MASTER (MATHÉMATIQUES PURES)

ANALYSE FONCTIONELLE ET THÉORIE DES OPÉRATEURS

COURS et

EXERCICES

Emmanuel Fricain

- 2009-2010 -

Table des matières

Chapitre 1

Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert

1.1 Adjoint d'une application linéaire continue entre espaces de Hilbert

On commence avec la notion d'adjoint ; plusieurs des classes particulières d'opérateurs bornés seront définies à l'aide de cette notion.

Proposition 1.1.1 *Soient E et F des espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on ait :*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

On a de plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Preuve : Pour tout $y \in F$ l'application $x \longmapsto \langle T(x), y\rangle$ est linéaire et continue (de norme inférieure à $\|T\|\|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément noté $T^*(y)$ tel que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in F$ et λ scalaire, $T^*(y) + \lambda T^*(z)$ vérifie la propriété qui définit $T^*(y + \lambda z)$. Par unicité, $T^*(y) + \lambda T^*(z) = T^*(y + \lambda z)$, ce qui prouve que T^* est linéaire.

Par définition de la norme opérateur et en utilisant un corollaire d'Hahn-Banach, on a

$$\begin{aligned}
\|T^*\| = \sup_{y\in F, \|y\|\leq 1} \|T^*y\| &= \sup_{\substack{x\in E, \|x\|\leq 1\\ y\in F, \|y\|\leq 1}} |\langle x, T^*y\rangle| \\
&= \sup_{\substack{x\in E, \|x\|\leq 1\\ y\in F, \|y\|\leq 1}} |\langle Tx, y\rangle| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \|Tx\| = \|T\|.
\end{aligned}$$

Ainsi T^* est continue et $\|T^*\| = \|T\|$.

$\square$

Définition 1.1.2 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. L'unique application linéaire $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que pour tous $x \in E, y \in F$ on ait*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

*est appelée l'**adjoint** de T.*

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints.

Proposition 1.1.3 *Soient E et F des espaces de Hilbert. L'application $T \longmapsto T^*$ est isométrique de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F, E)$; elle est linéaire si les espaces sont réels et antilinéaire si les espaces sont complexes. De plus, $\forall T \in \mathcal{L}(E, F)$, $(T^*)^* = T$ et $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Enfin $(TS)^* = S^*T^*$.*

Preuve : Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tous $x \in E, y \in F$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x, (T_1 + \lambda T_2)^*(y)\rangle &= \langle (T_1 + \lambda T_2)(x), y\rangle \\
&= \langle T_1(x), y\rangle + \lambda\langle T_2(x), y\rangle \\
&= \langle x, (T_1)^*(y)\rangle + \langle x, \overline{\lambda} T_2^*(y)\rangle \\
&= \langle x, (T_1^* + \overline{\lambda} T_2^*)(y)\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi $T \longmapsto T^*$ est antilinéaire. Elle est isométrique d'après la proposition 1.1.1. Montrons que $(T^*)^* = T$. Pour cela on montre que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a $\langle T(x), y\rangle = \langle (T^*)^*(x), y\rangle$. On a

$$\begin{aligned}
\langle T(x), y\rangle &= \langle x, T^*(y)\rangle \\
&= \overline{\langle T^*(y), x\rangle} \\
&= \overline{\langle y, (T^*)^*(x)\rangle} \\
&= \langle (T^*)^*(x), y\rangle.
\end{aligned}$$

Montrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on rapelle que la norme opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier, $\|T^*T\| \leq \|T\|\|T^*\| = \|T\|^2$. D'autre part, en utilisant encore une fois de plus un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|T^*T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T^*T(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle T^*T(x), y\rangle| \\
&\geq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*T(x), x\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), T(x)\rangle| \\
&= \|T\|^2.
\end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Enfin, pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on a $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$. On a, par défintion de l'adjoint,

$$\begin{aligned}
\langle (TS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (TS)(y)\rangle \\
&= \langle T^*(x), S(y)\rangle \\
&= \langle S^*T^*(x), y\rangle.
\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tous vecteurs x, y, on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$.

$\square$

Exemples d'opérateurs et calculs de leur adjoint

1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable admettant une base orthonormale $(h_n)_n$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes. On définit Δ_α sur $\mathcal{H}$ par

$$\forall c = (c_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}), \Delta_\alpha\left(\sum_{n\geq 0} c_n h_n\right) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n c_n h_n.$$

   L'application linéaire Δ_α est dite **diagonale** car elle admet une représentation matricielle diagonale relativement à la base $(h_n)_n$, avec $(\alpha_n)_n$ sur sa diagonale . On vérifie que Δ_α est continue, de norme $\|\alpha\|_\infty$. De plus $\Delta_\alpha^* = \Delta_{\overline{\alpha}}$, où $\overline{\alpha}$ est la suite des nombres conjugés de la suite α.

2. Soit $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mu)$ et $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Soit M_f définie par

$$M_f(g) = fg.$$

   On vérifie que M_f est linéaire, continue, de norme $\|f\|_\infty$ et $M_f^* = M_{\overline{f}}$.

3. Le shift (opérateur de décalage à droite) sur $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ est l'application linéaire définie par

$$(S(x))_n = x_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ ou } n \in \mathbb{Z},$$

   avec la convention $x_{-1} = 0$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.
   On vérifie que S est de norme 1. De plus S^* est défini par $(S^*(y))_n = y_{n+1}$. En fait $S^* = S^{-1}$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Par contre S n'est pas inversible sur $\ell^2(\mathbb{N})$, il est simplement inversible à droite avec $S^*S = Id$.

Proposition 1.1.4 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors*

$$F = \ker(T^*) \oplus^\perp (Im(T))^- \text{ et } E = \ker(T) \oplus^\perp (Im(T^*))^-,$$

où $(Im(T))^-$ et $(Im(T^*))^-$ désignent la fermeture (pour la norme) de $Im(T)$ et $Im(T^*)$ respectivement.

Preuve : Il suffit de prouver la première assertion, la seconde s'obtenant en échangeant le rôle de T et T^*. On a les équivalences suivantes :

$$y \in \ker T^* \Longleftrightarrow \forall x \in E, \langle T^*(y), x\rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in E, \langle y, T(x)\rangle = 0 \Longleftrightarrow y \perp Im(T).$$

La continuité du produit scalaire (conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), implique que

$$y \perp Im(T) \Longleftrightarrow y \perp Im(T)^-.$$

Ainsi l'orthogonal de $\ker T^*$ est l'adhérence de l'image de T.

□

Donnons également une propriété simple mais utile concernant les sous-espaces invariants.

Proposition 1.1.5 *Soient E un espace de Hilbert, G un sous-espace de E et soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors $TG \subset G$ si et seulement si $T^*G^\perp \subset G^\perp$.*

Preuve : Supposons d'abord que $TG \subset G$ et montrons que $T^*G^\perp \subset G^\perp$. Soit $x \in G$ et $y \in G^\perp$. Alors

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = 0,$$

car $Tx \in G$. Ainsi $T^*y \perp x$, pour tout $x \in G$, ce qui montre que $T^*y \in G^\perp$.

Pour la réciproque, on peut appliquer le sens qu'on vient de démontrer à T^* et $G^\perp$.

□

1.2 Opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, autoadjoints

Définition 1.2.1 *Soient E et F deux espaces de Hilbert. Lorsque $E = F$, $\mathcal{L}(E, F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.*

1. *Un élément $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé* ***unitaire*** *si $U^*U = Id_E$ et $UU^* = Id_F$.*

2. *Un élément $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé **isométrique** si $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.*
3. *Un élément $N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **normal** si $NN^* = N^*N$.*
4. *Un élément $S \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **hermitien** ou **auto-adjoint** si $S = S^*$.*
5. *Un élément $P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **positif** (notation : $P \geq 0$) si P est autoadjoint et si pour tout $x \in E$ $\langle P(x), x\rangle \geq 0$.*

Remarque 1.2.2 *On verra (voir Exercice 1.4.2) que dans le cas d'un espace de Hilbert H complexe, un opérateur $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est positif si et seulement si $\langle Px, x\rangle \geq 0$, pour tout $x \in H$. Autrement dit, la condition P auto-adjoint dans la définition est superflue si on travaille avec un espace de Hilbert complexe. Mais attention, cela n'est pas le cas si l'espace de Hilbert est réel !*

Exemples d'opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, autoadjoints

1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un **projecteur orthogonal**. Notons F son image. Alors P est auto-adjoint. En effet, pour tous $x, x' \in F$ et $y, y' \in F^\perp$,
$$\langle P(x+y), x'+y'\rangle = \langle x, x'\rangle = \langle x+y, P(x'+y')\rangle.$$
De plus $\langle P(x+y), x+y\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \geq 0$ pour tous $x \in F$ et $y \in F^\perp$. Ainsi $P \geq 0$.
2. Les opérateurs diagonaux Δ_α et M_f définis précédemment sont normaux. En effet
$$\Delta_\alpha\Delta_\alpha^* = \Delta_\alpha\Delta_{\overline{\alpha}} = \Delta_\beta = \Delta_{\overline{\alpha}}\Delta_\alpha = \Delta_\alpha^*\Delta_\alpha,$$
où $\beta = (\beta_n)_n$ est la suite définie par $\beta_n = |\alpha_n|^2$. D'autre part,
$$M_f M_f^* = M_f M_{\overline{f}} = M_{|f|^2} = M_f^* M_f.$$

3. Le shift S sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est isométrique, le shift S sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ est unitaire.
4. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $T^*T \in \mathcal{L}(E)$ est hermitien car $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$ d'après la proposition 1.1.3. De plus $T^*T \geq 0$ car, pour tout $x \in E$, $\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$. En particulier $A^2 \geq 0$ dès que $A = A^*$.

Proposition 1.2.3 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Sont équivalents :*

1. *T est isométrique.*
2. *$T^*T = Id_E$.*

Sont équivalents :

1. *T est unitaire.*
2. *T est surjective et $T^*T = Id_E$.*
3. *T est une isométrie surjective.*

Preuve : Montrons la première équivalence. Supposons que T est isométrique. Montrer que $T^*T = Id_E$ revient à montrer que pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Rappelons l'identité de polarisation, à savoir,

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle + i\langle u+iv, u+iv\rangle - i\langle u-iv, u-iv\rangle),$$

pour un Hilbert complexe et

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle),$$

pour un Hilbert réel. En utilisant l'une ou l'autre de ces identités et le fait que $\|T(u)\| = \|u\|$, on en déduit :

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Réciproquement, supposons que $T^*T = Id_E$. Ceci implique que pour tout $x \in E$,

$$\langle T^*T(x), x\rangle = \langle x, x\rangle.$$

On en déduit immédiatement pour tout $x \in E$,

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

ce qui prouve que T est bien isométrique.
Pour la preuve des trois autres équivalences, les implications 1. implique 2. et 2. implique 3. sont évidentes. Pour montrer que 3. implique 1., on remarque qu'une isométrie linéaire est injective et donc les hypothèses de 3. impliquent que T^{-1} existe. De plus, T étant une isométrie, on a $T^*T = Id_E$. En composant à droite par T^{-1}, on obtient $T^* = T^{-1}$.

$\square$

Donnons un lemme élémentaire mais utile sur les opérateurs normaux.

Lemme 1.2.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur normal. Alors $\ker T = \ker T^*$.*

Preuve : Soit $x \in \ker T$. Alors

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = 0,$$

en utilisant pour la troisième égalité le fait que T est normal donc $TT^* = T^*T$. Ceci prouve donc que $\ker T \subset \ker T^*$. Maintenant remarquons que si T est normal, alors T^* est normal et en appliquant l'inclusion qu'on vient de démontrer à T^*, on obtient $\ker T^* \subset \ker T^{**} = \ker T$, car $T^{**} = T$. Finalement $\ker T = \ker T^*$.

$\square$

1.3 Spectre des applications linéaires et continues

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On définit le *spectre* de T comme l'ensemble

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\},$$

l'*ensemble résolvant* de T comme $\mathcal{R}(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ et enfin la *résolvante* de T comme l'opérateur

$$R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathcal{R}(T).$$

Nous allons tout d'abord établir la nature topologique du spectre.

Théorème 1.3.1 *Le spectre de tout opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser deux lemmes importants par ailleurs.

Lemme 1.3.2 (Identité de la résolvante) *Pour $\lambda, \lambda_0 \in \mathcal{R}(T)$, on a*

$$R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T) = (\lambda - \lambda_0) R_\lambda(T) R_{\lambda_0}(T).$$

Preuve : En utilisant le fait que $T - \lambda I$ et $T - \lambda_0 I$ commutent, on a

$$\begin{aligned}(R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T))(T - \lambda_0 I)(T - \lambda I) =& R_\lambda(T)(T - \lambda I)(T - \lambda_0 I) - R_{\lambda_0}(T)(T - \lambda_0 I)(T - \lambda I)\\ =& T - \lambda_0 I - (T - \lambda I)\\ =& (\lambda - \lambda_0) I.\end{aligned}$$

En composant à droite par $R_\lambda(T) R_{\lambda_0}(T)$, on obtient le résultat.

□

Lemme 1.3.3 *Notons $Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

(a) *Si $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\|U\| < 1$, alors on a $I - U \in Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ et*

$$(I - U)^{-1} = \sum_{n \geq 0} U^n.$$

(b) *$Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ est un ouvert de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

(c) *L'application $\mathcal{J} : Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H})) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{J}(A) := A^{-1}$, est continue.*

Preuve : (a) : comme $\|U\| < 1$, la série $\sum_n U^n$ est normalement convergente dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui est un espace de Banach donc elle converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. De plus, on vérifie facilement que

$$(I - U)\left(\sum_{n=0}^{N} U^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{N} u^n\right)(I - U) = I - U^{N+1},$$

et donc par passage à la limite (comme $\|U^{N+1}\| \leq \|U\|^{N+1} \to 0$, $N \to +\infty$), on en déduit que

$$(I - U)\left(\sum_{n\geq 0} U^n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} U^n\right)(I - U) = I,$$

ce qui achève de prouver (a).

Pour démontrer (b), il suffit de remarquer que si $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, alors la boule ouverte centrée en A et de rayon $1/\|A^{-1}\|$ est contenue dans $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. En effet, si $T \in B(A, 1/\|A^{-1}\|)$, on a

$$T = A + (T - A) = A\left(I + A^{-1}(T - A)\right).$$

Remarquons alors que $\|A^{-1}(T - A)\| \leq \|A^{-1}\|\|T - A\| < 1$. Donc d'après (a), on a $I + A^{-1}(T - A)$ inversible et comme $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ est un groupe, on en déduit que T est inversible.

Pour montrer (c), fixons $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \|A^{-1}\|$. Nous allons montrer que si $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est tel que $\|B\| \leq \varepsilon/(2\|A^{-1}\|^2)$, alors on a $\|\mathcal{J}(A) - \mathcal{J}(A + B)\| \leq \varepsilon$, ce qui assurera que $\mathcal{J}$ est continue. Tout d'abord remarquons que $A + B = (I + BA^{-1})A$ et $\|BA^{-1}\| \leq \|B\|\|A^{-1}\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|A^{-1}\|} \leq 1/2 < 1$. Donc en utilisant (a), on obtient que $A + B \in \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ et

$$(A + B)^{-1} = A^{-1}(I + BA^{-1})^{-1} = A^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(BA^{-1})^n.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{J}(A)-\mathcal{J}(A+B)\| =& \|A^{-1}-(A+B)^{-1}\| = \|A^{-1}(I-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(BA^{-1})^n)\| \\
=& \|A^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(BA^{-1})^n\| \\
\leq& \|A^{-1}\|\sum_{n=1}^{+\infty}\|BA^{-1}\|^n = \|A^{-1}\|\frac{\|BA^{-1}\|}{1-\|BA^{-1}\|} \\
\leq& \|A^{-1}\|\frac{\frac{\varepsilon}{2\|A^{-1}\|}}{1-\frac{\varepsilon}{2\|A^{-1}\|}} \\
\leq& \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 1.3.1 : le spectre de T est borné car si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $|\lambda| > \|T\|$, alors $T - \lambda Id$ est inversible d'après le lemme 1.3.3. D'où $\sigma(T) \subset \overline{D(0, \|T\|)}$.

Pour montrer que $\sigma(T)$ est fermé, considérons l'application $f : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie par $f(\lambda) = \lambda Id - T$. Alors f est continue et $\mathcal{R}(T) = f^{-1}(Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Ainsi $\mathcal{R}(T)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Nous pouvons en conclure que $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Vérifions que $\sigma(T)$ est non vide. Pour cela nous allons utiliser la théorie des fonctions analytiques à valeurs vectorielles (voir appendice). Considérons $g : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie par $G(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$. Remarquons tout d'abord que d'après le lemme 1.3.3 (c), la fonction g est continue sur $\mathcal{R}(T)$. De plus, d'après le lemme 1.3.2, pour $\lambda_0 \in \mathcal{R}(T)$ et λ proche de λ_0, on a

$$\frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = g(\lambda)g(\lambda_0),$$

Donc par continuité de g, on obtient que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = g(\lambda_0)^2.$$

Ainsi g est holomorphe sur $\mathcal{R}(T)$ et on a $g'(\lambda_0) = g(\lambda_0)^2$. Supposons maintenant que $\sigma(T) = \emptyset$. Autrement dit, cela implique que $\mathcal{R}(T) = \mathbb{C}$. Ainsi g est une fonction entière. Montrons que g est bornée. Pour cela remarquons que pour $|\lambda| > \|T\|$, on a (toujours d'après le lemme 1.3.3)

$$\|g(\lambda)\| = \|(T - \lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|}\|(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Ainsi cela prouve que $\lim_{|\lambda|\to+\infty} g(\lambda) = 0$. Par conséquent g est bornée. Le théorème de Liouville pour les fonctions analytiques à valeurs vectorielles (voir théorème B.3.9) implique que g est constante. Comme g tend vers 0 en l'infini, on en déduit que $g \equiv 0$, ce qui est absurde !

$\square$

Nous allons à présent établir le théorème spectral suivant.

Théorème 1.3.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

1. *Si T est inversible, alors $\sigma(T^{-1}) = \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$.*
2. *$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$ pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$.*

Preuve : 1. Soit $\lambda \in \sigma(T^{-1})$. Comme T^{-1} est inversible, nécessairement $\lambda \neq 0$. Comme $T^{-1} - \lambda Id$ est non inversible et comme $T^{-1} - \lambda Id = \lambda T^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}Id - T\right)^{-1}$, l'opérateur $\left(\frac{1}{\lambda}Id - T\right)^{-1}$ est non inversible, i.e. $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T)$. On a donc montré que $\sigma(T^{-1}) \subset \sigma(T)^{-1} := \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$. En échangeant le rôle de T et T^{-1} on obtient l'inclusion réciproque $\sigma(T)^{-1} \subset \sigma(T^{-1})$, ce qui achève la preuve de la première assertion.

2. Montrons tout d'abord que $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Comme le polynôme $p(X)-p(\lambda)$ s'annule en λ, il existe un polynôme q tel que $p(X)-p(\lambda) = (X-\lambda)q(X)$, ce qui donne

$$p(T) - p(\lambda)Id = (T - \lambda Id)q(T).$$

Si $p(T) - p(\lambda)Id$ était inversible, $(T - \lambda Id)$ serait aussi inversible, d'inverse $(p(T) - p(\lambda)Id)^{-1}q(T)$, ce qui est contraire aux hypothèses. On obtient donc que $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$, montrant que $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$.

Montrons ensuite que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$. Si p est constant, l'inclusion est travialement vérifiée. On suppose donc dans la suite que p n'est pas un polynôme constant. Soit $\lambda \in \sigma(p(T))$. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $p(X) - \lambda$ sous la forme :

$$p(X) - \lambda = \alpha(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n),$$

où les α_i, $i = 1, \cdots, n$ désignent les racines de $p(X) - \lambda$, et où $\alpha \neq 0$ car p n'est pas constant. Si pour tout $i = 1, \cdots, n$ l'opérateur $T - \alpha_i Id$ est inversible, $p(T) - \lambda Id$ est aussi inversible, ce qui est absurde. Par conséquent il existe un indice $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $T - \alpha_i Id$ est non inversible, i.e. $\alpha_i \in \sigma(T)$. On en déduit que $\lambda = p(\alpha_i) \in p(\sigma(T))$, prouvant que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$.

$\square$

Le dernier résultat que nous allons établir concerne le calcul explicite du module du plus grand élément du spectre, appeleé le **rayon spectral**.

Théorème 1.3.5 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et notons*

$$\rho(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Alors $\sigma(T) \subset \overline{D}(0, \rho(T))$. De plus, on a aussi

$$\rho(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Preuve : Notons $\alpha := \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{1/n}$. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. D'après la seconde assertion du Théorème 1.3.4, $\lambda^n \in \sigma(T^n)$. Ainsi $|\lambda^n| \leq \|T^n\|$, ce qui implique $|\lambda| \leq \|T^n\|^{1/n}$. Ainsi $\rho(T) \leq \alpha$. De plus

$$\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \rho(T).$$

Pour cela nous allons utiliser la théorie des fonctions holomorphes et des séries entières. Notons Ω le disque ouvert centré en 0 et de rayon $\frac{1}{\rho(T)}$, avec la convention

$\Omega = \mathbb{C}$ si $\rho(T) = 0$. Considérons la fonction $f : \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie par $f(0) = 0$ et $f(\lambda) = \left(T - \frac{1}{\lambda} Id\right)^{-1}$ pour tout $\lambda \in \Omega \setminus \{0\}$. La fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{0\}$ et nous avons déjà remarqué dans la preuve du Théorème 1.3.1 que $\lim_{\lambda \to 0} f(\lambda) = 0$. La fonction f est donc continue sur Ω, ce qui implique que f est en fait holomorphe sur Ω. De plus, si $0 < |\lambda| < \frac{1}{\|T\|}$, on a

$$f(\lambda) = -\lambda(Id - \lambda T)^{-1} = -\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n,$$

égalité qui reste trivialement vraie pour $\lambda = 0$. Par conséquent, si $|\lambda| < \frac{1}{\|T\|}$, $f(\lambda) = -\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n$. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n$. Comme f est holomorphe sur Ω, $R \geq dist(0, \Omega^c) = \frac{1}{\rho(T)}$ (voir théorème B.3.7). De plus, d'après la formule d'Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Finalement $\limsup_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \rho(T)$, ce qui achève la preuve du théorème.

□

1.4 Exercices, compléments de cours

Exercice 1.4.1 (théorème de Hellinger-Toeplitz) *Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ une application linéaire.*

1. *On suppose qu'il existe une application linéaire $U : H \to H$ telle que*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle,$$

pour tous $(x, y) \in H \times H$. En déduire que T et U sont continues et $U = T^*$.

2. *On suppose maintenant que pour tous $x, y \in H$:*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle.$$

Montrer que T est un opérateur autoadjoint.

Exercice 1.4.2 *Soit E un espace de Hilbert complexe et soit $T \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que si pour tout $x \in E$ on a $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$, alors T est auto-adjoint.*
2. *En déduire que si $P \in \mathcal{L}(E)$, alors P est positif si et seulement si pour tout $x \in E$ on a $\langle P(x), x \rangle \geq 0$.*

Exercice 1.4.3 *Soit E un espace de Hilbert complexe et soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $T = 0$ si et seulement si $\langle T(x), x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$.*
Montrer que ce résultat est faux sur un espace de Hilbert réel.

Exercice 1.4.4 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur autoadjoint. Montrer que*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), x \rangle|.$$

Indication : considérer $\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle$.
Que peut-on en déduire (voir exercice 1.4.3) ?

Exercice 1.4.5 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est normal.*
2. *pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle T^*(x), T^*(y) \rangle$.*
3. *pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$.*

Exercice 1.4.6 *Soit $(e_n)_{n \geq 0}$ la base orthonormale canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$. Soit S l'opérateur défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par*

$$S(e_n) = e_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On appelle S le ***shift unilatéral****.*

1. *Déterminer le spectre de S^*.*
2. *Montrer que le spectre de S est le disque unité fermé.*
3. *Est-ce que S possède des valeurs propres ?*

Exercice 1.4.7 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur* ***normal****, c'est-à-dire vérifiant $T^*T = TT^*$.*

1. *Montrer que $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$, pour tout $n \geq 0$.*
2. *En déduire que le rayon spectral de T est égal à $\|T\|$.*
3. *En déduire qu'il existe $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda| = \|T\|$.*
4. *Montrer que si le spectre de T est réduit à $\{0\}$, alors T est identiquement nul.*

Chapitre 2

Opérateurs compacts

2.1 Applications linéaires compactes

Si E est un espace vectoriel normé, on note $B_E(0,r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ et $\overline{B}_E(0,r)$ la boule fermée. Dans le cas où $r = 1$, on note pour simplifier $B_E = B_E(0,1)$ et $\overline{B}_E = \overline{B}_E(0,1)$. S'il n'y a pas d'ambiguité possible, on oubliera parfois de préciser que la boule que la boule est dans E, en notant simplement $B(0,r)$ ou $\overline{B}(0,r)$.

Définition 2.1.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. Une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est dite* ***compacte*** *si l'image $T(\overline{B}_E)$ est une partie relativement compacte de F. On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E,E)$.*

Commençons par une proposition simple mais utile.

Proposition 2.1.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est compact.*

(ii) *pour toute partie A bornée de E, l'ensemble $T(\bar{A})$ est relativement compact dans F.*

Preuve : (ii) $\Longrightarrow$ (i) : on applique (ii) à $A = B_E$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : soit A une partie bornée quelconque de E. Par définition, il existe donc $r > 0$ tel que $A \subset B_E(0, r) = rB_E$. D'où, avec la linéarité de T, on obtient que

$$T(\bar{A}) \subset T(r\overline{B}_E) = rT(\overline{B}_E).$$

Comme $T(\overline{B}_E)$ est relativement compact, on vérifie alors facilement que $rT(\overline{B}_E)$ est relativement compact et donc $T(\bar{A})$ est aussi relativement compact.

□

La proposition suivante décrit la structure de $\mathcal{K}(E, F)$.

Proposition 2.1.3 *Soient E et F deux espaces de Banach ; l'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$. Soient E, F et G des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, G)$; si S ou T est compacte alors TS est compacte. En particulier, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.*

Preuve : Il est clair que si $T \in \mathcal{K}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda T \in \mathcal{K}(E, F)$. Soient maintenant T_1 et T_2 deux applications linéaires compactes de E dans F, et considérons les ensembles $A_1 = T_1(\overline{B}_E), A_2 = T_2(\overline{B}_E)$ et $A = (T_1 + T_2)(\overline{B}_E)$; il est clair que A est contenu dans $A_1 + A_2$. Comme A_1 et A_2 sont relativement compacts, la proposition A.4.19 implique que $A_1 + A_2$ est relativement compact. Donc A est aussi relativement compacte (en vertu du théorème A.4.3). Ainsi $T_1 + T_2 \in \mathcal{K}(E, F)$. Ceci montre que $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

Supposons que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ soit adhérent à $\mathcal{K}(E, F)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un opérateur compact $S \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\|T - S\| < \varepsilon$; il en résulte que tout point de $T(\overline{B}_E)$ est approché à ε près par un point du compact $K = \overline{S(\overline{B}_E)}$. Le corollaire A.4.17 implique alors que T est compact.

Montrons pour finir les propriétés de composition. Supposons $S \in \mathcal{L}(E, F)$ compacte. On a

$$T(S(\overline{B}_E)) \subset T(\overline{S(\overline{B}_E)}).$$

Par compacité de S et continuité de T, l'ensemble $T(\overline{S(\overline{B}_E)})$ est compact et donc $T(S(\bar{B}_E))$ est relativement compacte, c'est-à-dire que TS est compact.

Supposons maintenant que $T \in \mathcal{L}(F,G)$ est compact et montrons que TS est aussi compact. On a

$$TS(\overline{B}_E) \subset T(\overline{S(\overline{B}_E)}).$$

Comme S est continue, l'ensemble $S(\overline{B}_E)$ est borné et la proposition 2.1.2 entraîne que $T(\overline{S(\overline{B}_E)})$ est relativement compact et donc $TS(\overline{B}_E)$ est relativement compact. Ainsi TS est compact.

□

Remarque 2.1.4 *Il est clair que tout opérateur T de rang fini est compact : en effet, l'ensemble $T(\overline{B}_E)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'après le résultat précédent, si une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs de rang fini dans $\mathcal{L}(E,F)$ converge vers T dans $\mathcal{L}(E,F)$, alors T est compact. C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts.*

Proposition 2.1.5 *Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{K}(E,F)$. Si une suite $(x_n)_n$ de points de E converge faiblement vers 0, alors la suite $(T(x_n))_n$ converge en norme vers 0.*

Preuve : Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge faiblement vers 0. En utilisant le théorème de Banach–Steinhauss, on en déduit que la suite $(x_n)_n$ est borné (voir théorème A.2.4). Donc elle est contenue dans une boule $\overline{B}_E(0,r)$, $r > 0$. D'après la proposition 2.1.2, l'ensemble $T(\overline{B}_E(0,r))$ est relativement compacte dans F donc contenu dans un compact K de F (par exemple, on peut prendre $K = \overline{T(\overline{B}_E(0,r))}$!). D'après le lemme A.4.6, la topologie faible $\sigma(F,F^*)$ et la topologie de la norme coincide sur K. Or d'après le lemme A.5.8, l'application

$$T : (\overline{B}_E(0,r), \sigma(E,E^*)) \longrightarrow (K, \sigma(F,F^*))$$

est continue. Ainsi on en déduit que l'application

$$T : (\overline{B}_E(0, r), \sigma(E, E^*)) \longrightarrow (K, \| \cdot \|)$$

est continue. En particulier, comme $(x_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans $\overline{B}_E(0, r)$, la suite $(Tx_n)_n$ converge vers 0 dans F pour la topologie de la norme.

□

Théorème 2.1.6 *Soit E un espace de Banach. Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $T \in \mathcal{K}(E)$;
2. $T^* \in \mathcal{K}(E^*)$.

Tout d'abord, rappelons que T^* est défini grâce à la relation suivante :

$$\langle T^* x^*, x \rangle = \langle x^*, Tx \rangle,$$

pour tout $x^* \in E^*$ et $x \in E$. Ainsi

$$\|T^* x^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^* x^*, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} ||\langle x^*, Tx \rangle|,$$

avec $|\langle x^*, Tx \rangle| \leq \|x^*\| \|Tx\| \leq \|x^*\| \|T\| \|x\|$. Ainsi, nous avons

$$\|T^* x^*\| \leq \|T\| \|x^*\|,$$

ce qui prouve en particulier la continuité de T^* comme application linéaire de E^* dans E^*. De plus, on a $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Preuve : Supposons que $T \in \mathcal{K}(E)$ et montrons que $T^* \in \mathcal{K}(E^*)$. Soit $(y_n^*)_{n \geq 1}$ une suite de la boule unité fermée de E^*. D'après le corollaire A.4.16, nous devons montrer que $(T^* y_n^*)_n$ possède une sous-suite convergente (pour la topologie de la norme dans E^*). D'après le théorème de Banach–Alaoglu et le théorème A.4.12, on sait que $(y_n^*)_n$ possède une valeur d'adhérence $y^* \in \overline{B}_{E^*}$ pour la topologie faible*. Montrons que T^*y^* est une valeur d'adhérence de $(T^*y_n^*)_n$ pour la topologie de la norme dans E^*. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $T(\overline{B}_E)$ est relativement compact donc précompact d'après le théorème A.4.16, il existe $y_1, y_2, \ldots, y_m \in E$ tels que

$$T(\overline{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_E(y_i, \varepsilon/6).$$

L'ensemble

$$V = \{\varphi \in E^* : |\langle y_i, \varphi - y^* \rangle| < \varepsilon/6,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

est un voisinage de y^* pour la topologie faible*. Donc (par définition d'une valeur d'adhérence), l'ensemble $I := \{n \in \mathbb{N} : y_n^* \in V\}$ est infini. Soit maintenant $x \in \overline{B}_E$ quelconque. Alors il existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tel que $\|Tx - y_i\| < \frac{\varepsilon}{6}$. Donc pour $n \in I$, on a

$$\begin{aligned}
|\langle x, T^*y_n^* - T^*y^* \rangle| =& |\langle Tx, y_n^* - y^* \rangle| \\
\leq& |\langle Tx - y_i, y_n^* - y^* \rangle| + |\langle y_i, y_n^* - y^* \rangle| \\
\leq& \|Tx - y_i\| \|y_n^* - y^*\| + |\langle y_i, y_n^* - y^* \rangle| \\
\leq& 2\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|T^*y_n^* - T^*y^*\| = \sup_{x \in \overline{B}_E} |\langle x, T^*y_n^* - T^*y^* \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ainsi, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : T^*y_n^* \in B_{E^*}(T^*y^*, \varepsilon)\}$ contient I donc est infini. Ceci prouve bien que T^*y^* est une valeur d'adhérence de la suite $(T^*y_n^*)_n$ pour la topologie de la norme dans E^*. Le lemme A.4.10 permet alors de conclure qu'il existe une sous-suite $(T^*y_{n_k}^*)_k$ qui converge vers T^*y^*.

Réciproquement, supposons que T^* soit compact. D'après la première partie de la preuve, on en déduit que $T^{**} : E^{**} \longrightarrow E^{**}$ est compact. Plongeons E isométriquement dans E^{**} à l'aide de l'injection canonique

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{J} : & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & \mathcal{J}(x), \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{rccc} \mathcal{J}(x) : & E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \varphi & \longmapsto & \mathcal{J}(x)(\varphi) = \langle x, \varphi \rangle. \end{array}$$

On a alors $T^{**} \circ \mathcal{J} = \mathcal{J} \circ T$. D'où, en utilisant que $\mathcal{J}$ est une isométrie,

$$\mathcal{J}\left(\overline{T(\overline{B}_E)}\right) = \overline{\mathcal{J}(T(\overline{B}_E))} = \overline{T^{**}(\mathcal{J}(\overline{B}_E))} \subset \overline{T^{**}(\overline{B}_{E^{**}})}.$$

Comme T^{**} est compact, l'ensemble $\overline{T^{**}(\overline{B}_{E^{**}})}$ est compact et donc $\mathcal{J}\left(\overline{T(\overline{B}_E)}\right)$ est compact (car fermé dans un compact). En utilisant encore une fois que $\mathcal{J}$ est une isométrie, on en déduit que $\overline{T(\overline{B}_E)}$ est un compact de E (voir proposition A.4.20), c'est-à-dire que $T \in \mathcal{K}(E)$.

□

Dans le cadre hilbertien, on peut donner des caractérisations plus précises de la compacité.

Théorème 2.1.7 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *l'opérateur T est adhérent (en norme d'opérateur) à l'espace des applications linéaires continues de rang fini ;*

(b) *l'opérateur T est compact de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$;*

(c) *l'ensemble $T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$ est compact (en norme) dans $\mathcal{H}$;*

(d) *pour toute suite (x_n) de points de $\mathcal{H}$ convergeant faiblement vers 0, la suite $(T(x_n))_n$ converge en norme vers 0 ;*

(e) *pour tout système orthonormal $(e_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{H}$ on $\lim_{n\to\infty} \|T(e_n)\| = 0$.*

Preuve :

Nous allons raisonner selon le schéma suivant :

(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (b), puis (b) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (e) $\Longrightarrow$ (a).

(a) $\Longrightarrow$ (b) : découle de remarque 2.1.4.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : on sait déjà que, par définition de la compacité d'un opérateur, l'ensemble $T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$ est relativement compact dans $\mathcal{H}$. Il reste donc à montrer qu'il est fermé. Soit donc $(x_n)_n$ une suite de $\overline{B}_{\mathcal{H}}$ telle que $(Tx_n)_n$ converge (en norme) vers $y \in \mathcal{H}$. Il s'agit de montrer que $y \in T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$. Comme $(x_n)_n$ est bornée, il existe d'après le corollaire A.6.10 une sous-suite $(x_{n_k})_k$ faiblement convergente, disons vers x. De plus, le corollaire A.5.7 assure que $\overline{B}_{\mathcal{H}}$ est faiblement fermée donc $x \in \overline{B}_{\mathcal{H}}$. D'après la proposition 2.1.5, la suite $(Tx_{n_k})_k$ converge en norme vers Tx et par unicité de la limite, on en déduit alors que $y = Tx \in T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$.

(c) $\Longrightarrow$ (b) : est évident !

(b) $\Longrightarrow$ (d) : résulte de la proposition 2.1.5.

(d) $\Longrightarrow$ (e) : il suffit de remarquer que si $(e_n)_n$ est un système orthonormal, alors $(e_n)_n$ converge faiblement vers 0. En effet, pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$\sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty,$$

et donc en particulier $\langle x, e_n \rangle \to 0$, $n \to +\infty$, pour tout $x \in \mathcal{H}$.

(e) $\Longrightarrow$ (a) : notons $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ l'espace des applications linéaires (continues) de rang fini. On raisonne par l'absurde en supposant que T n'est pas adhérent à $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. Il existe alors un voisinage de T, disons $B_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T, 2\varepsilon) = \{U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \|U - T\| < 2\varepsilon\}$, qui ne rencontre pas $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. Cela implique alors

$$\|R - T\| > \varepsilon, \qquad \forall R \in \mathcal{R}(\mathcal{H}). \tag{2.1}$$

On va construire par récurrence un système orthonormal $(e_n)_{n\geq 0}$ tel que $\|Te_n\| > \varepsilon$. En appliquant (2.1) avec $R = 0$, on obtient $\|T\| > \varepsilon$. Ainsi il existe $e_0 \in E$, $\|e_0\| = 1$ tel que $\|Te_0\| > \varepsilon$. Supposons e_k construit pour $k < n$ et soit P la projection orthogonal sur le sous-espace F de E engendré par $\{e_k : k < n\}$. Alors TP est un opérateur de rang fini donc avec (2.1), on a $\|T - TP\| > \varepsilon$. Il existe ainsi $y_n \in E$, $\|y_n\| = 1$ tel que

$$\|T(Id_E - P)y_n\| > \varepsilon. \tag{2.2}$$

Or $Id_E - P$ est une projection orthogonale, donc de norme inférieure ou égale à 1, et donc on a $\|(Id_E - P)y_n\| \leq \|y_n\| = 1$. D'où

$$\|T(Id_E - P)y_n\| > \varepsilon \|(Id_E - P)y_n\|.$$

Posons alors $z_n = (Id_E - P)y_n$ puis $e_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$ (remarquons que $z_n \neq 0$ d'après (2.2)). D'où finalement

$$\|Te_n\| = \|z_n\|^{-1}\|Tz_n\| = \frac{\|T(Id_E - P)y_n\|}{\|(Id_E - P)y_n\|} > \varepsilon.$$

On a aussi $\|e_n\| = 1$ et $e_n \perp e_k$, $k < n$, car $e_n \in \mathrm{Im}(Id_E - P) = (\mathrm{Im}\ P)^{\perp} = F^{\perp}$. Ainsi par récurrence, on construit un système orthonormal $(e_n)_n$ tel que $\|Te_n\| > \varepsilon$, ce qui est en contradiction avec (e).

□

2.2 Théorie spectrale des opérateurs compacts

Cette théorie est pour l'essentiel la création du mathématicien hongrois F. Riesz, aux alentours de 1910. Le théorème de Riesz (qui affirme que si E est un espace vectoriel normé, alors $\overline{B_E}$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie) est l'un des points clés de cette théorie.

Lemme 2.2.1 *Soit $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = Id_E - K$. Supposons qu'il existe un sous-espace fermé F de E tel que T soit injectif de F dans E. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in F$. En particulier, l'image $T(F)$ est fermée.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de constante $c > 0$ telle que $\|Tx\| \geq c\|x\|$, $x \in F$. On peut alors trouver une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs de F, de norme 1, telle que $\|Tx_n\| \to 0$, $n \to +\infty$. Puisque K est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $K(x_{n_k})$ converge ; mais $T(x_{n_k}) = x_{n_k} - K(x_{n_k})$ tend vers 0, donc x_{n_k} converge vers un vecteur $x \in E$. Comme F est fermé, nécessairement, $x \in F$ et de plus, $\|x\| = 1$. Donc en particulier $x \neq 0$. Il reste alors à remarquer que par continuité de T, on a

$$Tx = \lim_{k\to+\infty} Tx_{n_k} = 0,$$

ce qui contredit l'injectivité de T sur F. Ainsi il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in F$. Le fait que l'image $T(F)$ soit fermée résulte d'arguments standards laissés en exercice au lecteur.

$\square$

Proposition 2.2.2 *Soit E un espace de Banach, $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = Id_E - K$. Alors le noyau de T est de dimension finie et l'image $T(E)$ est fermée.*

Remarque 2.2.3 *On remarquera, en utilisant la formule du binôme et la propriété d'idéal de $K(E)$, que $T^n = (Id_E - K)^n$ est de la forme $Id_E - K_n$, avec K_n compact, donc les images de T^n sont fermées pour tout $n \geq 0$ (et leurs noyaux sont de dimension finie).*

Preuve de la proposition 2.2.2 : Notons $E_1 = \ker T = \ker(Id_E - K)$. On vérifie facilement que $\overline{B}_{E_1} \subset K(\overline{B}_E)$ et comme K est compact, on obtient que $\overline{B}_{E_1}$ est compact. Le théorème de Riesz implique alors que E_1 est de dimension finie. Le lemme A.3.5 implique alors qu'il existe un sous-espace fermé F de E tel que $E = ker(T) \oplus F$. Alors T est injectif sur F et le lemme 2.2.1 entraîne que $T(E) = T(F)$ est fermée.

$\square$

Lemme 2.2.4 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, avec F fermé, $F \subset G$ et $F \neq G$. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe un vecteur $y \in G$ tel que $\|y\| = 1$ et* $\operatorname{dist}(y, F) > 1 - \varepsilon$.

Preuve : Par hypothèse, il existe $y_0 \in G \setminus F$. Puisque F est fermé et $y_0 \notin F$, on a $\delta := \operatorname{dist}(y_0, F) > 0$. Comme $\operatorname{dist}(y_0, F) < \delta/(1 - \varepsilon)$, il existe $x_0 \in F$ tel que $\|x_0 - y_0\| < \delta/(1 - \varepsilon)$. Notons $\alpha = \|x_0 - y_0\|$ et posons $y = \alpha^{-1}(y_0 - x_0)$ (remarquons que $\alpha \neq 0$ car $y_0 \notin F$). Montrons que y convient. Tout d'abord, bien sûr, on a $y \in G$ et $\|y\| = 1$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(y, F) =& \mathrm{dist}(\alpha^{-1}(y_0 - x_0), F) \\ =& \alpha^{-1}\mathrm{dist}(y_0 - x_0, F) \\ =& \alpha^{-1}\mathrm{dist}(y_0, F) \qquad \text{(en utilisant que } x_0 \in F) \\ =& \frac{\delta}{\|x_0 - y_0\|} > 1 - \varepsilon\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme.

□

Lemme 2.2.5 *Soit E un espace de Banach, $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = Id_E - K$. Alors on a les propriétés suivantes :*

(a) *Il n'existe pas de chaîne infinie $(F_n)_{n\geq 0}$ de sous-espaces vectoriels fermés de E telle que, pour tout $n \geq 0$, on ait*

$$F_n \subsetneq F_{n+1} \text{ et } T(F_{n+1}) \subset F_n.$$

(b) *Il n'existe pas de chaîne infinie $(F_n)_{n\geq 0}$ de sous-espaces vectoriels fermés de E telle que, pour tout $n \geq 0$, on ait*

$$F_{n+1} \subsetneq F_n \text{ et } T(F_n) \subset F_{n+1}.$$

Preuve : (a) raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(F_n)_{n\geq 0}$ de sous-espaces vectoriels fermés de E telle que $F_n \subsetneq F_{n+1}$ et $TF_{n+1} \subset F_n$. Fixons $\varepsilon \in (0, 1)$. D'après le lemme 2.2.4, pour tout $n \geq 0$, il existe un vecteur $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que $\|x_{n+1}\| = 1$ et $\mathrm{dist}(x_{n+1}, F_n) > 1 - \varepsilon$. Puisque $T(F_{n+1}) \subset F_n \subset F_{n+1}$ et $K = Id_E - T$, on a $K(F_{n+1}) \subset F_{n+1}$. Soient alors k, ℓ deux entiers tels que $0 < k < \ell$; le vecteur $T(x_\ell)$ est dans $F_{\ell-1}$ et $K(x_k) \in F_k \subset F_{\ell-1}$, donc $T(x_\ell) + K(x_k) \in F_{\ell-1}$, donc

$$\|K(x_\ell) - K(x_k)\| = \|x_\ell - (T(x_\ell) + K(x_k))\| \geq \mathrm{dist}(x_\ell, F_{\ell-1}) > 1 - \varepsilon.$$

Ainsi l'image $K(\overline{B}_E)$ contient une suite infinie de points dont les distances mutuelles sont $\geq 1 - \varepsilon$, ce qui contredit la compacité de K.

Le (b) se prouve de façon analogue.

□

Corollaire 2.2.6 *Soit E un espace de Banach, $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = Id_E - K$. La suite croissante des noyaux $(\ker(T^n))_{n\geq 0}$ est stationnaire. La suite décroissante des images $(\mathrm{Im}(T^n))_{n\geq 0}$ est stationnaire.*

Remarque 2.2.7 *Supposons qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(T^{k_0}) = \ker(T^{k_0+1})$. Alors on vérifie facilement par récurrence que, pour tout $k \geq k_0$, on a $\ker(T^k) = \ker(T^{k_0})$ et donc la suite des noyaux $(\ker(T^n))_{n\geq 0}$ est stationnaire.*
De même, supposons qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Im}(T^{k_0}) = \mathrm{Im}(T^{k_0+1})$. Alors on vérifie facilement par récurrence que, pour tout $k \geq k_0$, on a $\mathrm{Im}(T^k) = \mathrm{Im}(T^{k_0})$ et donc la suite des images $(\mathrm{Im}(T^n))_{n\geq 0}$ est stationnaire.

Preuve du corollaire 2.2.6 : Posons $F_n = \ker(T^n)$. On vérifie facilement que F_n est fermé, $F_n \subset F_{n+1}$ et $T(F_{n+1}) \subset F_n$ pour tout $n \geq 0$. Si la suite n'était pas stationnaire, alors d'après la remarque 2.2.7, on aurait aussi $F_n \neq F_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi on obtiendrait une contradiction avec le (a) du lemme 2.2.5. Pour le cas des images, le raisonnement est analogue en appliquant cette fois ci le (b) du lemme 2.2.5.

□

Remarque 2.2.8 *Nous verrons plus tard que le plus petit entier n_0 à partir duquel les suites $(\ker(T^n))_{n\geq 0}$ et $(\mathrm{Im}(T^n))_{n\geq 0}$ deviennent stationnaires est le même.*

Corollaire 2.2.9 *Soit E un espace de Banach, $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = Id_E - K$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est injectif.*

(ii) *T est surjectif.*

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : on raisonne par l'absurde en supposant que T est injectif et non surjectif. Montrons par récurrence que nécessairement $\mathrm{Im}(T^{n+1}) \subsetneq \mathrm{Im}(T^n)$, pour tout $n \geq 0$. Pour $n = 0$, on a

$$\mathrm{Im}(T) \subsetneq E = \mathrm{Im}(Id_E) = \mathrm{Im}(T^0).$$

Supposons que $\mathrm{Im}(T^{k+1}) \subsetneq \mathrm{Im}(T^k)$, pour un certain $k \geq 0$. Soit alors $y \in \mathrm{Im}(T^k) \setminus \mathrm{Im}(T^{k+1})$. Posons $z := Ty$. Comme $y \in \mathrm{Im}(T^k)$ il existe $x \in E$ tel que $y = T^k x$. D'où $z = Ty = T^{k+1}x \in \mathrm{Im}(T^{k+1})$. D'autre part, $z \notin \mathrm{Im}(T^{k+2})$; en effet sinon il existerait $x_1 \in E$ tel que $z = T^{k+2}x_1 = Ty$ et en utilisant l'injectivité de T, on aurait $y = T^{k+1}x_1 \in \mathrm{Im}(T^{k+1})$, ce qui est absurde. D'où $z \in \mathrm{Im}(T^{k+1}) \setminus \mathrm{Im}(T^{k+2})$. En particulier, on obtient que $\mathrm{Im}(T^{k+2}) \subsetneq \mathrm{Im}(T^{k+1})$. Par conséquent, par récurrence, on en déduit que pour tout $n \geq 0$, on a $\mathrm{Im}(T^{n+1}) \subsetneq \mathrm{Im}(T^n)$, ce qui contredit le corollaire 2.2.6.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : raisonnons par l'absurde en supposant que l'opérateur T est surjectif et non injectif. Montrons alors par récurrence que $\ker(T^n) \subsetneq \ker(T^{n+1})$, pour tout $n \geq 0$. Pour $n = 0$, la propriété découle de la non injectivité de T. Supposons alors que $\ker(T^k) \subsetneq \ker(T^{k+1})$, pour un certain $k \geq 0$. Soit alors $x \in \ker(T^{k+1}) \setminus \ker(T^k)$. Comme T est surjectif, il existe $x_1 \in E$ tel que $x = Tx_1$. Alors $T^{k+2}x_1 = T^{k+1}x = 0$ et $T^{k+1}x_1 = T^k x \neq 0$. Ainsi $x_1 \in \ker(T^{k+2}) \setminus \ker(T^{k+1})$. On a donc par récurrence $\ker(T^n) \subsetneq \ker(T^{n+1})$, pour tout $n \geq 0$ et ceci contredit une nouvelle fois le corollaire 2.2.6.

□

Définition 2.2.10 *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. On dit que T est un opérateur de Fredholm si les 3 conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) *l'image de T est fermée ;*

(b) *le noyau de T est de dimension finie ;*

(c) *l'image de T est de codimension finie.*

On note alors

$$\mathrm{Ind}(T) := \dim(\ker T) - \mathrm{codim}(\mathrm{Im}\, T)$$

et le nombre entier $\mathrm{Ind}(T)$ *s'appelle l'indice de T.*

Théorème 2.2.11 (Alternative de Fredholm) *Soient E un espace de Banach, $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = Id_E - K$. Alors T est un opérateur de Fredolm et* $\mathrm{Ind}(T) = 0$.

Preuve : D'après la proposition 2.2.2, $\ker(T)$ est de dimension finie et $\mathrm{Im}(T)$ fermée. Il reste donc à montrer que $\mathrm{Im}(T)$ est de codimension finie, égale à $\dim(\ker T)$. On va procéder par récurrence sur la dimension de $\ker T$.
Si $\dim(\ker T) = 0$, alors T est surjectif d'après le corollaire 2.2.9 et donc $E/\mathrm{Im}(T) = \{0\}$, ce qui implique que $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}\, T) = \dim(\ker T)$. Soit maintenant $n = \dim(\ker T) > 0$ et supposons que $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}\, T') = \dim(\ker T')$ pour tout opérateur $T' = Id_E - K'$, K' compact et $\dim(\ker T') \leq n-1$. Comme $\dim(\ker T) > 0$, le corollaire 2.2.9 implique que T n'est pas surjectif, c'est-à-dire qu'il existe $y_0 \in E \setminus \mathrm{Im}(T)$. D'après le lemme A.3.5, il existe un sous-espace fermé E_1 de E tel que $E = \ker T \oplus E_1$. Considérons une base $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de $\ker T$ (rappelons que $\dim(\ker T) = n$) et définissons l'application $T' : E = \ker T \oplus E_1 \longrightarrow E$ par

$$T'\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + y\right) = \lambda_1 y_0 + Ty, \qquad (\lambda_i \in \mathbb{K},\ y \in E_1).$$

Il est facile de voir que T' est linéaire. Montrons que $\ker T' = \mathrm{Vect}\ (x_2, x_3, \dots, x_n)$.
L'inclusion

$$\mathrm{Vect}\ (x_2, x_3, \dots, x_n) \subset \ker T'$$

est évidente par définition. Réciproquement si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + y \in \ker T'$ (avec $y \in E_1$) alors on a $\lambda_1 y_0 + Ty = 0$. Si $\lambda_1 \neq 0$ alors $y_0 = -\lambda_1^{-1} Ty \in \mathrm{Im}\, T$, ce qui est absurde. Donc $\lambda_1 = 0$ et donc $Ty = 0$. D'où $y \in \ker T \cap E_1 = \{0\}$. Ainsi

$$x = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i \in \mathrm{Vect}\ (x_2, x_3, \dots, x_n),$$

ce qui prouve l'autre inclusion et donc $\ker T' = \mathrm{Vect}\ (x_2, x_3, \dots, x_n)$. Ainsi en particulier on a $\dim(\ker T') = n-1$. Montrons que $T' = Id - K'$ avec K' compact. Remarquons que l'opérateur $R := T' - T$ est de rang 1 ; en effet, pour tout $x \in E$, on a

$$(T' - T)x = \lambda_1 y_0,$$

d'où $\mathrm{Im}(R) = \mathbb{K}y_0$. Ainsi $T' = T + R = Id_E - K + R = Id_E - K'$ avec $K' = K - R$. Or $K' \in \mathcal{L}(E)$ et K' est compact d'après la proposition 2.1.3. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à T' et en déduire que $\mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}\,T')$ est finie et $\mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}\,T') = \dim\,(\ker T') = n-1$. Or $\mathrm{Im}\,T' = \mathbb{K}y_0 \oplus \mathrm{Im}\,T$. En utilisant le lemme A.3.9, on en déduit que $\mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}\,T)$ est finie et $\mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}\,T) = \mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}\,T') + 1 = n - 1 + 1 = n = \dim\,(\ker T)$. Ceci achève de prouver que T est un opérateur de Fredholm d'indice nul.

□

Remarque 2.2.12 *Dans la remarque 2.2.8, nous avions affirmé (sans le démontrer) que l'entier n_0, à partir duquel les suites $(\ker(T^n))_{n\geq 0}$ et $(\mathrm{Im}(T^n))_{n\geq 0}$ deviennent stationnaires, est le même. Ceci découle du théorème 2.2.11. En effet, comme $T^n = (Id_E - K)^n = Id_E - K_n$ avec K_n compact, $n \geq 1$, le théorème 2.2.11 implique que*

$$\mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}\,T^n) = \dim\,(\ker T^n), \qquad (n \geq 0).$$

Ainsi avec un petit argument de dimension, on voit que $\mathrm{Im}(T^{n_0}) = \mathrm{Im}(T^{n_0+1})$ si et seulement si $\ker(T^{n_0}) = \ker(T^{n_0+1})$.

Théorème 2.2.13 *Soient E un espace de Banach et $K \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur compact. On a l'alternative suivante :*

(a) *soit $\sigma(K)$ est fini.*

(b) *soit $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \geq 0\}$, $\lambda_n \neq 0$ et $\lambda_n \to 0$, $n \to +\infty$.*

De plus, si $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, alors λ est une valeur propre de K de multiplicité finie.

Preuve : Remarquons tout d'abord que si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de K alors sa multiplicité est finie. En effet,

$$\ker(K - \lambda Id_E) = \ker(\lambda^{-1}K - Id_E)$$

et comme $\lambda^{-1}K$ est compact, on peut appliquer la proposition 2.2.2 qui implique que le noyau de $\lambda^{-1}K - Id_E$ est de dimension finie.

Montrons maintenant que si $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ alors λ est une valeur propre de K qui, de plus, est isolée dans le spectre de K. Quitte à remplacer K par $\lambda^{-1}K$, on peut supposer que $\lambda = 1$. Posons $T = Id_E - K$. Supposons que 1 n'est pas valeur propre de K. Alors T est injectif et d'après le corollaire 2.2.9, T est finalement bijectif. Autrement dit $1 \notin \sigma(K)$, ce qui est absurde. Cela montre donc que 1 est valeur propre de K. Il reste à montrer qu'elle est isolée dans le spectre de K. Pour cela, nous allons montrer le fait suivant :

Fait 1 : si $1 \in \sigma(K)$ alors il existe $k_0 \geq 1$ tel que $E = \ker T^{k_0} \oplus \operatorname{Im} T^{k_0}$.

Remarquons que $T^n = (Id_E - K)^n = Id_E - K_n$ avec K_n compact, $n \geq 1$. Donc le théorème 2.2.11 implique que

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Im} T^n) = \dim(\ker T^n), \qquad (n \geq 0).$$

De plus, d'après le corollaire 2.2.6, la suite $(\ker(T^n))_{n \geq 0}$ est stationnaire. Soit k_0 le plus petit entier tel que pour tout $k \geq k_0$, on a

$$\ker T^{k_0} = \ker T^k. \tag{2.3}$$

On a $k_0 \geq 1$ car $\ker T^0 = \ker Id_E = \{0\}$ et $\ker T = \ker(Id_E - K) \neq \{0\}$ car 1 est valeur propre de K. On vérifie facilement que l'équation (2.3) implique

$$\ker T \cap \operatorname{Im} T^{k_0} = \{0\}, \tag{2.4}$$

(car sinon $\ker T^{k_0} \subsetneq \ker T^{k_0+1}$) et aussi

$$\ker T^{k_0} \cap \operatorname{Im} T^{k_0} = \{0\}, \tag{2.5}$$

(car sinon $\ker T^{k_0} \subsetneq \ker T^{2k_0}$). L'égalité $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} T^{k_0}) = \dim(\ker T^{k_0})$ et (2.5) impliquent avec le lemme A.3.10 que

$$E = \ker T^{k_0} \oplus \operatorname{Im} T^{k_0},$$

ce qui achève la preuve du fait 1. Remarquons de plus que $T(\ker T^{k_0}) \subset \ker T^{k_0}$ et $T(\operatorname{Im} T^{k_0}) \subset \operatorname{Im} T^{k_0}$. Notons alors $T_1 := T_{|\ker T^{k_0}}$ et $T_2 := T_{|\operatorname{Im} T^{k_0}}$. Alors bien sûr, on a $T_1 \in \mathcal{L}(\ker T^{k_0})$ et $T_2 \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} T^{k_0})$.

Fait 2 : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < \delta$, l'opérateur $T_2 - \lambda Id$ est un isomorphisme sur $\operatorname{Im} T^{k_0}$.

Nous allons montrer que T_2 est un isomorphisme. Remarquons que T_2 est injective d'après (2.4). On peut alors appliquer le corollaire 2.2.9 à T_2 et on en déduit que T_2 est un isomorphisme de $\operatorname{Im} T^{k_0}$ sur $\operatorname{Im} T^{k_0}$. Comme Inv $(\mathcal{L}(\operatorname{Im} T^{k_0}))$ est un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < \delta$, $T_2 - \lambda Id$ reste un isomorphisme sur $\operatorname{Im} T^{k_0}$. Ceci prouve le fait 2.

Fait 3 : pour tout $\lambda \neq 0$, l'opérateur $T_1 - \lambda Id$ est un isomorphisme sur $\ker T^{k_0}$.

Vérifions d'abord que si $\lambda \neq 0$, alors l'opérateur $T_1 - \lambda Id$ est injectif. Soit $x \in \ker(T_1 - \lambda Id)$. Alors $x \in \ker T^{k_0}$ et $Tx = \lambda x$. Nous allons montrer par récurrence descendante que pour tout $0 \leq j \leq k_0$, $T_j x = 0$. Pour $j = k_0$, la propriété est vérifiée car $x \in \ker T^{k_0}$. Supposons que pour $1 \leq j \leq k_0$ alors $T^j x = 0$. Alors en utilisant que $Tx = \lambda x$, on a $T^{j-1}(\lambda x) = T^j x = 0$. D'où $T^{j-1}x = 0$ car $\lambda \neq 0$. Ainsi on obtient que $x = 0$. L'opérateur $T_1 - \lambda Id$ est donc injectif et finalement un isomorphisme car $\dim(\ker T^{k_0}) < +\infty$. Ceci achève la preuve du fait 3.

En utilisant les faits 2 et 3, on en déduit donc que l'opérateur

$$T - \lambda Id_E = (T_1 - \lambda Id_{|\ker T^{k_0}}) \oplus (T_2 - \lambda Id_{|\operatorname{Im} T^{k_0}})$$

est un isomorphisme pour tout $\lambda \neq 0$ assez petit. Ainsi 0 est un point isolé de $\sigma(T)$, c'est-à-dire que 1 est un point isolé de $\sigma(K)$. On a donc prouvé que pour tout $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, λ est un point isolé du spectre de K. Autrement dit, si $0 < r < R$, l'ensemble $\{z \in \sigma(K) : r \leq |z| \leq R\}$ est fini. Donc si $\sigma(K)$ est infini, alors ceci permet de ranger les valeurs de $\sigma(K)$ en une suite $(\lambda_n)_n$ qui tend vers 0 (car le spectre de K est fermé).

□

Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, on notera $\sigma_p(T)$ l'ensemble (éventuellement vide) des valeurs propres de T.

Théorème 2.2.14 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur compact et normal. Alors*

$$\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)}} \ker(T - \lambda Id_{\mathcal{H}}).$$

En particulier, $\mathcal{H}$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

Preuve : Pour $\lambda \in \sigma_p(T)$, notons $E_\lambda = \ker(T - \lambda Id_{\mathcal{H}})$. D'après le lemme 1.2.4, on a

$$\ker(T - \lambda Id_{\mathcal{H}}) = \ker(T^* - \bar{\lambda} Id_{\mathcal{H}}),$$

(car si T est normal, $T - \lambda Id_{\mathcal{H}}$ est aussi normal). Montrons que $E_\lambda \perp E_\mu$, pour tout $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in E_\lambda$, $y \in E_\mu$. Alors

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$$

où la dernière égalité provient du fait que $y \in E_\mu = \ker(T^* - \bar{\mu} Id_{\mathcal{H}})$. On en déduit donc que

$$(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0,$$

soit comme $\lambda \neq \mu$, on obtient $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci prouve donc que $E_\lambda \perp E_\mu$ et les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux. Maintenant notons

$$F := \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)}} \ker(T - \lambda Id_{\mathcal{H}}),$$

et montrons que $F = \mathcal{H}$. Raisonnons par l'absurde, en supposant que $F^\perp \neq \{0\}$. Remarquons que, pour tout $\lambda \in \sigma_p(T)$, on a $TE_\lambda \subset E_\lambda$ et $T^* E_\lambda \subset E_\lambda$. D'où $TF \subset F$ et $T^* F \subset F$. La proposition 1.1.5 implique alors que

$$T^* F^\perp \subset F^\perp \quad \text{et} \quad TF^\perp \subset F^\perp. \tag{2.6}$$

Considérons $T_1 := T_{|F^\perp}$. En utilisant (2.6), on vérifie que T_1 est un opérateur normal et compact. Donc en utilisant l'exercice 1.4.7, on en déduit qu'il existe

$\mu_1 \in \sigma(T_1)$ tel que $|\mu_1| = \|T_1\|$. Supposons $\mu_1 = 0$; alors dans ce cas, cela signifie que $T_1 = 0$, soit encore que $F^\perp \in \ker T$. Mais ceci est absurde car $\ker T \subset F$. Ainsi $\mu_1 \neq 0$. On sait alors d'après le théorème 2.2.13 que μ_1 est une valeur propre de T_1. Autrement dit, il existe $x \in F^\perp$, $x \neq 0$ tel que $T_1 x = \mu_1 x$, soit encore $Tx = \mu_1 x$. Donc x est aussi un vecteur propre de T et donc $x \in F$. Ceci est absurde. On en conclut donc que $F = \mathcal{H}$. Pour obtenir une base orthonormée de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres de T, on rassemble des bases orthonormées de chaque espace E_λ , $\lambda \neq 0$, qui sont des bases finies, et s'il y a lieu, une base orthonormée du noyau E_0.

□

2.3 Exercices

2.3.1 Premiers exemples d'opérateurs compacts : shifts pondérés, opérateurs intégraux et opérateur de Volterra

Exercice 2.3.1 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de nombres complexes et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $T(e_n) = \lambda_n e_n$. Montrer que T est compact si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.*

Exercice 2.3.2 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Banach et T une application linéaire continue compacte de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Montrer que si l'image de T est fermée, alors elle est de dimension finie.*

Exercice 2.3.3 *Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ou $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ muni de la norme du supremum : $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. On définit T sur E par*

$$T_K f(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy,$$

*où $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. L'opérateur T_K est appelé **opérateur intégral**.*

1. *Montrer que T_K est une application linéaire et continue de E dans E.*
2. *En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que T_K est compacte.*

Exercice 2.3.4 *Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$, noté $\mathcal{C}([0,1])$, muni de la norme infini. On définit V sur $\mathcal{H}$ par*

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

L'opérateur V est appelé ***l'opérateur de Volterra***

1. *Montrer que V est une application linéaire et continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.*
2. *A l'aide du théorème d'Ascoli, montrer que V est un opérateur compact.*
3. *Montrer que V n'a pas de valeur propre.*
4. *Montrer que le rayon spectral de V est 0. On dit que V est* ***quasinilpotent****.*

2.3.2 Opérateurs de Hilbert–Schmidt

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Par définition on dit que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt si

$$\|T\|_2^2 := \sum_{n\geq 0} \|T(e_i)\|^2 < \infty.$$

Exercice 2.3.5 *On notera par $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert–Schmidt.*

1. *Montrer que $\sum_{n\geq 0} \|T(e_i)\|^2$ est indépendant du choix de la base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$.*
2. *Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel normé complet muni pour la norme $\|\cdot\|_2$.*
3. *Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est composé d'opérateurs compacts.*
4. *Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
5. *Soit $K \in L^2([0,1],[0,1])$ et soit T défini sur $L^2([0,1])$ par*

   $$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

   Montrer que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

2.3.3 Décomposition des opérateurs compacts

Exercice 2.3.6 *Soit Δ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et K une fonction complexe de carré intégrable sur $\Delta \times \Delta$ telle que $K(t,t') = \overline{K(t',t)}$ pour tout $t, t' \in \Delta$.*

1. *Soit v_K l'endomorphisme de $L^2(\Delta)$ défini par*
$$(v_K f)(t') = \int_\Delta K(t,t') f(t) dt \qquad (t' \in \Delta).$$
Montrer que le spectre de v_K se compose de 0 et d'une suite de valeurs propres réelles de multiplicités finies.

2. *Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ la suite des valeurs propres non nulles de v_K, chacune écrite un nombre de fois égal à sa multiplicité. Montrer que l'on a :*
$$\sum_n \lambda_n^2 = \int_\Delta \int_\Delta |K(t,t')|^2 dt dt' < \infty.$$

3. *Montrer que $L^2(\Delta)$ est la somme directe hilbertienne des sous-espaces propres de v_K correspondant aux différentes valeurs propres.*

4. *Choisissons un système orthormal $(\varphi_n)_n$ dans $L^2(\Delta)$ tel que $v_K \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ pour tout n. Pour tout $f \in L^2(\Delta)$, posons*
$$c_n = \int_\Delta f(t) \overline{\varphi_n(t)} dt.$$
Montrer que l'on a :
$$v_K f = \sum_n \lambda_n c_n \varphi_n,$$
la série convergeant normiquement dans $L^2(\Delta)$.

5. *Soit λ un nombre complexe non nul distinct de tous les λ_n. Soit $g \in L^2(\Delta)$ et posons $d_n = \int_\Delta g(t) \overline{\varphi_n(t)} dt$. Montrer qu'il existe $h \in L^2(\Delta)$ et une seule fonction $h \in L^2(\Delta)$ telle que*
$$\int_\Delta K(t,t') h(t) dt - \lambda h(t') = g(t')$$

presque partout dans Δ, et h est donné par la série

$$h = -\frac{1}{\lambda} g + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} d_n \varphi_n$$

convergeant normiquement dans $L^2(\Delta)$.

6. *Soit φ_{nm} la fonction définie sur $\Delta \times \Delta$ par*

$$\varphi_{nm}(t, t') = \overline{\varphi_n(t)} \varphi_m(t').$$

Montrer que

$$K = \sum_n \lambda_n \varphi_{nn},$$

la série convergeant normiquement dans $L^2(\Delta \times \Delta)$.

7. *On suppose maintenant que Δ est compact et K continue sur $\Delta \times \Delta$. Montrer que pour tout $f \in L^2(\Delta)$ la fonction $v_K f$ est continue. En déduire que les fonctions propres de v_K correspondant à une valeur propre non nulles sont continues.*

8. *Montrer que pour $f \in L^2(\Delta)$ la série*

$$v_K f = \sum_n \lambda_n c_n f_n$$

converge uniformément et absolument (en se plaçant dans les hypothèses de la question précédente.

9. *On reprend les notations et les hypothèses de 7. et 8. Montrer que pour toute fonction g continue sur Δ, l'unique $h \in L^2(\Delta)$ telle que, pour tout $\lambda \neq 0$,*

$$\int_\Delta K(t, t') h(t) dt - \lambda h(t') = g(t')$$

presque partout dans Δ, possède un représentant continu. Montrer que

$$h = -\frac{1}{\lambda} g + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} d_n \varphi_n$$

où cette série converge uniformément et absolument.

Chapitre 3

Algèbres de Banach

3.1 Introduction

Définition 3.1.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$ équipée d'une norme $\|\cdot\|$. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *$\mathcal{A}$ est un $\mathbb{C}$-espace de Banach (i.e. un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé, complet)*

(ii) *pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, on a*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Si de plus, il existe un élément $e \in \mathcal{A}$ tel que

$$xe = ex = x \quad (x \in \mathcal{A}) \quad et \quad \|e\| = 1,$$

alors, on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach unitaire. L'élément e s'appelle l'élément unité de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Enfin, nous dirons qu'une algèbre $\mathcal{A}$ est commutative si $xy = yx$ pour tous $x, y \in \mathcal{A}$.

Remarque 3.1.2

- *Il existe au plus un élément unité e.*
- *Concernant l'existence d'un élément unité, notons qu'on peut toujours "plonger" isométriquement une algèbre de Banach quelconque dans une algèbre de Banach unitaire. En effet, si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach (sans unité),*

alors on pose $\mathcal{A}^\sharp = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$*, muni de sa structure d'espace vectoriel produit cartésien et on définit la multiplication sur* $\mathcal{A}^\sharp$ *par*

$$(x, \alpha)(y, \beta) := (\alpha y + \beta x + xy, \alpha\beta).$$

La norme sur $\mathcal{A}^\sharp$ *est elle définie par*

$$\|(x, \alpha)\| := \|x\| + |\alpha|.$$

Alors on vérifie (exercice 3.8.5) que $\mathcal{A}^\sharp$ *est une algèbre de Banach unitaire et* $\mathcal{A}$ *se plonge isométriquement dans* $\mathcal{A}^\sharp$*.*

- *La condition* (ii) *dans la définition 3.1.1 fait de la multiplication une opération continue de* $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{A}$*. Ceci signifie que si* $x_n \to x$ *et* $y_n \to y$*, alors* $x_n y_n \to xy$*, ce qui découle de l'égalité*

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y).$$

En particulier, la multiplication à gauche et à droite est continue :

$$x_n y \to xy \quad \textit{et} \quad xy_n \to xy \tag{3.1}$$

si $x_n \to x$ *et* $y_n \to y$*.*

Comme on le verra dans l'exercice 3.8.1, la condition (ii) peut être remplacée par la condition (3.1) (apparemment plus faible) et la condition de normalisation de l'élément unité peut être omise sans élargir la classe des algèbres considérées.

Donnons maintenant quelques premiers exemples classiques d'algèbres de Banach.

Exemple 3.1.3 (a) *Soit* X *un ensemble quelconque ; l'ensemble* $\mathcal{B}(X)$ *des fonctions bornées de* X *dans* $\mathbb{C}$*, équipé des opérations usuelles et de la norme du "sup"*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

est une algèbre de Banach unitaire, commutative. (Notons que cette algèbre est, pour $X = \mathbb{N}$*, l'algèbre* ℓ^∞ *des suites bornées de nombres complexes).*

(b) *Si X un espace topologique compact, l'ensemble $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$, muni de la norme du sup, est une algèbre de Banach unitaire et commutative. En fait, c'est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{B}(X)$!*

(c) *Si E est un $\mathbb{C}$-espace de Banach, l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des applications linéaires et bornées de E dans lui-même est une algèbre de Banach unitaire, pour la "norme opérateur"*

$$\|T\| := \sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

Cette algèbre est non commutative dès que dim $E > 1$.

(d) *Toute sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(E)$ et contenant l'opérateur identité est une algèbre de Banach unitaire. En fait, on peut montrer que toute algèbre de Banach unitaire est isomorphe à une sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(E)$, contenant l'identité (voir exercice 3.8.1).*

(e) *Soit Ω un domaine (i.e. un ouvert connexe) borné du plan complexe. L'algèbre $H^\infty(\Omega)$, constitué des fonctions holomorphes et bornées sur Ω, est une algèbre de Banach unitaire et commutative pour la norme du sup.*

(f) *Soit K un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{C}$ et $A(K)$ l'algèbre de toutes les fonctions f continues sur K et holomorphes à l'intérieur de K. Alors $A(K)$ est une sous-algèbre fermée de $C(K)$ munie de la norme du sup. C'est donc une algèbre de Banach. Lorsque $K = \overline{\mathbb{D}}$ est le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, on appelle $A(\overline{\mathbb{D}})$ l'algèbre du disque.*

Remarque 3.1.4 *La théorie des algèbres de Banach fait intervenir en même temps des propriétés algébriques et des propriétés topologiques et comme nous allons le voir dans ce cours, un va et vient constant entre ces deux types de proprieté permet d'obtenir très simplement des résultats parfois surprenants. Il existe aussi d'étroites relations entre les algèbres de Banach et les fonctions holomorphes : la démonstration la plus facile du fait fondamental que le spectre d'un élément d'une algèbre de Banach n'est jamais vide repose sur le théorème de Liouville et la for-*

mule du rayon spectral découle naturellement de théorèmes sur les développements en série entières pour les fonctions holomorphes. C'est là une des raisons pour restreindre notre attention aux algèbres de Banach complexes. Une autre raison est que $\mathbb{C}$ admet une involution naturelle, à savoir la conjugaison complexe, et que beaucoup de propriétés importantes des algèbres de Banach dépendent de la présence d'une involution.

La théorie des algèbres de Banach réelles (dont nous ne donnons pas la définition qui est évidente) n'est pas aussi satisfaisante et riche.

3.2 Inversibilité et spectre.

Nous commençons par introduire la première notion algébrique fondamentale.

Définition 3.2.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire. Un élément $x \in \mathcal{A}$ est dit inversible s'il admet un inverse dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire s'il existe un élément $x^{-1} \in \mathcal{A}$ tel que*

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e,$$

où e est l'élément unité de $\mathcal{A}$.

On notera $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}$.

Il est facile de voir que :

- si $x \in \mathcal{A}$ admet un inverse, il est nécessairement unique.
- $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est un groupe (pour la multiplication).

Nous allons donner un lemme élémentaire sur les éléments inversibles qui sera crucial dans toute la suite. Ce lemme montre comment cette notion algébrique se mélange avec la topologie.

Lemme 3.2.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$ tel que $\|x\| < 1$. Alors*

(a) $e - x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$,

(b) $\|(e-x)^{-1}-e-x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$.

Preuve : Comme $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ et $\|x\|<1$, la suite $(s_n)_{n\geq 0}$, définie par

$$s_n := e + x + x^2 + \cdots + x^n,$$

forme une suite de Cauchy dans $\mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est complète, il existe $s \in \mathcal{A}$ tel que $s_n \to s$. Un calcul immédiat montre que

$$s_n(e-x) = e - x^{n+1} = (e-x)s_n,$$

et comme $x^n \to 0$, on obtient par continuité de la multiplication que

$$s(e-x) = e = (e-x)s.$$

En d'autre terme, $e-x$ est inversible et son inverse est

$$(e-x)^{-1} = s = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \tag{3.2}$$

ce qui démontre (a). Pour prouver (b), on écrit, d'après (3.2), que

$$(e-x)^{-1} - e - x = \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

et donc

$$\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}.$$

□

Corollaire 3.2.3 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$, $h \in \mathcal{A}$, et $\|h\| \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Alors $x+h \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ et*

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2. \tag{3.3}$$

Preuve : Ecrivons $x+h = x(e+x^{-1}h)$. Or $\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\|\|h\| \leq \frac{1}{2} < 1$ et donc le lemme 3.2.2 implique que $e + x^{-1}h \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$. Comme $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est un groupe, on en déduit que $x+h \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$. De plus,

$$\begin{aligned}(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} &= (e+x^{-1}h)^{-1}x^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} \\ &= \left((e+x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\right)x^{-1},\end{aligned}$$

et le lemme 3.2.2 (b) implique que

$$\begin{aligned}\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq & \|(e+x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\|\|x^{-1}\| \\ \leq & \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1-\|x^{-1}h\|}\|x^{-1}\|.\end{aligned}$$

Comme $\|x^{-1}h\| \leq \frac{1}{2}$, on en déduit l'inégalité (3.3).

□

Corollaire 3.2.4 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire. Alors $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{A}$ et l'application $\varphi : x \longmapsto x^{-1}$ est un C^∞-difféormorphisme de $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ sur lui-même. De plus, sa différentielle au point $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est donnée par*

$$d_x\varphi(h) = -x^{-1}hx^{-1}.$$

Preuve : D'après le corollaire 3.2.3, si $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$, alors la boule ouverte de centre x et de rayon $\frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$ est contenue dans $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$. Ceci prouve que $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est ouvert.

Remarquons de plus que si $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ et si $h \in \mathcal{A}$, $\|h\| \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$, l'inégalité (3.3) s'écrit

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + L_x(h) + o(\|h\|),$$

avec $L_x(h) = -x^{-1}hx^{-1}$. Il est clair que L_x est une forme linéaire, continue sur $\mathcal{A}$, avec $\|L_x\| \leq \|x^{-1}\|^2$. Par conséquent, φ est différentiable et sa différentielle est $d_x\varphi = L_x$.

Définissons maintenant $\Theta : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A})$ par

$$\Theta(a,b)h := -ahb, \qquad (a,b,h) \in \mathcal{A}^3.$$

Il est évident que Θ est une application bilinéaire et continue, de norme plus petite que 1. Par conséquent, Θ est de classe C^∞ sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Or

$$d_x\varphi = \Theta(\varphi(x), \varphi(x)), \qquad x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A}), \tag{3.4}$$

et donc on en déduit que $x \longmapsto d_x\varphi$ est continue. Autrement dit, φ est de classe C^1 sur $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$. Par récurrence, en utilisant (3.4), on obtient que φ est de classe C^∞ sur $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$.

Finalement, remarquons que φ est une bijection de $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ et son inverse est elle-même, i.e. que $\varphi^{-1} = \varphi$. Donc on en déduit que φ est un C^∞-difféomorphisme de $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ sur lui-même.

□

Nous introduisons maintenant les principaux outils spectraux qui vont être utilisés dans tout ce cours.

Définition 3.2.5 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$.*

Le spectre $\sigma(x)$ de x est défini par

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin \mathcal{I}nv(\mathcal{A})\}.$$

Le complémentaire de $\sigma(x)$ est appelé l'ensemble résolvant de x et est noté $\mathcal{R}(x)$. Autrement dit,

$$\mathcal{R}(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})\}.$$

La résolvante de x est l'application définie sur $\mathcal{R}(x)$, à valeurs dans $\mathcal{A}$ donnée par

$$R(\lambda, x) := (x - \lambda e)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathcal{R}(x).$$

Enfin, le rayon spectral de x est le nombre

$$r(x) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Bien évidemment, la définition du rayon spectral $r(x)$ n'a pas de sens si le spectre de x est vide mais comme nous allons le voir dans le résultat suivant, cela n'arrive jamais !

Théorème 3.2.6 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$.*

(a) *L'ensemble résolvant* $\mathcal{R}(x)$ *est ouvert et l'application résolvante* $R(\cdot, x)$ *est holomorphe dans* $\mathcal{R}(x)$. *De plus, pour tout* $(\lambda, \mu) \in \mathcal{R}(x) \times \mathcal{R}(x)$, *on a*

$$R(\mu, x) - R(\lambda, x) = (\mu - \lambda)R(\lambda, x)R(\mu, x). \tag{3.5}$$

En particulier, $R(\lambda, x)$ *et* $R(\mu, x)$ *commutent.*

(b) $\sigma(x) \subset \overline{D}(0, \|x\|)$.

(c) *Le spectre* $\sigma(x)$ *est un compact non vide de* $\mathbb{C}$.

(d) *Si* $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$, *alors on a* $\sigma(x^{-1}) = (\sigma(x))^{-1}(= \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Preuve :

(a) considérons $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par

$$f(\lambda) := \lambda e - x.$$

Alors f est clairement continue et $\mathcal{R}(x) = f^{-1}(\mathcal{I}nv(\mathcal{A}))$. Comme $\mathcal{I}nv(\mathcal{A})$ est ouvert dans $\mathcal{A}$ (corollaire 3.2.4), on en déduit que $\mathcal{R}(x)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$. En appliquant le corollaire 3.2.3, en remplacant x par $x - \lambda e$ et h par $(\lambda - \mu)e$, on obtient que pour $\lambda \in \mathcal{R}(x)$ et pour μ suffisamment proche de λ, on a

$$\left\|R(\mu, x) - R(\lambda, x) + (\lambda - \mu)R(\lambda, x)^2\right\| \leq 2\|R(\lambda, x)\|^3|\mu - \lambda|^2,$$

et donc

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{R(\mu, x) - R(\lambda, x)}{\mu - \lambda} = R(\lambda, x)^2.$$

Ainsi, $R(\cdot, x)$ est une fonction holomorphe de $\mathcal{R}(x)$ dans $\mathcal{A}$. Pour démontrer l'équation (3.5) vérifiée par la résolvante, il suffit de remarquer que $x - \mu e$ et $x - \lambda e$ commutent et donc on a

$$(x - \mu e)(x - \lambda e)(R(\mu, x) - R(\lambda, x)) = (\mu - \lambda)e.$$

Il ne reste plus qu'a multiplier à gauche par $R(\lambda, x)R(\mu, x)$.

(b) Soit $|\lambda| > \|x\|$. Alors, en écrivant $x - \lambda e = -\lambda(e - \frac{x}{\lambda})$, on obtient avec le lemme 3.2.2 que $x - \lambda e \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$. Autrement dit, $\lambda \in \mathcal{R}(x)$. Par contraposée, si $\lambda \in \sigma(x)$, alors $|\lambda| \leq \|x\|$.

(c) On sait d'après (a) que $\sigma(x)$, qui est le complémentaire de $\mathcal{R}(x)$, est fermé. De plus, d'après (b), $\sigma(x)$ est borné. Ainsi, le spectre $\sigma(x)$ de x est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{C}$, c'est donc un compact. Il reste à vérifier que $\sigma(x)$ est non vide. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde, en supposant que $\mathcal{R}(x) = \mathbb{C}$. Alors $R(\cdot, x)$ est une fonction entière (i.e. holomorphe dans $\mathbb{C}$), à valeurs dans $\mathcal{A}$. De plus, pour $|\lambda| > \|x\|$, on a avec l'égalité (3.2)

$$R(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}},$$

et donc

$$\|R(\lambda, x)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}. \tag{3.6}$$

En particulier, on en déduit que

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} R(\lambda, x) = 0,$$

et donc $R(\cdot, x)$ est une fonction bornée. Le théorème B.3.9 (de Liouville) implique alors que $R(\cdot, x)$ est constante et donc $R(\lambda, x) = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, ce qui est absurde.

(d) Soit $\lambda \in \sigma(x^{-1})$. Cela signifie que $x^{-1} - \lambda e$ n'est pas inversible. Comme nécessairement $\lambda \neq 0$, on peut écrire

$$x^{-1} - \lambda e = -\lambda x^{-1}(x - \lambda^{-1} e),$$

et on en déduit que $x - \lambda^{-1} e$ n'est pas inversible. Autrement dit, $\lambda^{-1} \in \sigma(x)$, c'est à dire $\lambda = (\lambda^{-1})^{-1} \in (\sigma(x))^{-1}$. Par conséquent, on a prouvé que

$$\sigma(x^{-1}) \subset (\sigma(x))^{-1}.$$

Appliquons maintenant cette inclusion, en remplaçant x par x^{-1} et on obtient

$$\sigma(x) \subset (\sigma(x^{-1}))^{-1},$$

soit

$$(\sigma(x))^{-1} \subset \sigma(x^{-1}),$$

ce qui achève la preuve de (d).

$\square$

Remarque 3.2.7 *Le fait que le spectre d'un élément est toujours non vide est une généralisation du résultat qui dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a toujours au moins une valeur propre (complexe).*

Remarque 3.2.8 *L'équation (3.5) est appelée l'équation de la résolvante.*

Si p est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ donné par $p(X) = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$, et si x est un élément d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ alors on note par $p(x)$ l'élément de $\mathcal{A}$ défini par

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i.$$

Le résultat suivant établit le lien entre $\sigma(p(x))$ et $\sigma(x)$.

Lemme 3.2.9 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, $x \in \mathcal{A}$ et p un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Alors, on a*

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)).$$

Preuve : Soit $\lambda \in \sigma(x)$. Cela signifie que $x - \lambda e$ n'est pas inversible. D'autre part, il existe un unique polynôme $q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$p(X) - p(\lambda) = (X - \lambda) q(X).$$

D'où

$$p(x) - p(\lambda)e = (x - \lambda e) q(x) = q(x)(x - \lambda e),$$

et $p(x) - p(\lambda)e$ n'est pas inversible car sinon

$$e = (p(x) - p(\lambda)e)^{-1} q(x)(x - \lambda e) = (x - \lambda e) q(x)(p(x) - p(\lambda)e)^{-1},$$

et donc $x - \lambda e$ serait inversible, ce qui est absurde. Par conséquent, $p(\lambda) \in \sigma(p(x))$. On a donc prouvé que

$$p(\sigma(x)) \subset \sigma(p(x)).$$

Réciproquement, montrons que $\sigma(p(x)) \subset p(\sigma(x))$. Si p est le polynôme nul, le résultat est évident. Sinon soit $\lambda \in \sigma(p(x))$. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$p(X) - \lambda$:

$$p(X) - \lambda = \alpha(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n),$$

α_i étant les racines du polynôme $p(X) - \lambda$. Comme p est supposé non nul, $\alpha \neq 0$ et on a

$$p(x) - \lambda e = \alpha(x - \alpha_1 e)(x - \alpha_2 e) \dots (x - \alpha_n e).$$

Supposons que pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $x - \alpha_i e$ soit inversible. Alors $p(x) - \lambda e$ est aussi inversible, ce qui est absurde. Par conséquent, il existe i, $1 \leq i \leq n$, tel que $\alpha_i \in \sigma(x)$. Donc

$$\lambda = p(\alpha_i) \in p(\sigma(x)).$$

D'où $\sigma(p(x)) \subset p(\sigma(x))$, ce qui termine la preuve du lemme.

□

Remarque 3.2.10 *Nous allons voir au second chapitre qu'on peut définir un calcul fonctionnel holomorphe qui permet de donner un sens à $f(x)$, pour f holomorphe sur un ouvert Ω contenant le spectre de x. De plus, nous démontrerons une propriété spectrale importante, à savoir la relation suivante :*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)). \tag{3.7}$$

Dans le théorème 3.2.6 et dans le lemme 3.2.9, nous avons déjà vu que la relation (3.7) est vraie si f est un polynôme et si x est inversible et $f(z) = z^{-1}$.

Nous donnons maintenant l'une des formules fondamentales dans la théorie des algèbres de Banach, qui permet de calculer le rayon spectral, d'où son nom de "formule du rayon spectral".

Théorème 3.2.11 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$. On a*

$$r(x) = \lim_{n \to +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Preuve : Notons $\alpha = \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Soit $\lambda \in \sigma(x)$. Le lemme 3.2.9 implique que $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ et donc avec le théorème 3.2.6, on obtient que $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$, soit $|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n}$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, on en déduit que

$$r(x) = \sup_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda| \leq \alpha.$$

De plus, on a évidemment

$$\alpha \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Finalement, il reste à montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x).$$

Pour cela, nous allons utiliser la théorie des fonctions holomorphes et des séries entières. Notons $\Omega = D(0, r(x)^{-1})$ (si $r(x) = 0$, alors $\Omega = \mathbb{C}$) et considérons $f : \Omega \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par $f(0) = 0$ et

$$f(\lambda) = R(1/\lambda, x), \qquad \lambda \in \Omega \setminus \{0\}.$$

Si $\lambda \in \Omega\setminus\{0\}$, alors $|\lambda^{-1}| > r(x)$ et donc $\lambda^{-1} \in \mathcal{R}(x)$. Le théorème 3.2.6 implique alors que f est holomorphe dans $\Omega \setminus \{0\}$. D'autre part, on sait aussi, toujours d'après le théorème 3.2.6 (voir la preuve), que

$$\lim_{\lambda\to 0} R(1/\lambda, x) = 0.$$

Donc f est continue sur Ω. La proposition B.3.10 implique alors que f est holomorphe dans Ω. D'un autre coté, si $0 < |\lambda| < \dfrac{1}{\|x\|}$, le lemme 3.2.2 implique que

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \left(x - \frac{1}{\lambda}e\right)^{-1} = -\lambda(e - \lambda x)^{-1} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} x^n, \end{aligned}$$

et cette relation est évidemment valable aussi pour $\lambda = 0$. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} x^n$. Comme f est holomorphe sur Ω, le théorème B.3.7 implique que $R \geq d(0, \Omega^c) = r(x)^{-1}$. D'autre part, la formule d'Hadamard nous dit que

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

et donc finalement

$$\limsup_{n \to +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x),$$

ce qui achève la preuve.

□

Remarque 3.2.12 *Qu'un élément d'une algèbre $\mathcal{A}$ soit inversible ou non est une propriété purement algébrique ; ainsi le spectre de x et le rayon spectral de x ne dépendent que de la structure algébrique de $\mathcal{A}$, et d'aucune considération métrique (ou topologique). Par contre, la limite dans l'énoncé du théorème 3.2.11 dépend des propriétés métriques de $\mathcal{A}$. C'est un des aspects remarquables de ce théorème : il affirme l'égalité des deux quantités qui interviennent de manière entièrement différente.*

Remarque 3.2.13 *Notre algèbre $\mathcal{A}$ peut être une sous-algèbre d'une algèbre de Banach $\mathcal{B}$ plus grande. Alors il peut très bien arriver qu'un élément $x \in \mathcal{A}$ ne soit pas inversible dans $\mathcal{A}$ mais le soit dans $\mathcal{B}$. Le spectre de x dépend donc de l'algèbre. Si on note par $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ (resp. $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$) le spectre de x relativement à $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$), alors on a $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. De plus, l'inclusion peut être stricte. Cependant, le rayon spectral est le même dans $\mathcal{A}$ ou dans $\mathcal{B}$, puisque le théorème 3.2.11 montre qu'il peut être exprimé en fonction des propriétés métriques des puissances de x, qui sont indépendantes de tout ce qui se passe à l'extérieur de $\mathcal{A}$.*

De ces résultats établis par des techniques élémentaires, nous pouvons déjà dégager une conséquence fondamentale.

Théorème 3.2.14 (Gelfand-Mazur) *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire telle que tout élément non nul est inversible. Alors $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$, autrement dit $\mathcal{A}$ est isométriquement isomorphe au corps des nombres complexes.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{A} \neq \mathbb{C}e$. Alors il existe $x \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{C}e$. On en déduit donc que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $x - \lambda e \neq 0$ et donc l'hypothèse implique que $x - \lambda e$ est inversible. Autrement dit, tout point $\lambda \in \mathbb{C}$ est dans l'ensemble résolvant de x, soit encore $\sigma(x) = \emptyset$, ce qui est absurde d'après le théorème 3.2.6.

Il est alors facile de vérifier que l'application $\varphi : \mathcal{A} = \mathbb{C}e \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $\varphi(\lambda e) = \lambda$, est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$.

□

Remarquons que la commutativité de $\mathcal{A}$ dans le théorème 3.2.14 ne fait pas partie des hypothèses mais de la conclusion !

3.3 Idéaux et caractères d'une algèbre de Banach

Comme nous allons le voir dans la suite du cours, la théorie des algèbres de Banach dépend crucialement des homomorphismes d'algèbres à valeurs complexes.

Définition 3.3.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. On appelle caractère de $\mathcal{A}$ tout homomorphisme non trivial de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, un caractère φ d'une algèbre $\mathcal{A}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{A}$, non identiquement nulle, et telle que*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

pour tout $x \in \mathcal{A}$ et $y \in \mathcal{A}$.

On notera $\mathcal{C}ar(\mathcal{A})$ l'ensemble des caractères de $\mathcal{A}$.

Remarquons que dans la définition des caractères, on ne fait aucune hypothèse de continuité. C'est une définition purement algébrique ! De fait, il est remarquable que cette continuité est automatique, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 3.3.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $\varphi \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})$. Alors φ est continue et sa norme (en tant que forme linéaire) est 1. De plus, $\varphi(e) = 1$ et $\varphi(x) \neq 0$, pour tout $x \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$.*

Preuve : Comme φ est non identiquement nul, il existe $y \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi(y) \neq 0$. Donc puisque

$$\varphi(y) = \varphi(ye) = \varphi(y)\varphi(e),$$

il s'ensuit que $\varphi(e) = 1$. D'autre part, si x est inversible alors

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = 1$$

et par conséquent $\varphi(x) \neq 0$. Finalement, la seule chose qu'il reste à prouver est que, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a

$$|\varphi(x)| \leq \|x\|.$$

Soit $x \in \mathcal{A}$ et notons $\lambda = \varphi(x)$. Supposons que $|\lambda| > \|x\|$. Le lemme 3.2.2 implique alors que $x - \lambda e$ est inversible et donc d'après ce qui précède, on obtient que $\varphi(x - \lambda e) \neq 0$, ce qui est absurde car

$$\varphi(x - \lambda e) = \varphi(x) - \varphi(\lambda e) = \varphi(x) - \lambda\varphi(e) = \varphi(x) - \lambda = 0.$$

Par conséquent, $|\varphi(x)| \leq \|x\|$, ce qui prouve que φ est une forme linéaire continue de norme au plus 1. Mais comme $\varphi(e) = 1$, on obtient que la norme est exactement 1.

□

Nous réinjectons maintenant un peu d'algèbre dans notre étude avec la notion d'idéal.

Définition 3.3.3 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre complexe, commutative et J un sous-ensemble de $\mathcal{A}$. Nous dirons que J est un idéal de $\mathcal{A}$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) *J est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ et*

(b) *$xy \in J$ dès que $x \in \mathcal{A}$ et $y \in J$.*

Si en plus $J \neq \mathcal{A}$, on dit que J est un idéal propre.

Un idéal maximal est un idéal propre qui n'est contenu dans aucun autre idéal propre.

Voyons comment ces notions algébriques se combinent avec la topologie.

Proposition 3.3.4 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, commutative, unitaire et J un idéal de $\mathcal{A}$. Alors l'adhérence de J, notée $\overline{J}$, est aussi un idéal de $\mathcal{A}$. De plus, si J est un idéal propre, alors*

- *J ne contient aucun élément inversible de $\mathcal{A}$ et*
- *$\overline{J}$ est aussi un idéal propre.*

Preuve :

- Il est bien connu (et évident !) que si J est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors $\overline{J}$ reste un sous-espace vectoriel. D'autre part, si $x \in \mathcal{A}$, $y \in \overline{J}$, alors il existe une suite $(y_n)_n \subset J$ telle que $y_n \to y$, lorsque $n \to +\infty$. La continuité de la multiplication dans $\mathcal{A}$ implique alors que $xy_n \to xy$, $n \to +\infty$. Comme J est un idéal, $xy_n \in J$ et donc $xy \in \overline{J}$. Ceci achève de prouver que $\overline{J}$ est un idéal.
- Maintenant supposons que J soit un idéal propre de $\mathcal{A}$. Montrons alors que J ne contient aucun élément inversible de $\mathcal{A}$. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe un élément $x \in J$ et x inversible. Alors comme J est un idéal, on a $e = xx^{-1} \in J$ et finalement, pour tout $y \in \mathcal{A}$, on a $y = ye \in J$. Ainsi $J = \mathcal{A}$, ce qui est absurde.
- Il reste à montrer que $\overline{J}$ est un idéal propre si J est un idéal propre. Raisonnons encore par l'absurde en supposant que $\overline{J} = \mathcal{A}$. En particulier, on a $e \in \overline{J}$ et donc il existe $x_0 \in J$ tel que $\|e - x_0\| < 1$. Le lemme 3.2.2 implique alors que $x_0 = e + (x_0 - e)$ est inversible, ce qui est en contraction avec le point précédent.

□

La première partie du résultat suivant est en fait valable dans tout anneau commutatif unitaire et est donc un résultat purement algébrique.

Théorème 3.3.5 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative et unitaire.*

(a) *Tout idéal propre de $\mathcal{A}$ est contenu dans un idéal maximal de $\mathcal{A}$.*

(b) *Tout idéal maximal de $\mathcal{A}$ est fermé.*

Preuve : (a) Nous allons utiliser le lemme de Zorn. Soit J un idéal propre de $\mathcal{A}$ et soit $\mathcal{P}$ la famille de tous les idéaux propres de $\mathcal{A}$ contenant J. Tout d'abord, bien évidemment $\mathcal{P} \neq \emptyset$ car $J \in \mathcal{P}$. Maintenant soit $\mathcal{Q}$ une sous-famille totalement ordonnée de $\mathcal{P}$. Considérons

$$M := \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Vérifions que M est un idéal de $\mathcal{A}$.

- Tout d'abord, M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ car si $x_1, x_2 \in M$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors il existe $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ tels que $x_1 \in Q_1$ et $x_2 \in Q_2$. Comme $\mathcal{Q}$ est totalement ordonnée, on peut supposer par exemple que $Q_1 \subset Q_2$. D'où, Q_2 étant un idéal donc en particulier un sous-espace vectoriel, on en déduit que $\lambda x_1 + x_2 \in Q_2 \subset M$.
- Maintenant soit $x \in \mathcal{A}$, $y \in M$. Il existe $Q \in \mathcal{Q}$ tel que $y \in Q$. Comme Q est un idéal, on obtient que $xy \in Q \subset M$.

Montrons maintenant que M est un idéal propre de $\mathcal{A}$. Supposons par l'absurde que $M = \mathcal{A}$. Alors $e \in M$, i.e qu'il existe $Q \in \mathcal{Q}$ tel que $e \in Q$. Mais Q est un idéal propre de $\mathcal{A}$ donc c'est absurde d'après la proposition 3.3.4. Par conséquent $M \neq \mathcal{A}$.

Enfin il est clair que M représente un majorant pour $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{P}$. Ainsi, nous avons montré que toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{P}$ possède un majorant. Le lemme de Zorn implique alors que $\mathcal{P}$ possède un élément maximal M_0. Bien sûr, M_0 est un idéal propre de $\mathcal{A}$ qui contient J (car $M_0 \in \mathcal{P}$!). De plus, si H est un autre idéal propre de $\mathcal{A}$ tel que $M_0 \subset H$, alors comme M_0 est un élément maximal de $\mathcal{P}$, on a $M_0 = H$. Ainsi M_0 est un idéal maximal de $\mathcal{A}$, qui contient J.

(b) Soit M un idéal maximal de $\mathcal{A}$. En particulier, M est un idéal propre et la proposition 3.3.4 implique alors que $\overline{M}$ est aussi un idéal propre de $\mathcal{A}$. Comme $M \subset \overline{M}$, la maximalité de M entraine que $M = \overline{M}$, ce qui prouve que M est fermé.

$\square$

3.4 Les algèbres quotients

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire, commutative et J un idéal de $\mathcal{A}$. Rappelons trois faits algébriques bien connus :

(a) L'espace quotient $\mathcal{A}/J$ est une algèbre commutative qui possède une unité.

(b) La surjection canonique $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/J$ est un homomorphisme d'algèbres.

(c) $\mathcal{A}/J$ est un corps (i.e. tout élément non nul est inversible) si et seulement si J est un idéal maximal.

Maintenant si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach unitaire et commutative et si J est un idéal propre et fermé de $\mathcal{A}$, alors on pose, pour $\pi(x) \in \mathcal{A}/J$,

$$\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} := \operatorname{dist}(x, J) = \inf_{y \in J} \|x - y\|, \qquad x \in \mathcal{A}.$$

Remarquons que cette définition a bien un sens car si $\pi(x) = \pi(y)$, cela implique que $x - y \in J$ et donc $\operatorname{dist}(x, J) = \operatorname{dist}(y, J)$.

Nous allons montrer que $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/J}$ définit une norme sur l'espace quotient $\mathcal{A}/J$. Cette norme s'appelle la *norme quotient*.

Théorème 3.4.1 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et commutative et J un idéal propre et fermé de $\mathcal{A}$. Alors :*

(a) $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/J}$ *est une norme.*

(b) *L'algèbre $\mathcal{A}/J$, muni de la norme quotient, est une algèbre de Banach unitaire.*

(c) π *est continue.*

Preuve :

(a) Vérifions que $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/J}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}/J$:

- $\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} = 0 \iff \mathrm{dist}(x, J) = 0 \iff x \in \overline{J} = J \iff \pi(x) = 0.$
- Pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned}\|\pi(x) + \pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} =& \|\pi(x+y)\|_{\mathcal{A}/J} = \mathrm{dist}(x+y, J) \leq \mathrm{dist}(x, J) + \mathrm{dist}(y, J) \\ =& \|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} + \|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J}.\end{aligned}$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a

$$\|\lambda\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} = \|\pi(\lambda x)\|_{\mathcal{A}/J} = \inf_{y \in J} \|\lambda x - y\|.$$

Comme $\lambda \neq 0$ et J est un idéal donc en particulier un espace vectoriel, on a $y \in J \iff \lambda y \in J$. D'où

$$\|\lambda\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} = \inf_{y \in J} \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J}.$$

Pour $\lambda = 0$, l'égalité est immédiate.

(c) Montrons que π est continue : remarquons que, pour $x \in \mathcal{A}$, on a

$$\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} = \mathrm{dist}(x, J) \leq \|x\|.$$

Comme π est un homorphisme d'algèbre donc en particulier linéaire, cela suffit pour montrer que π est continue et sa norme en tant qu'application linéaire est au plus 1.

(b) Montrons que l'algèbre $\mathcal{A}/J$ est une algèbre de Banach unitaire.

- Vérifions que $\mathcal{A}/J$ est un espace de Banach : soit $(\pi(x_n))_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{A}/J$. Alors, pour chaque entier $k \geq 1$, il existe un entier $N(k)$ tel que
$$\|\pi(x_m) - \pi(x_n)\|_{\mathcal{A}/J} < \frac{1}{2^k}, \qquad m, n \geq N(k).$$
De plus, la suite $(N(k))_{k\geq 1}$ peut-être choisie strictement croissante. Posons $u_k := x_{N(k)}$, $k \geq 1$. Nous allons montrer que $(\pi(u_k))_{k\geq 1}$, qui est une sous-suite de $(\pi(x_k))_{k\geq 1}$, est convergente. Comme
$$\|\pi(u_{k+1} - u_k)\|_{\mathcal{A}/J} = \|\pi(u_{k+1}) - \pi(u_k)\|_{\mathcal{A}/J} = \|\pi(x_{N(k+1)}) - \pi(x_{N(k)})\|_{\mathcal{A}/J} < \frac{1}{2^k},$$
on en déduit qu'il existe $z_k \in J$ tel que
$$\|u_{k+1} - u_k + z_k\| < \frac{1}{2^k}.$$
Définissons alors $v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$ et
$$w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = u_{n+1} - u_1 + \sum_{k=1}^{n} z_k.$$
On a $\|v_k\| < 2^{-k}$ et donc, pour $n > m$,
$$\|w_n - w_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} v_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|v_k\| < \sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k}.$$
Comme le terme de droite dans l'inégalité précédente tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$, il s'ensuit que $(w_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{A}$. Donc elle converge vers un élément qu'on note w. En utilisant le fait que $z_k \in J$, on peut écrire
$$\begin{aligned}\|\pi(u_n) - \pi(w + u_1)\|_{\mathcal{A}/J} =& \|\pi(u_n - w - u_1)\|_{\mathcal{A}/J} \leq \left\| u_n - w - u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} z_k \right\| \\ =& \|w_{n-1} - w\|.\end{aligned}$$
Par conséquent, on obtient que la suite $(\pi(u_n))_{n\geq 1}$ est convergente. La suite de Cauchy $(\pi(x_n))_{n\geq 1}$ contient une sous-suite, $(\pi(u_n))_{n\geq 1}$, convergente. Donc elle converge aussi. Ainsi on a prouvé que l'espace quotient $\mathcal{A}/J$ est complet.

- Vérifions que pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, on a

$$\|\pi(x)\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} \leq \|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J}\|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J}. \tag{3.8}$$

  Fixons $\epsilon > 0$. Alors il existe $z, w \in J$ tel que

$$\|x+z\| \leq \|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon \quad \text{et} \quad \|y+w\| \leq \|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon.$$

  Remarquons que $(x+z)(y+w) = xy + xw + zy + zw$ et comme J est un idéal, on a $xw + zy + zw \in J$. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned}\|\pi(x)\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} =& \|\pi(xy)\|_{\mathcal{A}/J} \leq \|xy + xw + zy + zw\| = \|(x+y)(z+w)\| \\ \leq& \|x+y\|\|y+w\| \leq (\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon)(\|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon) \\ =& \|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J}\|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon(\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} + \|\pi(y)\|_{\mathcal{A}/J} + \epsilon).\end{aligned}$$

  Finalement, en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient (3.8).

- Vérifions que $\pi(e)$, l'élément neutre de l'algèbre $\mathcal{A}/J$, est de norme 1 : soit $x \notin J$. Comme $\pi(x) = \pi(x)\pi(e)$, en appliquant l'inégalité (3.8), on obtient

$$\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} \leq \|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J}\|\pi(e)\|_{\mathcal{A}/J}.$$

  Le fait que $x \notin J$ implique que $\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}/J} \neq 0$ et donc on en déduit que $\|\pi(e)\|_{\mathcal{A}/J} \geq 1$. Maintenant on a vu que π est une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1, donc $\|\pi(e)\|_{\mathcal{A}/J} \leq \|e\| = 1$. Ainsi $\|\pi(e)\|_{\mathcal{A}/J} = 1$, ce qui achève la preuve du théorème.

□

3.5 Idéaux maximaux

La partie (a) du résultat suivant est l'un des éléments clés de la théorie générale car elle permet d'identifier les caractères et les idéaux maximaux dans une algèbre de Banach commutative, unitaire. L'ensemble des caractères donnera ultérieurement une topologie compacte, séparée (voir théorème 3.7.4). L'étude des algèbres de Banach commutatives et unitaires sera alors, dans une grande mesure, réduite à l'étude d'objets plus familiers (et plus particuliers), notamment les algèbres de fonctions continues sur un compact. Cependant, comme nous le verrons dans la section suivante, le théoréme 3.5.1 a déjà des conséquences concrêtes intéressantes, même sans l'introduction de cette topologie.

Théorème 3.5.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et commutative.*

(a) *Un sous-ensemble J de $\mathcal{A}$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ si et seulement si il est le noyau d'un caractère de $\mathcal{A}$.*

(b) *Un élément $x \in \mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $h(x) \neq 0$, pour tout caractère h de $\mathcal{A}$.*

(c) *Un élément $x \in \mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}$ si et seulement si x n'appartient à aucun idéal propre de A.*

(d) *Soit $x \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda \in \sigma(x)$ si et seulement si il existe $h \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})$ tel que $h(x) = \lambda$.*

Preuve : (a) • Soit φ un caractère de $\mathcal{A}$ et notons $J = \ker \varphi$ son noyau. Nous devons montrer que J est un idéal maximal. Tout d'abord, en utilisant le fait que φ est un morphisme d'algèbre, il est facile de vérifier que J est un idéal de $\mathcal{A}$. Par conséquent, montrer que J est un idéal maximal est équivalent à montrer que $\mathcal{A}/J$ est un corps. Or, comme φ est un morphisme à valeurs dans $\mathbb{C}$ et que φ est non-trivial, on voit immédiatement que φ est surjectif et son image est $\mathbb{C}$. Notons π la surjection canonique de $\mathcal{A}$ sur l'algèbre quotient $\mathcal{A}/J$. Alors, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \mathbb{C} \\ \mathcal{A}/J \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

donne l'existence d'un isomorphisme d'algèbre φ de $\mathcal{A}/J$ sur $\mathbb{C}$. On obtient donc que $\mathcal{A}/J$ est un corps (car isomorphe à un corps !) et cela implique que J est un idéal maximal.

• Réciproquement, soit J un idéal maximal de $\mathcal{A}$. D'après le théorème 3.3.5, J est fermé et le théorème 3.4.1 implique que $\mathcal{A}/J$ est une algèbre de Banach unitaire. D'autre part, comme J est un idéal maximal de $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}/J$ est un corps. Le théorème de Gelfand-Mazur (théorème 3.2.14) permet alors d'affirmer l'existence d'un isomomorphisme d'algèbre j de $\mathcal{A}/J$ sur $\mathbb{C}$. Notons $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/J$ l'application quotient et considérons $\varphi := j \circ \pi$. Alors on vérifie aisément que φ est un caractère de $\mathcal{A}$ et son noyau est J.

(b) • D'après le théorème 3.3.2, on sait déjà que si x est inversible dans $\mathcal{A}$ et $h \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})$, alors $h(x) \neq 0$.

• Réciproquement, soit $x \in \mathcal{A}$ et supposons que pour tout $h \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})$, on ait $h(x) \neq 0$. Considérons l'ensemble I_x défini par

$$I_x = \{ax : a \in \mathcal{A}\}.$$

Il est facile de vérifier que I_x est un idéal de $\mathcal{A}$. Supposons que $I_x \neq \mathcal{A}$. Autrement dit, I_x est un idéal propre. Alors le théorème 3.3.5 implique que I_x est contenu dans un idéal maximal. D'après la partie (a), cela signifie qu'il existe un caractère φ de $\mathcal{A}$ tel que $I_x \subset \ker \varphi$. Cela est absurde car $x \in I_x$ et $\varphi(x) \neq 0$ par hypothèse. Par conséquent, $I_x = \mathcal{A}$ et en particulier, $e \in I_x$. Ainsi, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x'x = e$, c'est à dire x est inversible (n'oublions pas que $\mathcal{A}$ est supposée commutative !).

(c) • Si $x \in \mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}$, alors on sait d'après la proposition 3.3.4 que x n'appartient à aucun idéal propre.

• Réciproquement, supposons que x n'appartient à aucun idéal propre et considérons

$$I_x = \{ax : a \in \mathcal{A}\}.$$

Comme I_x est un idéal qui contient x, nécessairement, il n'est pas propre ! Donc $I_x = \mathcal{A}$. En particulier, $e \in I_x$ et donc il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x'x = e$, ce qui prouve que x est inversible.

(d) Il suffit d'appliquer (b) à $\lambda e - x$.

□

Remarque 3.5.2 *Comme un idéal maximal est nécessairement fermé (théorème 3.3.5), une conséquence du théorème 3.5.1 est que si φ est un caractère d'une algèbre de Banach unitaire et commutative, alors son noyau est fermé, ce qui implique que φ est continue. Ainsi, dans le cadre des algèbres de Banach commutatives et unitaires, on obtient une autre démonstration du fait qu'un caractère est automatiquement continue (voir théorème 3.3.2).*

3.6 Applications

Nous donnons maintenant deux exemples d'algèbres de Banach unitaires et commutatives pour lesquelles nous allons déterminer les idéaux maximaux et les caractères. Pour le premier exemple (l'algèbre des fonctions continues sur un compact), on cherchera d'abord les idéaux maximaux pour en déduire les caractères. Pour le second exemple (l'algèbre de Wiener), on fera le contraire, on cherchera d'abord les caractères pour en déduire les idéaux maximaux.

3.6.1 L'algèbre des fonctions continues sur un compact

Soit X un espace topologique compact et $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$, munie de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Etant donné un sous-ensemble $\mathcal{O}$ quelconque de X, on notera $k(\mathcal{O})$ le sous-ensemble de $C(X)$ défini par

$$k(\mathcal{O}) := \{f \in C(X) : f|\mathcal{O} \equiv 0\}.$$

De plus, pour $x \in X$, on notera par E_x l'application évaluation en x, autrement dit, $E_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$E_x(f) := f(x), \qquad f \in C(X).$$

Il est facile de vérifier (exercice !) que :

- $k(\mathcal{O})$ est un idéal de $C(X)$ et que $k(\mathcal{O}) = k(\overline{\mathcal{O}})$, où $\overline{\mathcal{O}}$ est la fermeture de $\mathcal{O}$.
- E_x est un caractère de $C(X)$.

Maintenant considérons $\mathcal{O} = \{x\}$. Alors on a $k(\{x\}) = \ker E_x$ et donc d'après le théorème 3.5.1, $k(\{x\})$ est un idéal maximal de $C(X)$. Nous allons montrer que tout idéal maximal est de cette forme.

Pour cela, nous utiliserons un lemme général qui donne une condition nécessaire pour qu'un idéal soit propre. Pour ce lemme nous précisons une notation : si J est un idéal de $C(X)$, on notera $h(J)$ l'ensemble des points de X où toutes les fonctions de J s'annulent, autrement dit

$$h(J) := \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in J\} = \bigcap_{f \in J} f^{-1}(0).$$

Lemme 3.6.1 *Soit J un idéal de $C(X)$. Si $h(J) = \emptyset$ alors $J = C(X)$.*

Preuve : L'hypothèse implique que pour tout $a \in X$, il existe une fonction continue f_a, appartenant à J, et telle que $f_a(a) \neq 0$. Comme f_a est continue, on peut alors trouver un voisinage ouvert Ω_a de a dans X tel que f_a ne s'annule pas sur ce voisinage Ω_a. Remarquons que

$$X = \bigcup_{a \in X} \Omega_a,$$

et par compacité de X, on obtient qu'il existe $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{a_i}.$$

Considérons maintenant la fonction g de $C(X)$ définie par

$$g = \sum_{i=1}^{n} |f_{a_i}|^2. \tag{3.9}$$

En utilisant que J est un idéal, que $f_{a_i} \in J$, $1 \leq i \leq n$, et que g peut s'écrire aussi

$$g = \sum_{i=1}^{n} f_{a_i} \overline{f_{a_i}},$$

on en déduit que $g \in J$. D'autre part, si $x \in X$, il existe $1 \leq i \leq n$, tel que $x \in \Omega_{a_i}$ et alors $f_{a_i}(x) \neq 0$, ce qui implique avec (3.9) que $g(x) > 0$. Ainsi, g ne s'annule pas sur X. Par conséquent, elle est inversible dans $C(X)$. On a donc montré que J contient un élément inversible de $C(X)$. Finalement, la proposition 3.3.4 permet de conclure que $J = C(X)$.

□

Théorème 3.6.2 *Soit J un sous-ensemble de $C(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *J est un idéal maximal de $C(X)$.*

(ii) *Il existe $x \in X$ tel que $J = k(\{x\})$.*

Preuve : On a déjà vu que $k(\{x\})$ est un idéal maximal de $C(X)$. Réciproquement, soit J un idéal maximal de $C(X)$. En particulier, J est un idéal propre et donc le lemme 3.6.1 entraine que $h(J) \neq \emptyset$. Soit alors $x \in h(J)$. Cela signifie que toutes les fonctions de J s'annulent en x, ce qu'on peut aussi traduire par l'inclusion $J \subset k(\{x\})$. Mais, comme par exemple, la fonction identiquement égale à 1 est dans $C(X)$ mais pas dans $k(\{x\})$, on a $k(\{x\}) \neq C(X)$. La maximalité de J implique alors que $J = k(\{x\})$.

□

Corollaire 3.6.3 *Les caractères de $C(X)$ sont exactement les évaluations aux points de X. Autrement dit, φ est un caractère de $C(X)$ si et seulement s'il existe $x \in X$ tel que $\varphi = E_x$.*

Preuve : On a déjà vu que E_x est un caractère de $C(X)$. Réciproquement, si φ est un caractère de $C(X)$, alors on sait (voir théorème 3.5.1) que $\ker \varphi$ est un idéal maximal. D'après le théorème 3.6.2, cela implique qu'il existe $x \in X$ tel que $\ker \varphi = k(\{x\}) = \ker E_x$. Donc comme E_x et φ sont deux morphismes d'algèbres de $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$, on en déduit que nécessairement $\varphi = E_x$.

□

Notre deuxième application concerne les séries de Fourier absolument convergentes.

3.6.2 L'algèbre de Wiener

Le cercle unité du plan complexe est noté $\mathbb{T}$, i.e. $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On désigne par $W(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ dont la série des coefficient de Fourier est absolument convergente. Autrement dit, une fonction continue $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ appartient à $W(\mathbb{T})$ si

$$\|f\|_W := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty,$$

où

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

On notera $\epsilon_n : z \longmapsto z^n$, $z \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors, pour $f \in W(\mathbb{T})$, on a

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\epsilon_n$$

où la série converge dans $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$. (exercice !).

Proposition 3.6.4 *$W(\mathbb{T})$ est une sous-algèbre de l'algèbre $C(\mathbb{T})$ des fonctions continues sur $\mathbb{T}$.*

Preuve : Le seul point délicat est la stabilité pour le produit. Nous devons montrer que si $f, g \in W(\mathbb{T})$, alors $fg \in W(\mathbb{T})$. Bien évidemment, on a $fg \in C(\mathbb{T})$ et donc la seule chose à montrer est que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| < +\infty.$$

Avec la formule de Parseval, on a

$$\begin{aligned}\widehat{fg}(n) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta\\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{(\overline{g(e^{i\theta})}e^{in\theta})}\,d\theta\\ =& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\widehat{\overline{g}\epsilon_n}(k)}.\end{aligned}$$

Or

$$\overline{g(t)} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{g}(p)\epsilon_p(t)} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{g}(p)}\epsilon_{-p}(t).$$

D'où

$$\overline{g(t)}\epsilon_n(t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{g}(p)}\epsilon_{n-p}(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{g}(n-j)}\epsilon_j(t),$$

ce qui implique que $\widehat{\overline{g}\epsilon_n}(k) = \overline{\hat{g}(n-k)}$ et finalement

$$\widehat{fg}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k). \tag{3.10}$$

Or $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|$ et $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(k)|$ sont convergentes. D'après la proposition A.1.2, la série de terme général

$$w_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k),$$

est bien définie et absolument convergente. De plus, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |w_n| \le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(k)|\right).$$

Par conséquent, avec (3.10), on en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| < \infty,$$

i.e. $fg \in W(\mathbb{T})$ et on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| \le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(k)|\right), \tag{3.11}$$

ce qui termine la preuve.

□

On notera que $C(\mathbb{T})$ est pour la norme du sup une algèbre de Banach. Ceci dit, l'énoncé précédent est à prendre dans un sens purement algèbrique : $W(\mathbb{T})$ n'est pas fermée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et ce n'est pas une sous-algèbre de Banach de $C(\mathbb{T})$. En revanche, on a :

Proposition 3.6.5 $(W(\mathbb{T}), \|\cdot\|_W)$ *est une algèbre de Banach unitaire, commutative. De plus, pour toute fonction $f \in W(\mathbb{T})$, la série de Fourier de f,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\epsilon_n,$$

converge vers f pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_W$.

Preuve : On vérifie facilement que $\|\cdot\|_W$ est une norme sur $W(\mathbb{T})$.

- Montrons que $(W(\mathbb{T}), \|\cdot\|_W)$ est complet. Considérons pour cela l'application $\mathcal{F} : W(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^1(\mathbb{Z})$, définie par

  $$\mathcal{F}(f) = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

  Il est clair que $\mathcal{F}$ est une isométrie. Vérifions que $\mathcal{F}$ est surjective. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et considérons l'application g, définie sur $\mathbb{T}$, par

  $$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\epsilon_n(z).$$

  Remarquons que, pour tout $z \in \mathbb{T}$, on a $|a_n\epsilon_n(z)| = |a_n z^n| = |a_n|$, et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\epsilon_n$ converge normalement et donc $g \in C(\mathbb{T})$. De plus, il est facile de prouver que $\hat{g}(n) = a_n$ et comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$, on obtient que $g \in W(\mathbb{T})$. D'où $\mathcal{F}(g) = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est un isomorphisme isométrique de $W(\mathbb{T})$ sur $\ell^1(\mathbb{Z})$. Comme $\ell^1(\mathbb{Z})$ est complet, on en déduit que $W(\mathbb{T})$ est complet.

- Montrons que, pour tout $f, g \in W(\mathbb{T})$, on a

  $$\|fg\|_W \le \|f\|_W\|g\|_W.$$

D'après (3.11), on a

$$\|fg\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(k)|\right) = \|f\|_W \|g\|_W,$$

ce qui achève de prouver que $W(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach.

- Montrons que $W(\mathbb{T})$ est unitaire. L'élément neutre e de $W(\mathbb{T})$ est clairement ϵ_0 (la fonction identiquement égale à 1). Donc $\|e\|_W = \|\epsilon_0\|_W = 1$.
- Il reste à montrer que la la série de Fourier de f converge vers f pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_W$. Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\hat{f}(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} |\hat{f}(-k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour $n, p \geq N$, on a

$$\begin{aligned}\left\| f - \sum_{k=-n}^{p} \hat{f}(k)\epsilon_k \right\|_W &= \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \hat{f}(-k)\epsilon_{-k} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \hat{f}(k)\epsilon_k \right\|_W \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\hat{f}(-k)| + \sum_{k=p+1}^{+\infty} |\hat{f}(k)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Définition 3.6.6 *L'algèbre $W(\mathbb{T})$ définie ci-dessus s'appelle l'algèbre de Wiener.*

On notera pour $\lambda \in \mathbb{T}$, E_λ l'évaluation en λ, i.e.

$$E_\lambda(f) := f(\lambda), \qquad f \in W(\mathbb{T}).$$

Nous pouvons maintenant déterminer rapidement les caractères de $W(\mathbb{T})$.

Théorème 3.6.7 *Les caractères de l'algèbre de Wiener $W(\mathbb{T})$ sont exactement les E_λ, $\lambda \in \mathbb{T}$.*

Preuve : Il est facile de vérifier que l'évaluation en λ, E_λ, est un caractère de $W(\mathbb{T})$. Réciproquement, soit φ un caractère de $W(\mathbb{T})$. Nous devons montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{T}$ tel que $\varphi = E_\lambda$. Définissons $\lambda := \varphi(\epsilon_1)$. Comme φ est un caractère, alors d'après le théorème 3.3.2, φ est de norme 1. Donc on a

$$|\lambda| = |\varphi(\epsilon_1)| \leq \|\varphi\| \|\epsilon_1\|_W = 1.$$

D'autre part, on a $\epsilon_1 \epsilon_{-1} = \epsilon_0$ et comme φ est un morphisme d'algèbre, on en déduit que

$$\lambda \varphi(\epsilon_{-1}) = \varphi(\epsilon_1)\varphi(\epsilon_{-1}) = \varphi(\epsilon_1 \epsilon_{-1}) = \varphi(\epsilon_0) = 1.$$

En particulier, $\lambda \neq 0$ et $\varphi(\epsilon_{-1}) = \lambda^{-1}$. Comme précédemment, on a $|\varphi(\epsilon_{-1})| \leq 1$ et finalement, on obtient que $|\lambda| = 1$. Maintenant, remarquons que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\epsilon_p = \epsilon_1^p$ et donc

$$\varphi(\epsilon_p) = \varphi(\epsilon_1^p) = \varphi(\epsilon_1)^p = \lambda^p = E_\lambda(\epsilon_p).$$

Par linéarité, on en déduit que φ et E_λ coincident sur l'enveloppe linéaire engendré par les ϵ_n. Mais d'après la proposition 3.6.5, cette enveloppe linéaire est dense dans $W(\mathbb{T})$ et donc par continuité de φ et E_λ, on a finalement que $\varphi \equiv E_\lambda$.

□

Nous obtenons immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 3.6.8 *Soit J un sous-ensemble de $W(\mathbb{T})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *J est un idéal maximal de $W(\mathbb{T})$.*

(ii) *Il existe $\lambda \in \mathbb{T}$ tel que*

$$J = \ker E_\lambda = \{f \in W(\mathbb{T}) : f(\lambda) = 0\}.$$

Les éléments développés jusqu'à présent permettent déjà d'établir facilement un théorème célébre (dû à Wiener en 1929) sur les séries de Fourier. Le caractère élémentaire de cette démonstration a été pour beaucoup dans le succés immédiat de la théorie des algèbres de Banach dans les années 40. De plus, il est fascinant de voir qu'un énoncé purement fonctionnel peut se démontrer aussi aisément avec des techniques d'algèbres de Banach.

Théorème 3.6.9 (Wiener) *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}$ dont la série de Fourier est absolument convergente. Si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$, alors la série de Fourier de $1/f$ est aussi absolument convergente.*

Preuve : Il est clair d'après les hypothèses que $f \in W(\mathbb{T})$. De plus, d'après le théorème 3.6.7, pour tout caractère φ de $W(\mathbb{T})$, on a $\varphi(f) \neq 0$. Ainsi, le théorème 3.5.1 implique que f est inversible dans $W(\mathbb{T})$. Autrement dit, il existe $g \in W(\mathbb{T})$ telle que $fg = \epsilon_0$, ϵ_0 étant l'élément neutre de $W(\mathbb{T})$. Comme ϵ_0 est la fonction identiquement égale à 1, il est clair que $g = 1/f$. Par conséquent, on en déduit que $1/f \in W(\mathbb{T})$, ce qui signifie que la série de Fourier de $1/f$ est absolument convergente.

$\square$

3.7 La transformation de Gelfand

Définition 3.7.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, commutative. A chaque $x \in \mathcal{A}$, on associe une fonction $\hat{x} : \mathcal{C}ar(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$, appelée transformée de Gelfand de x et définie par*

$$\hat{x}(h) = h(x), \qquad (h \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})).$$

On note $\hat{\mathcal{A}}$ l'ensemble de toutes les fonctions $\hat{x}$ pour $x \in \mathcal{A}$.

On a vu (voir théorème 3.3.2) que tout caractère est une forme linéaire continue de norme 1 et donc en particulier un élément du dual (topologique) $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$. On peut donc munir l'espace $\mathcal{C}ar(\mathcal{A})$ de la topologie induite par la topologie faible* de $\mathcal{A}^*$ et on appelle cette topologie la *topologie de Gelfand*. Par définition de la topologie faible*, la topologie de Gelfand est donc exactement la topologie la plus faible sur $\mathcal{C}ar(\mathcal{A})$ rendant chaque $\hat{x}$ continue.

Définition 3.7.2 *Etant donné $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, commutative, on appelle espace idéal maximal de $\mathcal{A}$, l'espace topologique $\mathcal{C}ar(\mathcal{A})$, muni de la topologie de Gelfand.*

Remarquons que la terminologie "espace idéal maximal" est justifié par le théorème 3.5.1 qui donne une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{A}$ et les éléments de $\mathcal{C}ar(\mathcal{A})$.

Si on note Δ l'espace idéal maximal d'une algèbre de Banach commutative, unitaire, on a (par définition de la topologie de Gelfand) $\hat{\mathcal{A}} \subset C(\Delta)$, l'algèbre de toutes les fonctions complexes continues sur Δ.

Définition 3.7.3 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, commutative et Δ l'espace idéal maximal de $\mathcal{A}$. L'application $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$ dans $C(\Delta)$ définie par*

$$\mathcal{G}(x) = \hat{x}, \qquad (x \in \mathcal{A}),$$

s'appelle la transformation de Gelfand.

Le radical de $\mathcal{A}$, notée rad $\mathcal{A}$, est défini comme l'intersection de tous les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$.

On dit que l'algèbre $\mathcal{A}$ est semi-simple si rad $\mathcal{A} = \{0\}$.

Le résultat suivant contient l'idée essentielle et remarquable de Gelfand, à savoir réduire l'étude des algèbres de Banach commutatives et unitaires quelconques à l'étude des sous-algèbres d'une algèbre particulière et bien connue, à savoir l'algèbre des fonctions continues sur un compact.

Théorème 3.7.4 *Soit Δ l'espace idéal maximal d'une algèbre de Banach commutative, unitaire $\mathcal{A}$. Alors*

(a) Δ *est compact.*

(b) *La transformation de Gelfand $\mathcal{G}$ est un homomorphisme (d'algèbre) de $\mathcal{A}$ dans $C(\Delta)$, dont le noyau est rad $\mathcal{A}$. Son image $\hat{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de $C(\Delta)$. La transformation de Gelfand est un isomorphisme (d'algèbre) de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est semi-simple.*

(c) *Pour chaque $x \in \mathcal{A}$, l'ensemble image de $\hat{x}$ est le spectre $\sigma(x)$ de x. Donc*

$$\|\hat{x}\|_\infty = r(x) \leq \|x\|,$$

où $\|\hat{x}\|_\infty$ est le maximun de $|\hat{x}(h)|$ sur Δ.

(d) *Soit $x \in \mathcal{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $x \in$ *rad* $\mathcal{A}$.

(ii) $\sigma(x) = \{0\}$.

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0$.

Preuve : (a) : d'après le théorème 3.3.2, on sait que Δ est contenu dans $B_{\mathcal{A}^*}$, la boule unité fermée de $\mathcal{A}^*$. Or le théorème de Banach-Alaoglu (voir théorème A.5.9) affirme que $B_{\mathcal{A}^*}$, munie de la topologie faible*, est compacte. Par conséquent, pour montrer que Δ est compact, il suffit de montrer que Δ est fermé dans $B_{\mathcal{A}^*}$, pour la topologie faible*. Soit donc $f \in \overline{\Delta}^{w^*}$ (la fermeture de Δ pour la topologie faible*). Il s'agit de montrer que $f \in \Delta$, c'est à dire que f est un homomorphisme d'algèbres non trivial de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$. Comme $f \in \mathcal{A}^*$, les deux seules choses à montrer sont :

(i) pour tous $a, b \in \mathcal{A}$, on a $f(ab) = f(a)f(b)$ et

(ii) $f(e) = 1$.

Fixons $a, b \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$. Posons

$$z_1 = e, z_2 = a, z_3 = b, z_4 = ab$$

et définissons

$$\Omega = \{g \in \mathcal{A}^* : |g(z_i) - f(z_i)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq 4\}.$$

On remarque alors que Ω est un voisinage de f pour la topologie faible*. Par conséquent, $\Omega \cap \Delta \neq \emptyset$. Autrement dit, il existe un homomrphisme d'algèbres non trivial g de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$ qui appartient à Ω. On a donc en particulier, $g(ab) = g(a)g(b)$ et $g(e) = 1$. D'où

$$|1 - f(e)| = |g(e) - f(e)| < \varepsilon.$$

Ceci étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $f(e) = 1$, ce qui donne (ii).

Pour démontrer (i), remarquons que

$$\begin{aligned} f(ab) - f(a)f(b) =& f(ab) - g(ab) + g(ab) - f(a)f(b) \\ =& (f(ab) - g(ab)) + g(a)g(b) - f(a)f(b) \\ =& (f(ab) - g(ab)) + (g(a) - f(a))\, g(b) + (g(b) - f(b))\, f(a). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |f(ab) - f(a)f(b)| \leq& |f(ab) - g(ab)| + |g(a) - f(a)|\, |g(b)| + |g(b) - f(b)|\, |f(a)| \\ \leq& \varepsilon \left(1 + \|a\| + \|b\|\right), \end{aligned}$$

ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $f(ab) = f(a)f(b)$, ce qui achève la preuve de a).

(b) : soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{A}$ et $h \in \Delta$. On a

$$(\mathcal{G}(x) + \mathcal{G}(y))(h) = \hat{x}(h) + \hat{y}(h) = h(x) + h(y) = h(x+y) = \mathcal{G}(x+y)(h),$$

$$(\alpha\mathcal{G}(x))(h) = \alpha\hat{x}(h) = \alpha h(x) = h(\alpha x) = \mathcal{G}(\alpha x)(h),$$

et

$$(\mathcal{G}(x)\mathcal{G}(y))(h) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) = h(x)h(y) = h(xy) = \mathcal{G}(xy)(h).$$

Comme les égalités précédentes sont vraies pour tout $h \in \Delta$, on en déduit que $\mathcal{G}$ est un homomorphisme d'algèbre de $\mathcal{A}$ dans $C(\Delta)$. Par conséquent, son image, qui est $\hat{\mathcal{A}}$, est bien sûr une sous-algèbre de $C(\Delta)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} x \in \ker(\mathcal{G}) \Longleftrightarrow& \hat{x}(h) = 0, \qquad \forall h \in \Delta. \\ \Longleftrightarrow& h(x) = 0, \qquad \forall h \in \Delta. \\ \Longleftrightarrow& x \in \bigcap_{h\in\Delta} \ker h. \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.5.1, on a

$$\bigcap_{h\in\Delta} \ker h = \bigcap_{\substack{I \text{ idéal} \\ \text{max. de } \mathcal{A}}} I = \text{rad } \mathcal{A}.$$

On en déduit donc que $\ker\mathcal{G} = \text{rad } \mathcal{A}$. Finalement, $\mathcal{G}$ est un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$ si et seulement si $\ker\mathcal{G} = \{0\}$, i.e. $\text{rad } \mathcal{A} = \{0\}$, soit encore $\mathcal{A}$ semi-simple.

(c) : soit $x \in \mathcal{A}$. On a

$$\text{Im } \hat{x} = \{\hat{x}(h) : h \in \Delta\} = \{h(x) : h \in \Delta\}.$$

D'autre part, d'après le théorème 3.5.1, on a $\lambda \in \sigma(x)$ ssi il existe $h \in \Delta$ tq. $\lambda = h(x)$. D'où $\text{Im } \hat{x} = \sigma(x)$. On en déduit aussi que

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{h\in\Delta} |\hat{x}(h)| = \sup_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda| = r(x).$$

L'inégalité $r(x) \leq \|x\|$ a déjà été prouvé dans le théorème 3.2.6.

(d) : L'équivalence entre (ii) et (iii) est immédiate d'après le théorème 3.2.11 qui affirme que

$$r(x) = \sup_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda| = \lim_{n\to+\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Pour l'équivalence entre (i) et (ii), remarquons que d'après (b) et (c) on a

$$\begin{aligned} x \in \text{rad } \mathcal{A} &\Longleftrightarrow \mathcal{G}(x) = 0, \\ &\Longleftrightarrow \hat{x}(h) = 0, \quad \forall h \in \Delta, \\ &\Longleftrightarrow \text{Im } \hat{x} = \{0\}, \\ &\Longleftrightarrow \sigma(x) = \{0\}. \end{aligned}$$

□

Les algèbres semi-simples possèdent une propriété importante que nous avons déjà démontrée dans le cas où $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ (voir théorème 3.3.2).

Théorème 3.7.5 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative unitaire et $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach commutative, unitaire et semi-simple. Si $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est un homomorphisme d'algèbre, alors φ est automatiquement continu.*

Preuve : Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux algèbres de Banach, pour montrer que φ est continue, nous pouvons appliquer le théorème du graphe fermé. Soit donc $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{A}$ telle que

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \text{ dans } \mathcal{A}$$

et

$$\varphi(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \text{ dans } \mathcal{B}.$$

Il s'agit de montrer que $y = \varphi(x)$. Soit h un caractère de $\mathcal{B}$. Alors $\varphi := h \circ \varphi$ est un caractère de $\mathcal{A}$. D'après le théorème 3.3.2, h et φ sont continues et donc

$$\begin{aligned} h(y) = &\lim_{n\to+\infty} h(\varphi(x_n)) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) \\ =&\varphi(x) = (h \circ \varphi)(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $h \in \Delta_{\mathcal{B}}$, on a $h(y) = h(\varphi(x))$. Si on note $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ la transformation de Gelfand définie sur $\mathcal{B}$, cela signifie que $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}(y) = \mathcal{G}_{\mathcal{B}}(\varphi(x))$. Comme $\mathcal{B}$ est semi-simple, cela implique que $\varphi(x) = y$. Le théorème du graphe fermé permet alors de conclure que φ est continue.

□

On obtient le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 3.7.6 *Tout isomorphisme entre deux algèbres de Banach commutatives, unitaires, semi-simples, est un homéomorphisme.*

En particulier, ceci est vrai pour tout automorphisme d'une algèbre de Banach commutative, unitaire, semi-simple. La topologie d'une telle algèbre est alors dans un certain sens complètement déterminée par sa structure algébrique.

Dans le théorème 3.7.4, l'algèbre $\hat{\mathcal{A}}$ peut-être ou ne pas être fermée dans $C(\Delta)$, muni de la norme du sup. Pour décider de quel cas il s'agit, nous allons voir qu'il suffit de comparer $\|x^2\|$ et $\|x\|^2$, pour tout $x \in \mathcal{A}$. Evidemment l'inégalité $\|x^2\| \leq \|x\|^2$ est toujours vraie !

Lemme 3.7.7 *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach commutative, unitaire et*

$$r = \inf_{x \in \mathcal{A},\, x \neq 0} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2}, \qquad s = \inf_{x \in \mathcal{A},\, x \neq 0} \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|}$$

alors on a $s^2 \leq r \leq s$.

Preuve : Puisque que $\|\mathcal{G}(x)\|_\infty \geq s\|x\|$, on a, d'après le théorème 3.7.4,

$$\|x^2\| \geq \|\mathcal{G}(x^2)\|_\infty = \|\mathcal{G}(x)^2\|_\infty = \|\mathcal{G}(x)\|_\infty^2 \geq s^2\|x\|^2,$$

pour tout $x \in \mathcal{A}$. Ainsi $s^2 \leq r$.

Pour la deuxième inégalité, remarquons que comme $\|x^2\| \geq r\|x\|^2$, une récurrence sur n montre que

$$\left\|x^{2^n}\right\| \geq r^{2^n-1}\|x\|^{2^n}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots \tag{3.12}$$

En effet, la formule (3.12) est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned} \left\|x^{2^{n+1}}\right\| &= \left\|\left(x^{2^n}\right)^2\right\| \geq r \left\|x^{2^n}\right\|^2 \\ &\geq r \left(r^{2^n-1}\right)^2 \|x\|^{2^{n+1}} \\ &= r^{2^{n+1}-1}\|x\|^{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$. Ainsi, par récurrence, on en déduit que (3.12) est vraie pour tout $n \geq 1$. En prenant la racine 2^n-ième, on obtient

$$\left\|x^{2^n}\right\|^{1/2^n} \geq r^{\frac{2^n-1}{2^n}}\|x\| = r^{1-\frac{1}{2^n}}\|x\|.$$

D'après le théorème 3.2.11, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que

$$r(x) \geq r\|x\|.$$

Le théorème 3.7.4 permet alors de conclure car

$$\|\hat{x}\|_\infty = r(x) \geq r\|x\|,$$

et ceci étant vrai pour tout $x \in \mathcal{A}$, on en déduit que $s \geq r$.

$\square$

Théorème 3.7.8 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative, unitaire et Δ l'espace idéal maximal de $\mathcal{A}$.*

(a) *Si on munit $\hat{\mathcal{A}}$ de la norme du sup, induite par $C(\Delta)$, alors la transformation de Gelfand est une isométrie de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a $\|x^2\| = \|x\|^2$.*

(b) *L'algèbre $\mathcal{A}$ est semi-simple et $\hat{\mathcal{A}}$ est fermée dans $C(\Delta)$ si et seulement s'il existe une constante K telle que, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on ait $\|x\|^2 \leq K\|x^2\|$.*

Preuve : (a) : la transformation de Gelfand $\mathcal{G}$ est une isométrie de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$ si et seulement si

$$\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Comme $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$, pour tout $x \in \mathcal{A}$ (d'après le théorème 3.7.4), on en déduit que la transformation de Gelfand $\mathcal{G}$ est une isométrie de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$ si et seulement si

$$s := \inf_{x\in\mathcal{A},\, x\neq 0} \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|} = 1.$$

Le lemme 3.7.7 implique alors que $s = 1$ est équivalent à

$$r := \inf_{x\in\mathcal{A},\, x\neq 0} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2} = 1$$

Comme $\|x^2\| \leq \|x\|^2$, $\forall x \in \mathcal{A}$, on obtient que

$$\begin{aligned} r = 1 &\Longleftrightarrow \|x\|^2 \leq \|x^2\|, \forall x \in \mathcal{A} \\ &\Longleftrightarrow \|x\|^2 = \|x^2\|, \forall x \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du point (a).

(b) : d'après le théorème 3.7.4, l'algèbre $\mathcal{A}$ est semi-simple et $\hat{\mathcal{A}}$ est fermé dans $C(\Delta)$ si et seulement si la transformé de Gelfand $\mathcal{G}$ est injective et à image fermée. Le théorème A.2.6 implique alors que ceci est équivalent à l'existence de $c > 0$ tel que

$$c\|x\| \leq \|\hat{x}\|_\infty, \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

L'existence de $c > 0$ est alors équivalente à

$$\inf_{x\in\mathcal{A},\, x\neq 0} \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|} > 0, \tag{3.13}$$

et le lemme 3.7.7 implique alors que (3.13) équivaut à

$$\inf_{x\in\mathcal{A},\, x\neq 0} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2} > 0.$$

Cette dernière condition est elle même équivalente à l'existence de $K > 0$ telle que $\|x^2\| \geq K\|x\|^2$, $\forall x \in \mathcal{A}$.

□

On peut alors donner le corollaire suivant :

Corollaire 3.7.9 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative, unitaire et Δ l'espace idéal maximal de $\mathcal{A}$. Si on munit $\hat{\mathcal{A}}$ de la norme du sup, induite par $C(\Delta)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La transformation de Gelfand est une isométrie de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$.*

(ii) *La transformation de Gelfand est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$.*

(iii) *Pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a $\|x^2\| = \|x\|^2$.*

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : si la transformation de Gelfand $\mathcal{G}$ est une isométrie alors en particulier elle est injective et donc le théorème 3.7.4 implique qu'elle est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur $\hat{\mathcal{A}}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i) : découle trivialement du théorème 3.7.8.

□

3.8 Exercices

Exercice 3.8.1 *Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (complexe) et supposons que $\mathcal{A}$ est aussi une algèbre ayant un élément unité $e \neq 0$ et telle que la multiplication est continue à gauche et à droite. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une norme équivalente sur $\mathcal{A}$ qui en fait une algèbre de Banach unitaire.*

1) *Pour $x \in \mathcal{A}$, on considère M_x l'opérateur de multiplication à gauche par x, défini par*

$$M_x(z) = xz, \qquad (z \in \mathcal{A}).$$

On note $\widetilde{A} = \{M_x : x \in \mathcal{A}\}$. Vérifier que $\widetilde{A}$ est une sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, des applications linéaires et continues sur $\mathcal{A}$.

2) *Pour $x \in \mathcal{A}$, on pose*

$$\|x\|' = \|M_x\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}.$$

   (a)) *Vérifier que $\| \cdot \|'$ définit une norme sur $\mathcal{A}$.*

   (b) *Montrer que $(\mathcal{A}, \| \cdot \|')$ est une algèbre de Banach unitaire.*

   (c) *Montrer que $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ sont équivalentes.*

3) *Soit $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}$ défini par*

$$\varphi(x) = M_x.$$

Montrer que φ est un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{A}$ sur $\widetilde{\mathcal{A}}$ telle que φ et φ^{-1} sont continues.

4) *En déduire que toute algèbre de Banach unitaire $\mathcal{B}$ est isomorphe à une sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ contenant l'identité.*

Exercice 3.8.2 *Soient K un compact de $\mathbb{C}$ et $C(K)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues sur K, munie de la norme sup. On note par :*

- *$A(K)$ le sous-ensemble de $C(K)$ formé des fonctions continues sur K et holomorphes à l'intérieur de K ;*
- *$P(K)$ la fermeture dans $C(K)$ des polynômes complexes.*

1) *Montrer que $A(K)$ et $P(K)$ sont des algèbres de Banach unitaires (pour la norme sup).*

Pour $f \in C(\mathbb{T})$, on note

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta}\, d\theta, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Soit

$$s_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ik\theta},$$

et posons

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1}\left(s_0 + s_1 + \cdots + s_n\right).$$

Le théorème de Fejer affirme que si $f \in C(\mathbb{T})$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0.$$

2) *En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes :*

   (i) $f \in P(\mathbb{T})$ *;*

   (ii) $f = F|\mathbb{T}$, *où* $F \in A(\overline{\mathbb{D}})$ *;*

   (iii) $\hat{f}(-k) = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$.

3) *Montrer que*

   (a) $A(\overline{\mathbb{D}})$ *et* $P(\mathbb{T})$ *sont isométriquement isomorphes.*

   (b) $A(\overline{\mathbb{D}}) = P(\overline{\mathbb{D}})$.

4) *Soit* $f_0(z) := z$, $z \in \mathbb{T}$. *Calculer* $\sigma_{P(\mathbb{T})}(f_0)$, $\sigma_{C(\mathbb{T})}(f_0)$, *puis le rayon spectral de* f_0.

Exercice 3.8.3 *Soit $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. On définit une multiplication (interne) $\star$ par*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) \star \left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+q=k} a_p b_q\right) X^k,$$

et une norme $\|\cdot\|_1$ par

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

1) *Dans cette question, on suppose que $n = 3$. On considère $f(X) = 1+X+X^3$, $g(X) = 2 + X^3$. Calculer $\|f\|_1$, $\|g\|_1$ et $\|f \star g\|_1$.*

2) *Vérifier que $\mathbb{C}_n[X]$ est une algèbre de Banach unitaire et commutative.*

3) *Décrire la boule unité ouverte* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{C}_n[X]$.

4) *Montrer que* $2X \notin \mathcal{B}$ *et* $1+2X \in \mathcal{I}nv(\mathbb{C}_n[X])$. *Caractériser* $G := \mathcal{I}nv(\mathbb{C}_n[X])$ *et vérifier directement que :*

   (a) G *est un groupe multiplicatif.*

   (b) G *est ouvert dans* $\mathbb{C}_n[X]$.

   (c) $\{e - x : x \in \mathcal{B}\} \subsetneq G$.

5) *Soit* $f(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$. *Déterminer* $\sigma(f)$.

Exercice 3.8.4 *Soit* $X = \mathbb{C}^n$ *muni des opérations usuelles qui en font une algèbre complexe. On considère sur* X *la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *définie par*

$$\|(z_1, z_2, \ldots, z_n)\|_\infty = \sup_{1\le j\le n} |z_j|.$$

1) *Vérifier que* X *muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *est une algèbre de Banach unitaire et commutative.*

2) *Caractériser* $\mathcal{I}nv(X)$ *et vérifier que c'est un groupe multiplicatif ouvert.*

3) *Dans cette question, on pose* $n = 3$. *Trouver le spectre de* $x = (2, 3, 5)$ *et calculer de deux manières le rayon spectral de* x.

Exercice 3.8.5 *Soit* $\mathcal{A}$ *une algèbre de Banach et on pose* $\mathcal{A}^\sharp = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$, *muni de sa structure d'espace vectoriel produit cartésien et on définit la multiplication sur* $\mathcal{A}^\sharp$ *par*

$$(x, \alpha)(y, \beta) := (\alpha y + \beta x + xy, \alpha\beta).$$

La norme sur $\mathcal{A}^\sharp$ *est elle définie par*

$$\|(x, \alpha)\| := \|x\| + |\alpha|.$$

1) *Montrer que* $\mathcal{A}^\sharp$ *est une algèbre de Banach unitaire.*

2) *Vérifier que* $\mathcal{A}$ *se plonge isométriquement dans* $\mathcal{A}^\sharp$.

Exercice 3.8.6 *Soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}_n[X]$ l'algèbre de Banach (unitaire) des polynômes de degré au plus n, munie de la norme $\|\cdot\|_1$ (voir exercice 3.8.3). Soit*

$$J = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k : a_0 = 0 \right\}.$$

1) *Montrer que J est un idéal fermé maximal de $\mathcal{A}$. En déduire que $(J, \|\cdot\|_1)$ est une algèbre de Banach.*
2) *On considère $J^\sharp$ l'algèbre de Banach unitaire construite à partir de J par le procédé décrit dans l'exercice 3.8.5. Montrer que $J^\sharp$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{A}$.*

Exercice 3.8.7 *Soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}_n[X]$ l'algèbre de Banach unitaire considérée dans l'exercice 3.8.3.*

1) *Décrire tous les idéaux de $\mathcal{A}$.*
2) *Décrire les idéaux fermés et les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$.*

Mêmes questions avec l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C}^n$ considérée dans l'exercice 3.8.4.

Exercice 3.8.8 *Soient $n \geq 3$, $\mathcal{A} = \mathbb{C}^n$ l'algèbre de Banach unitaire considérée dans l'exercice 3.8.4 et*

$$J = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathcal{A} : z_1 = z_2 = z_3 = 0\}.$$

1) *Montrer que J est un idéal fermé de $\mathcal{A}$.*
2) *Montrer que $\mathcal{A}/J$ est isomorphe isométriquement à $\mathbb{C}^3$.*

Exercice 3.8.9 *Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $C(X)$ l'algèbre de Banach unitaire des fonctions continues sur X. L'objet de cet exercice est de caractériser tous les idéaux fermés de $C(X)$. On reprend les notations du paragraphe 3.6.1 :*

- *étant donné un sous-ensemble $\mathcal{O}$ quelconque de X, on note $k(\mathcal{O})$ le sous-ensemble de $C(X)$ défini par*

$$k(\mathcal{O}) := \{f \in C(X) : f|\mathcal{O} \equiv 0\}.$$

- *Si J est un idéal de $C(X)$, on note $h(J)$ l'ensemble des points de X où toutes les fonctions de J s'annulent, autrement dit*

$$h(J) := \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in J\} = \bigcap_{f \in J} f^{-1}(0).$$

1) *Vérifier que pour $\mathcal{O} \subset X$, $k(\mathcal{O})$ est un idéal fermé de $C(X)$ et que $k(\mathcal{O}) = k(\overline{\mathcal{O}})$.*

2) *Soit J un idéal fermé de $C(X)$. Montrer que si $h(J)$ contient plus d'un point, alors J n'est pas maximal.*

3) *Soit J un idéal fermé de $C(X)$ et considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\Omega_n = \left\{ x \in X : d(x, h(J)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

   (i) *Montrer que $X \setminus \Omega_n$ est un ensemble compact, contenu dans $X \setminus h(J)$.*

   (ii) *Montrer qu'il existe une fonction appartenant à J qui est strictement positive sur $X \setminus \Omega_n$. En déduire que si $g \in C(X)$ et $g \equiv 0$ sur Ω_n, alors $g \in J$.*

   (iii) *En déduire que, si $g \in C(X)$ et $g \equiv 0$ sur un voisinage de $h(J)$, alors $g \in J$.*

   (iv) *Montrer que $k(h(J)) = J$ (on pourra utiliser* (ii) *et le lemme d'Urysohn).*

4) *Conclure que tout idéal fermé de $C(X)$ est de la forme $k(\mathcal{O})$, avec $\mathcal{O}$ un ensemble fermé de X.*

Exercice 3.8.10 *Soit $W(\mathbb{T})$ l'algèbre de Wiener et*

$$W^+(\mathbb{T}) = \left\{ f \in W(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0, n < 0 \right\}.$$

1) *Vérifier que $W^+(\mathbb{T})$ est une sous-algèbre fermée et unitaire de $W(\mathbb{T})$ et que $W^+(\mathbb{T})$ est engendrée par $\epsilon_1(z) = z$, $z \in \mathbb{T}$ (autrement dit, la plus petite sous-algèbre fermée de $W(\mathbb{T})$ qui contient ϵ_1 est $W^+(\mathbb{T})$).*

2) *Vérifier que* ϵ_1 *est inversible dans* $W(\mathbb{T})$ *mais pas dans* $W^+(\mathbb{T})$.

3) *Trouver* $\sigma_{W(\mathbb{T})}(\epsilon_1)$ *(le spectre de* ϵ_1 *considéré comme élément de* $W(\mathbb{T})$*) et* $\sigma_{W^+(\mathbb{T})}(\epsilon_1)$.

Exercice 3.8.11 *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques compacts et soient* $C(X)$ *(resp.* $C(Y)$*) l'algèbre de Banach unitaire des fonctions complexes continues sur* X *(resp. sur* Y*) munie de la norme sup.*

1) *Montrer que, si* $(x_n)_{n\geq 1}$ *est une suite d'éléments de* X, *alors* $(x_n)_{n\geq 1}$ *converge vers un point* $a \in X$ *si et seulement si, pour toute fonction* $f \in C(X)$, *la suite* $(f(x_n))_{n\geq 1}$ *converge vers* $f(a)$.

2) *Soit* g *une application continue de* Y *dans* X. *Soit* $\psi_g : C(X) \longrightarrow C(Y)$ *définie par*

$$\psi_g(h) = h \circ g.$$

Montrer que ψ_g *est un morphisme d'algèbres de Banach unitaires.*

3) *Réciproquement, soit* $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ *u morphisme d'algèbres de Banach unitaires.*

   (i) *Fixons* $y_0 \in Y$. *Montrer que l'application* $\varphi_{y_0} : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$, *définie par*

   $$\varphi_{y_0}(h) = \varphi(h)(y_0),$$

   est un caractère de $C(X)$.

   (ii) *En déduire qu'on peut définir une application* $g : Y \longrightarrow X$ *telle que, pour tout* $h \in C(X)$, *on a*

   $$\varphi(h)(y) = h(g(y)), \qquad (y \in Y).$$

   (iii) *Montrer que* g *est continue.*

4) *En déduire la forme d'un automorphisme de* $C(X)$.

Exercice 3.8.12 *Déterminer les radicaux des algèbres de Banach unitaires et commutatives suivantes :*

1) *l'algèbre* $\mathbb{C}^n$ *considérée dans l'exercice 3.8.4 ;*

2) *l'algèbre* $\mathbb{C}_n[X]$ *considérée dans l'exercice 3.8.3 ;*

3) *l'algèbre du disque* $A(\overline{\mathbb{D}})$ *;*

4) *l'algèbre de Wiener* $W(\mathbb{T})$ *;*

5) *la sous-algèbre de l'algèbre de Wiener* $W^+(\mathbb{T})$ *définie dans l'exercice 3.8.10.*

Décrire dans chacun des cas l'image de la transformation de Gelfand.

Exercice 3.8.13 *Soit* $\mathcal{A}$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ *représentée par une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

où $a, b \in \mathbb{C}$*. On munit* $\mathcal{A}$ *des opérations usuelles de* $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ *et de la norme opérateur.*

1) *Montrer que* $\mathcal{A}$ *est une algèbre de Banach unitaire et commutative.*

2) *Caractériser les éléments non-inversibles de* $\mathcal{A}$ *et déterminer la forme des idéaux maximaux de* $\mathcal{A}$*.*

3) *Expliciter l'image de la matrice*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

par la transformation de Gelfand.

Exercice 3.8.14 *Soit* $L^1[0,1]$ *l'espace de Banach composé des fonctions intégrables sur l'intervalle* $[0,1]$*. On définit une multiplication sur* $L^1[0,1]$ *par*

$$(f \star g)(x) := \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt, \qquad (x \in [0,1]).$$

1) *Montrer que* $L^1[0,1]$ *est une algèbre de Banach. Est-elle unitaire ? Par la suite, on note* $\mathcal{A}$ *l'algèbre de Banach unitaire construite à partir de* $L^1[0,1]$ *par le procédé décrit dans l'exercice 3.8.5. Pour* $f \in L^1[0,1]$*, on identifie* f *et son image dans* $\mathcal{A}$*.*
2) *Calculer le rayon spectral de la fonction* $f \equiv 1$*.*
3) *Soit* $f \in L^1[0,1]$*. Montrer que s'il existe* $\varepsilon > 0$ *telle que* $f \equiv 0$ *sur* $[0,\varepsilon]$*, alors* $f \in rad\ \mathcal{A}$*.*
4) *Déterminer tous les caractères de* $\mathcal{A}$*.*

Chapitre 4

Calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres de Banach

L'objet de ce chapitre est de définir un calcul fonctionnel holomorphe qui prolonge le calcul fonctionnel polynômial et qui respecte les principales propriétés algébriques et spectrales.

4.1 Aspect algébrique : calcul fonctionnel rationnel

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire complexe (non nécessairement normée) et $x \in \mathcal{A}$. On suppose que $\sigma(x)$, le spectre de x, est non vide (c'est automatique si l'algèbre $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach unitaire, comme on l'a vu au théorème 3.2.6 ; en général, c'est un sous-ensemble assez quelconque de $\mathbb{C}$). Pour un polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$,

$$p(X) = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i,$$

il est naturel de définir

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i.$$

Il est facile de vérifier (exercice !) que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & p & \longmapsto & p(x) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres unitaires. De plus, le lemme 3.2.9 affirme que φ préserve les propriétés spectrales, dans le sens où $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$. D'un point de vue purement algébrique, nous allons tout d'abord étendre ce calcul fonctionnel aux fractions rationnelles.

Pour un sous-ensemble K de $\mathbb{C}$, contenant le spectre de x, on note $\mathcal{R}_K$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients complexes et à pôles hors de K. Il est facile de voir que $\mathcal{R}_K$ est une sous-algèbre du corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles à une indéterminée sur $\mathbb{C}$ et dès que K est infini, $\mathcal{R}_K$ s'identifie à une algèbre de fonctions sur K (contenue dans l'algèbre des fonctions continues sur K et holomorphe à l'intérieur de K).

Proposition 4.1.1 *Le calcul fonctionnel polynômial $\varphi_x : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathcal{A}$, $\varphi_x(p) = p(x)$, s'étend de façon unique en un morphisme d'algèbres unitaires $\varphi_x : \mathcal{R}_K \longrightarrow \mathcal{A}$. On notera encore*

$$f(x) = \varphi_x(f), \qquad \textit{pour } f \in \mathcal{R}_K.$$

De plus, pour toute fraction rationnelle $f \in \mathcal{R}_K$, on a

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)).$$

Preuve : • <u>Unicité :</u> soit $\varphi_x : \mathcal{R}_K \longrightarrow \mathcal{A}$ un morphisme d'algèbres unitaires qui étend le calcul fonctionnel polynômial. Soit $f \in \mathcal{R}_K$. Alors f s'écrit $f = \dfrac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{C}[X]$, q ne s'annulant pas sur K. En utilisant l'égalité $q.\dfrac{1}{q} = 1$ dans $\mathcal{R}_K$ et le fait que φ_x est un morphisme d'algèbres unitaires, on a

$$\varphi_x(f) = \varphi_x(p)\varphi_x\left(\frac{1}{q}\right) = \varphi_x(p)\varphi_x(q)^{-1} = p(x)q(x)^{-1}.$$

Pour l'unicité, il reste à remarquer que si $f = \dfrac{p}{q} = \dfrac{p_1}{q_1}$, avec $p, p_1, q, q_1 \in \mathbb{C}[X]$ et q, q_1 ne s'annulant pas sur K, on a

$$p(x)q(x)^{-1} = p_1(x)q_1(x)^{-1}. \tag{4.1}$$

Pour cela, notons que $p(x)q(x) = (pq)(x) = (qp)(x) = q(x)p(x)$ implique que $q(x)^{-1}p(x) = p(x)q(x)^{-1}$. Par conséquent, on en déduit que

$$\begin{aligned}(4.1) \Longleftrightarrow & q(x)^{-1}p(x) = p_1(x)q_1(x)^{-1}\\ \Longleftrightarrow & p(x)q_1(x) = q(x)p_1(x)\\ \Longleftrightarrow & (pq_1)(x) = (qp_1)(x),\end{aligned}$$

et cette dernière égalité découle du fait que dans $\mathbb{C}[X]$, on a $pq_1 = qp_1$.

• <u>Existence :</u> soit $f \in \mathcal{R}_K$. Alors f s'écrit $f = \dfrac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{C}[X]$, q ne s'annulant pas sur K. Comme $\sigma(q(x)) = q(\sigma(x))$, on obtient que $0 \notin \sigma(q(x))$. Autrement dit, $q(x)$ est inversible. On pose alors

$$\varphi_x(f) := p(x)q(x)^{-1}.$$

D'après le raisonnement précédent, cette définition a bien un sens car le membre à gauche $p(x)q(x)^{-1}$ ne dépend pas du choix de p et q dans la représentation de la fraction rationnelle f. De plus, il est clair que cette définition prolonge bien le calcul fonctionnel polynômial. Nous allons vérifier que φ_x est un morphisme d'algèbre unitaires. Pour $f = \dfrac{p_1}{q_1}, g = \dfrac{p_2}{q_2} \in \mathcal{R}_K$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_x(\lambda f + g) =& \varphi_x\left(\frac{\lambda p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right)\\ =& \varphi_x\left(\frac{\lambda p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}\right)\\ =& (\lambda p_1 q_2 + p_2 q_1)(x)(q_1 q_2)(x)^{-1}\\ =& (\lambda p_1(x)q_2(x) + p_2(x)q_1(x))q_2(x)^{-1}q_1(x)^{-1}\\ =& \lambda p_1(x)q_1(x)^{-1} + p_2(x)q_2(x)^{-1}\\ =& \lambda\varphi_x(f) + \varphi_x(g).\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\varphi_x(fg) =& \varphi_x\left(\frac{p_1p_2}{q_1q_2}\right)\\ =&(p_1p_2)(x)(q_1q_2)(x)^{-1}\\ =&p_1(x)p_2(x)q_2(x)^{-1}q_1(x)^{-1}\\ =&p_1(x)q_1(x)^{-1}p_2(x)q_2(x)^{-1}\\ =&\varphi_x(f)\varphi_x(g).\end{aligned}$$

Enfin, on a $\varphi_x(1) = e$! En conclusion, φ_x est bien un morphisme d'algèbres unitaires qui prolonge le calcul fonctionnel polynômial.

• Montrons la propriété spectrale : soit $\lambda \in \sigma(x)$ et $f \in \mathcal{R}_K$. Ecrivons $f = \dfrac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{C}[X]$, q ne s'annulant pas sur K. Comme $\lambda \in \sigma(x) \subset K$, on peut considérer la fraction rationnelle $g(X)$ définie par

$$g(X) = \frac{f(X) - f(\lambda)}{X - \lambda},$$

et on a

$$g(X) = \frac{\frac{p(X)}{p(\lambda)} - \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}}{X - \lambda} = \frac{p(X)q(\lambda) - p(\lambda)q(X)}{q(\lambda)q(X)(X - \lambda)}.$$

Comme

$$\frac{p(X)q(\lambda) - p(\lambda)q(X)}{X - \lambda} \in \mathbb{C}[X],$$

on en déduit que $g \in \mathcal{R}_K$. D'où $f(x) - f(\lambda)e = (x - \lambda e)g(x) = g(x)(x - \lambda e)$ et si $f(x) - f(\lambda)e$ est inversible, l'égalité précédente implique que $x - \lambda e$ est aussi inversible, ce qui est absurde. Par conséquent, $f(x) - f(\lambda)e$ n'est pas inversible, autrement dit, on a $f(\lambda) \in \sigma(f(x))$. Finalement, on a prouvé que $f(\sigma(x)) \subset \sigma(f(x))$.

Réciproquement, montrons que $\sigma(f(x)) \subset f(\sigma(x))$. Soit $\lambda \in \sigma(f(x))$. Ecrivons

$$\begin{aligned}f(X) - \lambda =& \frac{p(X)}{q(X)} - \lambda = \frac{p(X) - \lambda q(X)}{q(X)}\\ =& \alpha\,\frac{\prod_{i=1}^{N}(X - \alpha_i)}{q(X)},\end{aligned}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq N}$ est la suite des zéros (comptés avec multiplicité) du polynôme $p(X) - \lambda q(X)$. On peut bien sûr supposer que $\alpha \neq 0$ (sinon le résultat est trivial !). En utilisant le fait que φ_x est un morphisme d'algèbres, on a

$$f(x) - \lambda e = \alpha \left(\prod_{i=1}^{N} (x - \lambda_i e) \right) q(x)^{-1} = \alpha q(x)^{-1} \left(\prod_{i=1}^{N} (x - \lambda_i e) \right).$$

Comme $f(x) - \lambda e$ n'est pas inversible, on en déduit qu'il existe i, $1 \leq i \leq N$, tel que $\alpha_i e - x$ n'est pas inversible. Donc $\alpha_i \in \sigma(x)$ et $f(\alpha_i) = lambda \in f(\sigma(x))$. D'où $\sigma(f(x)) \subset f(\sigma(x))$.

□

Dans le cas où $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach, le calcul fonctionnel, dit de "Dunford-Schwarz", étend φ_x à l'algèbre des fonctions holomorphes dans un voisinage du spectre de x. Pour le développer, nous allons exploiter la théorie des algèbres de Banach du chapitre précédent et la théorie des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach (dont on a fait un bref résumé dans l'Annexe B).

4.2 Définition et propriétés du calcul fonctionnel holomorphe

4.2.1 Formules de Cauchy pour le cas polynômial et rationnel

Nous allons commencer par une formule qui va justifier notre définition du calcul fonctionnel holomorphe.

Lemme 4.2.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$x^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_r} \lambda^n (\lambda e - x)^{-1} \, d\lambda, \tag{4.2}$$

où Γ_r est le cercle de centre 0 et de rayon r positivement orienté, avec $r > r(x)$.

Preuve : Remarquons tout d'abord que pour $\lambda \in \Gamma_r^*$, on a $|\lambda| = r > r(x)$ et donc $\lambda \in \rho(x)$. Par conséquent, la fonction $\lambda \longmapsto \lambda^n(\lambda e - x)^{-1}$ est continue sur un voisinage de Γ_r^* et l'intégrale dans la formule (4.2) a bien un sens. En utilisant la paramétrisation $\Gamma_R(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, on a, par définition de l'intégrale curviligne,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_r} \lambda^n(\lambda e - x)^{-1}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{n+1}e^{i(n+1)t}(re^{it}e - x)^{-1}\,dt. \tag{4.3}$$

Notons maintenant que le lemme 3.2.2 implique que pour $|z| > \|x\|$, on a

$$(ze - x)^{-1} = \frac{1}{z}\left(e - \frac{x}{z}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^{k+1}}. \tag{4.4}$$

Comme $z \longmapsto (ze - x)^{-1}$ est holomorphe pour $|z| > r(x)$, la série entière dans l'égalité (4.4) converge en fait normalement dans tout domaine $|z| \geq \rho > r(x)$. Ainsi, on en déduit que

$$(re^{it}e - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{r^{k+1}e^{i(k+1)t}},$$

avec convergence uniforme de la série par rapport à la variable d'intégration $t \in [0, 2\pi]$. En utilisant (4.3), on peut donc permuter le signe "somme et intégrale" et écrire que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_r} \lambda^n(\lambda e - x)^{-1}\,d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} x^k r^{n-k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\,dt.$$

Comme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ipt}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \\ 1 & \text{si } p = 0, \end{cases}$$

on en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_r} \lambda^n(\lambda e - x)^{-1}\,d\lambda = x^n,$$

ce qui achève la preuve du lemme.

□

Par linéarité, on obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$. Alors, pour tout polynôme p, on a*

$$p(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_r} p(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}\, d\lambda, \tag{4.5}$$

où Γ_r est le cercle de centre 0 et de rayon r positivement orienté, avec $r > r(x)$.

En utilisant une première fois la formule de Cauchy, nous allons montrer que la formule (4.5) s'etend aux fractions rationnelles.

Proposition 4.2.3 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, $x \in \mathcal{A}$, f une fraction rationnelle à pôles hors de $\sigma(x)$ et Γ un système de courbes fermées de classe C^1 par morceaux et qui entoure $\sigma(x)$ dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{$pôles de $f\}$. Alors, on a*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}\, d\lambda. \tag{4.6}$$

Preuve : En vertu de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle et de la linéarité (par rapport à f) des deux membres de la formule (4.6), il suffit d'établir sa validité pour les polynômes et les fonctions

$$g_{z,n} : \lambda \longmapsto (\lambda - z)^{-n}, \qquad n \in \mathbb{N}, z \notin \sigma(x).$$

Pour les polynômes, la formule (4.6) découle immédiatement du corollaire 4.2.2 et du théorème de Cauchy version vectorielle (voir théorème B.3.5). Il reste donc à montrer que, pour $z \notin \sigma(x)$, pour $n \geq 0$, on a

$$I_n(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (\lambda - z)^{-n}(\lambda e - x)^{-1}\, d\lambda = (x - ze)^{-n}. \tag{4.7}$$

Nous allons montrer la formule (4.7) par récurrence sur n. Pour $n = 0$, la formule (4.7) correspond à la formule pour les polynômes avec $p(X) = 1$. Supposons la formule vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$. Rappelons (voir (3.5)) que pour $\lambda, z \notin \sigma(x)$, on a

$$(\lambda e - x)^{-1} = (ze - x)^{-1} + (z - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(ze - x)^{-1}.$$

En utilisant cette équation et la proposition B.2.9, on obtient que

$$I_{n+1}(z) = \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (\lambda - z)^{-(n+1)} \, d\lambda \right) (ze - x)^{-1} - \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (\lambda - z)^{-n} (\lambda e - x)^{-1} \, d\lambda \right) (ze - x)^{-1}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (\lambda - z)^{-n} (\lambda e - x)^{-1} \, d\lambda = (x - ze)^{-n}.$$

De plus, comme Γ entoure $\sigma(x)$ dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, on a $n(\Gamma, z) = 0$, ce qui implique que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (\lambda - z)^{-(n+1)} \, d\lambda = 0.$$

Avec ces deux équations, on obtient alors

$$I_{n+1}(z) = -(x - ze)^{-n} (ze - x)^{-1} = (x - ze)^{-(n+1)} = g_{z,n+1}(x).$$

Par récurrence, la formule (4.7) est donc démontrée pour les fonctions $g_{z,n}$, $n \geq 0$, ce qui achève la preuve de la proposition.

$\square$

4.2.2 Définition du calcul fonctionnel de Dunford-Schwarz

En vertu de la proposition 4.2.3, il est naturel de poser la définition suivante.

Définition 4.2.4 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, $x \in \mathcal{A}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le spectre de x. Pour $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega)$ et Γ un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux qui entoure $\sigma(x)$ dans Ω, on pose*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(z)(ze - x)^{-1} \, dz. \tag{4.8}$$

Remarque 4.2.5 *La formule (4.8) définit bien un élément de $\mathcal{A}$ qui ne dépend pas du choix de Γ d'après le théorème de Cauchy version vectorielle (voir théorème B.3.5).*

4.2.3 Propriétés du calcul fonctionnel de Dunford-Schwarz

Le théorème suivant résume l'essentiel des propriétés du calcul fonctionnel holomorphe.

Théorème 4.2.6 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire, $x \in \mathcal{A}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le spectre de x. Considérons*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & f & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Alors

a) *ψ est un morphisme d'algèbres unitaires.*

b) *ψ est continue, si on munit $\mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega)$ de la topologie de la convergence uniforme tout compact. Autrement dit, si $f_n, f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega)$ et (f_n) converge vers f uniformément sur tout compact de Ω, alors $f_n(x)$ tend vers $f(x)$, si $n \to +\infty$.*

c) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega)$, on a*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)).$$

d) *Soit $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega)$, $\mathcal{U}$ un ouvert contenant $f(\sigma(x))$ et $g \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\mathcal{U})$. Alors*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Preuve :

a) • la linéarité de ψ ne pose pas de problème et est laissée en exercice.

• Montrons que, pour $f, g \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega)$, on a $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Pour $\varepsilon > 0$, notons

$$\Omega_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(\lambda, \sigma(x)) < \varepsilon\}.$$

Comme $\sigma(x)$ est un compact contenu dans l'ouvert Ω, il existe $\varepsilon > 0$ (suffisamment petit) pour que $\overline{\Omega_\varepsilon}$ soit contenu dans Ω. D'après la proposition B.1.6, on peut alors choisir deux systèmes de courbes fermées Γ et Γ_1, de classe C^1 par morceaux telles que Γ entoure le compact $\sigma(x)$ dans Ω_ε et Γ_1 entoure le compact $\overline{\Omega_\varepsilon}$ dans Ω. Pour $f, g \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega)$, on peut alors écrire, par définition, que

$$(fg)(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\lambda)g(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}\, d\lambda.$$

Mais la formule de Cauchy version scalaire (voir proposition B.1.10) implique que, pour $\lambda \in \Gamma^*$, on a

$$f(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\omega)}{\omega - \lambda}\, d\omega.$$

D'où

$$(fg)(x) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_\Gamma \left(\int_{\Gamma_1} \frac{f(\omega)}{\omega - \lambda}\, d\omega \right) g(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}\, d\lambda.$$

En utilisant l'équation de la résolvante (voir (3.5))

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\omega e - x)^{-1} + (\omega - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\omega e - x)^{-1}$$

on obtient que $(fg)(x) = I_1 + I_2$, avec

$$I_1 = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_\Gamma \int_{\Gamma_1} \frac{f(\omega)g(\lambda)}{\omega - \lambda}(\omega e - x)^{-1}\, d\omega\, d\lambda,$$

et

$$I_2 = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_\Gamma \int_{\Gamma_1} f(\omega)g(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\omega e - x)^{-1}\, d\omega\, d\lambda,$$

On a facilement que

$$I_2 = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} f(\omega)(\omega e - x)^{-1}\, d\omega \right) g(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}\, d\lambda = f(x)g(x).$$

D'autre part, en utilisant le théorème de Fubini, on a

$$I_1 = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \left(\int_\Gamma \frac{g(\lambda)}{\omega - \lambda}\, d\lambda \right) f(\omega)(\omega e - x)^{-1}\, d\omega.$$

Or pour tout $\omega \in \Gamma_1^*$, on a $n(\Gamma, \omega) = 0$, donc

$$\int_\Gamma \frac{g(\lambda)}{\omega - \lambda}\, d\lambda = 0, \qquad \forall \omega \in \Gamma_1^*.$$

On en déduit donc que $I_1 = 0$. Ainsi $(fg)(x) = I_1 = f(x)g(x)$.

• Montrons que $\psi(1) = e$. D'après le lemme 4.2.1,on a

$$\psi(1) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}(\lambda e - x)^{-1}\,d\lambda = e.$$

Ceci achève de prouver que ψ est un morphisme d'algèbres unitaires.

b) soit Γ un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux qui entoure $\sigma(x)$ dans Ω. Alors, par définition, on a

$$\psi(f) = f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} f(z)(ze - x)^{-1}\,dz.$$

Comme Γ^* est un compact contenu dans $\rho(x)$, on a

$$M(\Gamma) := \sup_{z\in\Gamma^*}\|(ze - x)^{-1}\| < +\infty.$$

Si on note alors par $l_\Gamma := \displaystyle\int_\Gamma |dz|$ la longueur de Γ, on obtient que, pour $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega)$, on a

$$\|f(x)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |f(z)|\|(ze - x)^{-1}\||dz| \leq \frac{M(\Gamma)l_\Gamma}{2\pi}\sup_{z\in\Gamma^*}|f(z)|.$$

Ainsi, on en déduit que

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|(f_n - f)(x)\| \leq \frac{M(\Gamma)l_\Gamma}{2\pi}\sup_{z\in\Gamma^*}|f_n(z) - f(z)|.$$

Comme Γ^* est un compact de Ω, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{z\in\Gamma^*}|f_n(z) - f(z)| = 0,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

c) • montrons que $f(\sigma(x)) \subset \sigma(f(x))$.

Soit $\lambda \in \sigma(x)$. Alors, la théorie des fonctions holomorphes implique qu'il existe $g \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega)$ telle que

$$f(z) - f(\lambda) = (z - \lambda)g(z), \qquad z \in \Omega.$$

D'où, en appliquant le morphisme ψ, on a

$$f(x) - f(\lambda)e = (x - \lambda e)g(x) = g(x)(x - \lambda e).$$

Comme $\lambda \in \sigma(x)$, on a $x - \lambda e$ non inversible et donc $f(x) - f(\lambda)e$ non inversible aussi. Autrement dit, on a $f(\lambda) \in \sigma(f(x))$.

• réciproquement, montrons que $\sigma(f(x)) \subset f(\sigma(x))$.

Soit $\lambda \notin f(\sigma(x))$. Cela signifie que la fonction $f - \lambda$ ne s'annule pas sur $\sigma(x)$. Puisque f est continue, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ contenant $\sigma(x)$ et contenu dans Ω telle que la fonction $f - \lambda$ ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$. Notons

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - \lambda}, \qquad z \in \mathcal{U}.$$

Alors $g \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\mathcal{U})$. D'après les propriétés du calcul fonctionnel holomorphe (relativement à l'ouvert $\mathcal{U}$), comme $(f - \lambda)g \equiv 1$ sur $\mathcal{U}$, on a

$$e = ((f - \lambda)g)(x) = (f(x) - \lambda e)g(x) = g(x)(f(x) - \lambda e).$$

Ceci entraine que $f(x) - \lambda e \in \mathcal{I}nv(\mathcal{A})$, soit $\lambda \notin \sigma(f(x))$. Par contraposée, on obtient donc le résultat.

d) considérons $\Omega_0 = f^{-1}(\mathcal{U})$. Il est clair que Ω_0 est un ouvert qui contient $\sigma(x)$ et on a $g \circ f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega_0)$. Par conséquent, $(g \circ f)(x)$ a bien un sens. D'autre part, comme par hypothèse $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) \subset \mathcal{U}$, $g(f(x))$ a aussi un sens.

Comme $f(\sigma(x))$ est un compact contenu dans l'ouvert $\mathcal{U}$, il existe un ouvert V relativement compact tel que $f(\sigma(x)) \subset V \subset \overline{V} \subset \mathcal{U}$. On choisit alors un système de courbes fermées Γ_1 de classe C^1 par morceaux et qui entoure $\overline{V}$ dans $\mathcal{U}$. Autrement dit, on a $\Gamma_1^* \subset \mathcal{U} \setminus \overline{V}$ et

$$n(\Gamma_1, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \overline{V} \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{U}. \end{cases}$$

Ainsi, on a $\sigma(x) \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(\mathcal{U}) = \Omega_0$. Donc $W := f^{-1}(V)$ est un ouvert qui contient $\sigma(x)$ et on a

$$n(\Gamma_1, f(\lambda)) = 1, \qquad \lambda \in W.$$

Fixons alors un contour Γ_0 qui entoure $\sigma(x)$ dans W. Soit $\zeta \in \Gamma_1^*$ et posons

$$\varphi_\zeta(z) := \frac{1}{\zeta - f(z)}, \qquad z \in W.$$

Alors $\varphi_\zeta \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(W)$ et par définition du calcul fonctionnel holomorphe, on a

$$\varphi_\zeta(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} \varphi_\zeta(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}\, d\lambda. \tag{4.9}$$

Comme Γ_1 entoure $\sigma(f(x))$ dans $\mathcal{U}$, on a (encore par définition du calcul fonctionnel holomorphe)

$$g(f(x)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} g(\zeta)(\zeta e - f(x))^{-1}\, d\zeta.$$

En utilisant a), on voit que $(\zeta e - f(x))^{-1} = \varphi_\zeta(x)$ et avec (4.9), on obtient que

$$g(f(x)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} g(\zeta) \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} \varphi_\zeta(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}\, d\lambda \right) d\zeta.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on en déduit alors que

$$g(f(x)) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_0} \left(\int_{\Gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - f(\lambda)}\, d\zeta \right) (\lambda e - x)^{-1}\, d\lambda.$$

Or comme $n(\Gamma_1, f(\lambda)) = 1$, $\forall \lambda \in \Gamma_0$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - f(\lambda)}\, d\zeta = g(f(\lambda)),$$

d'où

$$g(f(x)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} g(f(\lambda))(\lambda e - x)^{-1}\, d\lambda = (g \circ f)(x).$$

$\square$

4.3 Exercices

Exercice 4.3.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire et $x \in \mathcal{A}$. On suppose qu'il existe un polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$ tel que $p(x) = 0_{\mathcal{A}}$. Montrer que $\sigma(x)$ est contenu dans l'ensemble des zéros de p.*

Application : que peut-on dire du spectre d'un élément idempotent (i.e. $x^2 = x$) ?

Exercice 4.3.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire. On suppose qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $\sigma(a)$ est non connexe. Montrer qu'il existe un élément idempotent dans $\mathcal{A}$ non-trivial (i.e. un élément $p \in \mathcal{A}$ tel que $p^2 = p$, $p \neq 0$, $p \neq e$).*

Exercice 4.3.3 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in \mathcal{A}$. On suppose que le spectre de x ne sépare pas 0 de ∞. Montrer que*

a) *x admet des racines de tous les ordres dans $\mathcal{A}$.*

b) *x admet un logarithme dans $\mathcal{A}$.*

Exercice 4.3.4 *Soient X un espace de Banach et $A, B, T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que*

$$BT = TA.$$

Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\sigma(A) \cup \sigma(B))$, alors

$$f(B)T = Tf(A).$$

Supposons en plus que $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. En déduire alors que $T = 0$.

Exercice 4.3.5 *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\sigma(T)$ et $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega)$. Montrer que*

$$f(T)^* = \widetilde{f}(T^*),$$

où $\widetilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$.

Exercice 4.3.6 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et commutative, I un idéal de $\mathcal{A}$, $a \in I$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ qui contient $\sigma(a)$ et $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\mathcal{U})$. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que $f(a) \in I$.*

Chapitre 5

Introduction aux C^*-algèbres et calcul fonctionnel continu pour les normaux

5.1 Introduction aux C^*-algèbres

Toutes les algèbres de Banach que nous allons étudier dans ce chapitre seront unitaires. Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et a un élément de $\mathcal{A}$ on note par $\sigma(a)$ le spectre de a et $r(a)$ son rayon spectral.

5.1.1 Involution

Définition 5.1.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. On appelle involution une application $I : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ vérifiant :*

1. *$I^2(a) = a$, pour tout a dans $\mathcal{A}$;*
2. *$I(ab) = I(b)I(a)$, pour tous a et b dans $\mathcal{A}$;*
3. *$I(\alpha a + b) = \overline{\alpha} I(a) + I(b)$, pour tout α dans $\mathbb{C}$ et tous a et b dans $\mathcal{A}$.*

On notera dans la suite, $I(a) = a^*$.

Remarque 5.1.2 *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre unitaire avec une involution, alors*

$$a = (a^*)^* = (a^*e)^* = e^*(a^*)^* = e^*a.$$

De même, $a = ae^*$. D'où, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a

$$a = e^*a = ae^*,$$

ce qui par unicité de l'élément neutre implique que $e^* = e$.

Définition 5.1.3 *Une C^*-algèbre $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach unitaire qui possède une involution telle que*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2,$$

pour tout a dans $\mathcal{A}$.

Exemple 5.1.4 *Donnons trois exemples de C^*-algèbres :*

1. *L'exemple le plus simple est l'algèbre $\mathbb{C}$, où l'involution est la conjugaison complexe !*
2. *Le deuxième exemple que l'on peut rencontrer est $\mathcal{L}(H)$, muni de l'involution qui à $T \in \mathcal{L}(H)$ associe son adjoint $T^* \in \mathcal{L}(H)$. On a vu alors que*

   $$\|T^*T\| = \|T\|^2,$$

   pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$.
3. *Un autre exemple important est $C(X)$, l'ensemble des fonctions continues sur un espace compact X et à valeurs complexes, où l'involution est définie par $f^*(x) = \overline{f(x)}$, pour $f \in C(X)$ et $x \in X$.*

Proposition 5.1.5 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre. Si a appartient à $\mathcal{A}$, alors :*

(a) $\|a^*\| = \|a\|$

(b) $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

Preuve : (a) : soit $a \in \mathcal{A}$. En utilisant la définition 5.1.3, on a :

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\| \, \|a\|,$$

et donc $\|a^*\| \leq \|a\|$. Comme $a^{**} = a$ en remplaçant a^* par a dans l'égalité qui précède, on obtient l'inégalité inverse ce qui nous donne le (a).

(b) : soit $a \in \mathcal{A}$. En utilisant la définition 5.1.3 et le (a), on a

$$\|aa^*\| = \|(a^*)^* a\| = \|a^*\|^2 = \|a\|^2.$$

□

Définition 5.1.6 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux C^*-algèbres unitaires. Une application φ : $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est appele $*$-morphisme d'algèbre si φ est un morphisme d'algèbres vérifiant :*

$$\varphi(a^*) = \varphi(a)^*, \ \ \forall a \in \mathcal{A}.$$

Un $*$-isomorphisme entre C^*-algèbres est un $*$-morphisme bijectif. On vérifie facilement que si φ est un $*$-isomorphisme alors φ^{-1} est également un $*$-morphisme.

Définition 5.1.7 *Soient $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre et a un élément de $\mathcal{A}$, alors :*

1. *a est autoadjoint (ou hermitien) si $a^* = a$;*
2. *a est normal si $a^*a = aa^*$;*
3. *a est unitaire si $a^*a = aa^* = e$.*

On note $Re(\mathcal{A})$ l'ensemble des éléments autoadjoints de $\mathcal{A}$.

Proposition 5.1.8 *Soient $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre et a un élément de $\mathcal{A}$.*

(a) *Si a est inversible, alors a^* est inversible d'inverse $(a^{-1})^*$.*

(b) *Il existe un unique couple (x, y) dans $Re(\mathcal{A})$ tel que $a = x + iy$.*

(c) *Si a est unitaire, alors $\|a\| = 1$.*

(d) *Si a est autoadjoint, alors $\|a\| = r(a)$.*

(e) *Si $\mathcal{B}$ est une C^*-algèbre et $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un $*$-morphisme tel que $\varphi(e) = e$, alors :*

$$\|\varphi(a)\| \leq \|a\|, \ \ \forall a \in \mathcal{A}.$$

En particulier φ est une application linéaire continue de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, de norme inférieure ou égale à 1.

Preuve : (a) : supposons a inversible, on a :

$$(aa^{-1})^* = (a^{-1})^* a^* = e = a^*(a^{-1})^*.$$

Ainsi $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

(b) : montrons dans un premier temps que : $i(a^* - a)$ et $a + a^*$ sont autoadjoints. On a $(i(a^* - a))^* = -1(a^{**} - a^*) = i(a^* - a)$ et $(a + a^*) = a^* + a^{**} = a + a^*$, ainsi $i(a^* - a)$ et $a + a^*$ sont autoadjoints. Posons maintenant $x = a + a^*$ et $y = i(a^* - a)$ on a alors $a = x + iy$, d'où l'existence.

Montrons maintenant l'unicité. Soit x_1, y_1, x_2 et y_2 hermitiens tels que :

$$a = x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2.$$

On en déduit que

$$x_1 - x_2 = i(y_2 - y_1) \tag{5.1}$$

De plus, $a^* = x_1 - iy_1 = x_2 - iy_2$, d'où

$$x_1 - x_2 = -i(y_2 - y_1). \tag{5.2}$$

En additionnant (5.1) et (5.2), on obtient finalement que $2(x_1 - x_2) = 0$, soit $x_1 = x_2$. On en déduit alors que $y_1 = y_2$, d'où l'uncité de la décomposition.

(b) : supposons a unitaire. Alors

$$\|a\|^2 = \|aa^*\| = \|e\| = 1.$$

(d) : Si a est autoadjoint, on a

$$\left\|a^2\right\| = \|aa^*\| = \|a\|^2.$$

Par récurrence, on obtient

$$\left\|a^{2^n}\right\| = \|a\|^{2^n},$$

pour tout $n \geq 0$. Ainsi $r(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \|a^{2n}\|^{\frac{1}{2n}} = \|a\|$.

(e) : Montrons que $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$, $\forall a \in \mathcal{A}$. Soit $\lambda \notin \sigma(a)$, montrons que $\lambda \notin \sigma(\varphi(a))$. On sait qu'il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que

$$e = (a - \lambda e)x = x(a - \lambda e).$$

D'où, en utilisant que φ est un morphisme d'algèbre telle que $\varphi(e) = e$, on obtient

$$e = (\varphi(a) - \lambda e)\varphi(x) = \varphi(x)(\varphi(a) - \lambda e).$$

Ainsi $\varphi(a) - \lambda e$ est inversible et donc $\lambda \notin \sigma(\varphi(a))$. Remarquons maintenant que aa^* et $\varphi(aa^*)$ sont autoadjoints. Donc, en utilisant (d), on a

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)\varphi(a)^*\| = \|\varphi(aa^*)\| = r(\varphi(aa^*)) \leq r(aa^*) = \|aa^*\| = \|a\|^2,$$

ce qui prouve que $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$.

□

5.1.2 Caractères dans une C^*-algèbre

Proposition 5.1.9 *Soient $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre et $h \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})$. Alors :*

(a) $h(a) \in \mathbb{R}$, *pour tout* $a \in Re(\mathcal{A})$ *;*

(b) $h(a^*) = \overline{h(a)}$, *pour tout* $a \in \mathcal{A}$ *;*

(c) $h(aa^*) \geq 0$, *pour tout* $a \in \mathcal{A}$ *;*

(d) $|h(u)| = 1$ *pour tout élément* $u \in \mathcal{A}$ *unitaire.*

Preuve : (a) : soit $a \in Re(\mathcal{A})$ et écrivons $h(a) = \alpha + i\beta$ avec α et β réels. Nous devons montrer que $\beta = 0$. Soit t un réel. Alors on a :

$$\begin{aligned} |h(a + ite)|^2 &\leq \|a + it\|^2 \\ &\leq \|(a + it)(a + it)^*\| \\ &\leq \|(a + it)(a - it)\| \\ &\leq \left\|a^2 + t^2\right\| \\ &\leq \|a\|^2 + t^2. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}|h(a+ite)|^2 &= |\alpha+i(\beta+t)|^2\\ &= \alpha^2+\beta^2+t^2+2\beta t.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|a\|^2+t^2 \geq \alpha^2+\beta^2+t^2+2\beta t,$$

et donc

$$\|a\|^2 \geq \alpha^2+\beta^2+2\beta t \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

D'où $\beta = 0$ et $h(a) \in \mathbb{R}$.

(b) : soit $a \in \mathcal{A}$, $\exists x, y \in Re(\mathcal{A})$ tels que $a = x+iy$ d'après la proposition 5.1.8. On a en particulier $a^* = x - iy$.

Ainsi

$$\begin{aligned}h(a^*) &= h(x) - ih(y)\\ &= \overline{h(x)+ih(y)} \quad \text{car } h(x) \text{ et } h(y) \text{ sont réels d'après (a)}\\ &= \overline{h(a)}.\end{aligned}$$

Et donc $h(a^*) = \overline{h(a)}$.

(c) : soit $a \in \mathcal{A}$.

$$h(aa^*) = h(a^*)h(a) = \overline{h(a)}h(a) = |h(a)|^2 \geq 0.$$

Ainsi $h(aa^*) \geq 0$.

(d) : soit $u \in \mathcal{A}$ unitaire.

$$|h(u)|^2 = h(u^*u) = h(e) = 1.$$

Ainsi $|h(u)| = 1$.

$\square$

Corollaire 5.1.10 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre commutative et $a \in Re(\mathcal{A})$. Alors $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Preuve : Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach commutative, on peut appliquer le théorème 3.5.1 qui dit que

$$\sigma(a) = \{h(a) : h \in \mathcal{C}ar(\mathcal{A})\}.$$

La proposition 5.1.9 (a) permet alors de conclure.

□

5.2 Le théorème de Gelfand–Naimark

Théorème 5.2.1 (Gerfand–Naimark) *Soient $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre commutative et Δ son espace idéal maximal. Alors la transformation de Gelfand $\mathcal{G}$ est un $*$-isomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur $C(\Delta)$.*

Preuve : Le théorème 3.7.4 implique déjà que $\mathcal{G}$ est un morphisme d'algèbre de $\mathcal{A}$ dans $C(\Delta)$. Soient $a \in \mathcal{A}$ et $h \in \Delta$. En utilisant la proposition 5.1.9, on a

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)}.$$

D'où $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$. Ainsi $\mathcal{G}$ est un $*$-morphisme de $\mathcal{A}$ dans $C(\Delta)$. Montrons maintenant que $\mathcal{G}$ est une isométrie. Supposons d'abord $a \in Re(\mathcal{A})$. D'après la proposition 5.1.8 (d) et le théorème 3.7.4 (c), on a

$$\|\mathcal{G}(a)\|_\infty = r(a) = \|a\|.$$

Soit maintenant $a \in \mathcal{A}$ quelconque. Comme $aa^* \in Re(\mathcal{A})$, on a

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &= \|aa^*\| = \|\mathcal{G}(aa^*)\|_\infty = \|\mathcal{G}(a)\mathcal{G}(a^*)\|_\infty \\ &= \||\mathcal{G}(a)|^2\|_\infty = \sup_{h\in\Delta} |h(a)|^2 = \left(\sup_{h\in\Delta} |h(a)|\right)^2 = \|\mathcal{G}(a)\|_\infty^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{G}$ est une isométrie et donc $\mathcal{G}$ est injective et à image fermée. Il reste à montrer que $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{G}(\mathcal{A})$ est dense dans $C(\Delta)$. Pour cela nous allons utiliser le théorème de Stone–Weierstrass. Nous devons donc montrer que la sous-algèbre $\hat{\mathcal{A}}$ vérifie les 3 points suivants :

(1) $\hat{\mathcal{A}}$ sépare les points ;

(2) $\hat{\mathcal{A}}$ contient les constantes ;

(3) $\hat{\mathcal{A}}$ est invariant par passage au conjugué.

Soient $g, h \in \Delta$, $g \neq h$. Alors il existe $a \in \mathcal{A}$ tels que $h(a) \neq g(a)$, ce qui se traduit par $\hat{a}(h) \neq \hat{a}(g)$ et le point (1) est vérifié. On a $\hat{e}(h) = h(e) = 1$, pour tout $h \in \Delta$. Ainsi $\hat{\mathcal{A}}$ contient la fonction identiquement égale à 1 et donc les constantes. Le point (2) est donc vérifié. Le point (3) découle du fait que $\mathcal{G}$ est un $*$-morphisme et donc si $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}$, alors $\overline{\hat{a}} = \widehat{a^*} \in \hat{\mathcal{A}}$. Nous pouvons donc utiliser le théorème de Stone–Weierstrass et conclure que $\hat{\mathcal{A}}$ est dense dans $C(\Delta)$. Comme d'autre part, $\hat{\mathcal{A}}$ est fermée, on obtient que $\hat{\mathcal{A}} = C(\Delta)$, ce qui termine la démonstration.

□

5.3 Le calcul fonctionnel continu pour les normaux

Lemme 5.3.1 *Soit X un espace topologique compact et soit $f \in C(X)$. Alors $\sigma(f) = f(X)$.*

Preuve : D'après le théorème 3.5.1, on a $\lambda \in \sigma(f)$ si et seulement s'il existe $h \in Car(C(X))$ tel que $h(f) = \lambda$. Or d'après le corollaire 3.6.3, les caractères de $C(X)$ sont les évaluations aux points de X. Ainsi $\lambda \in \sigma(f)$ si et seulement s'il existe $x \in X$ tel que $\lambda = E_x(f) = f(x)$. Autrement dit $\lambda \in f(X)$.

□

Définition 5.3.2 *Soient $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre et a un élément de $\mathcal{A}$. On note $C^*(a)$ l'algèbre unitaire engendrée par a et a^*. Autrement dit*

$$C^*(a) = \overline{\{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}[X, Y]\}}.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est engendrée par a si $\mathcal{A} = C^*(a)$.

Théorème 5.3.3 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre commutative, engendrée par un élément a. Alors il existe un unique $*$-isomorphisme isométrique Φ de $C(\sigma(a))$ sur $\mathcal{A}$ tel que*

$$\Phi(1) = e \quad et \quad \Phi(z) = a.$$

On note $\Phi(f) = f(a)$, pour $f \in C(\sigma(a))$. On a alors

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)),$$

pour toute fonction $f \in C(\sigma(a))$.

Preuve : D'après le théorème 3.7.4, l'application $\hat{a} : \Delta \longrightarrow \sigma(a)$ est continue et surjective. Montrons qu'elle est aussi injective. Soient $h_1, h_2 \in \Delta$ tel que $\hat{a}(h_1) = \hat{a}(h_2)$. On a donc $h_1(a) = h_2(a)$ et d'après la proposition 5.1.9, on a aussi $h_1(a^*) = h_2(a^*)$. Ainsi $h_1(p(a, a^*)) = h_2(p(a, a^*))$, pour tout polynome $p \in \mathbb{C}[X, Y]$. En utilisant la continuité de h_1, h_2 et la densité de $\{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}[X, Y]\}$ dans $\mathcal{A}$, on obtient que $h_1(x) = h_2(x)$, pour tout $x \in \mathcal{A}$. Ainsi $h_1 = h_2$ et $\hat{a}$ est injective. Comme Δ et $\sigma(a)$ sont compacts, on en déduit finalement que $\hat{a}$ est un homéomorphisme de Δ sur $\sigma(a)$. Posons alors pour $f \in C(\sigma(a))$,

$$\Phi(f) = \mathcal{G}^{-1}(f \circ \hat{a}).$$

Remarquons que $f \circ \hat{a} \in C(\Delta)$ et d'après le théorème de Gelfand–Naimark, $\mathcal{G}^{-1}(f \circ \hat{a}) \in \mathcal{A}$. Ainsi Φ est une application de $C(\sigma(a))$ dans $\mathcal{A}$.

Fait 1 : Φ est un $*$-morphisme d'algèbre.

Soient $f, h \in C(\sigma(a))$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda f + h) &= \mathcal{G}^{-1}(\lambda f \circ \hat{a} + h \circ \hat{a}) \\ &= \lambda \mathcal{G}^{-1}(f \circ \hat{a}) + \mathcal{G}^{-1}(h \circ \hat{a}) \\ &= \lambda \Phi(g) + \Phi(h), \end{aligned}$$

$$\Phi(fh) = \mathcal{G}^{-1}((f \circ \hat{a})(h \circ \hat{a})) = \mathcal{G}^{-1}(f \circ \hat{a})\mathcal{G}^{-1}(h \circ \hat{a}) = \Phi(f)\Phi(h).$$

et

$$\Phi(\bar{f}) = \mathcal{G}^{-1}(\bar{f} \circ \hat{a}) = \mathcal{G}^{-1}(\overline{f \circ \hat{a}}) = (\mathcal{G}^{-1}(f \circ \hat{a}))^* = \Phi(f)^*.$$

Fait 2 : Φ est isométrique.

Pour $f \in C(\sigma(a))$, on a

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)\| &= \|\mathcal{G}^{-1}(f \circ \hat{a})\| = \|f \circ \hat{a}\|_\infty \\ &= \sup_{h \in \Delta} |f(\hat{a}(h))| = \sup_{z \in \sigma(a)} |f(z)| \\ &= \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Fait 3 : Φ est surjective.

Soit $x \in \mathcal{A}$ et posons $f = \hat{x} \circ \hat{a}^{-1}$. Alors $f \in C(\sigma(a))$ et on a

$$\Phi(f) = \mathcal{G}^{-1}(\hat{x} \circ \hat{a}^{-1} \circ \hat{a}) = \mathcal{G}^{-1}(\hat{x}) = x,$$

ce qui prouve la surjectivité de Φ. On a donc prouvé que Φ est un $*$-isomorphisme isométrique de $C(\sigma(a))$ sur $\mathcal{A}$.

Fait 4 : $\Phi(1) = e$ et $\Phi(z) = a$.

Remarquons que pour tout $h \in \Delta$, on a

$$\mathcal{G}(e)(h) = h(e) = 1,$$

donc $\mathcal{G}(e) = 1$. D'où

$$\Phi(1) = \mathcal{G}^{-1}(1 \circ \hat{a}) = \mathcal{G}^{-1}(1) = e.$$

De plus,

$$\Phi(z) = \mathcal{G}^{-1}(z \circ \hat{a}) = \mathcal{G}^{-1}(\hat{a}) = a.$$

Montrons maintenant l'unicité de Φ. Autrement dit, soit $\tilde{\Phi} : C(\sigma(a)) \longrightarrow \mathcal{A}$ un $*$-morphisme d'algèbre tel que $\Phi(1) = e$ et $\Phi(z) = a$. Alors on a

$$\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}(a) = \tilde{\Phi}(z) = a,$$

et

$$\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}(e) = \tilde{\Phi}(1) = e.$$

En utilisant le fait que $\tilde{\Phi}$ et Φ sont des $*$-morphisme, on obtient que

$$\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}(a^*) = \tilde{\Phi}(\overline{\Phi^{-1}(a)}) = (\tilde{\Phi}(\Phi^{-1}(a)))^* = a^*.$$

Par linéarité, on obtient que

$$\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}(p(a, a^*)) = p(a, a^*),$$

pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X, Y]$. Ainsi comme $C^*(a) = \mathcal{A}$, on en déduit que $\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}(x) = x$, pour tout $x \in \mathcal{A}$. Par conséquent, on obtient que $\tilde{\Phi} = \Phi$.

Il reste à montrer l'égalité spectrale, c'est-à-dire que $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$. Pour cela, remarquons que comme $\mathcal{G}$ est un isomorphisme, on a

$$\sigma(f(a)) = \sigma(f \circ \hat{a}) = f \circ \hat{a}(\Delta) = f(\sigma(a)),$$

en utilisant le lemme 5.3.1 et le théorème 3.7.4.

□

Nous voulons maintenant éviter l'hypothèse que la C^*-algèbre $\mathcal{A}$ est engendré par un élément a. Ceci peut être fait, en supposant que a est normal. Pour cela, nous aurons besoin de deux lemmes sur le spectre relatif d'un élément.

Lemme 5.3.4 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux alèbres de Banach telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $a \in \mathcal{A}$. Alors :*

(a) $\sigma_{\mathcal{B}}(a) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.

(b) $\partial\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \partial\sigma_{\mathcal{B}}(a)$.

Preuve : (a) est évident et laissé en exercice ! Pour prouver (b), soit $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{A}}(a)$. Comme l'intérieur de $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$ est contenu dans l'intérieur de $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$, il suffit de montrer que $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(a)$. Supposons par l'absurde que $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{B}}(a)$. Alors il existe $x \in \mathcal{B}$ tel que

$$x(a - \lambda e) = (a - \lambda e)x = e. \tag{5.3}$$

Comme $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{A}}(a)$, il existe une suite $\lambda_n \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ telle que $\lambda_n \to \lambda$, $n \to +\infty$. Considérons alors $x_n = (a - \lambda_n e)^{-1} \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on a bien sûr $x_n \in \mathcal{B}$. De plus, comme $\lambda_n \to \lambda$, on obtient que $a - \lambda_n e \to a - \lambda e$. En utilisant alors que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Inv}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathrm{Inv}(\mathcal{B}) \\ y & \longmapsto & y^{-1} \end{array}$$

est continue, on obtient que $x_n = (a - \lambda_n e) \to (a - \lambda e)^{-1} = x$. Mais $x_n \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est fermée, donc $x \in \mathcal{A}$. Ainsi les relations (5.3) impliquent que $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{A}}(a)$, ce qui contredit le fait que $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{A}}(a)$.

$\square$

Lemme 5.3.5 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux C^*-alèbres telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $a \in \mathcal{A}$. Alors $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(a)$.*

Preuve : Supposons tout d'abord que a est autoadjoint et soit $\mathcal{C} = C^*(a)$ la C^*-algèbre engendrée par a et e. Comme $\mathcal{C}$ est commutative, on peut appliquer le corollaire 5.1.10 qui implique que $\sigma_{\mathcal{C}}(a) \subset \mathbb{R}$. En particulier, $\partial\sigma_{\mathcal{C}}(a) = \sigma_{\mathcal{C}}(a)$ (car $\sigma_{\mathcal{C}}(a)$ est un fermé d'intérieur vide dans $\mathbb{C}$). Le lemme 5.3.4 implique alors que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \sigma_{\mathcal{C}}(a) = \partial\sigma_{\mathcal{C}}(a) \subset \partial\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a).$$

D'o'u $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{C}}(a)$. De même, on montre que $\sigma_{\mathcal{B}}(a) = \sigma_{\mathcal{C}}(a)$. Ainsi $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(a)$.

Considérons maintenant un élément a quelconque de $\mathcal{A}$. On a d'après le lemme 5.3.4, $\sigma_{\mathcal{B}}(a) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a)$. Il reste donc à montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $a - \lambda e \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ alors $a - \lambda e \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Soit $x \in \mathcal{B}$ tel que $(a - \lambda e)x = x(a - \lambda e) = e$. Alors

$$(a - \lambda e)^*(a - \lambda e)xx^* = xx^*(a - \lambda e)^*(a - \lambda e) = e.$$

Donc l'élément $b := (a - \lambda e)^*(a - \lambda e)$ est inversible dans $\mathcal{B}$ et on vérifie facilement qu'il est autoadjoint. La première partie de la preuve implique alors que b est inversible dans $\mathcal{A}$. Comme les inverses sont uniques, on a $xx^* = b^{-1} \in \mathcal{A}$. D'où

$$x = x(x^*(a - \lambda e)^*) = b^{-1}(a - \lambda e)^* \in \mathcal{A}.$$

Ainsi $a - \lambda e \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, ce qui conclut la preuve.

□

Théorème 5.3.6 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre et a un élément normal de $\mathcal{A}$. Alors il existe un unique $*$-isomorphisme isométrique Φ de $C(\sigma(a))$ sur $C(a^*)$ tel que*

$$\Phi(1) = e \quad et \quad \Phi(z) = a.$$

On note $\Phi(f) = f(a)$, pour $f \in C(\sigma(a))$. On a alors

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)),$$

pour toute fonction $f \in C(\sigma(a))$.

Preuve : Le lemme 5.3.5 implique que $\sigma_{C^*(a)}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$, pour tout $x \in C^*(a)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 5.3.3 à l'algèbre $C^*(a)$ qui est commutative car a est normal.

□

Soit N un opérateur normal sur un espace de Hilbert H (complexe). On note $C^*(N)$ la C^*-algèbre (commutative) engendrée par N et Id. Le théorème 5.3.6 affirme qu'il existe un $*$-isomorphisme isométrique φ de $C(\sigma(N))$ sur $C^*(N)$ tel que $\varphi(1) = Id$ et $\varphi(z) = N$. Remarquons de plus que si f est une fonction continue positive, alors $\varphi(f)$ est un opérateur positif. En effet, comme f est positive, on peut considérer la fonction $g := \sqrt{f}$ qui est une fonction continue sur $\sigma(N)$ et à valeurs réelles. Comme φ est un $*$-morphisme, on a

$$\varphi(f) = \varphi(g^2) = \varphi(g)^2 = \varphi(g)^*\varphi(g),$$

car $\varphi(g) = \varphi(\bar{g}) = \varphi(g)^*$. Ainsi

$$\langle \varphi(f)h, h \rangle = \|\varphi(g)h\|^2 \geq 0,$$

pour tout $h \in H$ et $\varphi(f)$ est un opérateur positif.

Par analogie avec le théorème de représentation de Riesz, on peut espérer qu'il existe une mesure E (à valeurs opérateurs) telle que

$$\varphi(f) = \int f\, dE.$$

Nous allons dans la suite prouver ceci. Pour cela, nous allons introduire la bonne notion de mesures, puis définir l'intégrale d'une fonction à valeurs scalaires par rapport à ces mesures.

5.4 Mesures spectrales

5.4.1 Définitions et exemples

Définition 5.4.1 *Soit X un ensemble, $\mathfrak{M}$ une tribu sur X et H un espace de Hilbert. Une mesure spectrale sur $(X, \mathfrak{M}, H)$ est une application $E : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) *$E(\Delta)$ est une projection orthogonale, pour tout $\Delta \in \mathfrak{M}$.*

(b) *$E(\emptyset) = 0$ et $E(X) = Id$.*

(c) *pour tous $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{M}$, on a*

$$E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2).$$

(d) *Si $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'ensembles mesurables, deux à deux disjoints, alors on a*

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(\Delta_n).$$

Remarque 5.4.2 *D'après* (b) *et* (c)*, si $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{M}$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, alors*

$$E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\emptyset) = 0.$$

Autrement dit, $E(\Delta_1)$ et $E(\Delta_2)$ ont des images orthogonales. Donc si $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'ensembles mesurables, deux à deux disjoints, alors les projections *orthogonales* $E(\Delta_n)$ *ont des images deux à deux orthogonales. On peut alors montrer (exercice !) que, pour tout* $h \in H$*, la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)h$$

converge dans H *vers* Ph*, où* P *est la projection orthogonale de* H *sur l'enveloppe linéaire fermée engendrée par les* $E(\Delta_n)h$, $n \geq 1$*. En revanche, attention la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$$

ne converge pas dans $\mathcal{L}(H)$ *(pourquoi ?).*

Exemple 5.4.3 *Soient* X *un espace topologique compact,* $\mathfrak{M}$ *la tribu des boréliens sur* X*,* μ *une mesure sur* $\mathfrak{M}$ *et* $H = L^2(\mu)$*. Pour* $\Delta \in \mathfrak{M}$*, on pose*

$$E(\Delta)f = \chi_\Delta f, \qquad f \in L^2(\mu).$$

On vérifie que E *est une mesure spectrale sur* $(X, \mathfrak{M}, H)$*.*

Exemple 5.4.4 *Soient* X *un ensemble,* $\mathfrak{M}$ *la tribu formée par tous les sous-ensembles de* X *et* H *un espace de Hilbert séparable. Fixons une suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *dans* X *et* $(e_n)_{n\geq 1}$ *une base orthonormale de* H*. Enfin pour* $\Delta \in \mathfrak{M}$*, définissons* $E(\Delta)$ *comme la projection orthogonale sur l'enveloppe linéaire fermée engendrée par* $\{e_n : x_n \in \Delta\}$*. Alors on vérifie que* E *est une mesure spectrale sur* $(X, \mathfrak{M}, H)$*.*

Lemme 5.4.5 *Soient* X *un ensemble,* $\mathfrak{M}$ *une tribu sur* X*,* H *un espace de Hilbert et* E *une mesure spectrale sur* $(X, \mathfrak{M}, H)$*. Pour* $g, h \in H$ *et* $\Delta \in \mathfrak{M}$*, on pose*

$$E_{g,h}(\Delta) = \langle E(\Delta)g, h\rangle.$$

Alors $E_{g,h}$ *est une mesure complexe sur* $\mathfrak{M}$ *dont la variation totale vérifie*

$$\|E_{g,h}\| = |E_{g,h}(X)| \leq \|g\|\|h\|.$$

Rappelons (voir [10]) qu'une mesure complexe sur un espace mesurable $(X, \mathfrak{M})$ est une application μ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i),$$

pour tout ensemble mesurable $E \in \mathfrak{M}$ et toute partition $\{E_i : i \geq 1\}$ de E. Si on pose

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{+\infty} |\mu(E_i)|,$$

où le sup est pris sur l'ensemble des partitions $\{E_i : i \geq 1\}$ de E, on peut montrer que $|\mu|$ est une mesure positive sur $\mathfrak{M}$, qu'on appelle *mesure de variation totale* de μ. De plus, on a $|\mu|(X) < +\infty$. Autrement dit, $|\mu|$ est une mesure positive et finie sur $\mathfrak{M}$. On pose alors

$$\|\mu\| = |\mu|(X),$$

et on appelle cette quantité la *variation totale* de la mesure μ.

En utilisant le théorème de Radon–Nykodym, on montre qu'il existe une fonction mesurable h telle que $|h(x)| = 1$, pour tout $x \in X$, et $d\mu = h\, d|\mu|$. Pour $f \in L^1(|\mu|)$, l'intégrale de f par rapport à la mesure complexe μ est définie par

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f h\, d|\mu|.$$

Preuve du lemme 5.4.5 : posons (pour simplifier) $\mu = E_{g,h}$. Soit

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Delta_n, \quad \Delta_n \in \mathfrak{M}, \text{ et } \Delta_n \cap \Delta_m = \emptyset,\ n \neq m.$$

En utilisant la propriété (d) (dans la définition 5.4.1) et la continuité du produit scalaire, on a

$$\mu(\Delta) = \langle E\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Delta_n\right) g, h\rangle = \langle \sum_{n=1}^{+\infty} E(\Delta_n) g, h\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle E(\Delta_n) g, h\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\Delta_n),$$

ce qui prouve que μ est une mesure complexe sur $\mathfrak{M}$.

Montrons maintenant que $|\mu|(X) \leq \|g\|\|h\|$. Considérons une partition quelconque de X formée d'ensembles mesurables , disons $(\Delta_n)_{n\geq 1}$, et soit $\alpha_n \in \mathbb{C}$ tel que

$$\alpha_n \langle E(\Delta_n)g, h\rangle = |\langle E(\Delta_n)g, h\rangle|.$$

Remarquons que $|\alpha_n| = 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(\Delta_n)| &= \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle E(\Delta_n)g, h\rangle| \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \langle E(\Delta_n)g, h\rangle \\
&= \langle \sum_{n=1}^{+\infty} E(\Delta_n)\alpha_n g, h\rangle \\
&\leq \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} E(\Delta_n)\alpha_n g \right\| \|h\|.
\end{aligned}$$

Remarquons maitenant que $\{E(\Delta_n)\alpha_n g : n \geq 1\}$ est un système orthogonal et donc d'après la formule de Parseval, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} E(\Delta_n)\alpha_n g \right\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \|E(\Delta_n)\alpha_n g\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \|E(\Delta_n)g\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} E(\Delta_n)g \right\|^2 \\
&= \left\| E\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Delta_n \right) g \right\|^2 \\
&= \|E(X)g\|^2 = \|g\|^2.
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(\Delta_n)| \leq \|g\|\|h\|,$$

ce qui prouve que $\|\mu\| \leq \|g\|\|h\|$.

□

5.4.2 Intégrale d'une fonction scalaire par rapport à une mesure spectrale

Proposition 5.4.6 *Soit E une mesure spectrale sur $(X, \mathfrak{M}, H)$ et $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable et bornée sur X. Alors il existe un unique opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partition $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ de X, $\Delta_i \in \mathfrak{M}$, telle que*

$$\sup\{|\varphi(x) - \varphi(x')| : x, x' \in \Delta_k\} < \varepsilon, \text{ pour } 1 \leq k \leq n,$$

on a

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) E(\Delta_k) \right\| < \varepsilon,$$

pour tout $x_k \in \Delta_k$. De plus, on a $\|A\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

Remarque 5.4.7 *Etant donnée $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable et bornée sur un ensemble mesurable $(X, \mathfrak{M})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ de X, $\Delta_i \in \mathfrak{M}$, telle que*

$$\sup\{|\varphi(x) - \varphi(x')| : x, x' \in \Delta_k\} < \varepsilon, \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

En effet, comme φ est bornée, il existe une constante M telle que $|\varphi(x)| \leq M$, pour tout $x \in X$. On choisit alors un entier N tel que $N\varepsilon \geq \sqrt{2}M$ et on pose

$$D_{k,j} := \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{k\varepsilon}{\sqrt{2}} \leq \Re\mathrm{e}(z) < \frac{(k+1)\varepsilon}{\sqrt{2}},\ \frac{j\varepsilon}{\sqrt{2}} \leq \Im\mathrm{m}(z) < \frac{(j+1)\varepsilon}{\sqrt{2}} \right\},$$

pour $-N-1 \leq k, j \leq N$. Il est clair que les $D_{k,j}$ sont des boréliens de $\mathbb{C}$, deux à deux disjoints et qui recouvrent le disque de centre 0 et de rayon M. On définit alors

$$\Delta_{k,j} = \varphi^{-1}(D_{k,j}), \quad -N-1 \leq k, j \leq N.$$

Comme φ est mesurable, on a $\Delta_{k,j} \in \mathfrak{M}$. De plus,

$$\Delta_{k,j} \cap \Delta_{k',j'} = \emptyset, \text{ si } (k,j) \neq (k',j'),$$

et

$$X = \bigcup_{-N-1 \leq k,j \leq N} \Delta_{k,j}.$$

Enfin, si $x, x' \in \Delta_{k,j}$, alors il est facile de vérifier que

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \varepsilon.$$

Ainsi les ensembles $\{\Delta_{k,j} : -N-1 \leq k, j \leq N\}$ donnent la partition de X voulue !

Preuve (Proposition 5.4.6) : Définissons B une application de $H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$B(g,h) = \int_X \varphi \, dE_{g,h}, \qquad (g, h \in H).$$

On vérifie facilement que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $g, g_1, g_2, h, h_1, h_2 \in H$, on a

$$E_{\alpha g_1 + g_2, h} = \alpha E_{g_1,h} + E_{g_2,h} \quad \text{et} \quad E_{g, \alpha h_1 + h_2} = \bar{\alpha} E_{g,h_1} + E_{g,h_2}.$$

Ainsi B est une forme sesquilinéaire, c'est-à-dire que

$$B(\alpha g_1 + g_2, h) = \alpha B(g_1, h) + B(g_2, h) \quad \text{et} \quad B(g, \alpha h_1 + h_2) = \bar{\alpha} B(g, h_1) + B(g, h_2).$$

De plus, en utilisant le lemme 5.4.5, on obtient que

$$|B(g,h)| \leq \|\varphi\|_\infty \|E_{g,h}\| \leq \|\varphi\|_\infty \|g\| \|h\|.$$

Ainsi B est continue et le théorème de Riesz implique qu'il existe un unique opérateur linéaire continu $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$B(g,h) = \langle Ag, h \rangle,$$

avec $\|A\| = \|B\| \leq \|\varphi\|_\infty$. Maintenant considérons $\varepsilon > 0$ et une partition $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ de X, $\Delta_i \in \mathfrak{M}$, telle que

$$\sup\{|\varphi(x) - \varphi(x')| : x, x' \in \Delta_k\} < \varepsilon, \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

Si $g, h \in H$ et $x_k \in \Delta_k$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\langle (A - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) E(\Delta_k)) g, h\rangle\right| &= \left|\langle Ag, h\rangle - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)\langle E(\Delta_k) g, h\rangle\right| \\
&= \left|\int_X \varphi\, dE_{g,h} - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)\langle E(\Delta_k) g, h\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\Delta_k} \varphi\, dE_{g,h} - \varphi(x_k)\langle E(\Delta_k) g, h\rangle\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k} (\varphi - \varphi(x_k))\, dE_{g,h}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k} |\varphi - \varphi(x_k)|\, d|E_{g,h}| \\
&\leq \varepsilon \int_X d|E_{g,h}| \\
&= \varepsilon \|E_{g,h}\| \\
&\leq \varepsilon \|g\| \|h\|,
\end{aligned}$$

en utilisant le lemme 5.4.5. D'où

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) E(\Delta_k) \right\| < \varepsilon.$$

Ceci achève la preuve de l'existence de l'opérateur A. L'unicité de A est quant à elle évidente et laissée en exercice !

□

Définition 5.4.8 *Soient E une mesure spectrale sur $(X, \mathfrak{M}, H)$ et $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable et bornée sur X. On appelle intégrale de φ par rapport à la mesure spectrale E l'opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ obtenu dans la proposition 5.4.6. On le note*

$$A = \int_X \varphi\, dE.$$

Si $g, h \in H$, alors la preuve de la proposition 5.4.6 montre que

$$\langle \left(\int_X \varphi\, dE\right) g, h\rangle = \int_X \varphi\, dE_{g,h}. \tag{5.4}$$

Avant de décrire les propriétés essentielles de cette intégrale, rappelons que si X est un ensemble, $\mathfrak{M}$ une tribu sur X, alors on note par $B(X)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurables et bornées sur X. On munit $B(X)$ de la norme

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X\}.$$

Alors $B(X)$ est une C^*-algèbre de Banach unitaire et commutative, où l'involution est définie par

$$\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x)}, \qquad x \in X.$$

La proposition suivante donne alors les propriétés de $\int_X \varphi \, dE$.

Proposition 5.4.9 *Soient E une mesure spectrale sur $(X, \mathfrak{M}, H)$ et soit*

$$\begin{array}{rccl} \rho : & B(X) & \longrightarrow & \mathcal{L}(H) \\ & \varphi & \longmapsto & \int_X \varphi \, dE. \end{array}$$

Alors ρ est un $*$-morphisme de C^*-algèbre vérifiant :

(i) $\rho(1) = Id$.

(ii) *$\rho(\varphi)$ est normal, pour tout $\varphi \in B(X)$.*

(iii) *$\rho(\varphi)$ est positif, pour tout $\varphi \in B(X)$, $\varphi \geq 0$.*

Preuve : Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi, \psi \in B(X)$ et $g, h \in H$. On a

$$\begin{aligned} \langle \rho(\lambda\varphi + \psi)g, h\rangle &= \int_X (\lambda\varphi + \psi) \, dE_{g,h} \\ &= \lambda \int_X \varphi \, dE_{g,h} + \int_X \psi \, dE_{g,h} \\ &= \lambda\langle \rho(\varphi)g, h\rangle + \langle \rho(\psi)g, h\rangle \\ &= \langle (\lambda\rho(\varphi) + \rho(\psi))g, h\rangle. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $g, h \in H$, on en déduit que $\rho(\lambda\varphi + \psi) = \lambda\rho(\varphi) + \rho(\psi)$.

Montrons maitenant que $\rho(\varphi\psi) = \rho(\varphi)\rho(\psi)$. Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons une partition $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n\}$ de X telle que $\Delta_i \in \mathfrak{M}$ et

$$\sup\{|\omega(x) - \omega(x')| : x, x' \in \Delta_k\} < \varepsilon, \tag{5.5}$$

pour $\omega \in \{\varphi, \psi, \varphi\psi\}$ et $1 \leq k \leq n$. Remarquons que pour chaque fonction $\varphi, \psi, \varphi\psi$, une telle partition existe d'après la remarque 5.4.7. En effet, notons par $\{\Delta_i^{\varphi} : 1 \leq i \leq N_1\}$, $\{\Delta_j^{\psi} : 1 \leq j \leq N_2\}$ et $\{\Delta_k^{\varphi\psi} : 1 \leq k \leq N_3\}$ les partitions associées respectivement à φ, ψ et $\varphi\psi$. Alors, on vérifie aisément que

$$\Delta_{i,j,k} = \Delta_i^{\varphi} \cap \Delta_j^{\psi} \cap \Delta_k^{\varphi\psi}, \qquad 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2, 1 \leq k \leq N_3$$

réalise une partition d'ensembles mesurables de X vérifiant (5.5). Par conséquent, d'après la proposition 5.4.6, on a

$$\left\| \int_X \omega \, dE - \sum_{k=1}^{n} \omega(x_k) E(\Delta_k) \right\| \leq \varepsilon, \tag{5.6}$$

pour tout $x_k \in \Delta_k$ et $\omega \in \{\varphi, \psi, \varphi\psi\}$. En utilisant l'inégalité triangulaire et (5.6) avec $\omega = \varphi\psi$, on a donc

$$\begin{aligned} \|\rho(\varphi\psi) - \rho(\varphi)\rho(\psi)\| \;&\leq\; \varepsilon + \left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)\psi(x_k)E(\Delta_k) - \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)E(\Delta_i)\right] \left[\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j)E(\Delta_j)\right] \right\| + \\ &\quad + \left\| \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)E(\Delta_i)\right] \left[\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j)E(\Delta_j)\right] - \rho(\varphi)\rho(\psi) \right\|. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$E(\Delta_i)E(\Delta_j) = E(\Delta_i \cap \Delta_j) = \begin{cases} E(\Delta_i) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)\psi(x_k)E(\Delta_k) - \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)E(\Delta_i)\right] \left[\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j)E(\Delta_j)\right] = 0.$$

D'où, en utilisant (5.6) avec $\omega = \varphi$ et $\omega = \psi$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\rho(\varphi\psi) - \rho(\varphi)\rho(\psi)\| \;&\leq\; \varepsilon + \left\| \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)E(\Delta_i)\right] \left[\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j)E(\Delta_j)\right] - \rho(\varphi)\rho(\psi) \right\| \\ &\leq\; \varepsilon + \left\| \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)E(\Delta_i)\right] \left[\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j)E(\Delta_j) - \rho(\psi)\right] \right\| + \\ &\quad + \left\| \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)E(\Delta_i) - \rho(\varphi)\right] \rho(\psi) \right\| \\ &\leq\; \varepsilon \left(1 + \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)E(\Delta_i) \right\| + \|\rho(\psi)\| \right). \end{aligned}$$

D'après la proposition 5.4.6, on a

$$\|\rho(\psi)\| \le \|\psi\|_\infty.$$

De plus, pour $g, h \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\langle\left(\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)E(\Delta_i)\right) g, h\rangle\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\langle E(\Delta_i)g, h\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)E_{g,h}(\Delta_i)\right| \\
&\le \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)||E_{g,h}|(\Delta_i) \\
&\le \|\varphi\|_\infty \sum_{i=1}^n |E_{g,h}|(\Delta_i) \\
&= \|\varphi\|_\infty \|E_{g,h}\| \le \|\varphi\|_\infty \|g\|\|h\|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\|\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)E(\Delta_i)\right\| \le \|\varphi\|_\infty.$$

Finalement, on obtient que

$$\|\rho(\varphi\psi) - \rho(\varphi)\rho(\psi)\| \le \varepsilon(1 + \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty),$$

et comme ε est arbitraire, cela implique que $\rho(\varphi\psi) = \rho(\varphi)\rho(\psi)$. Ceci achève de prouver que ρ est un morphisme d'algèbre.

Montrons maintenant que $\rho(\bar\varphi) = \rho(\varphi)^*$. Soient $g, h \in H$; on a

$$\langle\rho(\bar\varphi)g, h\rangle = \int_X \bar\varphi \, dE_{g,h} = \overline{\int_X \varphi \, d\overline{E_{g,h}}}.$$

Or

$$\overline{E_{g,h}}(\Delta) = \overline{E_{g,h}(\Delta)} = \overline{\langle E(\Delta)g, h\rangle} = \langle h, E(\Delta)g\rangle = \langle E(\Delta)h, g\rangle,$$

car $E(\Delta)$ est une projection orthogonale, donc en particulier on a $E(\Delta)^* = E(\Delta)$. D'où

$$\overline{E_{g,h}}(\Delta) = E_{h,g}(\Delta).$$

Ainsi

$$\langle \rho(\bar{\varphi})g, h\rangle = \overline{\int_X \varphi\, dE_{h,g}} = \overline{\langle \rho(\varphi)h, g\rangle} = \langle g, \rho(\varphi)h\rangle = \langle \rho(\varphi)^* g, h\rangle.$$

Ceci étant vrai pour tout $g, h \in H$, on en déduit que $\rho(\bar{\varphi}) = \rho(\varphi)^*$. Ainsi ρ est un $*$-morphisme de C^*-algèbre.

Montrons maintenant (i) : soient $g, h \in H$. On a

$$\langle \rho(1)g, h\rangle = \int_X 1\, dE_{g,h} = E_{g,h}(X) = \langle E(X)g, h\rangle = \langle g, h\rangle.$$

D'où $\rho(1) = Id$.

Montrons (ii) : soit $\varphi \in B(X)$. On a

$$\rho(\varphi)\rho(\varphi)^* = \rho(\varphi)\rho(\bar{\varphi}) = \rho(\varphi\bar{\varphi}) = \rho(\bar{\varphi})\rho(\varphi) = \rho(\varphi)^*\rho(\varphi).$$

Montrons (iii) : soit $\varphi \in B(X)$, $\varphi \geq 0$. On peut considérer alors $\psi = \varphi^{1/2} \in B(X)$. On a alors

$$\rho(\varphi) = \rho(\psi^2) = \rho(\psi)^2 = \rho(\psi)\rho(\bar{\psi}) = \rho(\psi)\rho(\psi)^*.$$

Or, pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$, l'opérateur TT^* est positif. Ainsi $\rho(\varphi)$ est positif. Ceci achève la preuve de la proposition.

□

Nous venons de voir que la donnée d'une mesure spectrale E sur $(X, \mathfrak{M}, H)$ donne lieu à un $*$-morphisme de C^*-algèbre entre $B(X)$ et $\mathcal{L}(H)$. En particulier, si X est un espace topologique compact, on obtient un $*$-morphisme entre $C(X)$ et $\mathcal{L}(H)$. Le résultat suivant dit que la réciproque est vraie.

Théorème 5.4.10 *Soient X un espace topologique compact, $\mathfrak{M}$ la tribu des boréliens de X et $\rho : C(X) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ un $*$-morphisme de C^*-algèbre tel que $\rho(1) = Id$. Alors il existe une unique mesure spectrale E sur $(X, \mathfrak{M}, H)$ telle que*

$$\rho(u) = \int_X u\, dE,$$

pour tout $u \in C(X)$.

Preuve : Soient $g, h \in H$ fixés. L'application

$$\Theta : u \longmapsto \langle \rho(u)g, h\rangle$$

est une forme linéaire sur $C(X)$. De plus, d'après la proposition 5.1.8, on a

$$\|\rho(u)\| \leq \|u\|_\infty,$$

pour tout $u \in C(X)$. D'où

$$|\Theta(u)| \leq \|\rho(u)\|\|g\|\|h\| \leq \|u\|_\infty \|g\|\|h\|,$$

ce qui prouve que Θ est continue et $\|\Theta\| \leq \|g\|\|h\|$. Le théorème de représentation de Riesz pour les formes linéaires continues sur $C(X)$ implique qu'il existe une unique mesure complexe $\mu_{g,h}$ telle que

$$\Theta(u) = \langle \rho(u)g, h\rangle = \int_X u\, d\mu_{g,h}, \qquad u \in C(X). \tag{5.7}$$

De plus, on a $\|\mu_{g,h}\| = \|\Theta\| \leq \|g\|\|h\|$. Nous allons utiliser cette mesure $\mu_{g,h}$ pour étendre ρ à l'espace $B(X)$.

Fait 1 : l'application $(g, h) \longmapsto d\mu_{g,h}$ est une application sesquilinéaire de $H \times H$ dans l'ensemble des mesures complexes sur X.

En effet, soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $g_1, g_2, h \in H$. On a

$$\begin{aligned} \int_X u\, d\mu_{\alpha g_1 + g_2, h} &= \langle \rho(u)(\alpha g_1 + g_2), h\rangle = \alpha\langle \rho(u)g_1, h\rangle + \langle \rho(u)g_2, h\rangle \\ &= \alpha \int_X u\, d\mu_{g_1,h} + \int_X u\, d\mu_{g_2,h} = \int_X u\, \left(\alpha d\mu_{g_1,h} + d\mu_{g_2,h}\right). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $u \in C(X)$, on obtient par unicité de la mesure que

$$d\mu_{\alpha g_1 + g_2, h} = \alpha d\mu_{g_1,h} + d\mu_{g_2,h}.$$

De même, on montre que, pour tous $\alpha \in \mathbb{C}$, $g, h_1, h_2 \in H$, on a

$$d\mu_{g, \alpha h_1 + h_2} = \bar{\alpha} d\mu_{g,h_1} + d\mu_{g,h_2},$$

ce qui achève la preuve du fait 1.

Fixons maintenant $\varphi \in B(X)$ et définissons

$$[g,h] := \int_X \varphi \, d\mu_{g,h}, \qquad (g,h) \in H \times H.$$

Fait 2 : l'application $[\cdot,\cdot]$ est une forme sesquilinéaire continue sur $H \times H$.

En effet, d'après le fait 1, on vérifie facilement que $[\cdot,\cdot]$ est une forme sesquilinéaire sur $H \times H$. De plus, on a

$$|[g,h]| \leq \|\varphi\|_\infty \|d\mu_{g,h}\| \leq \|\varphi\|_\infty \|g\| \|h\|.$$

Ceci prouve que $[\cdot,\cdot]$ est continue de norme inférieure ou égale à $\|\varphi\|_\infty$, ce qui montre le fait 2.

Le théorème de Riesz implique alors qu'il existe un unique opérateur $\tilde{\rho}(\varphi) \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\langle \tilde{\rho}(\varphi) g, h \rangle = [g,h] = \int_X \varphi \, d\mu_{g,h}. \tag{5.8}$$

De plus, on a $\|\tilde{\rho}(\varphi)\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

Fait 3 : $\tilde{\rho}$ est un $*$-morphisme de $B(X)$ dans $\mathcal{L}(H)$, $\tilde{\rho}(1) = Id$ et on a $\tilde{\rho}(u) = \rho(u)$, pour tout $u \in C(X)$.

En effet, tout d'abord, l'égalité $\tilde{\rho}(u) = \rho(u)$, pour tout $u \in C(X)$, découle trivialement de (5.7) et (5.8). La linéarité de $\tilde{\rho}$ découle de la linéarité de l'intégrale et de (5.8). Montrons maintenant que $\tilde{\rho}(\varphi\psi) = \tilde{\rho}(\varphi)\tilde{\rho}(\psi)$, pour tous $\varphi, \psi \in B(X)$. Soient $u, v \in C(X)$ et $g, h \in H$; on a

$$\int_X uv \, d\mu_{g,h} = \langle \rho(uv) g, h \rangle = \langle \rho(u)\rho(v) g, h \rangle = \int_X u \, d\mu_{\rho(v)g,h}.$$

Comme cette égalité est vraie pour toute fonction $u \in C(X)$, on en déduit par unicité que les mesures complexes $v d\mu_{g,h}$ et $d\mu_{\rho(v)g,h}$ sont égales. Soit $\varphi \in B(X)$ et posons $e := \tilde{\rho}(\varphi)^* h$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_X v\varphi \, d\mu_{g,h} &= \int_X \varphi d\mu_{\rho(v)g,h} = \langle \tilde{\rho}(\varphi)\rho(v) g, h \rangle \\
&= \langle \rho(v) g, \tilde{\rho}(\varphi)^* h \rangle = \langle \rho(v) g, e \rangle \\
&= \int_X v d\mu_{g,e}.
\end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour toute fonction $v \in C(X)$, on obtient que les mesures complexes $\varphi\, d\mu_{g,h}$ et $d\mu_{g,\tilde{\rho}(\varphi)^*h}$ sont égales. Maintenant si $\varphi, \psi \in B(X)$, on a

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\rho}(\varphi\psi)g, h\rangle &= \int_X \varphi\psi\, d\mu_{g,h} = \int_X \psi\, d\mu_{g,\tilde{\rho}(\varphi)^*h} \\ &= \langle\tilde{\rho}(\psi)g, \tilde{\rho}(\varphi)^*h\rangle = \langle\tilde{\rho}(\varphi)\tilde{\rho}(\psi)g, h\rangle.\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $g, h \in H$, on en déduit que $\tilde{\rho}(\varphi\psi) = \tilde{\rho}(\varphi)\tilde{\rho}(\psi)$.

Il reste à montrer que $\tilde{\rho}(\varphi)^* = \tilde{\rho}(\bar{\varphi})$. Soit $u \in C(X)$. On a

$$\begin{aligned}\int_X u\, d\mu_{g,h} &= \langle\rho(u)g, h\rangle = \langle g, \rho(u)^*h\rangle = \langle g, \rho(\bar{u})h\rangle \\ &= \overline{\langle\rho(\bar{u})h, g\rangle} = \overline{\int_X \bar{u}\, d\mu_{h,g}} \\ &= \int_X u\, d\overline{\mu_{h,g}}.\end{aligned}$$

Ainsi, cette égalité étant vraie pour tout $u \in C(X)$, on en déduit que les mesures complexes $d\mu_{g,h}$ et $d\overline{\mu_{h,g}}$ sont égales. On a donc

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\rho}(\bar{\varphi})g, h\rangle &= \int_X \bar{\varphi}\, d\mu_{g,h} = \overline{\int_X \varphi\, d\overline{\mu_{g,h}}} = \overline{\int_X \varphi\, d\mu_{h,g}} \\ &= \overline{\langle\tilde{\rho}(\bar{\varphi})h, g\rangle} = \langle g, \tilde{\rho}(\varphi)h\rangle \\ &= \langle\tilde{\rho}(\varphi)^*g, h\rangle,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\tilde{\rho}(\varphi)^* = \tilde{\rho}(\bar{\varphi})$. Comme $1 \in C(X)$, on a bien sûr $\tilde{\rho}(1) = \rho(1) = Id$. Ceci achève la preuve du fait 3.

Pour un borélien Δ de X, on définit alors

$$E(\Delta) = \tilde{\rho}(\chi_{\Delta}),$$

où χ_{Δ} est la fonction caractéristique de l'ensemble Δ.

Fait 4 : E est une mesure spectrale sur $(X, \mathfrak{M}, H)$.

Montrons d'abord que pour tout $\Delta \in \mathfrak{M}$, l'opérateur $E(\Delta)$ est une projection orthogonale. On a

$$E(\Delta)^2 = \tilde{\rho}(\chi_{\Delta})^2 = \tilde{\rho}(\chi_{\Delta}^2) = \tilde{\rho}(\chi_{\Delta}) = E(\Delta).$$

De plus,

$$E(\Delta)^* = \tilde{\rho}(\chi_{\Delta})^* = \tilde{\rho}(\overline{\chi_{\Delta}}) = \tilde{\rho}(\chi_{\Delta}) = E(\Delta).$$

Ainsi $E(\Delta)$ est un opérateur idempotent autoadjoint, c'est donc une projection othogonale.

Montrons que $E(\emptyset) = 0$ et $E(X) = Id$. On a

$$E(\emptyset) = \tilde{\rho}(\chi_{\emptyset}) = \tilde{\rho}(0) = 0,$$

et

$$E(X) = \tilde{\rho}(\chi_X) = \tilde{\rho}(1) = Id.$$

Soient Δ_1, Δ_2 deux boréliens de X. On a $\chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2} = \chi_{\Delta_1}\chi_{\Delta_2}$, d'où

$$E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = \tilde{\rho}(\chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2}) = \tilde{\rho}(\chi_{\Delta_1}\chi_{\Delta_2}) = \tilde{\rho}(\chi_{\Delta_1})\tilde{\rho}(\chi_{\Delta_2}) = E(\Delta_1)E(\Delta_2).$$

Il reste à montrer que si $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ est une suite de boréliens de X, deux à deux disjoints, alors

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(\Delta_n).$$

Tout d'abord, on vérifie facilement que si $(\Delta_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'ensembles boréliens de X, deux à deux disjoints, alors

$$\chi_{\bigcup_{i\in I}\Delta_i} = \sum_{i\in I} \chi_{\Delta_i},$$

et donc

$$E\left(\bigcup_{i\in I} \Delta_i\right) = \tilde{\rho}(\chi_{\bigcup_{i\in I}\Delta_i}) = \tilde{\rho}(\sum_{i\in I}\chi_{\Delta_i}) = \sum_{i\in I}\tilde{\rho}(\chi_{\Delta_i}) = \sum_{i\in I} E(\Delta_i).$$

Posons alors

$$\Lambda_n = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} \Delta_k.$$

On a donc

$$E\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \Delta_k\right) = E(\Lambda_n) + E\left(\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k\right) = E(\Lambda_n) + \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k).$$

D'où, pour tout $h \in H$, on obtient que

$$\begin{aligned}\left\| E\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \Delta_k\right) h - \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) h \right\|^2 &= \|E(\Lambda_n)h\|^2 = \langle E(\Lambda_n)h, h\rangle = \langle \tilde{\rho}(\chi_{\Delta_n})h, h\rangle \\ &= \int_X \chi_{\Delta_n}\, d\mu_{h,h} = \mu_{h,h}(\Delta_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu_{h,h}(\Delta_k).\end{aligned}$$

Comme la série $\sum_k \mu_{h,h}(\Delta_k)$ converge (vers $\mu_{h,h}(\cup_{k=1}^{+\infty}\Delta_k)$), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu_{h,h}(\Delta_k) = 0,$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k) h = E\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \Delta_k\right) h.$$

Ceci achève de montrer que E est une mesure spectrale sur $(X, \mathfrak{M}, H)$.

Fait 5 : on a

$$\rho(u) = \int_X u\, dE,$$

pour tout $u \in C(X)$. Nous allons en fait montrer que

$$\tilde{\rho}(\varphi) = \int_X \varphi\, dE,$$

pour tout $\varphi \in B(X)$ et comme $\tilde{\rho}_{|C(X)} = \rho$, cela prouvera le fait 5. Soient $\varphi \in B(X)$ et $\varepsilon > 0$. Si $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ est une partition de X, formée d'ensembles boréliens et telle que

$$\sup\{|\varphi(x) - \varphi(x')| : x, x' \in \Delta_k\} \leq \varepsilon, \quad (1 \leq k \leq n),$$

alors, pour tout choix $x_k \in \Delta_k$, on a

$$\left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) \chi_{\Delta_k} \right\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Donc, en utilisant la proposition 5.1.8, on en déduit que

$$\left\| \tilde{\rho}(\varphi) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) \tilde{\rho}(\chi_{\Delta_k}) \right\| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\left\|\tilde{\rho}(\varphi) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) E(\Delta_k)\right\| \leq \varepsilon.$$

Par définition de l'intégrale d'une fonction scalaire par rapport à une mesure spectrale, on obtient donc que

$$\tilde{\rho}(\varphi) = \int_X \varphi \, dE.$$

Fait 6 : il reste à montrer l'unicité de la mesure E. Supposons qu'il existe une autre mesure spectrale $E^\sharp$ sur $(X, \mathfrak{M}, H)$ telle que

$$\rho(u) = \int_X u \, dE^\sharp,$$

pour toute fonction $u \in C(X)$. On a donc, pour tout $g, h \in H$,

$$\langle \rho(u)g, h\rangle = \int_X u \, dE^\sharp_{g,h} = \int_X u \, dE_{g,h}.$$

Donc les mesures complexes $dE^\sharp_{g,h}$ et $dE_{g,h}$ coincident. Ainsi, pour tout borélien Δ, on a

$$\langle E^\sharp(\Delta)g, h\rangle = E^\sharp_{g,h}(\Delta) = E_{g,h}(\Delta) = \langle E(\Delta)g, h\rangle,$$

et ceci étant vrai pour tout $g, h \in H$, on en déduit que $E^\sharp(\Delta) = E(\Delta)$. Donc les mesures spectrales $E^\sharp$ et E coincident. Ceci achève finalement la preuve du théorème.

□

5.5 Le théorème spectral pour les opérateurs normaux

Donnons maintenant le théorème spectral pour les opérateurs normaux.

Théorème 5.5.1 *Soient H un espace de Hilbert et N un opérateur normal sur H. Alors il existe une unique mesure spectrale E sur $(\sigma(N), \mathfrak{M}, H)$, où $\mathfrak{M}$ est la tribu des boréliens de $\sigma(N)$, telle que*

$$f(N) = \int_{\sigma(N)} f \, dE,$$

pour toute fonction $f \in C(\sigma(N))$.

Preuve : D'après le théorème 5.3.6, il existe un $*$-morphisme isométrique Φ de $C(\sigma(N))$ dans $\mathcal{L}(H)$ et tel que $\Phi(1) = Id$ et $\Phi(z) = N$. Alors le théorème 5.4.10 implique qu'il existe une mesure spectrale E sur $(\sigma(N), \mathfrak{M}, H)$ telle que

$$f(N) = \Phi(f) = \int_{\sigma(N)} f\, dE, \qquad f \in C(\sigma(N)).$$

De plus, l'unicité de la mesure spectrale découle de l'unicité dans le théorème 5.4.10.

□

Définition 5.5.2 *La mesure E, donnée par le théorème 5.5.1, s'appelle la mesure spectrale de l'opérateur N. Pour tout $x, y \in H$, on a*

$$\langle f(N)x, y\rangle = \int_{\sigma(N)} f\, dE_{x,y},$$

où

$$E_{x,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, y\rangle, \qquad \Delta \in \mathfrak{M}.$$

Pour $f \in B(\sigma(N))$, on pose alors

$$f(N) = \int_{\sigma(N)} f\, dE.$$

D'après la proposition 5.4.9, l'application

$$\rho : f \longmapsto f(N)$$

est un $*$-morphisme de C^*-algèbre telle que $\rho(1) = Id$. De plus si f est une fonction bornée, positive, alors $f(N)$ est un opérateur positif.

Annexe A

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Dans cette annexe, nous rappelons (sans donner de démonstrations) les résultats clés d'analyse fonctionnelle utilisés dans ce cours. On pourra consulter pour plus de détails [11, 12, 2, 1].

A.1 Produit de Cauchy de séries

Dans cette section, nous allons donner un résultat important sur le produit de deux séries. Avant nous rappelons la définition de convergence d'une série indexée par $\mathbb{Z}$.

Définition A.1.1 *Soient E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite (indexé par $\mathbb{Z}$) d'éléments de E. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ de terme général u_n est :*

(a) *convergente si chacune des deux séries usuelles $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{-n}$ est convergente. On pose alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

(b) *normalement convergente si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|u_n\|$ est convergente.*

Si E est complet, alors la convergence normale implique la convergence.

Proposition A.1.2 *Soient* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n$ *deux séries à termes généraux* u_n *et* v_n *dans une algèbre de Banach* E. *Si les deux séries sont normalement convergentes, alors la série de terme général*

$$w_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k},$$

est bien définie et normalement convergente. De plus, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\right).$$

Pour une preuve de cette proposition, on pourra se reporter à [1].

A.2 Quelques grands principes d'analyse fonctionnelle

A.2.1 Théorèmes de Hahn-Banach

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On désigne par E^* le dual (topologique) de E, i.e. l'espace des formes linéaires et continues sur E. Rappelons que E^* est muni de la norme duale :

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\le 1}} |\varphi(x)|.$$

Le théorème de Hahn-Banach affirme que si G est un sous-espace vectoriel de E et si $g : G \longmapsto \mathbb{K}$ est linéaire et continue de norme

$$\|g\|_{G'} := \sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|\le 1}} |g(x)|,$$

alors, il existe $f \in E^*$ qui prolonge g et telle que

$$\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G'}.$$

Ce théorème admet deux corollaires importants.

Corollaire A.2.1 *Pour tout $x \in E$, il existe $\varphi_x \in E^*$ tel que $\|\varphi_x\| = 1$ et $\varphi_x(x) = \|x\|$.*

Le deuxième corollaire (qui se déduit aisément du premier) affirme que E^* sépare les points de E.

Corollaire A.2.2 *Soit $x, y \in E$ et supposons que pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors $x = y$.*

A.2.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Le théorème de Banach-Steinhaus affirme qu'une famille d'opérateurs linéaires et continues qui est ponctuellement bornée est en fait uniformément bornée. Plus précisément :

Théorème A.2.3 *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continues de E dans F. On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < +\infty, \qquad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty.$$

Autrement dit, il existe une constante c telle que

$$\|T_i x\| \leq c\|x\|, \qquad \forall x \in E, \forall i \in I.$$

Ce résultat admet une conséquence intéressante qui affirme qu'un ensemble d'un espace de Banach qui est faiblement borné est en fait borné (en norme).

Corollaire A.2.4 *Soit E un espace de Banach et soit M un sous-ensemble de E. Supposons que, pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi(M)$ est borné. Alors M est borné.*

A.2.3 Critère d'inversibilité à gauche

Rappelons tout d'abord la définition d'inversibilité à gauche.

Définition A.2.5 *Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ une application linéaire et bornée. On dit que T est inversible à gauche s'il existe $V : Y \longrightarrow X$ linéaire et bornée telle que $VT = Id_X$.*

En utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach, on peut montrer le critère suivant pour l'inversibilité d'un opérateur à gauche.

Théorème A.2.6 *Soient X, Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ une application linéaire et bornée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est inversible à gauche.*

(ii) *T est injectif et à image fermée.*

(iii) *Il existe $c > 0$ tel que*

$$\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

A.3 Supplémentaire topologique, sous-espaces de dimension et de codimension finie

Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe toujours un espace vectoriel N de E tel que $E = M \oplus N$. Mais en général, l'application projection

$$p : \begin{array}{ccc} E = M \oplus N & \longrightarrow & M \\ x = x_M + x_N & \longmapsto & x_M \end{array}$$

n'est pas continue.

Définition A.3.1 *Soit M un sous-espace vectoriel* **fermé** *d'un espace vectoriel normé E. On dit que M admet un supplémentaire topologique s'il existe un sous-espace vectoriel fermé N de E tel que $E = M \oplus N$.*

Nous allons voir que, dans le cadre d'un espace de Banach E, si M admet un supplémentaire topologique dans E, alors la projection sur M est continue et réciproquement. Tout d'abord, nous allons montrer le résultat suivant, basé sur le théorème de l'application ouverte.

Lemme A.3.2 *Soit E un espace de Banach, M et N deux sous-espaces vectoriels fermés de E et supposons que $E = M + N$ (on ne suppose pas que la somme est directe). Alors il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $(a, b) \in M \times N$ tel que*

$$x = a + b \quad \textit{et} \quad \|a\| + \|b\| \leq \gamma \|x\|.$$

Preuve : Munissons $M \times N$ de la norme suivante

$$\|(a, b)\|_{M \times N} := \|a\| + \|b\|, \qquad (a, b) \in M \times N.$$

Il est facile de vérifier que M et N étant fermé, $(M \times N, \|\cdot\|_{M\times N})$ est un espace de Banach. Maintenant considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M \times N & \longrightarrow & E \\ & (a, b) & \longmapsto & a + b. \end{array}$$

L'application φ est clairement linéaire et surjective (car $E = M + N$). De plus, elle est continue car

$$\|\varphi(a, b)\| = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| = \|(a, b)\|_{M \times N}.$$

Le théorème de l'application ouverte permet alors de conclure à l'existence d'une constante $\gamma > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $(a, b) \in M \times N$ tel que

$$x = \varphi(a, b) = a + b \quad \text{et} \quad \|a\| + \|b\| = \|(a, b)\|_{M \times N} \leq \gamma \|x\|.$$

□

Théorème A.3.3 *Soit E un espace de Banach et M un sous-espace vectoriel fermé de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M admet un supplémentaire topologique.*

(ii) *Il existe une projection P ($P^2{=}P$) continue dans $\mathcal{L}(E)$ telle que Im $P = M$.*

Remarquons que si $P \in \mathcal{L}(E)$ est une projection, alors Im $P = \ker(Id_E - P)$ et en particulier Im P est automatiquement fermée (car $Id_E - P$ est continue !).

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : on suppose qu'il existe un sous-espace N fermé tel que $E = N \oplus M$. Définissons

$$P: \begin{array}{ccc} E = M \oplus N & \longrightarrow & M \\ x + y & \longmapsto & x \end{array}$$

On vérifie alors facilement que P est un projection et Im $P = M$. La continuité de P découle du Lemme A.3.2.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : il suffit de considérer $N = \ker P$ qui est fermé car P est continue. Comme P est une projection, on a toujours $E = \ker P \oplus \text{Im } P = M \oplus N$.

$\square$

Remarque A.3.4 *Si on regarde attentivement la preuve du théorème A.3.3, on voit que l'implication* (ii) $\Longrightarrow$ (i) *n'utilise pas la complétude de E. Autrement dit, si E est un espace vectoriel normé, M un sous-espace vectoriel fermé de E et s'il existe une projection $P \in \mathcal{L}(E)$ telle que Im $P = M$, alors M admet un supplémentaire topologique.*

Nous allons voir un résultat qui donne des conditions suffisantes pour qu'il existe un supplémentaire topologique.

Lemme A.3.5 *Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors M admet un supplémentaire topologique dans les deux cas suivants.*

(a) *L'espace M est de dimension finie.*

(b) *L'espace quotient E/M est de dimension finie.*

Preuve : (a) : supposons que $n := \dim M < \infty$ et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de M et $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ la base duale. Autrement dit, e_i^* est défini par

$$e_i^*\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \lambda_i.$$

Il est clair que e_i^* est une forme linéaire sur M et elle est nécessairement continue car $\dim M < +\infty$. D'où $e_i^* \in M^*$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger chaque forme linéaire e_j^* en une forme linéaire continue $x_j^* \in E^*$. Il suffit alors de poser

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x) e_j, \qquad (x \in E)$$

On vérifie alors que P est une projection continue et $M = \mathrm{Im}\ P$. La remarque A.3.4 permet alors de conclure que M admet un supplémentaire topologique.

(b) : supposons maintenant que $n := \dim (E/M) < \infty$. Notons

$$\pi_M : E \longrightarrow E/M$$

la surjection canonique et soit $(\pi_M(e_1), \pi_M(e_2), \ldots, \pi_M(e_n))$ une base de E/M. Considérons

$$N := \mathrm{Vect}\ \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

et montrons que N est un supplémentaire topologique pour M. Tout d'abord, remarquons que N est de dimension finie (au plus n) et donc N est un sous-espace fermé de E. Vérifions maintenant que $M \cap N = \{0\}$. Soit $x \in M \cap N$. Il existe alors $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Comme $x \in M$, on a $\pi_M(x) = 0$ et donc

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi_M(e_i).$$

Mais $(\pi_M(e_1), \pi_M(e_2), \ldots, \pi_M(e_n))$ étant une base, cette dernière égalité implique que $\lambda_i = 0$, pour tout i et donc $x = 0$. Ceci achève de prouver que $M \cap N = \{0\}$. Il reste à montrer que $E = M + N$. Pour cela, considérons $x \in E$ quelconque. Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\pi_M(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

On peut réécrire cette égalité sous la forme

$$\pi_M\left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0,$$

d'où, en posant

$$a := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

on obtient que $x - a \in \ker \pi_M = M$. Comme $a \in N$, on obtient que $x \in M + N$, ce qui achève la démonstration.

$\square$

Remarque A.3.6 *Dans le cas où* $n = \dim(E/M) < +\infty$*, alors tout supplémentaire topologique* N *est de dimension* n*. En effet, il suffit de remarquer que si* $E = M \oplus N$*, alors l'espace quotient* E/M *est isomorphe à* N*.*

Remarque A.3.7 *Si* $n = \dim(E/M) < +\infty$*, alors pour tout sous-espace* G *tel que* $\dim G > n$*, on a* $M \cap G \neq \{0\}$*. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe* G *un sous-espace vectoriel de* E *tel que* $\dim G > n$ *et* $M \cap G = \{0\}$*. Si* $\pi = \pi_M$ *désigne la projection canonique de* E *sur* E/M*, alors* $\pi_{|G}$ *est injective car*

$$\ker(\pi_{|G}) = \ker \pi \cap G = M \cap G = \{0\}.$$

Donc $\dim(\pi(G)) = \dim G > \dim(E/M)$*, ce qui est absurde car* $\pi(G)$ *est un sous-espace vectoriel de* E/M*.*

Définition A.3.8 *Si* M *est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé* E*, on appelle codimension de* M *la dimension du quotient* E/M*. On la note* $\operatorname{codim} M$*.*

Remarquons que d'après le lemme A.3.5 et la remarque A.3.6 si M est un espace de codimension finie dans un espace vectoriel normé E, alors $\operatorname{codim} M = \dim N$, où N est un supplémentaire topologique de M dans E.

Nous donnons maintenant deux lemmes simples mais utiles autour de cette notion de codimension.

Lemme A.3.9 *Soient E un espace vectoriel normé, G un sous-espace vectoriel fermé strict de E et $x_0 \in E \setminus G$. Notons $M := G \oplus \mathbb{K}x_0$. Supposons que M soit de codimension finie. Alors G est aussi de codimension finie et on a*

$$\operatorname{codim} G = \operatorname{codim} M + 1.$$

Preuve : D'après le lemme A.3.5 et la remarque A.3.6, il existe un sous-espace vectoriel fermé N de E tel que $E = M \oplus N$ et $\dim N = \operatorname{codim} M$. D'où

$$E = M \oplus N = G \oplus \mathbb{K}x_0 \oplus N.$$

On vérifie alors facilement que E/G est isomorphe à $N \oplus \mathbb{K}x_0$. Donc

$$\operatorname{codim} G = \dim (N \oplus \mathbb{K}x_0) = \dim N + 1 = \operatorname{codim} M + 1,$$

ce qui prouve le lemme.

$\square$

Lemme A.3.10 *Soient E un espace vectoriel normé, M et N deux sous-espaces vectoriels fermés de E tels que $M \cap N = \{0\}$. Si $\dim M = \operatorname{codim} N < \infty$, alors $E = M \oplus N$.*

Preuve : soit $\pi = \pi_N$ la projection canonique de E sur E/N. Comme $M \cap N = \{0\}$, l'application $\pi_{|M}$ est injective. D'où

$$\dim (\pi(M)) = \dim M = \operatorname{codim} N = \dim (E/N).$$

Ainsi $\pi(M) = E/N = \pi(E)$. Maintenant si $x \in E$ quelconque, alors $\pi(x) \in \pi(E) = \pi(M)$. Ainsi il existe $x_M \in M$ tel que $\pi(x) = \pi(x_M)$. D'où $x - x_M \in$

$\ker \pi = N$. On en déduit donc que $x \in M + N$. Ceci prouve que $E = M + N$ et donc finalement $E = M \oplus N$.

$\square$

A.4 Ensembles compacts et relativement compacts

On discute d'abord un peu de la notion de compact dans le cadre d'un espace topologique quelconque.

Définition A.4.1 *Soit E un espace topologique. On dit que E est* ***séparé*** *si pour tous $x, y \in E$, $x \neq y$, il existe $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y$ deux ouverts disjoints tels que $x \in \mathcal{O}_x$ et $y \in \mathcal{O}_y$.*

Définition A.4.2 *Soit E un espace topologique séparé et A une partie de E. On dit que A est* ***compacte*** *si de chaque recouvrement de A par des ouverts de E, on peut extraire un recouvrement fini, soit en explicitant : quelque soit la famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ensembles ouverts de E telle que*

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

il existe une partie finie J de I telle que

$$A \subset \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Théorème A.4.3 *Soit E un espace topologique séparé et A une partie de E.*

(a) *Si A est compacte alors A est fermée.*

(b) *Si E est compact et A est fermée, alors A est compacte.*

Preuve : Remarquons tout d'abord que dans un espace topologique séparé, l'intersection des voisinages fermés d'un point a se réduit à $\{a\}$. En effet, pour tout $x \in E \setminus \{a\}$, il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V

de x tels que $U \cap V = \emptyset$. Alors $E \setminus V$ est un ensemble fermé qui contient U. Donc $E \setminus V$ est un voisinage fermé de a et comme $x \notin E \setminus V$, on en déduit que

$$\bigcap_{V_a \in \mathcal{V}_{a,f}} V_a = \{a\},$$

où $\mathcal{V}_{a,f}$ désigne l'ensemble des voisinages fermés de a.

(a) : raisonnons par l'absurde et supposons que A soit compacte et non fermée. Alors il existe $a \in \overline{A} \setminus A$. D'après la remarque initiale, on en déduit que

$$\bigcap_{V_a \in \mathcal{V}_{a,f}} (V_a \cap A) = \emptyset.$$

Comme $V_a \cap A$ est fermé dans A, la compacité de A implique qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des voisinages fermés de a tels que

$$\bigcap_{i=1}^{n} (V_i \cap A) = \emptyset.$$

Or $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de a et comme $a \in \overline{A}$, on devrait avoir $V \cap A \neq \emptyset$. On obtient ainsi une contradiction.

(b) : soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E qui recouvre A. Alors

$$E = A \cup {}^cA \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \cup {}^cA.$$

Comme A est fermé, ${}^cA$ est ouvert et donc la famille $\{\mathcal{O}_i, {}^cA : i \in I\}$ est un recouvrement d'ouverts de E. Par compacité, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ tels que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k} \cup {}^cA.$$

On en déduit alors que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k},$$

ce qui prouve la compacité de A.

□

Continuons avec quelques résultats simples autour de la compacité dans un espace topologique abstrait.

Proposition A.4.4 *Soient X, Y deux espaces topologiques séparés et $\varphi : X \longrightarrow Y$ continue. Soit A une partie compacte de X. Alors $\varphi(A)$ est une partie compacte de Y.*

Preuve : Soit $(\mathcal{V}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Y telle que

$$\varphi(A) \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{V}_i.$$

Alors $A \subset \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(\mathcal{V}_i)$ et comme φ est continue, $\varphi^{-1}(\mathcal{V}_i)$ est un ouvert de X. Par compacité de A, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ tels que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} \varphi^{-1}(\mathcal{V}_{i_j}).$$

D'où

$$\varphi(A) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{V}_{i_j}$$

et $\varphi(A)$ est compact.

$\square$

Corollaire A.4.5 *Soient X, Y deux espaces topologiques séparés et $T : X \longrightarrow Y$ une bijection continue. Si X est compact alors T est un homéomorphisme, c'est-à-dire que T^{-1} est continue.*

Preuve : Il s'agit de montrer que, pour tout fermé F de X, $(T^{-1})^{-1}(F)$ est un fermé de Y. Comme F est une partie fermé du compact X, le théorème A.4.3 implique que F est compacte. Or $(T^{-1})^{-1}(F) = T(F)$ et la proposition A.4.4 entraîne alors que $T(F)$ est une partie compacte de Y. L'espace topologique Y étant séparé, en appliquant une nouvelle fois le théorème A.4.3, on obtient que $T(F)$ est fermé. Ainsi T^{-1} est continue.

$\square$

Le lemme suivant est un lemme de rigidité.

Lemme A.4.6 *Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur un ensemble X. Supposons que les deux topologies vérifient les conditions suivantes :*

(i) τ_1 *est plus faible que* τ_2*, c'est-à-dire que* $\tau_1 \subset \tau_2$ *;*

(ii) (X, τ_1) *est séparé ;*

(iii) (X, τ_2) *est compact.*

Alors les deux topologies τ_1 *et* τ_2 *coincident.*

Preuve : Soit F un fermé de (X, τ_2). Comme (X, τ_2) est compact, le théorème A.4.3 implique que F est en fait une partie compacte pour la topologie τ_2. Puisque τ_1 est plus failble que τ_2, F est aussi compact pour la topologie τ_1. Comme (X, τ_1) est séparé, une nouvelle application du théorème A.4.3 entraîne que F est fermé dans (X, τ_1). Finalement on a prouvé que $\tau_2 \subset \tau_1$ et donc on obtient que les deux topologies coincident.

□

Le résultat suivant donne une condition pour qu'un espace topologique compact soit métrisable.

Théorème A.4.7 *Soit* (X, τ) *un espace topologique compact et supposons que, pour tout* $n \geq 1$*, il existe une fonction* $f_n : (X, \tau) \longrightarrow \mathbb{K}$ *continue et telle que la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *sépare les points de* X*. Alors* X *est métrisable, c'est-à-dire qu'il existe une distance sur* X *qui induit la même topologie que* τ*.*

Preuve : D'après la proposition A.4.4, f_n est bornée sur X et donc, sans perte de généralité, on peut supposer que $|f_n| \leq 1$, pour tout $n \geq 1$. Posons alors

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|, \qquad (x, y) \in X \times X.$$

Il est facile de vérifier que d est une métrique (on utilise ici le fait que la suite $(f_n)_n$ sépare les points). Comme chaque f_n est continue pour τ et que la série converge uniformément sur $X \times X$, on en déduit que d est une fonction continue sur $X \times X$, muni de la topologie produit induite par celle de τ. Ainsi les boules $B_r(p) := \{q \in X : d(p, q) < r\}$ sont ouvertes dans (X, τ). Si on note τ_d la topologie induite par la distance, on a donc démontré que $\tau_d \subset \tau$. Comme par hypothèse

(X, τ) est compact et que (X, τ_d) est séparé, on obtient avec le lemme A.4.6 que $\tau = \tau_d$.

□

On rappelle maintenant la définition suivante.

Définition A.4.8 *Soit E un espace topologique, $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de E. On dit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ admet le point a de E pour **valeur d'adhérence** si, pour tout voisinage V de a, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ est infini.*

On a alors le lemme suivant :

Lemme A.4.9 *Soit E un espace topologique séparé et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de E. Si $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, alors son adhérence $\overline{X}$ est la réunion de X et de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. En particulier, si $(x_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de valeurs d'adhérence, alors X est fermé.*

Preuve : Soit a une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Par définition, pour tout voisinage V de a, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ est infini. Donc en particulier, $V \cap X \neq \emptyset$. Ceci montre donc que $a \in \overline{X}$.

Réciproquement, si $a \in \overline{X} \setminus X$ et V est un voisinage de a. Comme $a \in \overline{X}$, on a $V \cap X \neq \emptyset$. Nous devons montrer que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ est infini. Supposons le contraire et soit $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\} = V \cap X$. Comme E est séparé, pour chaque $k = 1, \ldots, n$, il existe un voisinage ouvert V_k de a tel que $x_{i_k} \neq V_k$. Alors $U = V \cap V_1 \cap \cdots \cap V_n$ est un voisinage de a et $X \cap U = \emptyset$, ce qui est absurde car $a \in \overline{X}$.

Enfin, si $(x_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de valeurs d'adhérence, alors ce qui précède montre que $X = \overline{X}$ et donc X est fermé !

□

Lemme A.4.10 *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$.*

(ii) *il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge vers a.*

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : par définition d'une valeur d'adhérence, l'ensemble $B(a,1)$ contient au moins un point de la suite disons x_{n_1}. Par récurrence, supposons qu'il existe $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ construits tels que $x_{n_k} \in B(a,1/k)$. L'ensemble $B(a,1/(k+1))$ est un voisinage de a. Donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(a,1/(k+1))\}$ est infini. Donc il existe $n_{k+1} > n_k$ tel que $x_{n_{k+1}} \in B(a,1/(k+1))$. On construit ainsi une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $d(x_{n_k},a) < 1/k$. En faisant tendre $k \to +\infty$, on obtient alors que (x_{n_k}) converge vers a.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : soit V un voisinage de a. Alors par définition de la convergence d'une suite, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $x_{n_k} \in V$. Ainsi on obtient que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ est infini, ce qui prouve que a est une valeur d'adhérence.

□

Remarque A.4.11 *Attention le lemme A.4.10 n'est pas vrai en général dans un espace topologique quelconque. Par exemple, considérons la suite $(\delta_n)_{n\geq 1} \subset (\ell^\infty)^*$ définie par*

$$\begin{array}{rccc} \delta_n : & \ell^\infty & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_p)_{p\geq 1} & \longmapsto & x_n. \end{array}$$

Alors $(\delta_n)_{n\geq 1}$ possède une valeur d'adhérence pour la topologie faible* mais n'admet pas de sous-suite convergente pour cette topologie (pourquoi ?).

Théorème A.4.12 *Tout espace topologique compact E vérifie la propriété suivante, appelée axiome de Bolzano–Weierstrass : toute suite de points de E admet au moins une valeur d'adhérence.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E sans valeur d'adhérence. L'espace topologique E étant séparé, le lemme A.4.9 implique que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les ensembles

$$X_p = \{x_n : n \geq p\}$$

sont fermés.

Fait : $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} X_p = \emptyset$. En effet, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $a \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} X_p$ et montrons alors que a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. Soit V un voisinage de a. Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a \in X_p$, on obtient que pour tout $p \in\in \mathbb{N}$, il existe $n \geq p$ tel que $a = x_n$. En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq p$ tel que $x_n \in V$. On en déduit donc que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ est infini et donc a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$, ce qui est absurde. Ceci achève la preuve du fait.

Comme E est compact, il existe des entiers n et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_{p_i} = \emptyset.$$

Or $\bigcap_{i=1}^{n} X_{p_i} = X_{p_{max}}$, où $p_{max} := \max(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ et donc $X_{p_{max}} = \emptyset$. On obtient donc une contradiction.

□

Dans le cadre métrique, la réciproque de ce théorème est vraie. Avant de donner ce résultat, nous allons introduire deux définitions supplémentaires.

Définition A.4.13 *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X.*

(a) *On dit que X est* ***séquentiellement compact*** *si chaque suite dans X a une sous-suite convergente vers un point dans X.*

(b) *On dit que A est* ***précompacte*** *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N et des points $x_1, \cdots, x_N \in X$ tels que A soit contenu dans la réunion des boules $B(x_i, \varepsilon), i = 1, ..., N$.*

Théorème A.4.14 *Soit (X, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est compact.*

(ii) *X est séquentiellement compact.*

(iii) *X est complet et précompact.*

Preuve : Notre stratégie est de montrer que (i) entraîne (ii), que (ii) entraîne (iii), que (iii) entraîne (ii), et ensuite que (ii) et (iii) entraînent (i).

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : découle du théorème A.4.12 et du lemme A.4.10.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans X. Puisque X est séquentiellement compact, $(x_n)_{n\geq 0}$ possède une sous-suite convergente dans X. Il est alors facile de voir que $(x_n)_{n\geq 0}$ est aussi convergente vers la même limite. Donc X est complet.

Supposons maintenant que X n'est pas précompact et cherchons une contradiction. Il existe donc $\varepsilon >$ tel que, pour chaque $n \geq 1$ et pour chaque $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, nous avons

$$X \neq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon). \tag{A.1}$$

Prenons $x_1 \in X$ quelconque. D'après (A.1), nous savons que $X \setminus B(x_1, \varepsilon) \neq \emptyset$. Choisissons donc $x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon)$. Étant donné $x_1, x_2, \ldots, x_k$, prenons $x_{k+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon)$ (notez que, d'après (A.1), $X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$). Maintenant, nous avons une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ telle que

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon,$$

pour chaque $n \neq m$. Cette suite n'a donc aucun sous-suite convergente, ce qui contredit le fait que X soit séquentiellement compact.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : soit $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$. Il s'agit de montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ possède une sous-suite convergente. En utilisant la précompacité de X, il existe un nombre fini de boules de rayon 1 qui recouvre X. Il existe donc une boule, disons B_1, qui contient x_n pour une infinité d'indices. Posons

$$\mathcal{N}_1 := \{n \geq 1 : x_n \in B_1\}.$$

De même, il existe un nombre fini de boules de rayon $1/2$ qui recouvre X. Il existe donc une boule, disons B_2, qui contient x_n pour une infinité d'indices $n \in \mathcal{N}_1$. Posons

$$\mathcal{N}_2 := \{n \in \mathcal{N}_1 : x_n \in B_2\}.$$

Supposons avoir trouvé $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_k$ et $B_1, B_2, \ldots, B_k$ tels que

$$\mathcal{N}_k \subset \cdots \subset \mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{N},$$

$\mathcal{N}_k$ infini et B_j est une boule de rayon $1/j$ telle que $x_n \in B_j$ pour $n \in \mathcal{N}_j$. La précompacité de X implique une nouvelle fois qu'il existe un nombre fini de boules de rayon $1/(k+1)$ qui recouvre X. Donc il existe au moins une boule, disons B_{k+1}, qui contient x_n pour une infinité d'indices $n \in \mathcal{N}_k$. Posons alors

$$\mathcal{N}_{k+1} := \{n \in \mathcal{N}_k : x_n \in B_{k+1}\}.$$

Choisissons alors par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $n_k \in \mathcal{N}_k$. Cela est possible car chaque ensemble $\mathcal{N}_k$ est infini. Pour $j \geq i$, on a alors $n_j \in \mathcal{N}_j \subset \mathcal{N}_i$ et donc $x_{n_j} \in B_i$. D'où

$$d(x_{n_j}, x_{n_i}) \leq \frac{2}{i},$$

et donc la suite $(x_{n_i})_i$ est de Cauchy dans (X, d) complet. Donc elle converge vers un élément $x \in X$. Ceci achève de prouver que X est séquentiellement compacte.

(iii) et (ii) $\Longrightarrow$ (i) : soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de X.

Fait : il existe $\delta > 0$ tel que, pour chaque $x \in X$, il existe un $i \in I$ avec $B(x, \delta) \subset U_i$.

Pour prouver ce fait, raisonnons par l'absurde en supposons que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in X$ tel que pour chaque $i \in I$, on a $B(x, \delta) \not\subset U_i$. En particulier, on peut construire une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de points de X telle que $B(x_n, 1/n) \not\subset U_i$, pour tout $i \in I$. Comme X est séquentiellement compacte, il existe une sous-suite, disons $(x_{n_p})_{p\geq 1}$, qui converge vers disons $x \in X$. Puisque $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X, il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$ et U_i étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Prenons alors p assez grand tel que $1/n_p < 1/(2r)$ et $d(x_{n_p}, x) < 1/(2r)$. Nous avons donc $B(x_{n_p}, 1/n_p) \subset U_i$, ce qui est une contradiction. Ainsi le fait est prouvé.

Nous avons aussi supposé que X est précompact. Il existe donc $y_1, y_2, \ldots, y_k \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{p=1}^{k} B(y_p, \delta).$$

Mais on sait que pour chaque y_p, il existe $i_p \in I$ tel que $B(y_p, \delta) \subset U_{i_p}$. Ainsi nous obtenons finalement que

$$X \subset \bigcup_{p=1}^{k} U_{i_p},$$

ce qui achève de prouver que X est compact.

$\square$

Définition A.4.15 *Soit X un espace topologique séparé et A une partie de X. On dit que A est* ***relativement compact*** *dans X si son adhérence A dans X est compacte.*

Corollaire A.4.16 *Soit (E, d) un espace métrique complet et A une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est relativement compact.*

(ii) *A est précompact.*

(iii) *Pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de points de A, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge (vers un élément $x \in \overline{A}$).*

Preuve : On vérifie facilement que A précompact si et seulement si $\overline{A}$ est précompact. De plus, remarquons que $\overline{A}$ est fermé dans (E, d) complet donc $\overline{A}$ est aussi complet (muni de la topologie induite par la distance d). Finalement, en utilisant le théorème A.4.14, on obtient que

$$\overline{A} \text{ compact } \Longleftrightarrow \overline{A} \text{ précompact } \Longleftrightarrow A \text{ précompact},$$

ce qui prouve que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

(i) $\Longrightarrow$ (iii) : soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de A. Comme $(\overline{A}, d)$ est un espace métrique compact, on peut appliquer le théorème A.4.14 et en déduire que $\overline{A}$ est séquentiellement compact. Ainsi il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge vers un élément $x \in \overline{A}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : on raisonne par l'absurde en supposant que A ne soit pas précompact. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ et tous points $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$,

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Comme dans la preuve du théorème A.4.14 ((ii) $\Longrightarrow$ (iii)), on construit alors une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de points de A telle que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, $n \neq m$. Ainsi la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ ne peut pas avoir de sous-suite convergente, ce qui contredit la condition (iii).

□

Notons une conséquence facile.

Corollaire A.4.17 *Soit A une partie d'un espace métrique complet X. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K_ε de X telle que*

$$\forall x \in A,\ d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Alors A est relativement compacte.

Preuve : D'après le corollaire A.4.16, il suffit de montrer que A est précompacte. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe donc une partie compacte K_ε telle que $d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon/2$. La compacité de K_ε implique alors qu'il existe $x_1, x_2, \ldots, x_N \in X$ tels que

$$K_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon/2).$$

On vérifie alors facilement que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon/2),$$

ce qui prouve que A est précompacte.

□

Dans le cas d'un sous-ensemble A d'un espace de Banach E, il est agréable de retenir un critère qui utilise le caractère vectoriel de l'espace ambiant :

Proposition A.4.18 *Pour que l'adhérence de A soit compacte dans l'espace de Banach E, il faut et il suffit que A vérifie les deux conditions suivantes :*
a . l'ensemble A est borné ;
b . pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel $L_\varepsilon \subset E$ de dimension finie tel que pour tout $x \in A$

$$\mathrm{dist}(x, L_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Preuve : Si l'adhérence de A est compacte il est facile de vérifier que le critère est satisfait. Tout d'abord, $\bar{A}$ est borné parce que compact (la fonction continue $x \to \|x\|$ atteint son maximum sur le compact $\overline{A}$). La deuxième condition est impliquée par la précompacité. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Posons $L_\varepsilon := \mathrm{Vect}\ (x_i : 1 \le i \le n)$. On vérifie alors que pour tout $x \in A$, on a $d(x, L_\varepsilon) < \varepsilon$.

Réciproquement, supposons les deux conditions du critère vérifiées. Soit M une borne pour les normes des éléments de A ; soient $\varepsilon > 0$ et L_ε un sous-espace vectoriel de dimension finie qui approche A à moins de ε. Désignons par K_ε le sous-ensemble de E défini par

$$K_\varepsilon := \{x \in L_\varepsilon : \|x\| \le M + \varepsilon\} = L_\varepsilon \bigcap \overline{B(0, M + \varepsilon)}.$$

On vérifie facilement que K_ε est un sous-ensemble fermé borné de L_ε qui est un espace vectoriel normé de dimension finie. Donc K_ε est un compact de L_ε et donc de E. De plus, si $x \in A$, il existe $y \in L_\varepsilon$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$; puisque $\|x\| \le M$, on aura $\|y\| \le M + \varepsilon$, d'où $y \in K_\varepsilon$. Ainsi on obtient que pour tout

$x \in A$, $d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon$. Le corollaire A.4.17 permet alors d'en déduire que A est relativement compacte.

□

Proposition A.4.19 *Si K_1 et K_2 sont compacts dans l'espace de Banach E, l'ensemble $K_1 + K_2$ est compact ; si A_1 et A_2 sont relativement compacts dans l'espace de Banach E, l'ensemble $A_1 + A_2$ est relativement compact dans E.*

Preuve : Il est facile de vérifier que $K_1 \times K_2$ est compact (pour la topologie produit induite par celle de $E \times E$). De plus, l'application $\varphi : (x, y) \longmapsto x + y$ est continue sur $E \times E$ à valeurs dans E. Donc $K_1 + K_2 = \varphi(K_1 \times K_2)$ est compact. La deuxième assertion résulte facilement de la première, car l'adhérence de la somme $A_1 + A_2$ est contenue dans $\overline{A_1} + \overline{A_2}$.

□

Signalons aussi un résultat élémentaire mais qui sera utile.

Proposition A.4.20 *Soient E, F deux espaces métriques, K une partie de E et $\Theta : E \longrightarrow F$ une isométrie, c'est-à-dire une application vérifiant :*

$$d_F(\Theta(x), \Theta(y)) = d_E(x, y), \qquad \forall (x, y) \in E \times E.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *K est compact.*

(ii) *$\Theta(K)$ est compact.*

Preuve : Remarquons que si on note $\Theta_1 := \Theta_{|K}$ la restriction de Θ à K, alors Θ_1 est un homéomorphisme de K sur $\Theta(K)$ (en fait Θ_1^{-1} est aussi une isométrie). Il suffit alors d'appliquer la proposition A.4.4.

□

A.5 Topologie faible, faible* et théorème de Banach-Alaoglu

Tout d'abord commençons par un rappel de topologie générale. Soit X un ensemble et soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$. La question naturelle qui se pose est de munir X de la topologie τ la plus faible, i.e. avec le minimum d'ouverts, qui rende continues toutes les applications φ_i, $i \in I$. La réponse est la suivante :

Théorème A.5.1 *Soit τ la topologie sur X dont les ouverts s'obtiennent en considérant d'abord des intersections finies d'ensembles de la forme $\varphi^{-1}(\omega_i)$, ω_i ouvert de Y_i, et ensuite des réunions quelconques. Alors τ est la topologie la plus faible qui rende continues toutes les applications φ_i, $i \in I$.*

Preuve : La preuve est simple et laissée au lecteur.

□

Définition A.5.2 *Etant donnée une topologie $\mathcal{S}$ sur E et $x \in E$, on appelle **base de voisinage de** x pour la topologie $\mathcal{S}$ toute collection $\mathcal{B}$ d'ouverts (pour $\mathcal{S}$) contenant x et telle que chaque voisinage ouvert de x contient un élément de $\mathcal{B}$.*

Nous allons maintenant appliquer ce qui précède dans le contexte des espaces de Banach pour définir la topologie faible*.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de Banach ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit E^* son dual topologique. Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi_x(f) = f(x), \qquad f \in E^*.$$

Définition A.5.3 *Soit E un espace de Banach.*

1. *La **topologie faible*** est la topologie la plus faible sur E^* rendant continues toutes les applications φ_x, $x \in E$. On la note $\sigma(E^*, E)$.*

2. *La **topologie faible** est la topologie la plus faible sur E rendant continues toutes les applications $\varphi \in E^*$. On la note $\sigma(E, E^*)$.*

Proposition A.5.4 *Soit E un espace de Banach. Les topologies faible et faible* sont séparées.*

Preuve : Commençons par la topologie faible. Soient $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$. On cherche à construire deux ouverts $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ tels que $x_1 \in \mathcal{O}_1$, $x_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. D'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E^*$ tels que $f(x_1) \neq f(x_2)$. On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ tel que les boules $B_1 := B(f(x_1), \varepsilon)$ et $B_2 := B(f(x_2), \varepsilon)$ sont disjointes. On pose alors

$$\mathcal{O}_1 = \{x \in E : |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon\} = f^{-1}(B_1)$$

et

$$\mathcal{O}_2 = \{x \in E : |f(x) - f(x_2)| < \varepsilon\} = f^{-1}(B_2).$$

Il est clair alors que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux ouverts de E pour $\sigma(E, E^*)$ qui vérifient $x_1 \in \mathcal{O}_1$, $x_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.

Passons maintenant à la topologie faible*. Soient f_1 et f_2 dans E^* avec $f_1 \neq f_2$. Il existe donc $x \in E$ tel que $f_1(x) \neq f_2(x)$. On considère alors $\varepsilon > 0$ tel que les boules $B_1 := B(f_1(x), \varepsilon)$ et $B_2 := B(f_2(x), \varepsilon)$ sont disjointes. On pose alors

$$\mathcal{O}_1 = \{f \in E^* : |f_1(x) - f(x)| < \varepsilon\} = \varphi_x^{-1}(B_1)$$

et

$$\mathcal{O}_2 = \{f \in E^* : |f_2(x) - f(x)| < \varepsilon\} = \varphi_x^{-1}(B_2).$$

Il est clair alors que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux ouverts de E^* pour $\sigma(E^*, E)$ qui vérifient $f_1 \in \mathcal{O}_1$, $f_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.

$\square$

On peut expliciter les bases de voisinage d'un point pour ces deux topologies.

Proposition A.5.5 *Soit E un espace de Banach, $x_0 \in E$ et $f_0 \in E^*$.*

(a) *Une base de voisinage de f_0 pour la topologie faible* est obtenue en considérant tous les ensembles de la forme*

$$V_{f_0} = \{\varphi \in E^* : |\varphi(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in I\},$$

où I est finie, $x_i \in E$ et $\varepsilon > 0$.

(b) *Une base de voisinage de x_0 pour la topologie faible est obtenue en considérant tous les ensembles de la forme*

$$V_{x_0} = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \forall i \in I\},$$

où I est finie, $f_i \in E^*$ et $\varepsilon > 0$.

Preuve : (a) : il est clair que

$$V_{f_0} = \bigcap_{i \in I} \varphi_{x_i}^{-1}(B(f_0(x_i), \varepsilon))$$

est un ouvert pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ qui contient f_0. Réciproquement soit U un voisinage de f_0 pour $\sigma(E^*, E)$. Par définition de la topologie faible* et en utilisant le théorème A.5.1, on sait qu'il existe un voisinage W de f_0, $W \subset U$, de la forme $W = \bigcap_{i \in I} \varphi_{x_i}^{-1}(\omega_i)$, I fini, ω_i voisinage ouvert dans $\mathbb{K}$ de $f_0(x_i)$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f_0(x_i), \varepsilon) \subset \omega_i$, pour chaque $i \in I$ (ici on utilise que I est fini !). Si on définit V par

$$V_{f_0} = \{\varphi \in E^* : |\varphi(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in I\},$$

on a alors $f_0 \in V \subset W \subset U$. Ceci achève la preuve du cas (a).

(b) : le cas de la topologie faible se démontre de façon similaire et est laissé au lecteur à titre d'exercice.

□

La proposition suivante explicite la convergence séquentielle pour les topologies faible et faible*

Proposition A.5.6 *Soient E un espace de Banach, $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de E et $(x_n^*)_{n\geq 1}$ une suite de E^*.*

(a) *La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers $x \in E$ pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ si et seulement si $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge vers $f(x)$ pour toute $f \in E^*$.*

(b) *La suite $(x_n^*)_{n\geq 1}$ converge vers $x^* \in E^*$ pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ si et seulement si $(x_n^*(x))_{n\geq 1}$ converge vers $x^*(x)$ pour toute $x \in E$.*

Preuve : Plaçons nous dans le cadre plus général : soient X un ensemble et $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$. On munit X de la topologie τ la plus faible qui rende continue toutes les applications φ_i, $i \in I$. En utilisant le théorème A.5.1, il est alors facile de montrer qu'une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de X converge vers x pour la topologie τ si et seulement si la suite $(\varphi_i(x_n))_{n\geq 1}$ converge vers $\varphi_i(x)$ dans Y_i pour chaque $i \in I$. Il suffit d'appliquer alors ce principe général à la topologie faible et faible* pour obtenir (a) et (b).

$\square$

En utilisant le théorème d'Hahn–Banach (version géométrique), on peut démontrer le résultat suivant très utile sur les ensembles convexes.

Corollaire A.5.7 *Soit C un convexe d'un espace de Banach E. Alors C est faiblement fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ si et seulement si C est fermé pour la topologie de la norme.*

Preuve : laissée en exercice. Voir [2, Théorème III.7., page 38].

$\square$

Lemme A.5.8 *Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in (X, Y)$. Alors T est continue de $(X, \sigma(X, X^*))$ dans $(Y, \sigma(Y, Y^*))$.*

Preuve : Soit Ω un ouvert de Y pour la topologie faible. On doit montrer que $T^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de X pour la topologie faible. On peut supposer que Ω est de la forme

$$\Omega = \bigcap_{i \in I} \varphi_i^{-1}(\mathcal{O}_i),$$

où I est fini, $\varphi_i \in Y^*$ et $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathbb{K}$. Alors

$$T^{-1}(\Omega) = \bigcap_{i \in I} T^{-1}\varphi_i^{-1}(\mathcal{O}_i) = \bigcap_{i \in I} (\varphi_i \circ T)^{-1}(\mathcal{O}_i).$$

Or $\varphi_i \circ T : X \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire et continu donc $\varphi_i \circ T \in X^*$ et $T^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de X pour la topologie faible.

□

L'importance de la topologie faible* est sans aucun doute contenue dans le théorème de Banach-Alaoglu.

Théorème A.5.9 (Banach-Alaoglu) *Soit E un espace de Banach, E^* son dual topologique et*

$$\overline{B}_{E^*} = \{\varphi \in E^* : \|\varphi\| \leq 1\}$$

la boule unité fermée de E^*. Alors $\overline{B}_{E^*}$ est compacte pour la topologie faible.*

Preuve : Pour la preuve de ce résultat classique, on renvoie le lecteur à [2, Théorème III.15., page 42].

□

A.6 Espaces séparables, espaces réflexifs

Nous introduisons dans cette section deux notions importantes dans le cadre des espaces de Banach.

Définition A.6.1 *Soit E un espace topologique. On dit que E est **séparable** s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense dans E.*

Commençons par deux lemmes utiles concernant cette notion de séparabilité.

Lemme A.6.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs de E et notons par F le sous-espace vectoriel engendré par $(x_n)_{n\geq 1}$. Supposons que F soit dense dans E. Alors E est séparable.*

Preuve : On désigne par L_0 l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par la suite $(x_n)_{n\geq 1}$. On montre alors que L_0 est dénombrable et que L_0 est un sous-ensemble dense de F. Donc L_0 est dense dans E, ce qui prouve que E est séparable.

□

Le résultat suivant donne le lien entre la séparabilité de E et de E^*.

Théorème A.6.3 *Soit E un espace de Banach tel que E^* est séparable. Alors E est séparable.*

Preuve : Soit $(y_n^*)_{n\geq 1}$ une suite dénombrable dense dans E^*. Pour chaque $n \geq 1$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| = 1$ et

$$|\langle y_n^*, x_n\rangle| \geq \frac{1}{2}\|y_n^*\|.$$

Soit L le $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par la suite $(x_n)_{n\geq 1}$. Montrons que L est dense dans E. Soit $y^* \in E^*$ tel que $y^*_{|L} = 0$. Montrons que $y^* = 0$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $\|y^* - y_n^*\| < \varepsilon$. D'où

$$\frac{1}{2}\|y_n^*\| \leq |\langle y_n^*, x_n\rangle| = |\langle y_n^* - y^*, x_n\rangle| \leq \|y_n^* - y^*\| < \varepsilon.$$

Ainsi

$$\|y^*\| \leq \|y^* - y_n^*\| + \|y_n^*\| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $y^* = 0$. Un corollaire du théorème d'Hahn-Banach implique alors que L est dense dans E. Le lemme A.6.2 permet de conclure que E est séparable.

□

Rappelons maintenant la notion d'espace réflexif. Si E est un espace de Banach, alors on peut plonger E dans E^{**} par l'injection

$$\begin{array}{rccl} J: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & J(x), \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rccl} J(x): & E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & y^* & \longmapsto & \langle y^*, J(x)\rangle_{E^*,E^{**}} = \langle x, y^*\rangle_{E,E^*}. \end{array}$$

Il est clair que J est linéaire et d'après le théorème d'Hahn-Banach, J est une isométrie, c'est-à-dire que $\|J(x)\|_{E^{**}} = \|x\|_E$, pour tout $x \in E$. En effet, on a

$$\|J(x)\|_{E^{**}} = \sup_{y^* \in B_{E^*}} |\langle y^*, J(x)\rangle| = \sup_{y^* \in B_{E^*}} |\langle x, y^*\rangle| = \|x\|_E,$$

la dernière égalité provenant d'un corollaire du théorème d'Hahn-Banach. Ainsi on peut identifier (via l'application J) E avec un sous-espace de E^{**}.

Définition A.6.4 *Étant donné E un espace de Banach, on dit que E est* ***réflexif*** *si $J(E) = E^{**}$.*

Donnons un lemme sur les sous-espaces d'un espace réflexif.

Lemme A.6.5 *Si E est un espace de Banach réflexif et M un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors M est réflexif.*

Preuve : on utilise le théorème de Kakutani (voir [2, Théorème III.16, page 44]) qui dit qu'un espace de Banach X est réflexif si et seulement si $\overline{B}_X$ est compact pour la topologie faible $\sigma(X, X^*)$. En utilisant une première fois ce résultat, on en déduit que $\overline{B}_E$ est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Comme M est fermé, le corollaire A.5.7 implique que M est faiblement fermé pour $\sigma(E, E^*)$. On en déduit donc que l'ensemble $\overline{B}_M = \overline{B}_E \cap M$ est fermé pour $\sigma(E, E^*)$ et contenu dans le compact (pour la topologie faible) $\overline{B}_E$. Le théorème A.4.3 implique alors que $\overline{B}_M$ est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Il reste alors à remarquer que si $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de M pour $\sigma(M, M^*)$, alors $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de M pour $\sigma(E, E^*)$; ceci implique alors que $\overline{B}_M$ est compact pour la topologie faible $\sigma(M, M^*)$. Pour conclure, on applique une deuxième fois le théorème de Kakutani pour en déduire que M est réflexif.

□

Dans le cas où l'espace est séparable, on peut améliorer la conclusion du théorème de Banach–Alaoglu.

Théorème A.6.6 *Soit E un espace de Banach séparable. Alors $\overline{B}_{E^*}$ est compacte et métrisable pour la topologie faible*.*

Preuve : Le théorème A.5.9 de Banach–Alaoglu implique que $\overline{B}_{E^*}$ est compacte pour la topologie faible*. Comme E est séparable, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dense dans E. Posons $f_n(\Lambda) = \Lambda x_n$, pour $\Lambda \in E^*$. Par définition, f_n est continue pour la topologie faible*. De plus, si $\Lambda, \Lambda' \in E^*$ et si $f_n(\Lambda) = f_n(\Lambda')$, pour tout $n \geq 1$, alors on a $\Lambda(x_n) = \Lambda'(x_n)$. Par densité, on a $\lambda = \Lambda'$ et donc la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sépare les points de E^*. Le théorème A.4.7 implique que $\overline{B}_{E^*}$ est métrisable pour la topologie faible*.

$\square$

En combinant le théorème A.6.6 et le théorème A.4.14, on obtient aisément le résultat utile suivant.

Corollaire A.6.7 *Soit E un espace de Banach séparable et $(y_n^*)_n$ une suite bornée dans E^*. Alors il existe une sous-suite $(y_{n_k})_k$ qui converge pour la topologie faible*.*

On peut obtenir un résultat similaire pour la toplogie faible.

Théorème A.6.8 *Soit E un espace de Banach réflexif et séparable. Alors $\overline{B}_E$ est compact et métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.*

Preuve : Comme E est réflexif et séparable, l'espace $E^{**} = J(E)$ est séparable. Le théorème A.6.3 implique alors que E^* est séparable. et en utilisant le théorème A.6.6, on obtient finalement que la boule $\overline{B}_{E^{**}}$ est compacte et métrisable pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$. Ceci implique que $\overline{B}_E$ est compacte et métrisable pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.

$\square$

Corollaire A.6.9 *Soit E un espace de Banach réflexif et $(x_n)_n$ une suite bornée de E. Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge faiblement.*

Preuve : Soit M_0 le sous-espace vectoriel engendré par les x_n et notons $M := \overline{M_0}$. Le lemme A.6.5 implique que M est réflexif et le lemme A.6.2 implique lui que M est séparable. D'après le théorème A.6.8, on peut en déduire que $\overline{B}_M$ est compact et métrisable pour la topologie faible $\sigma(M, M^*)$. Comme $(x_n)_n$ est une suite bornée dans M, quitte à la normaliser, on peut supposer que $x_n \in B_M$. En utilisant le théorème A.4.14, on en déduit qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge faiblement pour la topologie $\sigma(M, M^*)$ et donc elle converge aussi pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

$\square$

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Corollaire A.6.10 *Soit H un espace de Hilbert et $(x_n)_n$ une suite bornée de H. Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge faiblement.*

Remarquons en fait que dans le cas hilbertien, on peut donner une preuve plus directe...

Annexe B

Quelques compléments d'analyse complexe

L'objet de cet appendice est de développer la théorie classique de l'analyse complexe dans le contexte des fonctions à valeurs vectorielles.

Dans tout ce qui suit, $(E, \|\cdot\|)$ va désigner un espace de Banach, $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Rappelons que l'espace $\mathcal{B}(I, E)$, des fonctions bornées sur I à valeurs dans E, muni de la norme du sup

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in I} \|f(t)\|, \qquad (f \in B(I, E)),$$

est un espace de Banach.

B.1 Rappels d'analyse complexe

Dans ce premier paragraphe, nous rappelons deux résultats classiques (le théorème de Cauchy et les formules de Cauchy) pour des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour donner un énoncé suffisamment général, nous allons avoir besoin de la notion de système de courbes fermées orientées entourant un compact dans un ouvert du plan complexe. Cette notion est assez intuitive mais pour l'introduire proprement, cela nécessite un peu de travail ! Commençons par rappeler quelques notions élémentaires sur les courbes et fixons la terminologie utilisée dans ce cours.

Définition B.1.1 (a) *On appelle courbe (ou chemin) dans $\mathbb{C}$ toute application continue $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, où $[a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. L'image d'une courbe γ sera notée γ^*, c'est un compact de $\mathbb{C}$.*

(b) *On dit qu'une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

(c) *On dit qu'une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^k par morceaux, $k \geq 1$, s'il existe une subdivision $s = (s_0, s_1, \ldots, s_N)$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que la restriction de γ à chaque intervalle $[s_i, s_{i+1}]$ soit de classe C^k.*

(d) *Une courbe γ est dite simple si $\gamma(s) = \gamma(t)$ implique que soit $s = t$ soit $s = a$ et $t = b$.*

(e) *Etant donné une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, la courbe opposée, notée $\overline{\gamma}$, est définie sur le même intervalle par*

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t), \qquad t \in [a,b].$$

Enfin si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une courbe de classe C^1 par morceaux et f est une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, contenant γ^*, on définit l'*intégrale curviligne* de f le long de γ comme :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt, \tag{B.1}$$

Nous allons maintenant rappeler la notion d'indice.

Définition B.1.2 *Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe fermée de classe C^1 par morceaux et soit $z \notin \gamma^*$. On appelle indice de γ par rapport à z le nombre défini par*

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,dt.$$

Donnons quelques propriétés clés de l'indice. Pour une démonstration de ce résultat, on pourra se reporter à [10].

Proposition B.1.3 *Soit γ une courbe fermée de classe C^1 par morceaux. Alors*

(a) *$n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

(b) $z \longmapsto n(\gamma, z)$ *est constante sur chaque composante connexe de* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

(c) $n(\gamma, z)$ *s'annule sur la composante connexe non bornée de* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Finalement on a le résultat suivant très intuitif mais dont la démonstration n'est pas si facile...(voir par exemple [9]).

Théorème B.1.4 (Théorème de Jordan) *Soit γ une courbe fermée, simple, de classe C^1 par morceaux. Alors $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ a exactement deux composantes connexes. De plus, la frontière de chacune d'elles est égale à γ^*.*

Il suit de la proposition B.1.3 et du théorème de Jordan que si γ est une courbe fermée, simple, de classe C^1 par morceaux, alors $n(\gamma, z)$ prend seulement deux valeurs : sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $n(\gamma, z) \equiv 0$; sur la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $n(\gamma, z)$ est soit identiquement égale à 1, soit identiquement égale à -1.

Nous allons maintenant définir l'orientation d'une courbe ou d'un système de courbes.

Définition B.1.5 *Soit $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux. On note*

$$\gamma^* = \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_j^*$$

et pour $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, on pose

$$n(\gamma, z) = \sum_{j=1} n(\gamma_j, z).$$

On dit que γ est positivement orientée si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) $\gamma_i^* \cap \gamma_j^* = \emptyset$, $i \neq j$.

(b) *chaque courbe fermée γ_j est simple.*

(c) $n(\gamma, z) = 0$ *ou 1*, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

L'intérieur de γ, noté Ext(γ), est défini par

$$Int(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : n(\gamma, z) = 1\}.$$

L'extérieur de γ, noté Ext(γ), est défini par

$$Ext(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : n(\gamma, z) = 0\}.$$

Si f est continue sur un voisinage de γ^*, on posera

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

Etant donné un compact K dans un ouvert Ω du plan complexe, le résultat suivant affirme l'existence l'existence d'un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux et positivement orienté, qui "entoure" K dans Ω. Ce résultat assez intuitif possède une preuve dont l'idée est simple mais dont les détails techniques sont un peu fastidieux. On pourra se reporter à [3] ou [10].

Proposition B.1.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact contenu dans Ω. Alors il existe un système de courbes fermées dans $\Omega \setminus K$, $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, de classe C^1 par morceaux, positivement orienté, tel que*

$$K \subset Int(\gamma) \quad et \quad \mathbb{C} \setminus \Omega \subset Ext(\gamma).$$

Définition B.1.7 *On dit qu'un système de courbes fermées de classe C^1 par morceaux $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ entoure le compact K dans Ω si les conditions suivantes sont réalisées :*

(a) $\gamma^* \subset \Omega \setminus K$.

(b) *γ est positivement orienté.*

(c) $K \subset Int(\gamma)$ *et* $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset Ext(\gamma)$.

Exemple B.1.8 *Considérons l'ouvert $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : 1/8 < |z| < 2\}$ et le compact $K := \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \le |z| \le 1\}$. Notons $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois courbes fermées* *définies, pour $t \in [0,1]$, par*

$$\gamma_1(t) = \frac{3}{2}e^{2i\pi t}, \quad \gamma_2(t) = \frac{1}{4}e^{-2i\pi t}, \quad \gamma_3(t) = \frac{1}{4}e^{2i\pi t}.$$

Alors on vérifie facilement que les deux systèmes $\{\gamma_1\}$ et $\{\gamma_1, \gamma_3\}$ n'entourent pas le compact K dans Ω. Par contre, le système $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ entoure le compact K dans Ω.

Nous pouvons maintenant énoncer les deux résultats principaux que nous allons chercher par la suite à généraliser dans le cadre vectoriel. Pour une preuve de ces résultats classiques, on pourra se reporter à [6, 3, 10, 13].

Proposition B.1.9 (Théorème de Cauchy scalaire) *Soient Ω un ouvert du plan complexe, γ_1 et γ_2 deux systèmes de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux, et contenues dans l'ouvert Ω. Si, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $Ind_{\gamma_1}(z) = Ind_{\gamma_2}(z)$, alors pour toute fonction f holomorphe sur Ω, on a*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

Proposition B.1.10 (Formule de Cauchy scalaire) *Soient K un compact contenu dans un ouvert Ω du plan complexe. Si le système de courbes fermées γ entoure le compact K dans Ω, alors pour toute fonction f holomorphe sur Ω, on a*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^{n+1}}\, d\lambda, \qquad z \in K, n \in \mathbb{N}.$$

B.2 Intégration des fonctions réglées à valeurs vectorielles

Nous allons dans ce paragraphe développer la notion d'intégrale de Riemann pour des fonctions (réglées) à valeurs vectorielles. Cela sera ensuite utilisé pour intégrer des fonctions complexes à valeurs vectorielles et ainsi donner un sens aux propositions B.1.9 et B.1.10 dans le cadre vectoriel.

Définition B.2.1 *Une fonction $f : I = [a,b] \longrightarrow E$ est appelée fonction en escalier s'il existe une partition*

$$P : a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$$

telle que f est constante sur chacun des intervalles $]t_{j-1}, t_j[$. L'ensemble $\mathcal{E}(I,E)$ de toutes les fonctions en escalier forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(I,E)$.

Pour chaque fonction f en escalier (définie à partir de la partition P ci-dessus), on appelle intégrale de f l'élément de E défini par

$$\int_a^b f(t)\,dt := \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) f(\zeta_j), \tag{B.2}$$

avec $\zeta_j \in]t_{j_1}, t_j[$.

Il est facile de montrer que la valeur du membre de droite de (B.2) ne dépend pas de la partition P choisie et donc l'intégrale est bien définie.

Lemme B.2.2 *L'application $\mathfrak{J} : \mathcal{E}(I,E) \longrightarrow E$, définie par*

$$\mathfrak{J}f := \int_a^b f(t)\,dt, \qquad (f \in \mathcal{E}(I,E)),$$

est une application linéaire continue de $(\mathcal{E}(I,E), \|\cdot\|_\infty)$ dans E. De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}(I,E)$, on a

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Preuve : tout découle facilement de la définition et des calculs suivants (qui utilisent l'inégalité triangulaire) :

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) f(\zeta_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \|f(\zeta_j)\| \\ &= \int_a^b \|f(t)\|\,dt \leq \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \|f\|_\infty = (b-a)\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Définition B.2.3 *L'ensemble des fonctions réglées $\mathcal{R}(I, E)$ est définie comme l'adhérence de $\mathcal{E}(I, E)$ dans l'espace de Banach $(\mathcal{B}(I, E), \|\cdot\|_\infty)$. Autrement dit, une fonction bornée $f : I \longrightarrow E$ est dite réglée si et seulement si il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur I.*

Théorème B.2.4 *L'application $\mathfrak{J}$ se prolonge (de façon unique) en une application linéaire continue de $\mathcal{R}(I, E)$ dans E. On désignera encore par $\mathfrak{J}$ cette extension et pour $f \in \mathcal{R}(I, E)$, on écrira aussi*

$$\mathfrak{J}(f) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{R}(I, E)$ et toute forme linéaire continue φ sur E, on a

(a) $\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt \leq (b-a)\|f\|_\infty$.

(b) $\varphi\left(\int_a^b f(t)\, dt \right) = \int_a^b \varphi(f(t))\, dt$.

Preuve : L'unicité du prolongement découle de la densité de $\mathcal{E}(I, E)$ dans $\mathcal{R}(I, E)$. Maintenant, soit $f \in \mathcal{R}(I, E)$; alors il existe une suite $f_n \in \mathcal{E}(I, E)$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, $n \to +\infty$. Or

$$\|\mathfrak{J}(f_n) - \mathfrak{J}(f_p)\| = \|\mathfrak{J}(f_n - f_p)\| \leq (b-a)\|f_n - f_p\|_\infty.$$

On en déduit que $(\mathfrak{J} f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E complet, donc elle converge. Notons

$$\mathfrak{J} f := \lim_{n \to +\infty} \mathfrak{J} f_n.$$

Il est clair que $\mathfrak{J}$ définit une application linéaire continue sur $\mathcal{R}(I, E)$. Le point (a) vient immédiatement du lemme B.2.2.

Pour le point (b), remarquons que si $f \in \mathcal{E}(I, E)$, alors on a

$$\varphi\left(\int_a^b f(t)\, dt \right) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) f(\zeta_j) \right) = \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \varphi(f(\zeta_j)) = \int_a^b \varphi(f(t))\, dt.$$

Le résultat découle alors d'un passage à la limite en utilisant la continuité de φ.

$\square$

Théorème B.2.5 *Toute fonction continue $f : I \longrightarrow E$ est réglée.*

Preuve : Comme f est continue sur le compact $I = [a, b]$, il suit du théorème de Heine que f est uniformément continue. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a, b]$ satisfaisant $|x - y| \leq \delta$, on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$. Soit $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ une partition tel que $\max_{1 \leq j \leq n}(t_j - t_{j-1}) \leq \delta$. Définissons

$$g(a) = f(a) \quad \text{et} \quad g(t) = f(t_j), \quad t_{j-1} < t \leq t_j.$$

Alors $g \in \mathcal{E}(I, E)$ et pour tout $t \in [a, b]$, on a $\|g(t) - f(t)\| \leq \varepsilon$, i.e. $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. On en déduit donc que $f \in \mathcal{R}(I, E)$.

□

Remarque B.2.6 *Les fonctions réglées peuvent se caractériser comme les fonctions qui admettent une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $[a, b]$ (voir [1]). Donc en particulier, les fonctions continues par morceaux sont aussi réglées.*

Définition B.2.7 *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1 par morceaux et soit f une fonction continue sur un voisinage de γ^* à valeurs dans E. Alors on définit l'intégrale curviligne de f le long de γ comme*

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt. \tag{B.3}$$

En remarquant que la formule dite "de changement de variable" s'applique aussi aux intégrales vectorielles (exercice !), il est facile de voir que le membre de droite de (B.3) ne dépend que de f et de γ et non de la paramétrisation choisie.

On déduit immédiatement du théorème B.2.4 le résultat suivant.

Théorème B.2.8 *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1 par morceaux et soit f une fonction continue sur un voisinage de γ^* à valeurs dans E. Alors,*

(a) $\left\|\int_\gamma f(z)\, dz\right\| \leq \int_\gamma \|f(z)\|\, |dz| = \int_a^b \|f(z(t))\| |z'(t)|\, dt.$

(b) *Pour toute forme linéaire φ continue sur E, on a* $\varphi\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma \varphi(f(z))\,dz$.

Nous terminons par une proposition utile dans le cadre des algèbres de Banach.

Proposition B.2.9 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1 par morceaux et soit f une fonction continue sur un voisinage de γ^* à valeurs dans $\mathcal{A}$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a*

$$x\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma xf(z)\,dz, \tag{B.4}$$

et

$$\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right)x = \int_\gamma f(z)x\,dz. \tag{B.5}$$

Preuve : Pour démontrer (B.4), soit M_x l'opérateur de multiplication à gauche par x et soit Λ une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}$. Alors ΛM_x est une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}$ et on peut appliquer le théorème B.2.8 (b) qui donne

$$\Lambda\left(x\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \Lambda M_x\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma \Lambda M_x(f(z))\,dz = \int_\gamma \Lambda(xf(z))\,dz.$$

En réappliquant le théorème B.2.8 (b) au membre à droite de cette dernière égalité, on obtient que

$$\Lambda\left(x\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right)\right) = \Lambda\left(\int_\gamma xf(z)\,dz\right).$$

Le théorème de Hahn-Banach (voir corollaire A.2.2) permet alors d'en déduire (B.4). Pour démontrer (B.5), il suffit d'utiliser le même raisonnement avec l'opérateur de multiplication à droite.

□

B.3 Fonctions holomorphes à valeurs vectorielles

Dans ce paragraphe, nous allons développer la théorie des fonctions holomorphes à valeurs vectorielles. Nous allons en fait donner un peu plus de détails et de résultats que ce qui est réellement utilisé dans ce cours. Notamment, dans une première lecture, on pourra porter son attention uniquement sur les théorèmes B.3.5, B.3.7 et B.3.9.

Comme nous allons le voir, beaucoup de résultats de la théorie des fonctions holomorphes à valeurs scalaires s'étend (sans aucun changement ou presque) au cas vectoriel. L'idée étant la plupart du temps de scalariser le problème (en appliquant une forme linéaire continue), d'utiliser les résultats du cas scalaire et de revenir au cas vectoriel avec le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.2.2). Même si cette idée est assez simple, nous allons prendre le temps de donner les détails....

Définition B.3.1 *Soit Ω un ouvert du plan complexe, E un espace de Banach et $f : \Omega \longrightarrow E$. On dit que f est holomorphe sur Ω si elle est dérivable en tout point $z_0 \in \Omega$, i.e. si la limite suivante*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

existe et est finie.

On dit que f est faiblement holomorphe sur Ω si pour tout élément φ du dual de E, la fonction (à valeurs complexes) $\varphi \circ f$ est holomorphe sur Ω.

Nous notons $\mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω à valeurs dans E. Dans le cas où $E = \mathbb{C}$, on note plus simplement $\mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega) = \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, \mathbb{C})$.

Il est évident que toute fonction holomorphe est faiblement holomorphe. En fait, nous allons montrer que la réciproque est aussi vraie. Commençons par un lemme.

Lemme B.3.2 *Soit $f : \Omega \longrightarrow E$ une fonction faiblement holomorphe. Alors f est continue sur Ω.*

Preuve : Soit $a \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$.

Considérons le sous-ensemble de E défini par

$$M = \left\{ \frac{f(z) - f(a)}{z - a} : 0 < |z - a| \leq r \right\}.$$

Montrons que M est faiblement borné. Pour cela considérons $u \in E^*$. Alors, puisque la fonction $u \circ f$ est holomorphe sur Ω, la fonction g, définie par

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{u(f(z)) - u(f(a))}{z - a}, & \text{si } 0 < |z - a| \leq r \\ (u \circ f)'(a), & \text{si } z = a \end{cases}$$

est une fonction continue du compact $\overline{B}(a, r)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Donc l'image $g(\overline{B}(a, r))$ est un compact de $\mathbb{C}$. Clairement $u(M) \subset g(\overline{B}(a, r))$ et donc $u(M)$ est bornée. Comme cela est vrai pour tout $u \in E^*$, cela signifie que M est faiblement borné. D'après le corollaire A.2.4, cela implique que M est borné. Autrement dit, il existe une constante $K = K(a, r, f) > 0$ telle que pour tout z, $0 < |z - a| \leq r$, on ait

$$\left\| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right\| \leq K,$$

d'où

$$\|f(z) - f(a)\| \leq K|z - a|.$$

Cette dernière inégalité entraine en particulier que f est continue en a.

$\square$

Pour montrer qu'une fonction faiblement holomorphe est holomorphe, nous allons montrer qu'elle vérifie la formule de Cauchy.

Théorème B.3.3 *Soit $f : \Omega \longrightarrow E$ une fonction faiblement holomorphe et $a \in \Omega$. Alors*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} \, dz,$$

où γ est un système de courbes fermées dans Ω, de classe C^1 par morceaux et qui entoure $\{a\}$.

Preuve : Pour chaque $u \in E^*$, la fonction $u \circ f$ est holomorphe sur Ω. La formule de Cauchy scalaire (proposition B.1.10) donne alors

$$u(f(a)) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{u(f(z))}{z-a}\, dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma u\left(\frac{f(z)}{z-a}\right)\, dz.$$

On applique alors le théorème B.2.8 qui entraine que

$$u(f(a)) = u\left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz\right).$$

Cette dernière égalité etant vraie pour tout $u \in E^*$, le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.2.2) permet alors de conclure que

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

□

Théorème B.3.4 *Toute fonction faiblement holomorphe $f : \Omega \longrightarrow E$ est holomorphe. De plus, pour chaque $a \in \Omega$, on a*

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz,$$

où γ_r est n'importe quel cercle positivement orienté $\gamma_r : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = a + re^{2i\pi t}$, satisfaisant $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$.

Preuve : D'après le lemme B.3.2, la fonction f est continue sur Ω donc en particulier sur le compact γ_r^*. D'où :

$$K := \sup_{|z-a|=r} \|f(z)\| < +\infty.$$

Considérons maintenant $0 < \delta < r/2$ et choisissons $b \in \Omega$ tel que $0 < |b-a| < \delta$. Alors il est clair que γ_r est une courbe fermée dans Ω, de classe C^1 et qui entoure à la fois $\{a\}$ et $\{b\}$. Le théorème B.3.3 permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{1}{b-a}\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \left[\frac{f(z)}{z-b} - \frac{f(z)}{z-a}\right] dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right\| &= \frac{1}{2\pi}\left\|(b-a)\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2(z-b)}\,dz\right\| \\ &\le \frac{|b-a|}{2\pi}\int_{\gamma_r}\frac{\|f(z)\|}{|z-a|^2|z-b|}\,|dz|.\end{aligned}$$

Pour $z\in\gamma_r^*$, remarquons que $|z-a|=r$, $\|f(z)\|\le K$ et par l'inégalité triangulaire, on a aussi

$$|z-b|\ge|z-a|-|a-b|\ge r-\delta\ge\frac{r}{2}.$$

Ainsi on obtient

$$\left\|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right\|\le\frac{2K\delta}{r^2}. \tag{B.6}$$

Cette inégalité implique que la limite

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

existe et est finie. Ceci signifie donc que f est dérivable en tout point a de Ω et donc f est homomorphe sur Ω. De plus, d'après (B.6), on a

$$f'(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz.$$

□

Théorème B.3.5 (Théorème de Cauchy) *Soient Ω un ouvert du plan complexe, γ_1 et γ_2 deux systèmes de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux, et contenues dans l'ouvert Ω. Si, pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$, $Ind_{\gamma_1}(z)=Ind_{\gamma_2}(z)$, alors pour toute fonction $f\in\mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega,E)$, on a*

$$\int_{\gamma_1}f(z)\,dz=\int_{\gamma_2}f(z)\,dz.$$

Preuve : Pour chaque $u\in E^*$, la fonction $u\circ f$ est holomorphe sur Ω. Le théorème de Cauchy scalaire (proposition B.1.9) donne alors

$$\int_{\gamma_1}u(f(z))\,dz=\int_{\gamma_2}u(f(z))\,dz.$$

On applique alors le théorème B.2.8 qui entraine que

$$u\left(\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right) = \int_{\gamma_1} u(f(z))\,dz = \int_{\gamma_2} u(f(z))\,dz = u\left(\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right).$$

Comme l'égalité est vraie pour tout élément $u \in E^*$, le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.2.2) permet alors de conclure que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

$\square$

Théorème B.3.6 (Formule de Cauchy) *Soit Ω un ouvert du plan complexe. Toute fonction $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ est indéfiniment dérivable (au sens complexe) sur Ω. De plus, pour tout point $a \in \Omega$ et chaque entier $n \geq 0$, on a*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz, \tag{B.7}$$

où γ est un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux et qui entoure le compact $\{a\}$ dans Ω.

Preuve : Pour montrer que f est indéfiniment dérivable, nous allons raisonner par récurrence. Tout d'abord, d'après le lemme B.3.2, nous savons déjà que f est continue sur Ω. Supposons maintenant que f est n-fois dérivable sur Ω. Pour tout élément $u \in E^*$, la fonction (complexe) $u \circ f$ est holomorphe sur Ω donc $(n+1)$-fois dérivable sur Ω. Mais comme u est linéaire, on a $(u \circ f)^{(n)} = u \circ f^{(n)}$. Ceci implique que la fonction $u \circ f^{(n)} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable. Autrement dit, la fonction $f^{(n)}$ est faiblement holomorphe sur Ω, donc holomorphe sur Ω (i.e. dérivable sur Ω), d'après le théorème B.3.4. Ainsi f est $(n+1)$-fois dérivable sur Ω. Par récurrence, on en déduit que f est indéfiniment dérivable sur Ω.

Pour montrer la formule (B.7), considérons $u \in E^*$. Comme la fonction $u \circ f$ est holomorphe sur Ω on peut appliquer les formules de Cauchy scalaire (proposition B.1.9) qui donnent alors

$$(u \circ f)^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{u(f(z))}{(z-a)^{n+1}}\,dz,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où γ est un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux et qui entoure le compact $\{a\}$ dans Ω. On applique alors le théorème B.2.8 qui entraine que

$$(u \circ f)^{(n)}(a) = u\left(\frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right).$$

Par linéarité de u, on a $(u \circ f)^{(n)}(a) = u(f^{(n)})(a)$ et donc

$$u(f^{(n)})(a) = u\left(\frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right).$$

Comme l'égalité est vraie pour tout élément $u \in E^*$, le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.2.2) permet alors de conclure que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

□

Théorème B.3.7 (Développement en série entière) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$. *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ *et tout point* $z_0 \in \Omega$, *la série entière :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

converge uniformément et normalement sur tout compact contenu dans le disque ouvert $D(z_0, \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c))$ *et sa somme est égale à* $f(z)$ *en tout point de ce disque. Cette série (appelée la série de Taylor de* f *en* z_0*) est l'unique série entière de la forme* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $a_n \in E$, *dont la somme est* f *dans le disque mentionné. Le rayon de convergence est au moins* $\mathrm{dist}(z_0, \Omega^c)$.

Remarque B.3.8 *On a noté* $\mathrm{dist}(z_0, \Omega^c)$ *la distance de* z_0 *à* Ω^c *si* $\Omega^c \neq \emptyset$ *et* $+\infty$ *sinon.*

Preuve : Soient $0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c)$, $z, \zeta \in \mathbb{C}$ tels que $|z - z_0| = r$ et $|\zeta - z_0| < r$. Nous avons alors

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}},$$

cette série étant normalement convergente sur tout compact de la forme $K \times \partial B(z_0, r)$ avec K compact contenu dans $B(z_0, r)$. Nous pouvons alors appliquer la formule de Cauchy (théorème B.3.6) et intervertir l'ordre de l'intégration et de la sommation, ce qui donne

$$\begin{aligned} f(\zeta) =& \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \right) (\zeta - z_0)^n \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (\zeta - z_0)^n. \end{aligned}$$

Les autres propriétés découlent immédiatement des propriétés classiques sur les séries entières.

$\square$

Pour plus de détails sur les séries entières à valeurs vectorielles, on pourra consulter [12] mais la théorie est la même que pour les séries entières à valeurs scalaires.

Théorème B.3.9 (Liouville) *Toute fonction f holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, à valeurs dans E, est constante.*

Preuve : On peut déduire ce résultat du théorème de Liouville pour les fonctions à valeurs scalaires. On peut aussi donner une preuve directe. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, les formules de Cauchy peuvent s'appliquer sur tout cercle γ_r de centre z_0 et de rayon $r > 0$ parcouru une fois dans le sens positif. D'où

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Notons $M := \|f\|_\infty$. Le théorème B.2.8 implique alors que

$$\|f^{(n)}(z_0)\| \leq \frac{n! \|f\|_\infty}{r^n},$$

et donc, en faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient que $f^{(n)}(z_0) = 0$, pour tout $n \geq 1$. Le théorème B.3.7 permet alors de conclure que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = f(z_0)$.

$\square$

Proposition B.3.10 *Soit* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$, $r > 0$ *et* $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$. *Si* f *est bornée sur* Ω, *alors* f *se prolonge en une unique fonction* $\widetilde{f}$ *holomorphe dans* $D(a, r)$.

Preuve : Considérons $g : D(a, r) \longrightarrow E$ la fonction défnie par

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & \text{si } 0 < |z-a| < r \\ 0 & \text{si } z = a. \end{cases}$$

Il est clair que g est holomorphe sur Ω et continue sur $B(a, r)$. Maintenant si $u \in E^*$, alors la fonction scalaire $u \circ g$ a les mêmes propriétés, elle est holomorphe sur Ω et continue sur $D(a, r)$. Il est alors bien connu (c'est une conséquence très simple du théorème de Morera, voir [6] par exemple) que $u \circ g$ est holomorphe sur $D(a, r)$. Ainsi g est faiblement holomorphe sur $D(a, r)$ donc holomorphe. On peut alors appliquer le théorème B.3.7 qui dit que pour $z \in D(a, r)$, on a

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

où la série converge normalement sur tout compact de $D(a, r)$. Comme $g(a) = 0$, on peut alors écrire $g(z) = (z - a)\widetilde{f}(z)$, avec

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^n.$$

La théorie des séries entières nous dit alors que $\widetilde{f}$ est holomorphe dans $D(a, r)$ et de plus, on a bien $f(z) = \widetilde{f}(z)$, pour $z \in \Omega$. L'unicité est immédiate (par continuité).

$\square$

Théorème B.3.11 (Principe de prolongement analytique) *Soient Ω un ouvert connexe du plan complexe, E un sous-ensemble de Ω possédant un point d'accumulation dans Ω. Si $f, g \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ et si $f(z) = g(z)$ pour $z \in E$, alors $f \equiv g$.*

Preuve : On déduit ce résultat de l'analogue scalaire. Soit $u \in E^*$. Alors $u \circ f$ et $u \circ g$ sont deux fonctions holomorphes sur Ω, à valeurs scalaires, qui coincident sur un sous-ensemble E. Comme E possède un point d'accumulation dans Ω, alors $u \circ f \equiv u \circ g$. Le corolllaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.2.2) permet alors de conclure que $f \equiv g$.

$\square$

Bibliographie

[1] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès. *Cours de Mathématiques, tome 2 : analyse*. Dunod Université, 1972.

[2] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod, 1983.

[3] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1978.

[4] John B. Conway. *A course in operator theory*, volume 21 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[5] Ronald G. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory*. Academic Press, New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 49.

[6] Carlos Berenstein et Roger Gay. *Complex variables*, volume 125 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. An introduction.

[7] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2004.

[8] Tsoy-Wo Ma. *Banach-Hilbert spaces, vector measures and group representations*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2002.

[9] Eric Amar et Etienne Matheron. *Analyse complexe*. Cassini, 2004.

[10] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[11] Walter Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[12] Laurent Schwartz. *Analyse. I.* Collection Enseignement des Sciences, Vol. 42. Hermann, Paris, 1991. Théorie des ensembles et topologie., avec la collaboration de K. Zizi.

[13] Alain Yger. *Analyse complexe et distributions.* Collection Mathématiques 2ième. Ellipses, 2001.