).$$

Le théorème de Nehari implique qu'il existe $f \in L^\infty$ telle que $H_\varphi = H_f$ et $\|H_\varphi\| = \|f\|_\infty$. Comme $H_\varphi = H_f$, en utilisant la proposition 3.1.3, on obtient qu'il existe $\psi \in H^\infty$ telle que $f = \varphi - \psi$. D'où

$$\|H_\varphi\| \leqslant \mathrm{dist}(\varphi, H^\infty) \leqslant \|\varphi - \psi\|_\infty = \|f\|_\infty = \|H_\varphi\|,$$

ce qui achève la preuve. □

3.1.3 Opérateurs modèles et calcul fonctionnel

Définition 3.1.7 *Soit Θ une fonction intérieure. On appelle* **espace modèle associé à Θ** *le sous-espace K_Θ de H^2 défini par*

$$K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2.$$

On note P_Θ la projection orthogonale de H^2 sur K_Θ. L'opérateur M_Θ défini par

$$M_\Theta f := P_\Theta z f, \quad f \in K_\Theta,$$

opérateur modèle associé à Θ.

Exemple 4 *Si $\Theta(z) = z^{n+1}$, alors $K_\Theta = \mathfrak{L}\mathrm{in}(z^k : 0 \leqslant k \leqslant n)$ et on a*

$$P_\Theta f = \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k) z^k, \quad f \in H^2.$$

L'action de M_Θ sur la base orthogonale naturelle $(z^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est évidente. On a

$$M_\Theta z^k = P_\Theta z^{k+1} = \begin{cases} z^{k+1} & si\ k < n \\ 0 & si\ k = n. \end{cases}$$

Donc la matrice de M_Θ relativement à cette base est une matrice de Jordan

$$[M_\Theta] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 5 *Si* $\Theta = B = \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}$ *est un produit de Blaschke à zéros simples,* $\sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|) < +\infty$, *alors d'après la proposition 2.2.1*

$$K_B = \mathtt{Span}(k_{\lambda_n} : n\geqslant 1),$$

et $P_B f$ *est l'unique fonction de* H^2 *telle que* $P_B f \in K_B$ *et* $(P_B f)(\lambda_n) = f(\lambda_n)$, $n\geqslant 1$. *Dans ce cas, on ne pas préciser, comme dans l'exemple précédent, l'action de* M_B *sur une base orthogonale pour la simple raison qu'on ne dispose pas de base orthogonale suffisamment explicite de* K_B. *En revanche, on peut calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de* M_B *et* M_B^*.

Théorème 3.1.8 *Soit* $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de Blaschke de points distincts de* $\mathbb{D}$ *et* B *le produit de Blaschke associé. Notons par* $(y_n)_{n\geqslant 1}$ *l'unique biorthogonale à* $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ *dans* K_B *(voir proposition 2.2.3). Alors*

$$M_B y_n = \lambda_n y_n \quad \text{et} \quad M_B^* k_{\lambda_n} = \overline{\lambda_n} k_{\lambda_n},\ n\geqslant 1.$$

Autrement dit, y_n *est un vecteur propre de* M_B *associé à la valeur propre* λ_n *et* k_{λ_n} *est un vecteur propre de* M_B^* *associé à la valeur propre* $\overline{\lambda_n}$.

Preuve : Pour toute fonction $f \in K_B$, on a

$$\begin{aligned} \langle M_B f, k_{\lambda_n}\rangle &= \langle P_B z f, k_{\lambda_n}\rangle \\ &= \langle z f, k_{\lambda_n}\rangle \qquad \text{car } k_{\lambda_n} \in K_B \\ &= \lambda_n f(\lambda_n) \\ &= \langle f, \overline{\lambda_n} k_{\lambda_n}\rangle, \end{aligned}$$

ce qui implique que $M_B^* k_{\lambda_n} = \overline{\lambda_n} k_{\lambda_n}$.

D'autre part, on a également

$$\begin{aligned} \langle M_B y_n, k_{\lambda_p}\rangle &= \langle y_n, M_B^* k_{\lambda_p}\rangle \\ &= \langle y_n, \overline{\lambda_p} k_{\lambda_p}\rangle \\ &= \lambda_p \delta_{n,p} \\ &= \langle \lambda_n y_n, k_{\lambda_p}\rangle, \end{aligned}$$

ce qui implique $M_B y_n = \lambda_n y_n$, en utilisant le fait que $\mathtt{Span}(k_{\lambda_p} : p\geqslant 1) = K_B$. □

Nous allons maintenant construire le calcul fonctionnel H^∞ de l'opérateur modèle M_Θ. Cela signifie que l'on veut définir, pour chaque fonction $f \in H^\infty$, un opérateur continu $f(M_\Theta)$ sur K_Θ de telle sorte que l'application $\Phi : f \longmapsto f(M_\Theta)$ soit un homomorphisme d'algèbre continu qui prolonge le calcul polynômial. En d'autres termes, on veut, en particulier, que pour tout polynôme $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, on ait $\Phi(p) = \sum_{k=0}^n a_k M_\Theta^k$.

Définition 3.1.9 *Soit $A : H \to H$ un opérateur borné sur un espace de Hilbert H. Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert tel que $H \subset \mathcal{H}$ et si B est un opérateur borné sur $\mathcal{H}$, on dit que B est une* **dilatation** *de A (ou A est une* **compression** *de B) si*

$$p(A) = P_H p(B)_{|H}, \quad (p \in Pol_+),$$

où $P_H : \mathcal{H} \to H$ est la projection orthogonale sur H.

Le lemme suivant donne une caractérisation des dilatations.

Lemme 3.1.10 (D. Sarason) *Soient $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $H \subset \mathcal{H}$ et $A := P_H B_{|H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) B est une dilatation de A.

(ii) Il existe $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathrm{Lat}B$, $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ tels que $H = \mathcal{H}_2 \ominus \mathcal{H}_1$.

(iii) Il existe $G, G_* \subset \mathcal{H}$ tels que $G \in \mathrm{Lat}B$, $G_* \in \mathrm{Lat}B^*$ et $\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G$.

Preuve : $(i) \Longrightarrow (ii)$: soient $\mathcal{H}_2 := \mathtt{Span}(B^n H : n \geqslant 0)$ et $\mathcal{H}_1 := \mathcal{H}_2 \ominus H$. On a bien sûr $B\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_2$. D'autre part, pour $x \in H$, on a

$$P_H B B^n x = P_H B^{n+1} x = A^{n+1} x = A A^n x = A P_H B^n x,$$

d'où $P_H B_{|\mathcal{H}_2} = A P_{H|\mathcal{H}_2}$. Pour tout $x_1 \in \mathcal{H}_1$, on a alors $P_H B x_1 = A P_H x_1 = 0$ car $x_1 \in \mathcal{H}_2 \ominus H$, ce qui implique que $Bx_1 \in \mathcal{H}_2 \ominus H = \mathcal{H}_1$. D'où $\mathcal{H}_1 \in \mathrm{Lat}B$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: posons $G := \mathcal{H}_1$ et $G_* := \mathcal{H}_2^\perp$. Comme $B\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$ et $B\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_2$, on a $G \in \mathrm{Lat}B$ et $G_* \in \mathrm{Lat}B^*$. D'autre part, comme $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \oplus H$, on a

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2^\perp = \mathcal{H}_1 \oplus H \oplus \mathcal{H}_2^\perp = G \oplus H \oplus G_*.$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$: relativement à la décomposition $\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G$, l'opérateur B a une matrice de la forme

$$[B] = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

car $G_*^\perp = H \oplus G \in \mathrm{Lat}G$, $P_H B_{|H} = A$ et $G \in \mathrm{Lat}B$. D'où, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$[B]^n = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A^n & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

ce qui donne $A^n = P_H B^n_{|H}$, $(n \geqslant 0)$ et par linéarité, on obtient que pour tout polynôme $p \in Pol_+$, on a $p(A) = P_H p(B)_{|H}$. □

Revenons maintenant aux opérateurs modèles. Notons par S l'opérateur de multiplication par la variable indépendante défini sur H^2 par $(Sf)(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta})$, $f \in H^2$.

Corollaire 3.1.11 *Soit Θ une fonction intérieure et $p \in Pol_+$. Alors*

$$p(M_\Theta) = P_\Theta p(S)_{|K_\Theta} = P_\Theta p_{|K_\Theta},$$

et

$$\|p(M_\Theta)\| \leqslant \|p\|_\infty.$$

Preuve : Par définition, on a $M_\Theta = P_\Theta S_{|K_\Theta}$. On a $H^2, \Theta H^2 \in \mathrm{Lat} S$. En appliquant le lemme de Sarason à $B = S$, $A = M_\Theta$, $\mathcal{H}_1 = \Theta H^2$ et $\mathcal{H}_2 = H^2$, on obtient que S est une dilatation de M_Θ sur H^2. D'où, pour tout polynôme $p \in Pol_+$, on a

$$p(M_\Theta) = P_\Theta p(S)_{|K_\Theta}.$$

Remarquons alors que si $p(z) = \sum_k a_k z^k$, on a $p(S) = \sum_k a_k S^k$, ce qui donne, pour $f \in H^2$,

$$p(S)f = \sum_k a_k S^k f = \sum_k a_k z^k f = pf.$$

D'où

$$P_\Theta p(S)_{|K_\Theta} = P_\Theta p_{|K_\Theta}.$$

Il reste à remarquer que, pour tout $x \in K_\Theta$, on a

$$\|p(M_\Theta)x\|_2 = \|P_\Theta(px)\|_2 \leqslant \|px\|_2 \leqslant \|p\|_\infty \|x\|_2,$$

ce qui donne $\|p(M_\Theta)\| \leqslant \|p\|_\infty$. □

Nous pouvons maintenant définir le calcul fonctionnel H^∞ pour l'opérateur modèle M_Θ.

Définition 3.1.12 *Soient Θ une fonction intérieure et $f \in H^\infty$. On définit*

$$f(M_\Theta) := P_\Theta f_{|K_\Theta}.$$

L'application $f \longmapsto f(M_\Theta)$ s'appelle le **calcul fonctionnel** *H^∞ de M_Θ.*

Tout d'abord, remarquons que $f(M_\Theta)$ est un opérateur linéaire sur K_Θ. De plus, il est continue car, pour tout $x \in K_\Theta$, on a

$$\|f(M_\Theta)x\|_2 = \|P_\Theta(fx)\| \leqslant \|f\|_\infty \|x\|_2.$$

Donc $f(M_\Theta) \in \mathcal{L}(K_\Theta)$ et

$$\|f(M_\Theta)\| \leqslant \|f\|_\infty. \tag{3.2}$$

Théorème 3.1.13 *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & H^\infty & \longrightarrow & \mathcal{L}(K_\Theta) \\ & f & \longmapsto & f(M_\Theta) \end{array}$$

est une application linéaire, multiplicative et contractante. De plus, elle prolonge le calcul polynômial.

Preuve : L'application Φ est clairement linéaire et contractante d'après (3.2). Montrons qu'elle est multiplicative. Soient $f, g \in H^\infty$ et $x \in K_\Theta$. On a

$$\begin{aligned} P_\Theta(fgx) &= P_\Theta(fP_\Theta(gx)) + P_\Theta(f(Id - P_\Theta)(gx)) \\ &= P_\Theta(fP_\Theta(gx)) \end{aligned}$$

car $f(Id - P_\Theta)H^2 \subset f\Theta H^2 \subset \Theta H^2 = K_\Theta^\perp$. Par conséquent, $(fg)(M_\Theta) = f(M_\Theta)g(M_\Theta)$, c'est-à-dire $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$. Il reste à remarquer que, d'après le corollaire 3.1.11, l'application Φ prolonge bien le calcul polynômial. $\square$

La proposition suivante donne les principales propriétés de ce calcul fonctionnel.

Proposition 3.1.14 *Soient Θ une fonction intérieure et $f \in H^\infty$. Alors*

(a) *Si* $\sum_{n\geqslant 0} |\widehat{f}(n)| < \infty$, *on a* $f(M_\Theta) = \sum_{n\geqslant 0} \widehat{f}(n) M_\Theta^n$.

(b) $f(M_\Theta) = 0 \iff f \in \Theta H^\infty$.

(c) *Soient* $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset H^\infty$ *telle que* $\sup_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty < +\infty$.

(c1) *Si* $f_n(\zeta) \to f(\zeta)$ *p.p. sur* $\mathbb{T}$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n(M_\Theta)x - f(M_\Theta)x\|_2 = 0, \quad \forall x \in K_\Theta.$$

(c2) *Si* $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{D}$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f_n(M_\Theta)x - f(M_\Theta)x, y\rangle = 0, \quad \forall x, y \in K_\Theta.$$

Preuve : (a) : pour $N \in \mathbb{N}$, posons $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \widehat{f}(n) z^n$. On a donc $S_N(M_\Theta) = \sum_{n=0}^{N} \widehat{f}(n) M_\Theta^n$. D'où, en utilisant (3.2),

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{N} \widehat{f}(n) M_\Theta^n - f(M_\Theta) \right\| &= \|S_n(M_\Theta) - f(M_\Theta)\| \\ &= \|\Phi(S_N - f)\| \\ &\leqslant \|S_N - f\|_\infty. \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que si $\sum_{n\geqslant 0} |\widehat{f}(n)| < \infty$, alors $\|S_N - f\|_\infty \to 0$, $n \to +\infty$. Par conséquent, $\sum_{n=0}^{N} \widehat{f}(n) M_\Theta^n$ converge vers $f(M_\Theta)$, ce qui prouve (a).

(b) : on a

$$f(M_\Theta) = 0 \iff (\forall x \in K_\Theta, P_\Theta(fx) = 0) \iff (\forall x \in K_\Theta, fx \in \Theta H^2).$$

En particulier, on a $f \in \Theta H^2 \cap H^\infty$. Donc il existe $g \in H^2$ telle que $f = \Theta g$. Utilisons la décomposition de Nevanlinna. Comme $f \in H^\infty$, il existe une fonction intérieure f_i et une fonction extérieure $f_e \in H^\infty$ telles que $f = f_i f_e$. De même, comme $g \in H^2$, il existe une fonction intérieure g_i et une fonction extérieure $g_e \in H^2$ telles que $g = g_i g_e$. D'où $f_i f_e = \Theta g_i g_e$ et par unicité de la décomposition, on obtient $f_i = \Theta g_i$ et $f_e = g_e$. On en déduit que $g_e \in H^\infty$ et donc $g \in H^\infty$, ce qui prouve que $f \in \Theta H^\infty$. La réciproque est immédiate.

(c1) : on a

$$\|f_n(M_\Theta)x - f(M_\Theta)x\|_2 = \|P_\Theta(f_n x) - P_\Theta(fx)\|_2 \leqslant \|f_n x - fx\|_2.$$

D'autre part,

$$\|f_n x - fx\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^2 |x(e^{i\theta})|^2 \, d\theta.$$

Comme $f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta}) \to 0$ p.p., et

$$|f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})||x(e^{i\theta})| \leqslant (\|f_n\|_\infty + \|f\|_\infty)|x(e^{i\theta})| \leqslant C|x(e^{i\theta})|,$$

où C est une constante indépendante de n, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n x - fx\|_2 = 0$, ce qui donne le résultat.

(c2) : on a

$$\begin{aligned}\langle f_n(M_\Theta)x - f(M_\Theta)x, y\rangle &= \langle P_\Theta(f_n x) - P_\Theta(fx), y\rangle \\ &= \langle f_n x - fx, y\rangle \quad \text{car } y \in K_\Theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta}))x(e^{i\theta})\overline{y(e^{i\theta})}\, d\theta.\end{aligned}$$

Comme $x(e^{i\theta})\overline{y(e^{i\theta})} \in L^1$, il suffit d'appliquer le lemme suivant pour conclure.

Lemme 3.1.15 *Soit* $(u_n)_{n\geqslant 1} \subset H^\infty$ *telle que* $\sup_{n\geqslant 1} \|u_n\|_\infty < +\infty$ *et* $u_n(\lambda) \to 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{D}$. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})\, d\theta = 0, \quad \forall f \in L^1.$$

Preuve du lemme : soit $\nu \in \mathbb{Z}$. Comme $u_n \in H^\infty$, on a

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ <}} u_n(re^{i\theta}) r^\nu e^{i\nu\theta} = u_n(e^{i\theta}) e^{i\nu\theta}, \quad \text{p.p.tt. } e^{i\theta} \in \mathbb{T}.$$

D'autre part, remarquons que pour $r \geqslant \frac{1}{2}$,

$$|u_n(re^{i\theta}) r^\nu e^{i\nu\theta}| \leqslant \|u_n\|_\infty r^\nu \leqslant \|u_n\|_\infty \max\,(1, \frac{1}{2^\nu}).$$

Le théorème de convergence dominé de Lebesgue permet alors d'en déduire que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} u_n(e^{i\theta}) e^{i\nu\theta}\, d\theta &= \lim_{\substack{r \to 1 \\ <}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(re^{i\theta}) r^\nu e^{i\nu\theta}\, d\theta \\ &= \lim_{\substack{r \to 1 \\ <}} \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} u_n(z) z^{\nu-1}\, dz.\end{aligned}$$

La fonction $z \longmapsto u_n(z)z^{\nu-1}$ étant holomorphe dans la couronne $0 < |z| < 1$, on obtient, pour $0 < r < 1$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} u_n(z) z^{\nu-1}\, dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\frac{1}{2}} u_n(z) z^{\nu-1}\, dz,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2\pi} u_n(e^{i\theta}) e^{i\nu\theta}\, d\theta = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\frac{1}{2}} u_n(z) z^{\nu-1}\, dz = \frac{1}{2^{\nu+1}\pi} \int_0^{2\pi} u_n\left(\frac{1}{2}e^{i\theta}\right) e^{i\nu\theta}\, d\theta.$$

Une nouvelle application du théorème de convergence dominé de Lebesgue permet d'en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(e^{i\theta}) e^{i\nu\theta}\, d\theta = 0, \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}.$$

La linéarité de l'intégrale permet alors d'affirmer que, pour tout polynôme trigonométrique, $p(e^{i\theta}) = \sum_\nu a_\nu e^{i\nu\theta}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(e^{i\theta}) p(e^{i\theta})\, d\theta = 0. \tag{3.3}$$

Soit maintenant $f \in L^1$. Alors, d'après le théorème 2.1.1, il existe une suite de polynôme trigonométriques $(p_k)_{k\geqslant 1}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \|p_k - f\|_1 = 0. \tag{3.4}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})\, d\theta\right| &= \left|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(e^{i\theta}) p_k(e^{i\theta})\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(e^{i\theta}) (f(e^{i\theta}) - p_k(e^{i\theta}))\, d\theta\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(e^{i\theta}) p_k(e^{i\theta})\, d\theta\right| + \|u_n\|_\infty \|f - p_k\|_1.\end{aligned}$$

Comme $\sup_{n\geqslant 1} \|u_n\|_\infty < \infty$, on conclut en utilisant (3.3) et (3.4). Ceci achève la preuve du lemme et donc du théorème. □

Pour finir, donnons une généralisation du théorème 3.1.8

Théorème 3.1.16 *Soient $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$, B le produit de Blaschke associé et $f \in H^\infty$. Notons par $(y_n)_{n\geqslant 1}$ l'unique biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ dans K_B (voir proposition 2.2.3). Alors*

$$f(M_B)y_n = f(\lambda_n)y_n \quad \text{et} \quad f(M_B)^* k_{\lambda_n} = \overline{f(\lambda_n)}k_{\lambda_n},\ n\geqslant 1.$$

Autrement dit, y_n est un vecteur propre de $f(M_B)$ associé à la valeur propre $f(\lambda_n)$ et k_{λ_n} est un vecteur propre de $f(M_B)^*$ associé à la valeur propre $\overline{f(\lambda_n)}$.

Preuve : La démonstration est la même que celle du théorème 3.1.8. Pour toute fonction $g \in K_B$, on a

$$\begin{aligned}
\langle f(M_B)g, k_{\lambda_n}\rangle &= \langle P_B f g, k_{\lambda_n}\rangle \\
&= \langle fg, k_{\lambda_n}\rangle \qquad \text{car } k_{\lambda_n} \in K_B \\
&= f(\lambda_n)g(\lambda_n) \\
&= \langle g, \overline{f(\lambda_n)}k_{\lambda_n}\rangle,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $f(M_B)^* k_{\lambda_n} = \overline{f(\lambda_n)}k_{\lambda_n}$.

D'autre part, on a également

$$\begin{aligned}
\langle f(M_B)y_n, k_{\lambda_p}\rangle &= \langle y_n, f(M_B)^* k_{\lambda_p}\rangle \\
&= \langle y_n, \overline{f(\lambda_p)}k_{\lambda_p}\rangle \\
&= f(\lambda_p)\delta_{n,p} \\
&= \langle f(\lambda_n)y_n, k_{\lambda_p}\rangle,
\end{aligned}$$

ce qui implique $f(M_B)y_n = f(\lambda_n)y_n$, en utilisant le fait que $\mathtt{Span}(k_{\lambda_p} : p\geqslant 1) = K_B$. □

3.1.4 Théorème du relèvement du commutant

Définition 3.1.17 *Soit $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur linéaire et borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On appelle* **commutant** *de T, et on note $\{T\}'$, l'ensemble défini par*

$$\{T\}' := \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : AT = TA\}.$$

L'objet de cette section est de décrire le commutant de l'opérateur modèle M_Θ. Tout d'abord, il est clair que si $f \in H^\infty$, on a, en utilisant les propriétés du calcul fonctionnel Φ de M_Θ :

$$f(M_\Theta)M_\Theta = \Phi(f)\Phi(z) = \Phi(fz) = \Phi(zf) = \Phi(z)\Phi(f) = M_\Theta f(M_\Theta),$$

d'où $f(M_\Theta) \in \{M_\Theta\}'$. La réciproque est aussi correcte : c'est le théorème du relèvement du commutant, appelé ainsi car il relève l'équation $AM_\Theta = M_\Theta A$

jusqu'au niveau de la dilatation isométrique $S : H^2 \to H^2$ de M_Θ. Avant de formuler ce résultat, donnons un lemme élémentaire qui sera utile dans la preuve du théorème.

Lemme 3.1.18 *Soit $A \in \mathcal{L}(K_\Theta)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$AM_\Theta = M_\Theta A$.*

(ii) *$A_* := \overline{\Theta} A P_\Theta$ est un opérateur de Hankel.*

Preuve : Remarquons tout d'abord que A_* est un opérateur de H^2 dans H^2_-. En effet, d'après le lemme 2.1.14, $AP_\Theta H^2 \subset K_\Theta = H^2 \cap \Theta H^2_-$, ce qui implique $\overline{\Theta} A P_\Theta H^2 \subset H^2_-$. D'autre part,

$$AM_\Theta = M_\Theta A \Longleftrightarrow AP_\Theta z_{|K_\Theta} = P_\Theta z A \Longleftrightarrow AP_\Theta z P_\Theta = P_\Theta z A P_\Theta.$$

Comme $z\Theta H^2 \subset \Theta H^2$, on a $AP_\Theta z(Id - P_\Theta) = 0$, d'où

$$AP_\Theta z P_\Theta = AP_\Theta z(P_\Theta + (Id - P_\Theta)) = AP_\Theta z.$$

D'après le lemme 2.1.13, on a

$$P_\Theta = Id - \Theta P_+ \overline{\Theta} = \Theta(Id - P_+)\overline{\Theta} = \Theta P_- \overline{\Theta}.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} AM_\Theta = M_\Theta A &\Longleftrightarrow AP_\Theta z = P_\Theta z A P_\Theta = \Theta P_- \overline{\Theta} z A P_\Theta \\ &\Longleftrightarrow \overline{\Theta} A P_\Theta z = P_- z \overline{\Theta} A P_\Theta \\ &\Longleftrightarrow A_* z = P_- z A_* \\ &\Longleftrightarrow A_* \text{ est un opérateur de Hankel.} \end{aligned}$$

□

Donnons maintenant le théorème du relèvement du commutant.

Théorème 3.1.19 (D. Sarason, 1967) *Soit Θ une fonction intérieure, $A \in \mathcal{L}(K_\Theta)$ telle que $AM_\Theta = M_\Theta A$. Alors, il existe $\varphi \in H^\infty$ telle que $A = \varphi(M_\Theta)$. D'autre part, on a*

$$\|A\| = \inf\{\|h\|_\infty : A = h(M_\Theta)\} = \operatorname{dist}(\varphi, \Theta H^\infty).$$

De plus, les infimum sont atteints, c'est-à-dire qu'il existe $\psi \in H^\infty$ telle que

$$\|A\| = \|\varphi - \Theta\psi\|_\infty \quad \text{et } (\varphi - \Theta\psi)(M_\Theta) = A.$$

Preuve : Soit $A \in \mathcal{L}(K_\Theta)$, $AM_\Theta = M_\Theta A$. D'après le lemme 3.1.18, l'opérateur $A_* := \overline{\Theta}AP_\Theta$ est un opérateur de Hankel. De plus, comme A est continu, on a, pour tout $x \in H^2$,

$$\|A_*x\|_2 = \|\overline{\Theta}AP_\Theta x\|_2 = \|AP_\Theta x\|_2 \leqslant \|A\|\|P_\Theta x\|_2 \leqslant \|A\|\|x\|_2,$$

d'où A_* est continu et $\|A_*\| \leqslant \|A\|$. Le théorème de Nehari implique alors qu'il existe $f \in L^\infty$ telle que $A_* = H_f$ et $\|A_*\| = \|f\|_\infty = \mathrm{dist}(f, H^\infty)$. Remarquons que pour tout $x \in K_\Theta$, on a

$$\|Ax\|_2 = \|AP_\Theta x\|_2 = \|\overline{\Theta}AP_\Theta x\|_2 = \|A_*x\|_2 \leqslant \|A_*\|\|x\|_2,$$

d'où $\|A\| \leqslant \|A_*\|$, ce qui donne

$$\|A\| = \|A_*\| = \|f\|_\infty = \mathrm{dist}(f, H^\infty). \tag{3.5}$$

En utilisant le fait que $\Theta f \in L^2 = H^2 \oplus \overline{H_0^2}$, il existe $(\varphi, \psi) \in H^2 \times H_0^2$ telle que $\Theta f = \varphi + \overline{\psi}$. Comme

$$P_- \Theta f = H_f \Theta = A_* \Theta = \overline{\Theta}AP_\Theta \Theta = 0,$$

on en déduit que $\overline{\psi} = P_-\Theta f = 0$, d'où $\Theta f = \varphi \in H^2 \cap L^\infty = H^\infty$. Par conséquent, $f = \overline{\Theta}\varphi$, $\varphi \in H^\infty$.

Montrons que $A = \varphi(M_\Theta)$. Pour tout $x \in K_\Theta$, on a

$$Ax = \Theta(\overline{\Theta}AP_\Theta x) = \Theta A_* x = \Theta H_{\overline{\Theta}\varphi} x = \Theta P_- \overline{\Theta}\varphi x = P_\Theta \varphi x = \varphi(M_\Theta)x,$$

d'où $A = \varphi(M_\Theta)$. De plus, d'après (3.5) et le fait que $|\Theta| = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$, on a

$$\|A\| = \|\varphi\|_\infty = \mathrm{dist}(\varphi, \Theta H^\infty). \tag{3.6}$$

Comme $\varphi(M_\Theta) = A$, on a $\|A\| = \|\varphi\|_\infty \geqslant \inf\{\|h\|_\infty : A = h(M_\Theta)\}$. D'autre part, si $h \in H^\infty$, $h(M_\Theta) = A = \varphi(M_\Theta)$, on a, d'après la proposition 3.1.14, $h - \varphi \in \Theta H^\infty$, c'est-à-dire qu'il existe $g \in H^\infty$ telle que $h = \varphi + \Theta g$. On obtient donc

$$\|h\|_\infty = \|\varphi + \Theta g\| \geqslant \mathrm{dist}(\varphi, \Theta H^\infty) = \|A\|,$$

d'où

$$\inf\{\|h\|_\infty : A = h(M_\Theta)\} \geqslant \|A\|,$$

ce qui prouve que

$$\|A\| = \inf\{\|h\|_\infty : A = h(M_\Theta)\} = \mathrm{dist}(\varphi, \Theta H^\infty).$$

De plus, (3.6) montre que les infimums sont atteints, ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Remarque 3.1.20 D'après le théorème du relèvement du commutant, si $A \in \mathcal{L}(K_\Theta)$ telle que $AM_\Theta = M_\Theta A$, alors il existe une fonction $\varphi \in H^\infty$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} H^2 & \xrightarrow{S} & H^2 & \xrightarrow{P_\Theta} & K_\Theta & \xrightarrow{M_\Theta} & K_\Theta \\ {\scriptstyle S_\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S_\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle A} & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ H^2 & \xrightarrow[S]{} & H^2 & \xrightarrow[P_\Theta]{} & K_\Theta & \xrightarrow[M_\Theta]{} & K_\Theta \end{array}$$

où $S_\varphi : H^2 \to H^2$ est défini par $S_\varphi x = \varphi x$, $x \in H^2$.

3.2 Résolution du problème de Nevanlinna-Pick

Tout est prêt maintenant pour prouver le résultat d'interpolation de Pick-Nevanlinna.

Théorème 3.2.1 (Nevanlinna-Pick, 1916, 1919) *Soient $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ n points distincts de $\mathbb{D}$ et $(\omega_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ n nombres complexes. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une fonction $f \in H^\infty$ telle que*

$$f(\lambda_i) = \omega_i, \ (i\geqslant 1) \quad et \quad \|f\|_\infty \leqslant 1.$$

(ii) *La matrice $Q = (Q_{j,k})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ définie par*

$$Q_{j,k} = \frac{1-\overline{\omega_j}\omega_k}{1-\overline{\lambda_j}\lambda_k} \qquad (j,k = 1,\dots,n)$$

est positive.

Preuve : introduisons B le produit de Blaschke (fini) associé à $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. D'après la proposition 2.2.1, la suite $(k_{\lambda_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est minimale donc libre et on a

$$K_B = \mathrm{Span}(k_{\lambda_i} : 1\leqslant i\leqslant n) = \mathfrak{Lin}(k_{\lambda_i} : 1\leqslant i\leqslant n).$$

Par conséquent, le système $(k_{\lambda_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ forme une base de K_B. Considérons alors l'opérateur T défini de K_B dans K_B par

$$Tk_{\lambda_i} = \overline{\omega_i}k_{\lambda_i}, \quad (1\leqslant i\leqslant n).$$

En utilisant le théorème 3.1.8, on a $TM_B^* = M_B^*T$, ce qui donne $M_BT^* = T^*M_B$. Le théorème du relèvement du commutant implique alors qu'il existe $f \in H^\infty$ telle que $T^* = f(M_B)$, soit $T = f(M_B)^*$. De plus, on a

$$\|T\| = \min\{\|f\|_\infty : T^* = f(M_B)\}.$$

Remarquons alors d'après le théorème 3.1.16 que

$$Tk_{\lambda_i} = f(M_B)^* k_{\lambda_i} = \overline{f(\lambda_i)} k_{\lambda_i}, \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

ce qui donne $f(\lambda_i) = \omega_i$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

En combinant tout ce qui précède, on obtient donc $(i) \Longleftrightarrow \|T\| \leqslant 1$. Remarquons alors que $\|T\| \leqslant 1$ si et seulement si l'opérateur $Id - T^*T$ est positif, soit $\langle (Id - T^*T)x, x \rangle \geqslant 0$, $\forall x \in K_B$. Or, pour tout $x = \sum_{i=1}^n a_i k_{\lambda_i} \in K_B$, on a

$$\begin{aligned}
\langle (Id - T^*T)x, x \rangle &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i \overline{a_j} \langle (Id - T^*T) k_{\lambda_i}, k_{\lambda_j} \rangle \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i \overline{a_j} \left(\langle k_{\lambda_i}, k_{\lambda_j} \rangle - \langle Tk_{\lambda_i}, Tk_{\lambda_j} \rangle \right) \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i \overline{a_j} \frac{1 - \overline{\omega_i} \omega_j}{1 - \overline{\lambda_i} \lambda_j}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient que $\|T\| \leqslant 1$ si et seulement si pour tout $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \subset \mathbb{C}$, on a

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i \overline{a_j} \frac{1 - \overline{\omega_i} \omega_j}{1 - \overline{\lambda_i} \lambda_j} \geqslant 0,$$

ce qui par définition traduit le fait que la matrice Q est positive et achève la preuve du théorème. $\square$

3.3 Suites d'interpolation H^∞.

Rappelons le problème d'interpolation (I2) posée dans l'introduction : nous voulons caractériser les suites $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ de $\mathbb{D}$ telles que

$$\text{(I2)} \qquad \forall (\omega_n)_{n \geqslant 1} \in \ell^\infty, \exists f \in H^\infty : f(\lambda_n) = \omega_n, \ n \geqslant 1.$$

Dans la suite, nous adopterons la définition suivante

Définition 3.3.1 *Soit $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de points de $\mathbb{D}$. Nous dirons que $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ est* **une suite d'interpolation $\mathbf{H}^\infty$** *si, pour tout $(\omega_n)_{n \geqslant 1} \in \ell^\infty$, le problème (I2) a une solution $f \in H^\infty$.*

Nous allons résoudre ce problème de la caractérisation des suites d'interpolation H^∞, en combinant le théorème du relèvement du commutant et le théorème de Carleson-Shapiro-Shields. Commençant par un lemme sur la complétude de la biorthogonale associée à une suite de noyaux reproduisant.

Lemme 3.3.2 *Soient $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$, B le produit de Blaschke associé à $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ l'unique biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ dans K_B. Alors la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans K_B.*

Preuve : Rappelons que d'après la proposition 2.2.3, on a

$$y_n = \frac{(1-|\lambda_n|^2)}{B_n(\lambda_n)}\frac{B_n}{1-\overline{\lambda_n}z}.$$

Définissons alors

$$\begin{array}{rccc} U: & K_B & \longrightarrow & K_B \\ & f(z) & \longmapsto & \overline{z}B(z)\overline{f(z)}. \end{array}$$

Tout d'abord, vérifions que U est bien définie. En utlisant le fait que $K_B = H^2 \cap BH^2_-$ (lemme 2.1.14), on a

$$f \in K_B \Longleftrightarrow \overline{z}B\overline{f} \in \overline{z}B(\overline{H^2} \cap \overline{B}\overline{H^2_-}) = \overline{z}B\overline{H^2} \cap \overline{z}\overline{H^2_-} = BH^2 \cap H^2 = K_B.$$

Ceci montre donc que U est bien à valeurs dans K_B et que cette application est surjective. D'autre part, il est clair que l'application U est anti-linéaire et isométrique. Il reste à remarquer que

$$U(k_{\lambda_n}) = \overline{z}B(z)\frac{1}{1-\lambda_n\overline{z}} = \frac{B(z)}{z-\lambda_n} = c_n y_n,$$

où $c_n = \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\frac{B_n(\lambda_n)}{1-|\lambda_n|^2}$. Par conséquent, on obtient que

$$\mathtt{Span}(y_n : n\geqslant 1) = \mathtt{Span}(c_n y_n : n\geqslant 1) = \mathtt{Span}(Uk_{\lambda_n} : n\geqslant 1) = U(\mathtt{Span}(k_{\lambda_n} : n\geqslant 1)) = UK_B = K_B.$$

□

Le résultat suivant fournit alors la caractérisation des suites d'interpolation H^∞.

Théorème 3.3.3 *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite d'interpolation H^∞.*

(ii) $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *vérifie la condition de Carleson.*

Preuve : Notons par B le produit de Blaschke associé à Λ, $x_n := \frac{k_{\lambda_n}}{\|k_{\lambda_n}\|}$, $n\geqslant 1$, la suite de noyaux reproduisant normalisés et par $\mathfrak{X}^* = (y_n)_{n\geqslant 1}$ l'unique biorthogonale à $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans K_B. D'après le théorème 2.3.7, $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in (C)$ si et seulement si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de Riesz de K_B ce qui d'après le théorème de Köthe-Toeplitz (théorème **??**) est équivalent au fait que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de K_B. En utilisant alors le théorème 1.3.3, on obtient que $(x_n)_{n\geqslant 1}$

est une base inconditionnelle de K_B si et seulement si $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de K_B si et seulement si $\mathrm{mult}(\mathfrak{X}^*) = \ell^\infty$, où $\mathrm{mult}(\mathfrak{X}^*)$ désigne l'ensemble des multiplicateurs de $\mathfrak{X}^*$ dans K_B. Par conséquent, on obtient

$$(3.7) \qquad (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in (C) \Longleftrightarrow \mathrm{mult}(\mathfrak{X}^*) = \ell^\infty.$$

Pour terminer la preuve, montrons que $\mathrm{mult}(\mathfrak{X}^*) = H^\infty_{|\Lambda}$. Tout d'abord, montrons que, pour toute fonction $f \in H^\infty$, on a

$$(3.8) \qquad f(M_B)y_n = f(\lambda_n)y_n, \quad n\geqslant 1.$$

Pour tout $n, k\geqslant 1$, on a

$$\begin{array}{rcll} \langle f(M_B)y_n, x_k\rangle & = & \langle P_B f y_n, x_k\rangle & \\ & = & \langle f y_n, x_k\rangle & \quad \text{car } x_k \in K_B \\ & = & f(\lambda_k)\delta_{n,k} & \\ & = & \langle f(\lambda_n)y_n, x_k\rangle, & \end{array}$$

ce qui donne (3.8) grâce à la complétude de $(x_k)_{k\geqslant 1}$ dans K_B. Comme l'opérateur $f(M_B) \in \mathcal{L}(K_B)$, la relation (3.8) signifie que $(f(\lambda_n))_{n\geqslant 1} \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X}^*)$, d'où $H^\infty_{|\Lambda} \subset \mathrm{mult}(\mathfrak{X}^*)$. Réciproquement, soit $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathrm{mult}(\mathfrak{X}^*)$. Par définition, il existe $A \in \mathcal{L}(K_B)$ tel que $Ay_n = u_n y_n$, $n\geqslant 1$. En utilisant le théorème 3.1.8, on obtient que $AM_B y_n = M_B A y_n$, $(n\geqslant 1)$ et le lemme 3.3.2 permet d'affirmer que $AM_B = M_B A$. On applique alors le théorème du relèvement du commutant (théorème 3.1.19) : il existe $\varphi \in H^\infty$ telle que $A = \varphi(M_B)$. L'équation (3.8) implique alors que $Ay_n = \varphi(\lambda_n)y_n$, d'où $u_n = \varphi(\lambda_n)$ $(n\geqslant 1)$. Par conséquent, $\mathrm{mult}(\mathfrak{X}^*) = H^\infty_{|\Lambda}$. En utilisant alors (3.7), on obtient

$$(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in (C) \Longleftrightarrow \ell^\infty = H^\infty_{|\Lambda},$$

ce qui termine la preuve. □

3.4 Suites d'interpolation H^p

3.4.1 Définition et premières remarques

Dans cette section, nous voulons donner un analogue du théorème 3.3.3 dans le cadre des espaces H^p, $1 < p < +\infty$. Rappelons que dans le cas $p = 2$, nous avons montré (théorème 2.3.7) que si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$ et si B désigne le produit de Blaschke associé à $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est une base inconditionnelle de K_B.

(ii) $J_{\mathfrak{X}} H^2 = \ell^2$, où

$$J_{\mathfrak{X}} f = \big((1-|\lambda_n|^2)^{1/2} f(\lambda_n)\big)_{n\geqslant 1}, \qquad (f \in H^2).$$

(iv) $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la condition de Carleson.

En particulier, on obtient que si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in (C)$, alors

$$\forall (v_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^2, \exists f \in H^2 \,:\, f(\lambda_n) = v_n(1-|\lambda_n|^2)^{-1/2}.$$

On voit donc que si on veut espérer obtenir analogue du théorème 3.3.3 dans le cadre des espaces H^p, il est naturel de normaliser le problème d'interpolation et d'adopter la définition suivante

Définition 3.4.1 *Soient $1 < p < \infty$ et $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de points de $\mathbb{D}$. Nous dirons que $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite* **d'interpolation $\mathbf{H^p}$** *si pour toute suite $(v_n)_{n\geqslant 1} \subset \ell^p$, il existe une fonction $f \in H^p$ telle que*

$$f(\lambda_n) = v_n(1-|\lambda_n|^2)^{-1/p}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Il sera utile d'adopter dans la suite un point de vue un peu plus formel. Pour $1 < p < +\infty$ et une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, on considère l'opérateur linéaire défini sur H^p par

$$T_p f = ((1-|\lambda_n|^2)^{1/p} f(\lambda_n))_{n\geqslant 1}, \quad \text{pour } p < +\infty.$$

Avec cette notation, $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est, par définition, une suite d'interpolation H^p si et seulement si $\ell^p \subset T_p H^p$.

Nous allons voir tout d'abord que la condition de Carleson est nécessaire pour qu'une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ soit d'interpolation H^p. Commençons par montrer que si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'interpolation H^p alors non seulement le problème d'interpolation

$$f(\lambda_n) = v_n(1-|\lambda_n|^2)^{-1/p}, \quad (n \geqslant 1)$$

a une solution f dans H^p si $(v_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^p$ mais qu'en plus on peut contrôler la norme de la fonction interpolante f, ce qui est particulièrement important dans les applications (notamment en théorie du contrôle).

Proposition 3.4.2 *Soient $1 < p < \infty$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$. Si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'interpolation H^p alors il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour toute suite $v = (v_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^p$ il existe une fonction $f \in H^p$ telle que*

$$f(\lambda_n) = v_n(1-|\lambda_n|^2)^{-1/p}, \quad (n \geqslant 1),$$

et

$$\|f\|_p \leqslant C_p \|v\|_p \quad (1 < p \leqslant +\infty).$$

Preuve : tout d'abord, remarquons que si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'interpolation H^p, pour toute suite $a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^p$, il existe une unique fonction $f_a \in K_B^p$ telle que $f_a(\lambda_n) = a_n(1 - |\lambda_n|^2)^{-1/p}$.

En effet, par définition des suites d'interpolation, on sait que si $a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^p$, il existe une fonction $g \in H^p$ telle que $g(\lambda_n) = a_n(1 - |\lambda_n|^2)^{-1/p}$. On utilise alors le lemme 2.1.13 : il existe une fonction $g_1 \in K_B^p$ et une fonction $g_2 \in BH^p$ telle que $g = g_1 + g_2$. D'où $g(\lambda_n) = g_1(\lambda_n) + g_2(\lambda_n) = g_1(\lambda_n)$, car $g_2(\lambda_n) = 0$, $n\geqslant 1$. Par conséquent, $a_n(1 - |\lambda_n|^2)^{-1/p} = g_1(\lambda_n)$, $g_1 \in K_B^p$. D'autre part, cette fonction est unique : si $h_1 \in K_B^p$ et $h_1(\lambda_n) = a_n(1 - |\lambda_n|^2)^{-1/p}$, on a $h_1(\lambda_n) = g_1(\lambda_n)$, ce qui implique que $h_1 - g_1 \in BH^p$ et donc $h_1 = g_1$.

Considérons alors l'application φ définie par

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \ell^p & \longrightarrow & K_B^p \\ & a & \longmapsto & f_a. \end{array}$$

On vérifie facilement que φ est linéaire. Montrons que φ est continue. Soit $a^{(m)} \in \ell^p$ convergente vers a et $f_{a^{(m)}}$ convergente vers g dans K_B^p. On a, pour tout $n\geqslant 1$

$$|f_{a^{(m)}}(\lambda_n) - g(\lambda_n)| \leqslant \|f_{a^{(m)}} - g\|_p \|k_{\lambda_n}\|_q \quad \text{et} \quad |a_n^{(m)} - a_n| \leqslant \|a^{(m)} - a\|_p,$$

ce qui implique que

$$\lim_{m\to+\infty} f_{a^{(m)}}(\lambda_n) = g(\lambda_n) \quad \text{et} \quad \lim_{m\to+\infty} a_n^{(m)} = a_n.$$

Or $f_{a^{(m)}}(\lambda_n) = (1 - |\lambda_n|^2)^{-1/p} a_n^{(m)}$, d'où on obtient

$$g(\lambda_n) = (1 - |\lambda_n|^2)^{-1/p} a_n,$$

c'est-à-dire que $g_a = g$. Le théorème du graphe fermé implique alors que φ est continue. Par conséquent, pour toute suite $a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^p$, il existe une fonction $f_a \in K_B^p$ telle que

$$f_a(\lambda_n) = a_n(1 - |\lambda_n|^2)^{-1/p} \quad \text{et} \quad \|f_a\|_p \leqslant \|\varphi\| \|a\|_p.$$

□

Corollaire 3.4.3 *Soient $1 < p < \infty$ et $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$. Si $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'interpolation H^p alors $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la condition de Carleson.*

Preuve : soit $a_m := (\delta_{m,n})_{n\geqslant 1}$, $m\geqslant 1$. D'après la proposition 3.4.2, il existe $f_m \in K_B^p$ telle que

$$f_m(\lambda_n) = \delta_{m,n}(1 - |\lambda_n|^2)^{-1/p} \quad \text{et} \quad \|f_m\|_p \leqslant C_p,$$

où C_p est une constante ne dépendant que de p.

Posons alors $g_m := (1-|\lambda_m|^2)^{1/p} f_m$, $m\geqslant 1$. On a $g_m \in K_B^p$ et $g_m(\lambda_n) = \delta_{m,n}$. Donc $(g_m)_{m\geqslant 1}$ est une biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$. De plus, en utilisant le lemme 2.1.11, on a

$$\|g_n\|_p \|k_{\lambda_n}\|_q = (1-|\lambda_n|^2)^{1/p}\|f_n\|_p\|k_{\lambda_n}\|_q \leqslant (1-|\lambda_n|^2)^{1/p} C_p A_q (1-|\lambda_n|^2)^{-1/p} = C_p A_q,$$

d'où $\sup_{n\geqslant 1} \|g_n\|_p \|k_{\lambda_n}\|_q < +\infty$, ce qui prouve l'uniforme minimalité de $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ dans H^q. Pour conclure, il reste à appliquer le théorème 2.2.4. □

3.4.2 Caractérisation des suites d'interpolation H^p et bases de noyaux reproduisant

Dans cette section, en combinant tous les résultats précédents, nous allons donner la caractérisation des suites d'interpolation H^p ainsi que la caractérisation des suites de noyaux reproduisant $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ qui forme une suite inconditionnelle dans H^p.

Pour démontrer cette caractérisation, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 3.4.4 *Soit $\lambda \in \mathbb{D}$ et $\varphi \in H^\infty$. Alors*

$$P_+(\overline{\varphi} k_\lambda) = \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda.$$

Preuve : Pour $g \in H^2$, on a

$$\begin{aligned} \langle g, P_+(\overline{\varphi} k_\lambda\rangle &= \langle g, \overline{\varphi} k_\lambda\rangle \\ &= \langle \varphi g, k_\lambda\rangle \\ &= \varphi(\lambda) g(\lambda) \\ &= \langle g, \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda\rangle, \end{aligned}$$

ce qui implique le résultat. □

Théorème 3.4.5 *Soient $1 < p < +\infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke de points distincts de $\mathbb{D}$ et B le produit de Blaschke associé à Λ. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *(i)* $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite d'interpolation H^p.*
- *(ii)* $T_p H^p = \ell^p$.
- *(iii)* $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ *est une base inconditionnelle de K_B^q.*
- *(iv)* $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ *est une suite uniformément minimale dans H^q.*
- *(v)* $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *vérifie la condition de Carleson.*

Preuve : Nous allons procéder comme suit : $(iii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (v) \Longrightarrow (iii)$, puis $(v) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (iv)$.

Remarquons que parmi toutes ces implications $(iii) \Longrightarrow (iv)$ et $(ii) \Longrightarrow (i)$ sont évidentes. D'autre part, $(iv) \Longrightarrow (v)$: c'est le théorème 2.2.4 et $(i) \Longrightarrow (iv)$: c'est le corollaire 3.4.3.

$(v) \Longrightarrow (iii)$: notons $\mathfrak{X} = (k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$. D'après le théorème 1.3.3, $(iii) \Longleftrightarrow \text{mult}(\mathfrak{X}) = \ell^\infty$, où $\text{mult}(\mathfrak{X})$ désigne l'ensemble des multiplicateurs de $\mathfrak{X}$ dans K_B^q. On a toujours d'après le théorème 1.2.10, $\text{mult}(\mathfrak{X}) \subset \ell^\infty$. Réciproquement, soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset \ell^\infty$. Comme $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in (C)$, il existe, d'après le théorème 3.3.3, une fonction $f \in H^\infty$ telle que $f(\lambda_n) = \overline{a_n}$, $\forall n\geqslant 1$. Remarquons alors que si $g \in K_B^q$ alors $P_+(\overline{f}g \in K_B^q$. En effet, on a, d'après le lemme 2.1.14, $K_B^q = {}^\perp(BH^p)$. Or, pour toute fonction $g \in K_B^q$ et toute fonction $f \in H^p$, on a

$$\langle Bh, P_+(\overline{f}g)\rangle = \langle Bh, \overline{f}g\rangle = \langle Bhf, g\rangle = 0,$$

d'où $P_+(\overline{f}g \in {}^\perp(BH^p) = K_B^q$. Considérons alors l'opérateur M défini par

$$\begin{array}{rccc} M : & K_B^q & \longrightarrow & K_B^q \\ & g & \longmapsto & P_+(\overline{f}g). \end{array}$$

Il est clair que $M \in \mathcal{L}(K_B)$. D'autre part, en utilisant le lemme 3.4.4, on a

$$M(k_{\lambda_n}) = P_+(\overline{f}k_{\lambda_n}) = \overline{f(\lambda_n)}k_{\lambda_n} = a_n k_{\lambda_n},$$

ce qui implique, par définition que $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \text{mult}(\mathfrak{X})$.

$(v) \Longrightarrow (ii)$: soit $f \in H^p$. Utilisons la décomposition de Riesz-Nevanlinna : il existe un produit de Blaschke B et une fonction $g \in H^p$ telles que $f = Bg$, avec g sans zéros dans $\mathbb{D}$. Comme g ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$, il existe une détermination holomorphe dans $\mathbb{D}$ de $g^{p/2}$. En outre, on a $|g^{p/2}|^2 = |g|^p$ et donc $g^{p/2} \in H^2$. On obtient alors

$$\sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|^2)|f(\lambda_n)|^p \leqslant \sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|^2)|g(\lambda_n)|^p = \sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|^2)|g^{p/2}(\lambda_n)|^2.$$

Le théorème 2.3.7 permet alors de conclure que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|^2)|f(\lambda_n)|^p < \infty$, d'où $T_p H^p \subset \ell^p$.

Réciproquement, soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^p$. D'après le théorème 2.3.7, il existe $g \in H^2$ telle que

$$g(\lambda_n) = |a_n|^{p/2}(1-|\lambda_n|^2)^{-1/2}, \quad (n\geqslant 1).$$

Considérons la factorisation de $g = g_i g_e$, g_i facteur intérieur et $g_e \in H^2$ facteur extérieur. La fonction g_e ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$ et on peut définir une branche analytique de $g_e^{2/p}$ dans $\mathbb{D}$. De plus, comme $|g_e^{2/p}|^p = |g_e|^2$, on a $g_e^{2/p} \in H^p$. Remarquons alors que $|a_n|^{p/2}(1-|\lambda_n|^2)^{-1/2} = |g(\lambda_n)| \leqslant |g_e(\lambda_n)|$, d'où

$$|a_n|(1-|\lambda_n|^2)^{-1/p} \leqslant |g_e^{2/p}(\lambda_n)|, \quad (n\geqslant 1).$$

Considérons alors

$$\epsilon_n := \frac{a_n(1-|\lambda_n|^2)^{-1/p}}{g_e^{2/p}(\lambda_n)}, \quad (n\geqslant 1).$$

Comme $\sup_{n\geqslant 1}|\epsilon_n|\leqslant 1$, $(\epsilon_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^\infty$, et le théorème 3.3.3 implique qu'il existe $f \in H^\infty$ telle que $f(\lambda_n) = \epsilon_n$, $(n\geqslant 1)$. Posons alors $h := fg_e^{2/p}$. La fonction $h \in H^p$ et on a

$$h(\lambda_n)(1-|\lambda_n|^2)^{1/p} = f(\lambda_n)g_e^{2/p}(\lambda_n)(1-|\lambda_n|^2)^{1/p} = a_n, \quad (n\geqslant 1).$$

D'où $(a_n)_{n\geqslant 1} \in T_pH^p$, ce qui conclut la preuve de $(v) \Longrightarrow (ii)$ et du théorème. $\square$

Annexe A

Quelques compléments d'analyse fonctionnelle

A.1 Sur le théorème de Hahn-Banach

Rappelons tout d'abord le théorème classique de Hahn-Banach sur le prolongement des formes linéaires continues.

Théorème A.1.1 ((Brezis, 1993), p.1) *Soient X un espace vectoriel normé, X_0 un sous-espace vectoriel de X et f_0 une forme linéaire continue sur X_0. Alors il existe une forme linéaire f continue sur X telle que $f_{|X_0} \equiv f_0$ et $\|f\| = \|f_0\|$.*

On obtient le corollaire classique de séparation :

Corollaire A.1.2 ((Rudin, 1991), p.60) *Soient X un espace vectoriel normé, X_0 un sous-espace vectoriel fermé de X et $x_0 \in X$. Si $x_0 \notin X_0$, alors il existe $f \in X^*$ telle que $f(x_0) = 1$ et $f(x) = 0$, pour tout $x \in X_0$.*

Rappelons également un critère utile pour la continuité des formes linéaires :

Théorème A.1.3 ((Brezis, 1993)) *Soit f une forme linéaire sur un espace vectoriel normé X. Alors f est continue si et seulement si $\ker(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}$ est fermé.*

Nous allons maintenant donner un résultat qui précise le corollaire A.1.2. Étant moins classique que les résultats précédents, nous allons en donner la preuve.

Théorème A.1.4 *Soient X un espace vectoriel normé, X_0 un sous-espace vectoriel fermé de X et $x_0 \in X$. Si $x_0 \notin X_0$, alors il existe $f_0 \in X^*$ telle que $f_0(x_0) = 1$, $f_0(x) = 0$, pour tout $x \in X_0$ et $\|f_0\| = \frac{1}{\mathrm{dist}(x_0, X_0)}$. De plus, on a*

$$\|f_0\| = \inf\{\|f\| : f \in X^*, f(x_0) = 1, f(x) = 0, x \in X_0\}.$$

Pour prouver ce théorème, le lemme suivant sera utile.

Lemme A.1.5 *Soient X un espace vectoriel normé et $f \in X^*$, $f \not\equiv 0$. Considérons H l'hyperplan défini par $H = \{x \in X \,:\, f(x) = 1\}$. Alors*

$$\|f\| = \frac{1}{\mathrm{dist}(0, H)}.$$

Preuve : Pour $x \in H$, on a $1 = f(x) \leqslant \|f\|\|x\|$ et donc

$$1 \leqslant \|f\| \inf_{x \in H} \|x\| = \|f\| \mathrm{dist}(0, H).$$

D'autre part, par définition de la norme d'une forme linéaire, il existe $(x_n)_{n \geqslant 1} \subset X$ telle que $\|x_n\| = 1$ $(n = 1,\, 2,\, \ldots)$ et $\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \|f\| > 0$. Posons alors

$$y_n = \frac{x_n}{f(x_n)} \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots).$$

Il est clair que $y_n \in H$ et $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \frac{1}{\|f\|}$. Par conséquent,

$$\mathrm{dist}(0, H) = \inf_{x \in H} \|x\| \leqslant \frac{1}{\|f\|}.$$

$\square$

Preuve du théorème A.1.4 : Considérons X_1 le sous-espace vectoriel de X défini par

$$X_1 = \{\lambda x_0 + y \,:\, y \in X_0,\, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

et l'application f_0' définie sur X_1 par

$$f_0'(\lambda x_0 + y) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{K},\, y \in X_0).$$

Comme $x_0 \notin X_0$, cette application est bien définie et linéaire. De plus, ker $(f_0') = X_0$ est fermé. Le théorème A.1.3 implique donc que f_0' est continue sur X_1. De plus, le lemme A.1.5 montre aussi que

$$\|f_0'\| = \frac{1}{\mathrm{dist}(0, H)},$$

où $H = \{x \in X_1 \,:\, f_0'(x) = 1\}$. Comme $H = \{x_0 + y \,:\, y \in X_0\}$, on a $\mathrm{dist}(0, H) = \mathrm{dist}(x_0, X_0)$. Le théorème A.1.1 permet alors de prolonger f_0' en une forme linéaire f_0 continue sur X telle que $\|f_0\| = \|f_0'\|$, ce qui prouve la première partie du théorème. Il reste à remarquer que si $f \in X^*$, $f(x_0) = 1$ et $f(x) = 0$, $x \in X_0$, on a, pour tout $x \in X_0$:

$$1 = f(x_0) = f(x_0 - x) \leqslant \|f\|\|x_0 - x\|,$$

d'où

$$\frac{1}{\|f\|} \leqslant \inf_{x \in X_0} \|x - x_0\| = \mathrm{dist}(x_0, X_0) = \frac{1}{\|f_0\|}.$$

$\square$

A.2 Quelques grands classiques d'analyse fonctionnelle

Rappelons le théorème classique de Banach-Steinhaus qui permet d'obtenir une estimation uniforme sur les normes d'une suite d'opérateurs à partir d'estimations ponctuelles.

Théorème A.2.1 ((Brezis, 1993), p.16) *Soient E et F deux espaces de Banach et $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty, \quad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

On a le corollaire suivant :

Corollaire A.2.2 *Soient E et F deux espaces de Banach, $(T_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'opérateurs linéaires et continus de E dans F, et E_1 un sous espace dense dans E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(T_n x)_{n\geqslant 1}$ converge, pour tout $x \in E$.

(ii) $(T_n x)_{n\geqslant 1}$ converge, pour tout $x \in E_1$ et $\sup_{n\geqslant 1} \|T_n\| < \infty$.

De plus, si (i) est correcte et si on pose $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$, $(x \in E)$, alors $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|T\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

Preuve :
$(i) \Longrightarrow (ii)$: c'est exactement le théorème A.2.1.
$(ii) \Longrightarrow (i)$: posons $C := \sup_{n\geqslant 1} \|T_n\|$ et considérons $x \in E$. Nous allons montrer que $(T_n x)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme E_1 est dense dans E, il existe $x_1 \in E_1$ tel que $\|x - x_1\| < \frac{\varepsilon}{3C}$. Remarquons alors que $(T_n x_1)_{n\geqslant 1}$ est convergente. Il existe donc un entier $N(\varepsilon)$ tel que

$$\|T_n x_1 - T_m x_1\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n, m > N(\varepsilon)).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\| &\leqslant \|T_n x - T_n x_1\| + \|T_n x_1 - T_m x_1\| + \|T_m x_1 - T_m x\| \\ &\leqslant \|T_n\| \|x - x_1\| + \|T_n x_1 - T_m x_1\| + \|T_m\| \|x - x_1\| \\ &< C\frac{\varepsilon}{3C} + \frac{\varepsilon}{3} + C\frac{\varepsilon}{3C} = \varepsilon \quad (n, m > N(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Par conséquent, $(T_n x)_{n\geqslant 1}$ converge pour tout $x \in E$. Il est alors facile de voir que si on pose $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$, $(x \in E)$, alors $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|T\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.
□

Le résultat suivant est dû à S. Banach :

Théorème A.2.3 ((Brezis, 1993), p.19) *Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F. Alors T^{-1} est continu de F sur E.*

Rappelons également le théorème de l'application ouverte :

Théorème A.2.4 ((Brezis, 1993), p.18) *Soit T une application linéaire continue entre deux espaces de Banach E et F. Si T est surjective alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $Tx = y$ et $\|x\| \leqslant C\|y\|$.*

Donnons également le théorème du graphe fermé qui donne un critère souvent très utile pour vérifier la continuité d'une application linéaire.

Théorème A.2.5 ((Rudin, 1991), p.50) *Soient T une application linéaire entre deux espaces de Banach E et F. Si le graphe de T défini par $G(T) := \{(x, T(x)) : x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$, alors l'application T est continue.*

A.3 Théorème de dualité

Rappelons que si X désigne un espace de Banach, M un sous-espace de X et N un sous espace de X^*, on définit les annihilateurs de M et N respectivement par

$$M^{\perp} = \{x^* \in X^* \,:\, x^*(x) = 0, \, \forall x \in M\},$$

et

$$^{\perp}N = \{x \in X \,:\, x^*(x) = 0, \, \forall x^* \in N\}.$$

Le résultat suivant donne une description du dual d'un sous-espace fermé d'un espace de Banach et une description du dual d'un espace quotient.

Théorème A.3.1 ((Rudin, 1991), p.97) *Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach X.*

(a) *Le théorème de Hahn-Banach permet d'étendre toute forme linéaire $m^* \in M^*$ en une forme linéaire $x^* \in X^*$. Définissons*

$$\sigma(m^*) := x^* + M^{\perp}.$$

Alors, σ définit un isomorphisme isométrique de M^* sur $X^*/M^{\perp}$.

(b) *Soit $\pi : X \to X/M$ la surjection canonique. Pour chaque $y^* \in (X/M)^*$, définissons*

$$\tau(y^*) := y^*\pi.$$

Alors τ définit un isomorphisme isométrique de $(X/M)^*$ sur $M^{\perp}$.

Bibliographie

Brezis, H. (1993). *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Masson.

et L. Tzafriri, J. L. (1977). *Classical Banach spaces. I : Sequence spaces*. Springer-Verlag, Berlin.

Hoffman, K. (1965). *Banach spaces of analytic functions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Nikolski, N. K. (1986). *Treatise on the shift operator*. Springer-Verlag, Berlin. Grundlehren der mathematischen Wissenschafte vol. 273.

Rudin, W. (1980). *Analyse réelle et complexe*. Masson.

Rudin, W. (1991). *Functional Analysis*. International Series in Pure and Applies Mathematics. MacGraw-Hill, Inc.

Singer, I. (1970). *Bases in Banach spaces I*. Springer-Verlag, Berlin.

Singer, I. (1981). *Bases in Banach spaces II*. Springer-Verlag, Berlin.