M53. 2021-2022

Intégrales à paramètres et séries de Fourier.

Très souvent, par exemple lors de la résolution d'équations différentielles, on aboutit au calcul d'une "primitive"

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt. \qquad (1)$$

Dans de nombreux cas, le calcul <u>explicite</u> de $F(x)$ n'est pas possible et il faut donc étudier la fonction $F(x)$ telle qu'elle nous est donnée, c'est à dire sous la forme d'une intégrale (1) dépendant d'un paramètre x. Dans une première partie du cours, nous allons donner des conditions afin que cette fonction $x \longmapsto F(x)$ soit continue / dérivable.

Le point clé dans les démonstrations sera la continuité uniforme.

Nous allons donc commencer par un premier chapitre de rappels sur la continuité uniforme et les intégrales généralisées.

Chapitre I. Rappels : continuité uniforme et intégrales généralisées.

§ I.1. Continuité uniforme.

Définition 1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x, y \in I, \ |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Il est clair que l'uniforme continuité implique la continuité. La réciproque est fausse en général. Par exemple, $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas uniformément continue. En revanche, c'est vrai si I est un compact de $\mathbb{R}$ (c'est à dire un (intervalle) fermé et borné).

Théorème 1 (Théorème de Heine).

Toute fonction continue sur un intervalle fermé, borné est uniformément continue.

preuve: Soit $I = [a, b]$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue. Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue. Alors $\exists \varepsilon > 0, \ \forall \delta > 0,$ $\exists (x, y) \in I \times I$ tel que $|x-y| \leq \delta$ et $|f(x)-f(y)| > \varepsilon$

En particulier, $\forall n \geq 1, \ \exists (x_n, y_n) \in I \times I$ tel que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

Or $(x_n)_n$ est une suite de $I = [a, b]$, donc en particulier bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite convergente :

$\exists \, (x_{\varphi(n)})_n$, $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha \in [a, b]$.

Comme $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,

on a aussi $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.

De plus, comme f est continue en α, on a

$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\alpha)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\alpha)$

En particulier, $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,

ce qui contredit le fait que $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$.

■

Ce résultat se généralise facilement au cas d'une fonction de deux variables.

Théorème 2. (Théorème de Heine).

Soit I et J deux intervalles fermés et bornés de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction continue sur $I \times J$. Alors f est uniformément continue.

Remarque : pour l'uniforme continuité, on peut prendre (4)

ici la définition suivante : f est uniformément continue

sur $I \times J$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$\forall (x,y) \in I \times J$, $(x_0, y_0) \in I \times J$,

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon.$$

preuve : La preuve est similaire au théorème 1. On raisonne

par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue

Alors $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists (x,y) \in I \times J$,

$\exists (z,t) \in I \times J$ tels que

$$\sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} \leq \delta \text{ et } |f(x,y) - f(z,t)| > \varepsilon$$

En choisissant $\delta = \frac{1}{n}$, on construit deux suites

$(x_n, y_n) \in I \times J$ et $(z_n, t_n) \in I \times J$ tels que

$$\sqrt{(x_n - z_n)^2 + (y_n - t_n)^2} \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n, y_n) - f(z_n, t_n)| > \varepsilon$$

Comme la suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans I qui est un intervalle fermé, borné, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $x \in I$.

De même, la suite $(y_{\varphi(n)})_n$ est à valeurs dans J, qui est un intervalle fermé, borné et donc il existe une sous suite $\left(y_{\varphi(\psi(n))}\right)_n$ qui converge vers $y \in J$.

Remarquons que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \Rightarrow x_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

(car $\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right)_n$ est une sous suite de $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$).

Comme

$$\left|x_{\varphi(\psi(n))} - z_{\varphi(\psi(n))}\right| \leq \sqrt{\left(x_{\varphi(\psi(n))} - z_{\varphi(\psi(n))}\right)^2 + \left(y_{\varphi(\psi(n))} - t_{\varphi(\psi(n))}\right)^2}$$

$$\leq \frac{1}{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

on a $z_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

De même, $t_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} y$.

Ainsi $\left(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x, y) \in I \times J$

et $\left(z_{\varphi(\psi(n))}, t_{\varphi(\psi(n))}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x, y) \in I \times J$.

Par continuité de f sur $I \times J$, on en déduit que

$$f\left(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x, y)$$

et $$f\left(z_{\varphi(\psi(n))}, t_{\varphi(\psi(n))}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x, y)$$

D'où

$$f\left(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))}\right) - f\left(z_{\varphi(\psi(n))}, t_{\varphi(\psi(n))}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

ce qui contredit le fait que

$$\left| f\left(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))}\right) - f\left(z_{\varphi(\psi(n))}, t_{\varphi(\psi(n))}\right) \right| > \varepsilon.$$

■

§ I. 2. Intégrals généralisées (impropres).

I. 2. 1. Définition

On supposera connus les prérequis sur l'intégrale de Riemann.

Définition 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est localement intégrable (au sens de Riemann) sur I si la restriction de f à tout sous intervalle fermé, borné de I est (Riemann)-intégrable.

Remarque: Toute fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est localement intégrable; toute fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$ est localement intégrable.

Définition 3. Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a, b[$.

On dit que <u>l'intégrale de f sur $[a, b[$</u> <u>converge</u> si la fonction

$$F : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

a une limite finie quand x tend vers b.

Cette limite est appelée <u>intégrale généralisée (ou impropre)</u> de f sur $[a,b[$ et se note $\int_a^b f(t)\,dt$.

<u>Remarque:</u> On a une définition analogue pour l'intégrale généralisée sur $]a, b]$ $(-\infty \leq a < b < +\infty)$.

Pour le cas d'un intervalle ouvert $]a,b[$, si $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est localement intégrable (où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$), on dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente si pour $c \in]a,b[$, chacune des intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

soit
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \int_x^c f(t)\,dt + \lim_{\substack{x \to b \\ <}} \int_c^x f(t)\,dt .$$

On vérifie que cette définition ne dépend pas du point c.

Dans la suite, nous allons nous limiter pour ne pas alourdir la présentation au cas où $I = [a, b[$ (les autres cas $]a, b]$ et $]a, b[$ se traitent de manière similaire).

<u>Exemple 1.</u> L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

En effet, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue donc localement intégrable sur $[1 ; +\infty[$.

De plus, si $\alpha \neq 1$, $X > 1$, on a :
$$\int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^X x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha}\right]_1^X$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(X^{1-\alpha} - 1\right).$$

Si $\alpha > 1$, $X^{1-\alpha} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$ et donc
$$\int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} \xrightarrow[X \to +\infty]{} \frac{1}{\alpha - 1}$$ et donc l'intégrale

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge

Si $\alpha < 1$, $X^{1-\alpha} \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$ et donc

$\int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge

(i.e. ne converge pas).

Si $\alpha = 1$, $\int_1^X \frac{dx}{x} = \ln X \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$

et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

Exemple 2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.

La preuve est similaire au cas précédent.

I.2.2. Fausse singularité

Proposition 3 Soit $f : [a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Supposons que $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)$ existe. Alors, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ converge.

Exemple 3. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

I.2.3. Règles de comparaison pour les fonctions de signe constant.

Théorème 4. Soit $f, g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables et supposons que

(i) $\exists\, c \in [a,b[$ tel que $\forall x \in [c,b[$, $f(x) \geq 0$

(ii) $f(x) = O(g(x))$, $x \underset{<}{\longrightarrow} b$

ⓐ si $\int_a^b g(x)\,dx$ est convergente, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente

ⓑ si $\int_a^b f(x)\,dx$ est divergente, alors $\int_a^b g(x)\,dx$ est divergente.

Remarque : (i) + (ii) $\Longrightarrow$ $g(x) \geq 0$ au voisinage de b.

Exemple 4. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge.

En effet, $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue et donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$

De plus, $0 \leq e^{-t^2}$, $\forall t \geq 0$

et comme $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$, on a

$$e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (exemple 1) et ainsi le théorème ④ implique que $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge

Finalement $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

Théorème 5. Soit $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables et supposons que

(i) $\exists\, c \in [a, b[$ tel que $\forall x \in [c, b[$, $f(x) \geq 0$

(ii) $f(x) \underset{\substack{x \to b \\ <}}{\sim} g(x)$

Alors $\int_a^b f(x)dx$ converge $\Longleftrightarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ converge

Exemple 5. Soit $\gamma > 0$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(t) + t^\gamma} dt \text{ converge} \Longleftrightarrow \gamma > 1.$$

En effet, on a : $\dfrac{1}{\ln(t)+t^\gamma} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^\gamma}$

et on conclut avec le théorème 5 et l'exemple 1.

I.2.4. La convergence absolue implique la convergence

Théorème 6. Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable et supposons que

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ converge.}$$

(On dit alors que $\int_a^b f(x)\,dx$ <u>converge absolument</u>).

Alors $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

Exemple 6. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^2}\,dt$ est convergente.

En effet, $t \longmapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est continue donc localement intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

De plus, on a : $0 \leq \left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$.

Comme $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\,dt$ converge (exemple 1), le théorème 4 implique que $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ converge absolument et donc d'après le théorème 6 converge.

Exemple 7 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

En effet, pour la convergence, remarquons que $t \longmapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0;+\infty[$ et de plus, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Ainsi, le théorème 2 implique que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ converge.

D'autre part, si $X > 1$, en effectuant une intégration par partie, on a :

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t}\,dt = -\left[\frac{\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt.$$

$$= \cos(1) - \frac{\cos(X)}{X} - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

Or $\left|\frac{\cos(X)}{X}\right| \leq \frac{1}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$

et d'après l'exemple 6, $\displaystyle\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt \longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,d$

Ainsi $\displaystyle\int_1^X \frac{\sin(t)}{t}\,dt \longrightarrow \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$

Autrement dit, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ converge

Finalement, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ converge.

∘ En revanche, cette intégrale ne converge pas absolument.

Pour le voir, remarquons que

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt.$$

Or $$\int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t}\,dt$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \; \frac{\pi}{2} \; \frac{1}{(k+1)\pi}$$

D'où

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Ainsi $\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ ne converge pas absolument.

I.2.5. Critère de Cauchy.

On déduit du critère de Cauchy pour la limite d'une fonction le résultat suivant.

Théorème 7. Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable. Alors

$\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si et seulement si

$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in [a, b[$ tel que

$$x_\varepsilon < x' < x'' < b \Longrightarrow \left| \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx \right| \leq \varepsilon .$$

Chapitre 2. Intégrales définies dépendant d'un paramètre.

Dans ce chapitre, I désignera (sauf mention du contraire) un intervalle de $\mathbb{R}$ (éventuellement non borné) et $J = [a, b]$ désignera un intervalle fermé, borné $(-\infty < a < b < +\infty)$.

On considère
$$f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \qquad (x, t) \longmapsto f(x, t)$$
une fonction et on suppose (à minima) que l'application
$$t \longmapsto f(x, t)$$
est Riemann-intégrable sur J, pour tout $x \in I$.

Cela nous permet de définir :
$$F(x) := \int_a^b f(x, t)\,dt \quad , x \in I.$$

Nous allons donner des conditions suffisantes sur f pour que F soit continue, dérivable, C^1.

§ 2.1. Continuité d'une intégrale définie à paramètre.

Théorème 1

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue.

Alors, la fonction F définie pour $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$$

est continue sur I.

<u>preuve</u> : Soit $x_0 \in I$. Quitte à restreindre l'intervalle en considérant $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ (où $\alpha > 0$) on peut supposer que I est un intervalle fermé, borné.

Par le théorème de Heine (théorème ② chapitre 1), la fonction $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) étant continue, elle est en fait uniformément continue sur $I \times J$.

En particulier, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \\ x \in I \\ t \in J \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| f(x,t) - f(x_0,t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

D'où :

$$\left| F(x) - F(x_0) \right| = \left| \int_a^b \left(f(x,t) - f(x_0,t) \right) dt \right|$$

$$\leq \int_a^b \left| f(x,t) - f(x_0,t) \right| dt$$

$$\leq (b-a) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

□

<u>Exemple.</u> Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x+t)\, e^{xt^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$.

On commence par remarquer que l'application

$$(x,t) \longmapsto \sin(x+t)\, e^{xt^2} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \times [0,\pi].$$

Ainsi le théorème 1 implique que F est continue sur $\mathbb{R}$.

D'où en particulier, $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = F(0) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\, dt$

$$= \Big[-\cos t\Big]_0^{\pi}$$

$$= -(-1-1) = 2$$

$\square$

§2.2. Dérivabilité d'une intégrale définie à paramètre.

<u>Théorème 2</u> : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $J = [a,b]$ un intervalle fermé et borné. On suppose que

(i) l'application $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto f(x,t)$

est continue sur $I \times J$

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x} : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,t) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$

existe et est continue sur $I \times J$.

Alors la fonction F définie pour $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt ,$$

est de classe C^1 sur I et on a :

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt , \quad x \in I.$$

preuve Soit $x_0 \in I$. Pour simplifier l'écriture nous supposons que x_0 n'est pas une extrémité de I, sinon nous devons "un peu" adapter ce qui suit (exercice !).

On doit démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ et $x \neq x_0$, on a :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right| \leq \varepsilon .$$

Pour cela, commençons par écrire que

$$F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt =$$

$$= \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^b f(x_0,t)\,dt - \int_a^b (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$$

$$= \int_a^b \left(f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right) dt$$

D'où

$$\left| F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right| \leq \int_a^b \left| f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| dt$$

Fixons $t \in [a, b]$ et $\alpha > 0$ tel que

$$[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I.$$

Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ il existe x_1 (dépendant de x et t) compris entre x et x_0 tel que

$$f(x,t) - f(x_0,t) = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, t)$$

D'où

$$f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) = (x-x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right)$$

Il reste maintenant à utiliser que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times J$ donc sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times J$ (qui est le produit cartésien de deux intervalles fermés, bornés)

Ainsi par le théorème de Heine (Théorème ② chapitre 1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ est uniformément continue sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times J$

En particulier, il existe $0 < \delta < \alpha$ (qui ne dépend que de ε) tel que

$$\left.\begin{matrix} |x - x_0| < \delta \\ t \in J \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

D'où finalement, on obtient que pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ et pour tout $t \in [a,b]$, on a :

$$\left| f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|x - x_0|$$

Il reste à intégrer par rapport à $t \in [a,b]$, ce qui donne :

$$\left| F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|x - x_0|(b-a)$$

$$= \varepsilon |x - x_0|$$

Finalement en divisant par $|x - x_0|$, $x \neq x_0$, on obtient que pour $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, on a :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \right| \leq \varepsilon$$

Ceci prouve que F est dérivable en x_0 et

$$F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt.$$

La continuité de F' découle directement du théorème ① appliqué à $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\square$

Exemple : Soit $F(x) = \int_1^2 \frac{e^{xt}}{t}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

La fonction

$$f : \mathbb{R} \times [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{xt}}{t}$$

est de classe C^1. Donc par le théorème 2, la fonction F est de classe C^1 et on a :

$$F'(x) = \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

Or $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t \cdot \frac{e^{xt}}{t} = e^{xt}$

D'où $F'(x) = \int_1^2 e^{xt}\, dt$

Si $x \neq 0$, on a $F'(x) = \left[\frac{1}{x} e^{xt}\right]_{t=1}^{t=2} = \frac{1}{x}\left(e^{2x} - e^{x}\right)$

Si $x = 0$, $F'(0) = \int_1^2 1\, dt = 1$.

§ 2.3 Application : théorème de Fubini

Théorème 3 (Théorème de Fubini) Soit $I = [\alpha, \beta]$, $J = [a,b]$ deux intervalles fermés, bornés, soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction continue. Alors la fonction

$$F(x) := \int_a^b f(x,t)\, dt \quad , \quad x \in I$$

est Riemann-intégrable sur I et la fonction

$$G(t) := \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \quad , t \in J$$

est Riemann intégrable sur J. De plus, on a

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_a^b G(t)\,dt \qquad (*)$$

Autrement dit, on a

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \right) dt$$

et on retient que l'on peut intervertir l'ordre d'intégration.

Preuve. Tout d'abord par le théorème (1), on obtient que les fonctions F et G sont continues, donc Riemann-intégrables, sur I respectivement sur J.

(Pour G, on applique le théorème à

$$\tilde{f} : J \times I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t,x) \longrightarrow \tilde{f}(t,x) = f(x,t)$$

qui est bien sûr continue comme composée de f et de la symétrie $(t,x) \longmapsto (x,t)$).

Il reste maintenant à prouver la formule $(*)$

Pour cela, on introduit la fonction

$$\varphi(x,t) = \int_\alpha^x f(y,t)\,dy \quad , (x,t) \in I \times J.$$

Fait 1. La fonction φ est continue sur $I \times J$.

Soit $(x_0, t_0) \in I \times J$. On a

$$\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t_0) = \int_\alpha^x f(y,t)\,dy - \int_\alpha^{x_0} f(y,t_0)\,dy$$

$$= \int_\alpha^{x_0} \big(f(y,t) - f(y,t_0)\big)\,dy + \int_{x_0}^{x} f(y,t)\,dy$$

Comme f est continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$, elle est bornée : $\exists\, M > 0$ /

$$\forall\, (u,v) \in [\alpha,\beta]\times[a,b],\quad |f(u,v)| \leq M.$$

Ainsi $\forall\, (x,t) \in I \times J$, on a pour tout y compris entre x et x_0,

$$|f(y,t)| \leq M$$

D'où

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(y,t)\,dy \right| \leq M\,|x - x_0|$$

Ainsi, si $\varepsilon > 0$ est donné alors

$$|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \Longrightarrow \left| \int_{x_0}^{x} f(y,t)\,dy \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, f est uniformément continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$

et donc $\exists\, \delta > 0$ /

* Remarque si $x_0 = \alpha$, on a directement le résultat avec ce qui précède)

$$\begin{array}{c}|t - t_0| \leq \delta \\ y \in I\end{array} \Longrightarrow |f(y,t) - f(y,t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2\,|x_0 - \alpha|}\ *$$

D'où en intégrant par rapport à y, on obtient que

$$|t-t_0|\leq\delta \Rightarrow \left|\int_\alpha^{x_0}\big(f(y,t)-f(y,t_0)\big)dy\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(x_0-\alpha)}(x_0-\alpha)=\frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, on en déduit que si

$|t-t_0|\leq\delta$ et $|x-x_0|\leq\frac{\varepsilon}{2M}$, alors

$$|\varphi(x,t)-\varphi(x_0,t_0)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité de φ sur $I\times J$.

<u>Fait 2</u> $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ existe et est continue sur $I\times J$.

Par définition de φ, l'application $x\longmapsto\varphi(x,t)=\int_\alpha^x f(y,t)dy$

est la primitive de $y\longmapsto f(y,t)$ qui s'annule en α, à t fixé

Ainsi $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ existe et on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)=f(x,t) \qquad ,(x,t)\in I\times J$$

Par hypothèse, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ est alors continue.

On peut alors lui appliquer le théorème 2 qui donne

que l'application $\Phi : x\longmapsto\Phi(x)=\int_a^b\varphi(x,t)dt$

est de classe C^1 sur I et

$$\Phi'(x)=\int_a^b\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)dt=\int_a^b f(x,t)dt$$

D'où pour tout $x \in I$, on a :

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^x f(y,t)\, dy \right) dt = \int_a^b \varphi(x,t)\, dt = \phi(x) = \int_\alpha^x \phi'(y)\, dy$$

$$\left(\text{Notons que } \phi(\alpha) = \int_a^b \varphi(\alpha,t)\, dt = 0 \right.$$

$$\left. \text{car } \varphi(\alpha,t) = \int_\alpha^\alpha f(y,t)\, dy = 0, \ \forall t \in [a,b] \right).$$

D'où

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^x f(y,t)\, dy \right) dt = \int_\alpha^x \left(\int_a^b f(y,t)\, dt \right) dy \quad , \forall x \in [\alpha,\beta]$$

On obtient alors le résultat en prenant $x = \beta$. $\square$

<u>Exemple</u>: Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^2 y\, e^{xy}\, dy \right) dx$

On a : $(x,y) \longmapsto y\, e^{xy}$ est continue sur $[1,2] \times [0,2]$

Le théorème de Fubini implique alors que :

$$I = \int_0^2 \left(\int_1^2 y\, e^{xy}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \cancel{y}\, \frac{1}{\cancel{y}} \left[e^{xy} \right]_1^2 dy = \int_0^2 \left(e^{2y} - e^{y} \right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2y} - e^{y} \right]_0^2 = \frac{1}{2} e^4 - e^2 - \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{1}{2} e^4 - e^2 + \frac{1}{2}$$

$\square$

§2.4. Intégrales à paramètre dont les bornes dépendent du paramètre

Théorème 4. Soient I et J deux intervalles fermés, bornés de $\mathbb{R}$, et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $a, b : I \longrightarrow J$.

On suppose que :

(i) a et b sont de classe C^1

(ii) f est continue

(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $I \times J$.

Alors la fonction

$$\begin{aligned} \psi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ x &\longmapsto \psi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt \end{aligned}$$

est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$\psi'(x) = b'(x)\, f(x, b(x)) - a'(x)\, f(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

preuve. Soit

$$\begin{aligned} \Theta : I \times J \times J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, u, v) &\longmapsto \Theta(x,u,v) = \int_u^v f(x,t)\,dt \end{aligned}$$

Comme f est continue sur $I \times J$, il est clair que $\forall x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est Riemann intégrable sur J donc sur $[u,v]$ (ou $[v,u]$) pour tout $(u,v) \in J \times J$.

Ainsi Θ est bien défini

De plus, $\frac{\partial \Theta}{\partial u}$ et $\frac{\partial \Theta}{\partial v}$ existent et on a.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u}(x,u,v) = -f(x,u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v}(x,u,v) = f(x,v)$$

Ainsi $\frac{\partial \Theta}{\partial u}$ et $\frac{\partial \Theta}{\partial v}$ sont continues sur $I \times J \times J$.

D'autre part, le théorème ② implique que

$\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ existe et on a.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u,v) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

De plus, ce même théorème ② dit que

$$x \longmapsto \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u,v) \text{ est continue}$$

<u>Montrons en fait que</u> $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ est continue sur $I \times J \times J$

Soit $(x_0,u_0,v_0) \in I \times J \times J$. Pour $(x,u,v) \in I \times J \times J$, écrivons

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,u,v)-\frac{\partial\theta}{\partial x}(x_0,u_0,v_0)=\int_u^v\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt-\int_{u_0}^{v_0}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt$$

$$=\int_u^{u_0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt+\int_{u_0}^{u}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt+\int_{v_0}^{v}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt-\int_{u_0}^{v_0}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt$$

$$=\int_u^{u_0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt+\int_{v_0}^{v}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt+$$

$$+\int_{u_0}^{v_0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt-\int_{u_0}^{u_0}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I\times J$ qui est fermé, borné, il existe $M>0$ tel que

$\forall (x,t)\in I\times J$, $\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq M$.

Ainsi $\quad \left|\int_u^{u_0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt\right|\leq M\,|u_0-u|$

et $\quad \left|\int_{v_0}^{v}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt\right|\leq M\,|v_0-v|$.

Ainsi si $\varepsilon>0$ alors pour

$|u_0-u|\leq\frac{\varepsilon}{3M}$ et $|v_0-v|\leq\frac{\varepsilon}{3M}$, on a

$$\left| \int_u^{u_0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

et $$\left| \int_{v_0}^{v} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part,

$$\int_{u_0}^{v_0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt - \int_{u_0}^{v_0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt = \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u_0,v_0) - \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x_0,u_0,v_0)$$

Or $x \longmapsto \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u_0,v_0)$ est continue,

donc $\exists\, \delta > 0$ /

$$|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow \left| \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u_0,v_0) - \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x_0,u_0,v_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi pour $|x - x_0| \leq \delta$, $|u - u_0| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$, $|v - v_0| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$,

on a :

$$\left| \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u,v) - \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x_0,u_0,v_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité de $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$.

Finalement, on en déduit que Θ est de classe C^1 et on a, pour tous $(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(x,u,v) \in I \times J \times J$:

$$d\Theta(x,u,v)(h_1,h_2,h_3) = \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,u,v)h_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial u}(x,u,v)h_2 + \frac{\partial \Theta}{\partial v}(x,u,v)h_3$$

Or $\psi(x) = \Theta(x, a(x), b(x))$, $x \in I$

c'est à dire $\psi = \Theta \circ \varphi$, où

$$\varphi : I \longrightarrow I \times J \times J$$
$$x \longmapsto (x, a(x), b(x))$$

Par hypothèse φ est de classe C^1 et on a :

$$\varphi'(x) = (1, a'(x), b'(x))$$

D'où ψ est de classe C^1 et on a :

$$\psi'(x) = d\Theta(\varphi(x))(\varphi'(x))$$

$$= d\Theta(x, a(x), b(x))(1, a'(x), b'(x))$$

$$= \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x, a(x), b(x)) + a'(x)\frac{\partial \Theta}{\partial u}(x, a(x), b(x)) + b'(x)\frac{\partial \Theta}{\partial v}(x, a(x), b(x))$$

$$= \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt - a'(x) f(x, a(x)) + b'(x) f(x, b(x)).$$

$\square$

Chapitre 3. Intégrales impropres dépendant d'un paramètre.

§ 3.1 Fonctions définies par une intégrale impropre – Rappels.

__Définition 1.__ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est __localement intégrable (au sens de Riemann)__ sur I si la restriction de f à tout sous intervalle fermé, borné de I est (Riemann)- intégrable.

En particulier, toute fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est localement intégrable ; toute fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$ est aussi localement intégrable.

__Définition 2.__ Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a, b[$.

On dit que __l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge__ si la fonction

$$F : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

a une limite (finie) quand x tend vers b. Cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ et se note

$$\int_a^b f(t)\,dt .$$

On a une définition analogue pour l'intégrale généralisée sur $]a,b]$. Pour le cas d'un intervalle ouvert $]a,b[$, si $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est localement intégrable (où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$), on dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente si pour $c \in]a,b[$, chacune des deux intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

$$= \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \int_x^c f(t)\,dt + \lim_{\substack{x \to b \\ <}} \int_c^x f(t)\,dt .$$

On vérifie aisément que cette définition ne dépend pas du point c.

Dans la suite, nous allons nous limiter pour ne pas alourdir la présentation au cas $[a,b[$, les autres cas ($]a,b]$ et $]a,b[$) se traitent de manière similaire.

On considère alors
$$f : I \times [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto f(x,t)$$

une fonction définie sur $I \times [a,b[$ où I est un intervalle (quelconque) de $\mathbb{R}$ et $-\infty < a < b \leq +\infty$ et on suppose que pour tout $x \in I$, l'intégrale généralisé $\int_a^b f(x,t)\,dt$ converge.

Le but de ce chapitre est d'étudier la fonction

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt.$$

§3.2. Continuité.

Théorème 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $J = [a, b[$ et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Supposons qu'il existe une fonction $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1 L'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ converge

2 $\forall\, t \in [a, b[,\ \forall\, x \in I,\quad |f(x,t)| \leq g(t)$.

Alors la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$$

est bien définie et continue sur I.

preuve: remarquons tout d'abord que les hypothèses 1 et 2 impliquent que l'intégrale $\int_a^b f(x,t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente pour tout $x \in I$.

Ainsi F est bien définie sur I.

Considérons maintenant une suite $(b_n)_n$, $b_n \xrightarrow[<]{} b$, $n \to +\infty$ 4

et posons
$$F_n(x) := \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt \,, \quad x \in I.$$

On a alors :

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt - \int_a^{b} f(x,t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_{b_n}^{b} f(x,t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_{b_n}^{b} |f(x,t)|\,dt$$

$$\leq \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt. \quad \text{par l'hypothèse } 2$$

D'où
$$\sup_{x \in I} |F_n(x) - F(x)| \leq \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt.$$

Or $\int_a^b g(t)\,dt$ converge et donc $\lim_{n \to +\infty} \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt = 0$.

(écrire $\int_{b_n}^{b} g(t)\,dt = \int_a^{b_n} g(t)\,dt - \int_a^{b} g(t)\,dt$ et appliquer la définition de l'intégrale généralisée !).

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in I} |F_n(x) - F(x)| = 0$, ce qui

prouve que $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur I.

D'autre part, remarque que $\forall n \geq 1$, comme $b_n \in [a, b[$,

on a que $(x, t) \longmapsto f(x, t)$ est continue

sur $I \times [a, b_n]$. Ainsi le théorème 1 du chapitre 2

implique que chaque F_n est continue sur I.

Un résultat classique sur les suite de fonctions implique

alors que F est continue sur I. $\blacksquare$

<u>Exemple.</u> Soit $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2xt)\, e^{-t^2} dt$

<u>Montrons que</u> F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction
$$f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, t) \longmapsto \cos(2xt)\, e^{-t^2}$$

est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et on a :

$$|f(x, t)| \leq e^{-t^2}.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge, <u>car</u>

$t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue donc localement intégrable

sur tout intervalle compact (i.e fermé, borné) de $\mathbb{R}$.

De plus, on a :

$$e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \longrightarrow +\infty$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Ainsi le théorème 1 implique que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

§ 3.3. Dérivabilité.

Théorème 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $J = [a, b[$.

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :

(i) f est continue sur $I \times J$ et pour tout $x \in I$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$ converge

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $I \times J$

(iii) il existe une fonction $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$
- l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge

Alors la fonction
$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$$
est de classe C^1 sur I et on a : $\displaystyle F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$, $x \in I$.

preuve: La preuve est similaire à celle du Théorème 1.

On commence par fixer une suite $(b_n)_n$ de réels telle que $a < b_n < b$ et $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$.

On pose alors
$$F_n(x) := \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt, \quad x \in I.$$

D'après le Théorème 2 du chapitre 2, on voit que F_n est de classe C^1 sur I et
$$F_n'(x) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt, \quad x \in I.$$

On a aussi d'après (i) que $F_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(x)$, $x \in I$.

Enfin, d'après (iii), l'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ converge absolument donc converge et on a:

$$\left| F_n'(x) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right| = \left| \int_{b_n}^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right|$$
$$\leq \int_{b_n}^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| dt$$
$$\leq \int_{b_n}^b g(t)\,dt$$

D'où
$$\sup_n \left| F_n'(x) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right| \leq \int_{b_n}^b g(t)\,dt$$

Comme $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, on sait que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt = 0$$

D'où $$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \left| F_n'(x) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right| = 0 .$$

Ainsi $(F_n')_n$ converge uniformément vers $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ sur I.

Un théorème sur la dérivabilité des suites de fonction implique alors que F est dérivable sur I et on a :

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \ , \quad x \in I .$$

Il reste à appliquer le théorème 1 à $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour en déduire que F' est continue sur I et donc F est de classe C^1 sur I. $\blacksquare$

<u>Théorème 3</u> (<u>théorème de Fubini</u>).

Soit $f : [\alpha, \beta] \times [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons qu'il existe $g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times [a,b[\ , |f(x,t)| \leq g(t)$ et l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ converge.

Alors

$$(*) \quad \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \right) dt .$$

preuve: D'après le théorème 1, $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$

est continue sur $[\alpha, \beta]$ donc intégrable sur $[\alpha, \beta]$.

D'autre part, la fonction $G : t \longmapsto \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx$

est continue sur $[a, b[$ (on applique le théorème 1 du chapitre 2 !). De plus, on a :

$$|G(t)| \leq \int_\alpha^\beta |f(x,t)|\,dx \leq \int_\alpha^\beta g(t)\,dx = (\beta - \alpha)\, g(t)$$

L'hypothèse implique alors que l'intégrale généralisée $\int_a^b G(t)\,dt$

est absolument convergente donc convergente.

Ainsi, les deux intégrales qui apparaissent dans $(*)$ existent.

Il reste à montrer qu'elles sont égales.

Pour cela, fixons une suite $(b_n)_n$, $a < b_n < b$, telle que

$b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$ et on définit

$$g_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt \ , \ n \geq 1 . \ x \in [\alpha, \beta] .$$

On a vu dans la preuve du théorème 1 que, sous les hypothèses du théorème, la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$.

Un théorème sur les suites de fonctions implique alors que :

$$\int_\alpha^\beta \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta g_n(x)\,dx$$

i.e :
$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right) dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta \left(\int_a^{b_n} f(x,t)\,dt \right) dx$$

Or f est continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, b_n]$ et donc le théorème de Fubini du chapitre 2 implique que

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^{b_n} f(x,t)\,dt \right) dx = \int_a^{b_n} \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \right) dt$$

$$= \int_a^{b_n} G(t)\,dt$$

D'où :

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right) dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{b_n} G(t)\,dt = \int_a^b G(t)\,dt \quad \text{car}$$

l'intégrale $\int_a^b G(t)\,dt$ converge.

On obtient finalement que

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \right) dt$$

■

§ 2.4. Transformée de Fourier.

La transformée de Fourier est un objet très utilisé en théorie du signal et le "pendant continu" des séries de Fourier pour les fonction non périodique.

Définition: Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier de f est la fonction F définie par :

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt \quad , \ s \in \mathbb{R}.$$

On la note aussi $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}f$.

Remarque : pour le moment, on ne dit rien sur la convergence de l'intégrale ou ce qui est équivalent sur le domaine de définition de F.

Le résultat suivant précise un cadre où F est bien défini sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.

Alors a) $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$

b) Si de plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

preuve : a) Remarquons que comme $s, t \in \mathbb{R}$, on a :

$$|e^{-ist}| = 1 \text{ et donc}$$

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(t)e^{-ist}| = |f(t)|.$$

Ceci prouve par hypothèse que l'intégrale généralisée

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}\,dt$ converge absolument donc converge.

Ainsi $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Par hypothèse, l'application $\begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (s,t) \longmapsto f(t)e^{-ist} \end{array}$

est continue et $\forall (s,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a :

$$|f(t)e^{-ist}| = |f(t)|.$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, on peut appliquer le théorème 1 qui donne la continuité de $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)| dt < +\infty$

Alors $\hat{f}$ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

et on a : $\hat{f}'(s) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) e^{-ist} dt$, $s \in \mathbb{R}$.

preuve: remarquons tout d'abord que pour $|t| > 1$, on a :

$$|f(t)| \leq |t f(t)|$$

Ainsi $\int_{1}^{+\infty} |f(t)| dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} |f(t)| dt$ converge.

De plus, comme f est continue, elle est localement intégrable sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ et en particulier, $\int_{-1}^{1} |f(t)| dt$ converge aussi !

Ainsi le théorème 4 assure que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, si on note
$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(s, t) \longmapsto g(s,t) = f(t) e^{-ist}$$

alors l'application $\frac{\partial g}{\partial s}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

et on a : $\frac{\partial g}{\partial s}(x, t) = -i t f(t) e^{-ist}$.

D'où $\left|\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\right| = |t\, f(t)| =: \varphi(t)$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge.

Le théorème de dérivation (théorème 2) implique alors que $\hat{f}$ est de classe C^1 et on a :

$$\hat{f}'(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\,dt = -i\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) e^{-its}\,dt.$$

■

<u>Théorème 6. (de Riemann – Lebesgue).</u>

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.

Alors $\lim\limits_{|s| \to +\infty} \hat{f}(s) = 0$.

<u>preuve:</u> Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tq $\int_{-\infty}^{a} |f(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\int_{b}^{+\infty} |f(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

D'où $$|\hat{f}(s)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\int_a^b f(t) e^{-ist}\,dt\right|.$$

Pour la dernière intégrale, on effectue une intégration par parties en supposant $s \neq 0$:

On a :

$$\int_a^b f(t)e^{-ist}dt = \left[-\frac{1}{is} f(t)e^{-its}\right]_{t=a}^{t=b} + \frac{1}{is}\int_a^b f'(t)e^{-its}dt$$

D'où

$$\int_a^b f(t)e^{-ist}dt = \frac{1}{is}\left[\left(f(a)e^{-ias} - f(b)e^{-ibs}\right) + \int_a^b f'(t)e^{-its}dt\right]$$

Ainsi :

$$\left|\int_a^b f(t)e^{-ist}dt\right| \leq \frac{1}{|s|}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|dt\right)$$

$$= \frac{M}{|s|},$$

où $M = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|dt$ est une constante réelle positive.

Donc $\exists\, s_0 \,/\, |s| > s_0 \Longrightarrow \frac{M}{|s|} \leq \frac{\varepsilon}{3}$

D'où $|s| > s_0 \Longrightarrow |\hat{f}(s)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

Ceci prouve que $\lim\limits_{|s| \to +\infty} \hat{f}(s) = 0$. ∎

Théorème 7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|dt$ convergent.

Alors
$$\widehat{f'}(s) = is\,\hat{f}(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

preuve: remarquons tout d'abord que d'après le théorème 4, $\widehat{f'}$ et $\hat{f}$ existent (et sont continues) sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a avec une intégration par parties (voir page 15) que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^*$.

$$(*) \quad \int_a^b f(t) e^{-its} dt = -\frac{1}{is}\left(f(b) e^{-ibs} - f(a) e^{-ias}\right) + \frac{1}{is}\int_a^b f'(t) e^{-its} dt$$

On remarque alors que
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$$
et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|dt$ converge, on en déduit que
$$\int_0^x f'(t)dt \text{ admet une limite (finie) } l \text{ quand } x \longrightarrow +\infty$$

Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \alpha = f(0) + l$.

Or comme $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ converge, on en déduit que nécessairement $\alpha = 0$

(raisonner par l'absurde en supposant que $|\alpha| > 0$ et aboutir à une contradiction... exercice !).

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

En faisant alors tendre $a \longrightarrow -\infty$ et $b \longrightarrow +\infty$ dans $(*)$, on obtient alors que

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{is} \widehat{f'}(s) \quad , s \in \mathbb{R}^*$$

i.e $\quad \widehat{f'}(s) = is \hat{f}(s) \quad , s \in \mathbb{R}^*.$

Pour $s = 0$, on a :

$$\widehat{f'}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i0 \times t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) dt$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f'(t) dt$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left(f(b) - f(a) \right) = 0$$

et la relation est aussi vraie en $s = 0$.

Chapitre 3. Intégrales impropres dépendant d'un paramètre.

§ 3.1 Fonctions définies par une intégrale impropre - Rappels.

<u>Définition 1.</u> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est <u>localement intégrable (au sens de Riemann)</u> sur I si la restriction de f à tout sous intervalle fermé, borné de I est (Riemann)-intégrable.

En particulier, toute fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est localement intégrable ; toute fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$ est aussi localement intégrable.

<u>Définition 2.</u> Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a, b[$.

On dit que <u>l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge</u> si la fonction

$$F : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

a une limite (finie) quand x tend vers b. Cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ et se note

$$\int_a^b f(t)\,dt .$$

On a une définition analogue pour l'intégrale généralisée sur $]a, b]$. Pour le cas d'un intervalle ouvert $]a, b[$, si $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est localement intégrable (où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$), on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si pour $c \in]a, b[$, chacune des deux intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

$$= \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \int_x^c f(t)\,dt + \lim_{\substack{x \to b \\ <}} \int_c^x f(t)\,dt.$$

On vérifie aisément que cette définition ne dépend pas du point c.

Dans la suite, nous allons nous limiter pour ne pas alourdir la présentation au cas $[a, b[$, les autres cas ($]a, b]$ et $]a, b[$) se traitent de manière similaire.

On considère alors
$$f : I \times [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, t) \longmapsto f(x, t)$$

une fonction définie sur $I \times [a, b[$ où I est un intervalle (quelconque) de $\mathbb{R}$ et $-\infty < a < b \leq +\infty$ et on suppose que pour tout $x \in I$, l'intégrale généralisé $\int_a^b f(x,t)\,dt$ converge.

Le but de ce chapitre est d'étudier la fonction

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt.$$

§ 3.2. Continuité.

Théorème 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $J = [a,b[$ et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Supposons qu'il existe une fonction $g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. L'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ converge

2. $\forall\, t \in [a,b[,\ \forall\, x \in I,\quad |f(x,t)| \leq g(t)$.

Alors la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$$

est bien définie et continue sur I.

preuve: remarquons tout d'abord que les hypothèses 1 et 2 impliquent que l'intégrale $\int_a^b f(x,t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente pour tout $x \in I$.

Ainsi F est bien définie sur I.

Considérons maintenant une suite $(b_n)_n$, $b_n \xrightarrow[<]{} b$, $n \to +\infty$ (4)

et posons
$$F_n(x) := \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt \ , \quad x \in I.$$

On a alors :
$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt - \int_a^{b} f(x,t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_{b_n}^{b} f(x,t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_{b_n}^{b} |f(x,t)|\,dt$$

$$\leq \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt. \quad \text{par l'hypothèse (2)}$$

D'où
$$\sup_{x \in I} |F_n(x) - F(x)| \leq \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt.$$

Or $\int_a^b g(t)\,dt$ converge et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt = 0$.

(écrire $\int_{b_n}^{b} g(t)\,dt = \int_a^{b_n} g(t)\,dt - \int_a^{b} g(t)\,dt$ et

appliquer la définition de l'intégrale généralisée !).

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} |F_n(x) - F(x)| = 0$, ce qui prouve que $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur I.

D'autre part, remarque que $\forall n \geq 1$, comme $b_n \in [a, b[$, on a que $(x, t) \longmapsto f(x, t)$ est continue sur $I \times [a, b_n]$. Ainsi le théorème 1 du chapitre 2 implique que chaque F_n est continue sur I.

Un résultat classique sur les suite de fonctions implique alors que F est continue sur I. ■

<u>Exemple.</u> Soit $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt) e^{-t^2} dt$

<u>Montrons que</u> F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction

$$f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, t) \longmapsto \cos(2xt) e^{-t^2}$$

est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et on a :

$$|f(x, t)| \leq e^{-t^2}.$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge, <u>car</u>

$t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue donc localement intégrable sur tout intervalle compact (i.e fermé, borné) de $\mathbb{R}$.

De plus, on a :

$$e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) , t \longrightarrow +\infty$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Ainsi le théorème 1 implique que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. ■

§ 3.3. Dérivabilité.

Théorème 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $J = [a, b[$.

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :

(i) f est continue sur $I \times J$ et pour tout $x \in I$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$ converge

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $I \times J$

(iii) il existe une fonction $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $\forall (x,t) \in I \times J$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$
- l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge

Alors la fonction
$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$$

est de classe C^1 sur I et on a : $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$, $x \in I$.

preuve: La preuve est similaire à celle du théorème 1.

On commence par fixer une suite $(b_n)_n$ de réels telle que

$$a < b_n < b \quad \text{et} \quad b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b.$$

On pose alors

$$F_n(x) := \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt, \quad x \in I.$$

D'après le théorème 2 du chapitre 2, on voit que F_n est de classe C^1 sur I et

$$F_n'(x) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt, \quad x \in I.$$

On a aussi d'après (i) que $F_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(x)$, $x \in I$.

Enfin, d'après (iii), l'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ converge absolument donc converge et on a:

$$\left| F_n'(x) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right| = \left| \int_{b_n}^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_{b_n}^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| dt$$

$$\leq \int_{b_n}^b g(t)\,dt$$

D'où

$$\sup_x \left| F_n'(x) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right| \leq \int_{b_n}^b g(t)\,dt$$

Comme $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, on sait que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{b_n}^{b} g(t)\,dt = 0$$

D'où
$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} \left| F_n'(x) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \right| = 0 .$$

Ainsi $(F_n')_n$ converge uniformément vers $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ sur I.

Un théorème sur la dérivabilité des suites de fonction implique alors que F est dérivable sur I et on a :

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \;, \quad x \in I .$$

Il reste à appliquer le théorème 1 à $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour en déduire que F' est continue sur I et donc F est de classe C^1 sur I. $\blacksquare$

<u>Théorème 3</u> (<u>Théorème de Fubini</u>).

Soit $f : [\alpha, \beta] \times [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons qu'il existe $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times [a,b[\;,\; |f(x,t)| \leq g(t)$ et l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ converge.

Alors

$$(*) \quad \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \right) dt.$$

preuve: D'après le théorème 1, $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$

est continue sur $[\alpha,\beta]$ donc intégrable sur $[\alpha,\beta]$.

D'autre part, la fonction $G : t \longmapsto \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx$

est continue sur $[a,b[$ (on applique le théorème 1 du chapitre 2 !). De plus, on a :

$$|G(t)| \leq \int_\alpha^\beta |f(x,t)|\,dx \leq \int_\alpha^\beta g(t)\,dx = (\beta-\alpha)\,g(t)$$

L'hypothèse implique alors que l'intégrale généralisée $\int_a^b G(t)\,dt$

est absolument convergente donc convergente.

Ainsi, les deux intégrales qui apparaissent dans $(*)$ existent.

Il reste à montrer qu'elles sont égales.

Pour cela, fixons une suite $(b_n)_n$, $a < b_n < b$, telle que

$b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$ et on définit

$$g_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt, \quad n \geq 1, \quad x \in [\alpha,\beta].$$

On a vu dans la preuve du théorème 1 que, sous les hypothèses du théorème, la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[\alpha,\beta]$ vers $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$.

Un théorème sur les suites de fonctions implique alors que :

$$\int_\alpha^\beta \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta g_n(x)\,dx$$

i.e : $$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta \left(\int_a^{b_n} f(x,t)\,dt\right)dx$$

Or f est continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,b_n]$ et donc le théorème de Fubini du chapitre 2 implique que

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^{b_n} f(x,t)\,dt\right)dx = \int_a^{b_n}\left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\right)dt$$

$$= \int_a^{b_n} G(t)\,dt$$

D'où :

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^{b_n} G(t)\,dt = \int_a^b G(t)\,dt$$ car l'intégrale $\int_a^b G(t)\,dt$ converge.

On obtient finalement que

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \right) dt$$

■

§ 2.4. Transformée de Fourier.

La transformée de Fourier est un objet très utilisé en théorie du signal et le "pendant continu" des séries de Fourier pour les fonction non périodique.

<u>Définition:</u> Soit f une fonction <u>continue par morceaux</u> sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. <u>La transformée de Fourier</u> de f est la fonction F définie par :

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt \quad , \; s \in \mathbb{R}.$$

On la note aussi $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}f$.

<u>Remarque</u> : pour le moment, on ne dit rien sur la convergence de l'intégrale ou ce qui est équivalent sur le domaine de définition de F.

Le résultat suivant précise un cadre où F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et supposons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.

Alors a) $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$

b) Si de plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

preuve: a) Remarquons que comme $s, t \in \mathbb{R}$, on a :

$$|e^{-ist}| = 1 \text{ et donc}$$

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(t)e^{-ist}| = |f(t)|.$$

Ceci prouve par hypothèse que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}\,dt$ converge absolument donc converge.

Ainsi $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Par hypothèse, l'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s,t) & \longmapsto & f(t)e^{-ist} \end{array}$

est continue et $\forall (s,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a :

$$|f(t)e^{-ist}| = |f(t)|.$$

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, on peut appliquer le théorème 1 qui donne la continuité de $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}$. ∎

Théorème 5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)| \, dt < +\infty$

Alors $\hat{f}$ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

et on a : $$\hat{f}'(s) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) e^{-ist} \, dt \, , \; s \in \mathbb{R}.$$

preuve: remarquons tout d'abord que pour $|t| > 1$, on a :

$$|f(t)| \leq |t f(t)|$$

Ainsi $\int_{1}^{+\infty} |f(t)| dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} |f(t)| dt$ converge.

De plus, comme f est continue, elle est localement intégrable sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ et en particulier, $\int_{-1}^{1} |f(t)| dt$ converge aussi !

Ainsi le théorème 4 assure que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, si on note $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(s, t) \longmapsto g(s, t) = f(t) e^{-ist}$$

alors l'application $\frac{\partial g}{\partial s}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

et on a : $$\frac{\partial g}{\partial s}(x, t) = -i t f(t) e^{-ist}.$$

D'où $\quad \left|\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\right| = |t\, f(t)| =: \varphi(t)$

et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge.

Le théorème de dérivation (théorème 2) implique alors que $\hat{f}$ est de classe C^1 et on a :

$$\hat{f}\,'(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\,dt = -i\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) e^{-its}\,dt.$$

$\blacksquare$

<u>Théorème 6. (de Riemann-Lebesgue).</u>

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et supposons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.

Alors $\displaystyle\lim_{|s|\to+\infty} \hat{f}(s) = 0.$

<u>preuve</u> : Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tq $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} |f(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} |f(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

D'où $\quad \displaystyle|\hat{f}(s)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\int_a^b f(t) e^{-ist}\,dt\right|.$

Pour la dernière intégrale, on effectue une intégration par parties en supposant $s \neq 0$:

On a :

$$\int_a^b f(t)e^{-ist}\,dt = \left[-\frac{1}{is}\, f(t)\, e^{-its}\right]_{t=a}^{t=b} + \frac{1}{is}\int_a^b f'(t)e^{-its}\,dt$$

D'où

$$\int_a^b f(t)\,e^{-ist}\,dt = \frac{1}{is}\left[\left(f(a)\,e^{-ias} - f(b)\,e^{-ibs}\right) + \int_a^b f'(t)e^{-its}\,dt\right]$$

Ainsi :

$$\left|\int_a^b f(t)e^{-ist}\,dt\right| \leq \frac{1}{|s|}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right)$$

$$= \frac{M}{|s|}\ ,$$

où $M = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt$ est une

constante réelle positive.

Donc $\exists\, s_0 \ /\ \ |s| > s_0 \Longrightarrow \dfrac{M}{|s|} \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$

D'où $\quad |s| > s_0 \Longrightarrow |\hat{f}(s)| \leq \dfrac{2\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

Ceci prouve que $\lim\limits_{|s|\to+\infty} \hat{f}(s) = 0$.

$\blacksquare$

Théorème 7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Supposons

que $$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|dt \text{ convergent.}$$

Alors $$\widehat{f'}(s) = is\,\widehat{f}(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

preuve: remarquons tout d'abord que d'après le théorème (4),

$\widehat{f'}$ et $\widehat{f}$ existent (et sont continues) sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a avec une intégration par parties (voir page 15)

que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^*$.

$$(*) \quad \int_a^b f(t)e^{-its}dt = -\frac{1}{is}\left(f(b)e^{-ibs} - f(a)e^{-ias}\right) + \frac{1}{is}\int_a^b f'(t)e^{-its}dt$$

On remarque alors que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$$

et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|dt$ converge, on en déduit que

$\int_0^x f'(t)dt$ admet une limite (finie) l quand $x \longrightarrow +\infty$

Ainsi $$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha = f(0) + l.$$

Or comme $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ converge, on en déduit que nécessairement $\alpha = 0$

(raisonner par l'absurde en supposant que $|\alpha| > 0$ et

aboutir à une contradiction... exercice !).

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

De même, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

En faisant alors tendre $a \longrightarrow -\infty$ et $b \longrightarrow +\infty$ dans $(*)$,

on obtient alors que

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{is} \widehat{f'}(s) \quad , s \in \mathbb{R}^*$$

i.e $\quad \widehat{f'}(s) = is \hat{f}(s) \quad , s \in \mathbb{R}^*.$

Pour $s = 0$, on a:

$$\widehat{f'}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i0 \times t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) dt$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f'(t) dt$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left(f(b) - f(a) \right) = 0$$

et la relation est aussi vraie en $s = 0$.

■

Autour du théorème de Dirichlet.

Rappel des notations.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et 2π-périodique

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note :

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt,$$

et la somme partielle (symétrique) d'ordre n de la série de Fourier est :

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad , x \in \mathbb{R} , n \geq 0.$$

Théorème (de Dirichlet).

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et 2π-périodique et supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ tels que

$$u \longmapsto \frac{1}{u} \left(f(x_0+u) + f(x_0-u) - f(x_0^+) - f(x_0^-) \right)$$

est borné sur $]0, \delta]$.

Alors $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} (S_n f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$.

Ici $\displaystyle f(x_0^+) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x)$ et $\displaystyle f(x_0^-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$

preuve : On a : $\displaystyle (S_n f)(x_0) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ik}$

D'où

$$(S_n f)(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x_0 - t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x_0 - t)\, dt ,$$

où $\boxed{D_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iku}}$ est le noyau de Dirichlet

d'ordre n.

Montrons que :

$$D_n(u) = \begin{cases} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) & , u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1 & , u \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Le cas où $u \in 2\pi\mathbb{Z}$ est évident car $e^{ik2\pi l} = 1$, $\forall l \in \mathbb{Z}$.

Supposons donc que $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$; d'où $e^{iu} \neq 1$.

Ainsi :

$$D_n(u) = e^{-inu} \sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)u} \qquad (l = k+n).$$

$$= e^{-inu} \sum_{l=0}^{2n} e^{ilu}$$

$$= e^{-inu} \frac{e^{i(2n+1)u} - 1}{e^{iu} - 1}$$

Soit : $$D_n(u) = e^{-inu} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})u}\left(e^{i(n+\frac{1}{2})u} - e^{-i(n+\frac{1}{2})u}\right)}{e^{iu/2}\left(e^{iu/2} - e^{-iu/2}\right)}$$ ③

$$= \frac{\cancel{2}i \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\cancel{2i} \sin\left(\frac{u}{2}\right)}.$$

$\square$

Remarquons que D_n est paire et 2π-périodique.

Montrons que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi D_n(u)\,du = \frac{1}{2}.$$

On a : $$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi D_n(u)\,du = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du \quad (D_n \text{ est paire})$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{iku}\,du$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}\,du.$$

Or pour $k \in \mathbb{Z}^*$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}\,du = \frac{1}{ik}\left[e^{iku}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{ik}\left(e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}\right) = 0,$$

car $e^{-ik\pi} = e^{2ik\pi} e^{-ik\pi} = e^{ik\pi}$.

De plus, pour $k=0$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0u}\, du = 2\pi .$$

Ainsi $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)\, du = \frac{1}{4\pi} \times 2\pi = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Revenons maintenant à l'expression de $(S_n f)(x_0)$ page 2 et effectuons le changement de variable $u = t - x_0$ dans l'intégrale. On obtient :

$$(S_n f)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x_0) D_n(-u)\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x_0) D_n(u)\, du ,$$

en utilisant la parité de D_n et la 2π-périodicité de

$$u \longmapsto f(u+x_0) D_n(u).$$

Ainsi $$(S_n f)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(u+x_0) D_n(u)\, du + \int_0^{\pi} f(u+x_0) D_n(u)\, d\right.$$

Or $$\int_{-\pi}^{0} f(u+x_0) D_n(u)\, du = \int_{\pi}^{0} f(x_0 - v) D_n(-v)\,(-dv)$$

soit $$\int_{-\pi}^{0} f(u+x_0)D_n(u)\,du = \int_0^{\pi} f(x_0-v)D_n(v)\,dv.$$

On en déduit alors que:

$$(S_n f)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x_0+u)+f(x_0-u)\big)D_n(u)\,du.$$

Notons $y_0 = \frac{1}{2}\left(f(x_0^+)+f(x_0^-)\right)$ et remarquons que d'après le fait démontré page 3, on a:

$$y_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2y_0 D_n(u)\,du.$$

D'où on en déduit:

$$(S_n f)(x_0) - y_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x_0+u)+f(x_0-u)-2y_0\big)D_n(u)\,du.$$

Avec l'expression de D_n démontré page 2, on en déduit que

$$(S_n f)(x_0) - y_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-f(x_0^+)-f(x_0^-)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)u\right)du$$

Par hypothèse, la fonction

$$\varphi :]0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \varphi(u) = \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-f(x_0^+)-f(x_0^-)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

est continue par morceaux sur $]0,\pi]$

et bornée sur $]0, \delta]$. On en déduit donc qu'elle est intégrable sur $[0, \pi]$.

On peut alors appliquer le lemme de Riemann Lebesgue et en déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(u) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right) du = 0 .$$

D'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (S_n f)(x_0) = y_0$. $\blacksquare$

On en déduit aisément le corollaire suivant :

Corollaire (Dirichlet) :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right).$$

En particulier, si f est continue en un point $x \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n f(x) = f(x)$.

Lorsque f est C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, alors on a un résultat plus fort.

Théorème : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

En particulier, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n f(x) - f(x)| = 0.$$

preuve : D'après le théorème de Dirichlet, on sait que

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} (S_n f)(x) = f(x)$. (converge simple).

Il reste donc à montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty .$$

Comme f est C^1 par morceaux, il existe une subdivision de $[-\pi, \pi]$: $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = \pi$,

telle que f est C^1 sur $]x_{k-1}, x_k[$, $1 \leq k \leq N$

et f' a des limites à droite et à gauche en x_k.

Ecrivons alors :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) e^{-int} dt$$

Prenons $x_{k-1} < a < b < x_k$ et effectuons une intégration par parties qui donne pour $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(t)\,e^{-int}\,dt = -\frac{1}{2i\pi n}\left[f(t)e^{-int}\right]_a^b + \frac{1}{2i\pi n}\int_a^b f'(t)\,e^{-int}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2i\pi n}\left(f(b)e^{-inb} - f(a)e^{-ina}\right) + \frac{1}{2i\pi n}\int_a^b f'(t)\,e^{-int}\,dt$$

Or $\underline{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$ donc $f(b) \xrightarrow[b \to x_k]{} f(x_k)$

$$f(a) \xrightarrow[a \to x_{k-1}]{} f(x_{k-1}).$$

D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,e^{-int}\,dt = -\frac{1}{2i\pi n}\left(f(x_k)e^{-inx_k} - f(x_{k-1})e^{-inx_{k-1}}\right) + $$

$$+ \frac{1}{2i\pi n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(t)\,e^{-int}\,dt$$

Donc :

$$\hat{f}(n) = -\frac{1}{2i\pi n}\sum_{k=1}^{N}\left(f(x_k)e^{-inx_k} - f(x_{k-1})e^{-inx_{k-1}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2i\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,e^{-int}\,dt$$

Soit :

$$\hat{f}(n) = -\frac{1}{2i\pi n}\underbrace{\cancel{\left(f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{+in\pi}\right)}}_{=0} + \frac{1}{in}\widehat{f'}(n)$$

Ainsi

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{in}\widehat{f'}(n), \quad n \in \mathbb{Z}^*.$$

En particulier, on a :

$$\sum_{n=-N}^{M} |\hat{f}(n)| = \sum_{n=-N}^{M} \frac{1}{|n|}|\widehat{f'}(n)|$$

$$\leq \left(\sum_{n=-N}^{M} \frac{1}{|n|^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=-N}^{M} |\widehat{f'}(n)|^2\right)^{1/2}$$

par l'inégalité de Cauchy Schwartz.

D'où

$$\sum_{n=-N}^{M} |\hat{f}(n)| \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|n|^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f'}(n)|^2\right)^{1/2}$$

$$< +\infty$$

(par l'identité de Parseval).

Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ converge, ce qui implique que la série $\sum_{n} \hat{f}(n)e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. ∎

Nous allons voir dans la suite un principe de localisation qui affirme que le résultat précédent reste vrai sur tout compact contenu dans $\mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\}$ où x_i, $0 \leq i \leq N$, sont les points de discontinuité éventuels de f.

Pour cela, nous allons donner une version améliorée du lemme de Lebesgue.

Lemme : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et 2π-périodique, $\omega : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

Alors

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_a^b f(x+u)\,\omega(u)\, e^{i\lambda u}\, du \right) = 0.$$

preuve : Notons $M = \sup_{u \in [a,b]} |\omega(u)| < +\infty$ (car ω est continue sur $[a, b]$ compact).

Comme f est continue par morceaux, elle est Riemann intégrable et donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \varphi$ en escalier, 2π-périodique tq

$$\int_a^b |f(u) - \varphi(u)|\, du \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Ecrivons alors :

$$\int_a^b f(x+u)\,\omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du = \int_a^b \big(f(x+u)-\varphi(x+u)\big)\,\omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du$$

$$+ \int_a^b \varphi(x+u)\,\omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du.$$

Or :

$$\left|\int_a^b \big(f(x+u)-\varphi(x+u)\big)\omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du\right| \leq M \int_a^b |f(x+u)-\varphi(x+u)|\,du$$

$$= M \int_{a+x}^{b+x} |f(v)-\varphi(v)|\,dv.$$

$$= M \int_a^b |f(v)-\varphi(v)|\,dv$$

(par périodicité).

$$\leq \frac{\varepsilon}{2M} \times M = \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, φ étant en escalier, il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ tel que si $I_j = [x_{j-1}, x_j[$, $1 \leq j \leq N$, on a :

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} m_j \, \chi_{I_j}\,.$$

où $\quad \chi_{I_j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(En fait, ceci n'est pas tout exact car il faut éventuellement changer la valeur de φ aux points x_j mais ce qui précède ne dépend pas de la valeur de φ en ces points....).

D'où

$$\int_a^b \varphi(x+u)\,\omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du = \sum_{j=1}^{N} m_j \int_a^b \chi_{I_j}(x+u)\,\omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \int_{(I_j - x)\cap[a,b]} \omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du$$

Remarquons alors que pour $a \leq t_{i-1} \leq t_i \leq b$, on a :

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du = \frac{1}{i\lambda}\Big[\omega(u)\,e^{i\lambda u}\Big]_{t_{i-1}}^{t_i} +$$

$$- \frac{1}{i\lambda}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega'(u)\,e^{i\lambda u}$$

D'où $\quad \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du \right| \leq \frac{M}{|\lambda|}$, où $\quad M = 2\|\omega\|_\infty + \|\omega'\|_\infty (b-a).$

Ainsi :

$$\left|\int_a^b \varphi(x+u)\,\omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du\right| \leq \sum_{j=1}^{N} |m_j| \left|\int_{(I_j \cap x)\cap[a,b]} \omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} |m_j| \frac{M}{|\lambda|}$$

D'où :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\int_a^b \varphi(x+u)\,\omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du\right| \leq \frac{C}{|\lambda|},$$

avec $\quad C = M \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{N} |m_j|.$

Ainsi $\quad \exists\, \lambda_0 > 0 \;/\; |\lambda| \geq \lambda_0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\int_a^b \varphi(x+u)\,\omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Longrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\int_a^b f(x+u)\,\omega(u)\,e^{i\lambda u}\,du\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Lemme : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique

et C^1 par morceaux.

Supposons que $f \equiv 0$ sur $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$

Alors $\sup_{x \in I} |S_n f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

sur tout intervalle compact $I \subset]a, b[$.

preuve : Soit $I = [c, d]$ avec $a < c < d < b$

et soit $0 < \delta < \pi$ tel que $a < c - \delta$ et $d + \delta < b$.

En reprenant une formule démontrée page 4, on a :

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u)\, du$$

et $D_n(u) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin(u/2)}$, $u \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.

Ecrivons alors :

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) f(x+u) D_n(u)\, du.$$

Or : pour $u \in [-\delta, \delta]$ et $x \in I = [c, d]$,

on a : $x+u \in [c-\delta, d+\delta] \subset (a, b)$

et donc $f(x+u) = 0$.

Ainsi :

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} f(x+u) D_n(u) du + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} f(x+u) D_n(u) du$$

Si on note $\omega : [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \omega(u) = \frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)},$$

on obtient que ω est C^1 et on a :

$$\sup_{x \in I} |S_n f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{x \in I} \left| \int_{-\pi}^{-\delta} f(x+u) \omega(u) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right) du \right|$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sup_{x \in I} \left| \int_{\delta}^{\pi} f(x+u) \omega(u) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right) du \right|$$

On peut alors appliquer le lemme page 10 qui implique le résultat. ∎

Corollaire : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique, C^1 par morceaux et soient $x_0, \ldots, x_N$ les points de discontinuité éventuels de f sur $[-\pi, \pi]$.

Alors $(S_n f)_n$ converge uniformément vers f sur tout intervalle compact $I \subset [-\pi, \pi] \setminus \{x_0, \ldots, x_N\}$.

preuve : Soit $I = [a, b] \subset [-\pi, \pi] \setminus \{x_0, \ldots, x_N\}$, et $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0, \ldots, x_N\}$.

On peut construire une fonction g de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ (2π-périodique) tel que

$$f \equiv g \text{ sur } [a-\varepsilon, a+\varepsilon].$$

Le lemme page 14 $\Longrightarrow$ $\sup_{x \in I} |S_n(f-g)(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Or pour $x \in I$, on a :

$$(S_n f)(x) - f(x) = (S_n f)(x) - g(x)$$

$$= S_n(f-g)(x) + (S_n g)(x) - g(x)$$

D'où

$$\sup_{x \in I} |(S_n f)(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |S_n(f-g)(x)| + \sup_{x \in I} |(S_n g)(x) - g(x)|$$

On a $\sup_{x \in I} |S_n(f-g)(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et comme g est C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$,

le théorème page 7 implique que

$$\sup_{x \in I} |(S_n g)(x) - g(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

D'où finalement le résultat. $\blacksquare$