Université de Lille 1 Sciences et Technologies

UFR de Mathématiques

Travaux Dirigés - Maths 21

Partie Analyse

L1 SESI-PEIP

2015-2016

Important. Le programme est découpé en quatre chapitres. Le volume horaire total en heures TD est de 28 heures, il est donc fortement conseillé aux enseignants de TD de respecter, approximativement, le volume horaire suivant :

1. **Primitives et intégrales.** 10 heures
2. **Développements limités.** 8 heures
3. **Courbes paramétrées.** 5 heures
4. **Equations différentielles.** 5 heures

Conseils aux étudiants. Pour acquérir les différentes notions abordées dans cette partie, outre une bonne connaissance du cours, il est opportun de fournir un travail personnel en traitant le maximum d'exercices.

• L'opération d'intégration est une opération inverse de celle de la dérivation. C'est le théorème fondamental de l'analyse. Ainsi, pour bien aborder le premier chapitre, le formulaire des dérivées des fonctions usuelles devra être parfaitement connu.

• L'intérêt des développements limités est essentiellement pratique. Il faut savoir les calculer rapidement et étudier leurs applications en analyse. Cela demande de pratiquer un assez grand nombre d'exercices calculatoires. C'est avant tout un calcul sur les polynômes où il faut apprendre à prévoir l'ordre d'un développement limité et savoir l'utiliser pour déterminer des équivalents ou des limites et faire une étude locale ou de branches infinies.

• Vous rencontrerez régulièrement les équations différentielles du premier et du second ordre en mathématiques, en physique, en chimie et en sciences de l'ingénieur. Il est donc impératif de bien maîtriser les techniques de résolution. Indirectement, vous allez revoir les techniques de calcul des primitives. Il est conseillé à ce sujet de connaitre parfaitement les primitives des fonctions usuelles.

Maths 21 **Feuille n^o 1**

Primitives et intégrales

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x=0 \\ 1 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 3 & \text{si} \quad x=1 \\ -2 & \text{si} \quad 1<x\leq 2 \\ 4 & \text{si} \quad 2<x\leq 3. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f et calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On définit la fonction F sur $[0,3]$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Donner une expression de F ne faisant pas intervenir le symbole d'intégration.
   (b) Montrer que F est continue sur $[0,3]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,3]$?

Exercice 2. Soit $f(x)=\mathbb{E}(x)$, où $\mathbb{E}(x)$ désigne la partie entière de $x\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est une fonction croissante sur tout intervalle $[a,b]$.
2. Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x \mathbb{E}(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est bien définie, et puis calculer $F(x)$.

Exercice 3. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^3}\ , \qquad \int \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int \cos x\sin^3 x\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}\ , \qquad \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int \tan x\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\ , \qquad \int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4}\ , \qquad \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\ .$$

Exercice 4. A l'aide d'intégrations par parties, calculer les primitives suivantes :

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int \arcsin x\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int x\arctan x\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int (x^2-2x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int (x^2+x)\sin x\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x\ .$$

Exercice 5. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \ ; \qquad \int \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \ ; \qquad \int \cos(3x)\sin(5x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes :

$$1)\ \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \ ; \qquad 2)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)^3} \ ; \qquad 3)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} \ ;$$

$$4)\ \int \frac{x+3}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \ ; \qquad 5)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} \ ; \qquad 6)\ \int \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x \ ;$$

$$7)\ \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} \ ; \qquad 8)\ \int \frac{x^3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \ ; \qquad 9)\ \int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x^2+1)} \ .$$

Exercice 7. Calculer, à l'aide de changements de variables, les primitives suivantes :

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \ ; \qquad \int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x \ ; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+2\sin^2 x} \ ; \qquad \int \frac{\cos x+\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x \ ;$$

$$\int \frac{\tan x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \ ; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^2 x} \ ; \qquad \int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x \ ; \qquad \int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,\mathrm{d}x \ .$$

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.

1. Etablir la relation de récurrence : $2nF_{n+1}(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)F_n(x)$.
2. Donner $F_1(x)$ et en déduire $F_2(x)$.
3. A l'aide du changement de variables $u = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, calculer $\displaystyle\int \frac{x+2}{x+1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \ln^2 x\,\mathrm{d}x \ ; \qquad \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \ , \qquad \int_1^2 x\sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x \ , \qquad \int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \ ,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x \ , \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \ , \qquad \int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x \ , \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x \ .$$

Exercice 10. Calculer, à l'aide de changements de variables, les intégrales suivantes :

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}} \ ; \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \ , \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}} \ ,$$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x \ , \qquad \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x \ , \qquad \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} \ , \ a \in \mathbb{R}^*$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \ , \qquad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} \ , \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x+2\sin^2 x} \ .$$

Exercice 11. On considère les deux intégrales

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \, \mathrm{d}x.$$

1. A l'aide du changement de variables $u = \pi - x$, exprimer I en fonction de J.
2. Calculer J et en déduire la valeur de I.

Exercice 12. Soit a un réel strictement positif. A l'aide du changement de variables $u = \dfrac{1}{x}$, calculer l'intégrale

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 13. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2 - \sin^2 t}}$ et $T = f(\pi/2)$.

1. Déterminer le domaine de définition et étudier la parité de f.
2. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Montrer que la fonction g telle que $g(x) = f(x + \pi) - f(x)$ est une constante à exprimer en fonction de T.

Exercice 14. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.

1. Etudier le signe et la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et en déduire qu'elle converge.
2. Etablir la relation de récurrence : $u_{n+1} = -\mathrm{e}^{-1} + (n + 1)u_n$.
3. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 15. En exprimant les suites suivantes comme sommes de Riemann de fonction à préciser, calculer leur limite :

$$1.\ \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}, \qquad 2.\ \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}, \qquad 3.\ \sum_{k=1}^{n} \frac{n + k}{n^2 + k^2},$$

$$4.\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}, \qquad 5.\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{(n + 2k - 1)(n + 2k)}{n^2}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 16. Soit a et b deux réels non nuls. On considère les primitives suivantes :

$$F(x) = \int e^{ax} \cos(bx) \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad G(x) = \int e^{ax} \sin(bx) \, \mathrm{d}x.$$

1. En intégrant deux fois par parties, déterminer F et G.
2. En utilisant qu'un sinus ou un cosinus s'exprime à l'aide des exponentielles imaginaires, déterminer F et G.

Exercice 17. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x}\ , \qquad \int \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int \frac{\cos x - \sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}}\ , \qquad \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^4)^2}\ , \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+x+1}}\ ,$$

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}\ , \qquad \int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Exercice 18. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes d'équtions $y = \dfrac{x^2}{2}$ et $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 19. Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Prouver que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \mathrm{e}^{-2x}\ln 2 \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}\ln 2.$$
Etablir une inégalité analogue sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. En déduire que l'on peut prolonger f par continuité en 0. On note encore f la fonction ainsi prolongée.
4. Etudier les limites de f à l'infini.
5. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
6. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer la position de son graphe par rapport à la tangente en ce point.
7. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

Exercice 20. On définit la suite $(u_n)_{n>0}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

1. Etudier le signe et la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle converge.
2. A l'aide de la relation, $u_n = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} + \int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$, vraie pour tout $a \in [0,1]$, montrer que $u_n \leq n^{-\frac{1}{4}} + \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. En majorant la fonction intégrande, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_{n+1} + I_n$, et exprimer I_n en fonction de n.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 22. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. En déduire la valeur de I_n (distinguer deux cas selon la parité de n).

Exercice 23. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a + b - x)\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 24. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'elle est périodique de période $T > 0$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ est indépendante de $a \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{nT} f(x)\,\mathrm{d}x = n \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier $n > 0$.
3. Application : calculer $\displaystyle\int_a^{a+\frac{2n\pi}{\omega}} \sin(\omega x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^{a+\frac{2\pi}{3}} \sin(6x)\cos(15x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 25. Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.

1. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ et qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.
2. En déduire que si f est positive sur $[a, b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est identiquement nulle.
3. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer qu'il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
4. Application : On suppose que $a = 0$, que $b = 1$ et que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0, 1]$ tel que $f(d) = d$.

Formules de Taylor - Développements Limités

Exercice 1.

1. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction exp, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$.
2. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 2. Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$.

Exercice 3. Former le développement limité en 0 à l'ordre n indiqué entre parenthèses de chacune des fonctions définies par :

1. $\sin x \cos 2x$, (4) ; 2. $e^x\sqrt{1+x}$, (3) ; 3. $\cos^2 x$, (4) ;

4. $\tan^2 x$, (6) ; 5. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, (4) ; 6. $\dfrac{1}{1+\sin x}$, (3) ;

7. $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$, (3) ; 8. $\ln(1+\sin x)$, (3) ; 9. $\ln(\cos x)$, (4) ;

10. $\sqrt{1+\sin x}$, (3) ; 11. $\arctan(1+x)$, (3) ; 12. $(\arcsin x)^2$, (6) ;

13. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$, (4) ; 14. $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x - \ln(1+x)}$, (2) ; 15. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, (3) .

Exercice 4. Former le développement limité en a à l'ordre n de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x},\ a = 2$ et $n = 2$; 2. $f(x) = \tan x,\ a = \dfrac{\pi}{4}$ et $n = 3$;

3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2},\ a = 1$ et $n = 3$; 4. $f(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t \,\mathrm{d}t,\ a = 1$ et $n = 4$.

Exercice 5. Former le développement limité au voisinage de $\pm\infty$ à l'ordre n de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ avec $n = 3$.
2. $f(x) = \arctan x$ avec $n = 3$.
3. $f(x) = \arctan \dfrac{x}{1+x}$ avec $n = 3$.
4. $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$ avec $n = 2$.

Exercice 6. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\cos x - 1}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sin^2 x}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\tan x - \sin x}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left[\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right]$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$;
9. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2 \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}}\right)$;
10. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\frac{\pi x}{4}}$.

Exercice 7. Justifier que la fonction f est dérivable en a, donner l'équation de la tangente en a et préciser la position du graphe par rapport à cette tangente dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt[3]{1+2x} - \sqrt{4+x}$ avec $a = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$ avec $a = 0$.
3. $f(x) = \dfrac{2x\ln x}{x-1}$ avec $a = 1$ (on prolongera f par continuité en 1).

Exercice 8. Etudier les branches infinies du graphe de la fonction f, lorsque $|x| \to +\infty$, dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{4x^2+1}$;
2. $f(x) = x^2 \ln \dfrac{x+1}{x}$;
3. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$;
4. $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\arctan x$.

Exercices supplémentaires

Exercice 9.

1. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire une valeur approchée de $\ln(1,1)$ à 10^{-5} près.

Exercice 10.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \theta \in]0,1[$ tel que : $\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^6}{6}\mathrm{e}^{-\theta x^2}$.
2. En déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et donner un majorant de l'erreur commise.

Exercice 11. Soient $f(x) = \dfrac{2+x}{(1+x)^2}e^{-x}$, $g(x) = \dfrac{2-x-2x^2}{1+2x}$ et $h(x) = \dfrac{2+x-3x^2}{1+3x+2x^2}$.

1. Former les développements limités en 0 à l'ordre 3 de f, g et h
2. Des fonctions g et h, laquelle réalise la meilleure approximation de f au voisinage de 0.

Exercice 12. Déterminer les réels a, b, c, d de sorte qu'au voisinage de 0 la fonction f soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{\ln(1+x)} - \dfrac{b}{e^x - 1}$.
2. $f(x) = \cos x - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$.
3. $f(x) = e^x - a\cos x - b\sin x - c\cos 2x - d\sin 2x$.
4. $f(x) = \ln(1+ax+bx^2) - \dfrac{x}{1+cx}$.

Exercice 13. Former le développement limité en a à l'ordre n de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{2+x}}$ avec $a = +\infty$ et $n = 3$.
2. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t$ avec $a = 0$ et $n = 9$.
3. $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$ avec $a = 0$ et $n = 8$.

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $[-1,0[\cup]0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{x}$.

1. Former le développement limité de arcsin en 0 à l'ordre 5.
2. En déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
3. Justifier que f admet un prolongement par continuité en 0. On notera f la fonction ainsi prolongée.
4. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la position du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.

Courbes paramétrées

Exercice 1. Déterminer les points stationnaires et l'allure de la courbe au voisinage de ces points dans les cas suivants :

1. $\begin{cases} x(t) = t^4 + 4t \\ y(t) = t^4 - 2t^2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(t) = t^2 + t^3 \\ y(t) = t^2 - t^3. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t. \end{cases}$

Exercice 2. Etudier et tracer les courbes paramétrées définies par

1. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} \\ \\ y(t) = \dfrac{t^3+2}{t}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{1-t^2} \\ \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1-t^2}. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{(t-1)(t+2)} \\ \\ y(t) = \dfrac{t^2-2t}{t-1}. \end{cases}$

Exercice 3. Etudier et tracer la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1}. \end{cases}$$

Déterminer ensuite les coordonnées du point double I et montrer que les tangentes en ce point sont orthogonales.

Exercice 4. On considère la courbe paramétrée

$$\Gamma \ : \ \begin{cases} x(t) = 2t + \dfrac{1}{2t-1} \\ \\ y(t) = t^2 - \dfrac{1}{2t+1}. \end{cases}$$

1. Préciser le domaine de définition de $f : t \mapsto (x(t), y(t))$. Etudier ensuite les variations de x et de y en fonction du paramètre t.
2. (a) Quelle est la nature des branches infinies de Γ lorsque t tend vers $\pm\infty$.
   (b) Montrer que lorsque t tend vers $\dfrac{1}{2}$ (respectivement $-\dfrac{1}{2}$), Γ possède une asymptote dont on précisera l'équation. Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
   (c) Tracer le support de Γ.

Exercice 5. On considère la courbe paramétrée

$$\Gamma \ : \ \begin{cases} x(t) & = & \dfrac{1}{2}(t^2 - 2t) \\ \\ y(t) & = & \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{1}{2}t^2. \end{cases}$$

1. Etudier les variations de x et de y en fonction du paramètre t.
2. Etudier les branches infinies de la courbe.
3. Prouver l'existence d'un point de rebroussement et déterminer la tangente à la courbe en ce point.
4. Tracer le support de Γ.

Exercice 6. Etudier et tracer les courbes paramétrées définies par

1. $\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ \\ y(t) = \sin 3t. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sin^2 t}{2 + \sin t} \\ \\ y(t) = \cos t. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x(t) = \cos t(1 + 2\sin^2 t) \\ \\ y(t) = \sin t(1 + 2\cos^2 t). \end{cases}$

Exercices supplémentaires

Exercice 7. On considère la courbe paramétrée

$$\Gamma \ : \ \begin{cases} x(t) & = & \dfrac{2t - 1}{t^2 - 1} \\ \\ y(t) & = & \dfrac{t^2}{t - 1} \end{cases}$$

1. Tracer le support de Γ.
2. Prouver l'existence d'un point double et calculer les coordonnées de celui-ci.

Exercice 8. On considère la courbe paramétrée

$$\Gamma \ : \ \begin{cases} x(t) & = & \left(t + \dfrac{1}{t}\right) \ln t \\ \\ y(t) & = & \left(t - \dfrac{1}{t}\right) \ln t. \end{cases}$$

1. Calculer $x\left(\dfrac{1}{t}\right)$ et $y\left(\dfrac{1}{t}\right)$. En déduire une réduction du domaine d'étude.
2. Tracer le support de Γ.

Equations différentielles

Exercice 1. Intégrer sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 2xy = x$,
2. $y' + y = \cos x + \sin x$,
3. $y' + 2y = \mathrm{e}^{2x}$,
4. $y' + y = \sin 2x$,
5. $y' - 2xy = \mathrm{sh}x - 2x\mathrm{ch}x$,
6. $y' - 5y = \mathrm{e}^{5x}$,
7. $(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2}$,
8. $(1+x^2)y' + 2xy = x + \mathrm{e}^x$,
9. $y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$,
10. $(1+x^2)^2y' + 2x(1+x^2)y = 1$.

Exercice 2. Résoudre sur les intervalles spécifiés les équations différentielles suivantes :

1. $xy' + y = \sin x$ sur $]0, +\infty[$,
2. $\sin x.y' + \cos x.y = \sin^2 x$ sur $]0, \pi[$,
3. $xy' + y = \mathrm{e}^x$ sur $]0, +\infty[$,
4. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $]-1, 1[$,
5. $\sin x.y' - \cos x.y = 1$ sur $]0, \pi[$,
6. $(x+1)y' + y = 1 - 2x$ sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle (E) : $xy' - (1+x)y = x^2$.

1. Intégrer l'équation (E) sur $I_1 =]0, +\infty[$ et sur $I_2 =]-\infty, 0[$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le lieu des points des courbes intégrales à tangente horizontale.
4. Déterminer le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle (E) : $x(1-x)y' + y = x$.

1. Intégrer (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
2. Montrer que (E) admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.
3. Montrer que (E) n'admet pas de solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 5. Intégrer sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y = x^2 + x$,
2. $y'' - 3y' + 2y = x\mathrm{e}^x$,
3. $y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^x + 2\cos x$,
4. $y'' + 2y' + 2y = x\mathrm{e}^{-x}\sin x$,
5. $y'' + y' = x + \sin(x)$,
6. $y'' + y' - 2y = \sin x\mathrm{e}^x$,
7. $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 x$,
8. $y'' + y' + y = 13\cos 2x$.

Exercices supplémentaires

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$(\star) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + 2\mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'une telle fonction est une solution de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y' - 3y = \cos x - \sin x \text{ avec } y(0) = 0.$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant la condition $(\star)$.

Exercice 7. Déterminer les solutions réelles de chacune des équations différentielles suivantes :

1. $my'' - (1+m^2)y' + my = x\mathrm{e}^x$, où $m \in \mathbb{R}$.
2. $y'' + y' = \tan x$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(1+x)^3}$. On cherchera une solution sous la forme $y(x) = \mathrm{e}^x z(x)$.

Exercice 8. En introduisant la fonction z spécifiée, intégrer sur $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)y'' + (1-2x+x^2)y' - 2xy = 0$ et $z = y' + y$.
2. $y'' + 4xy' + (11+4x^2)y = 0$ et $z(x) = \mathrm{e}^{x^2} y(x)$.
3. $(1+x^2)^2 y'' - 4x(1+x^2)y' - (x^4 - 4x^2 + 3)y = 0$ et $z(x) = \dfrac{y(x)}{1+x^2}$.

Exercice 9. Soit $f\ :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0,\infty[$ vérifiant l'équation

$$(E)\ :\ t^2 f''(t) - tf'(t) + 2f(t) = t\ln t.$$

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par la relation $g(x) = f(t)$, où $t = \mathrm{e}^x$.

1. Monter que g est une solution de l'équation différentielle :

$$(E')\ :\ y'' - 2y' + 2y = xe^x.$$

2. Intégrer (E') sur $\mathbb{R}$ et en déduire les solutions de (E) sur $]0+\infty[$.

Exercice 10. En effectuant le changement de variables proposé, intégrer sur les intervalles I spécifiés les équations différentielles suivantes :

1. $x^2y'' + 3xy' + y = x^2$, $t = \ln x$ et $I =]0, +\infty[$.
2. $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$, $t = \arctan x$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, $t = \arcsin x$ et $I =]-1, 1[$