Chapitre 1. Systèmes d'équations linéaires.

1.1. Introduction:

L'objet de ce chapitre est la résolution de systèmes linéaires de p équations à n inconnues, c'est à dire de systèmes de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \cdots + a_{pn} x_n = b_p \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des réels donnés.

Vocabulaire

- Une solution de (S) est un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}$ vérifiant les p équations de (S).
- Résoudre (S) c'est trouver toutes les solutions de (S).
- Deux systèmes linéaires (S) et (S') de p équations à n inconnues sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Dans ce chapitre, nous allons privilégier une méthode de résolution dite "méthode du pivot de Gauss" qui se présente comme un algorithme basé sur une méthode d'éliminations des inconnues $x_1, \dots, x_n$.

1.2. Méthode du pivot de Gauss :

<u>Définition 1</u> Une <u>opération élémentaire</u> sur les p équations $e_1, e_2, \dots, e_p$ du système (S) est l'une des trois opérations suivantes.

- Echanger deux équations e_i et e_j : $e_i \leftarrow e_j$
- Multiplier une équation par un réel $a \neq 0$
  $e_i \leftarrow a e_i$
- Ajouter à une équation un multiple d'une autre équation.
  $e_i \leftarrow e_i + b e_j$, $b \in \mathbb{R}$

La propriété essentielle (et évidente) est qu'appliquer à un système (S) l'une de ces trois opérations élémentaires donne un système équivalent.

Le but de la méthode du pivot de Gauss est de transformer le système (S) en un système dit <u>triangulaire</u> en effectuant successivement des opérations élémentaires sur les équations.

Algorithme.

1ère étape : on place à la première ligne une équation dont le coefficient de la première inconnue x_1 est non nul. Ce coefficient est appelé le "pivot".

2ème étape : on élimine la première inconnue dans $e_2, \dots, e_p$ à l'aide de l'opération élémentaire :

$$e_i \longleftarrow a_{11} e_i - a_{i1} e_1 \quad , i = 2, \dots, p.$$

3ème étape : on choisit parmi $e_2, \dots, e_p$ une équation où le coefficient de l'inconnue suivante est non nul et on utilise ce coefficient comme nouveau pivot.

4ème étape : on réitère l'étape 2 puis 3 et ainsi de suite jusqu'à obtenir un système équivalent triangulaire, dont la résolution s'obtient facilement par résolution des équations du bas vers le haut.

Exemple 1 Soit le système

$$(S) \begin{cases} \boxed{1} x + 2y - z = 6 \\ 2x - y + z = 7 \\ -x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

pivot

On utilise e_1 pour éliminer x dans e_2 et e_3

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=6 & \\ \boxed{-5}y+3z=-5 & e_2 \leftarrow e_2-2e_1 \\ 3y+z=17 & e_3 \leftarrow e_3+e_1 \end{cases}$$

Puis on utilise -5 comme pivot pour éliminer y dans e_3

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=6 & \\ -5y+3z=-5 & \\ 14z=70 & e_3 \leftarrow 5e_3+3e_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=6-2y+z \\ -5y=-5-3z=-20 \\ z=5 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=6-8+5=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases}$$

D'où $\boxed{S=\{(3,4,5)\}}$

Exemple 2 Soit le système

$$(S) \begin{cases} x+y-z+2t=1 \\ 2x+4y-6z-2t=0 \\ -x+y-3z-9t=-2 \\ x-2y+5z+13t=m+4 \end{cases}, \text{ où } m\in\mathbb{R}$$

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 & \\ 2y - 4z - 6t = -2 & e_2 \leftarrow e_2 - 2e_1 \\ 2y - 4z - 7t = -1 & e_3 \leftarrow e_3 + e_1 \\ -3y + 6z + 11t = m + 3 & e_4 \leftarrow e_4 - e_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 & \\ 2y - 4z - 6t = -2 & \\ -t = 1 & e_3 \leftarrow e_3 - e_2 \\ 4t = 2m & e_4 \leftarrow 2e_4 + 3e_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 & \\ 2y - 4z - 6t = -2 & \\ -t = 1 & \\ 0 = 2m + 4 & e_4 \leftarrow e_4 + 4e_1 \end{cases}$$

<u>si $m \neq -2$</u> la dernière équation n'est jamais vérifiée

et donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

<u>si $m = -2$</u> alors $t = -1$

$$2y = 4z + 6t - 2 = 4z - 8$$

soit $y = 2z - 4$

et $x = 1 - y + z - 2t$

$$= 3 - y + z = 3 - 2z + 4 + z = 7 - z$$

D'où $\mathcal{S} = \{(7-z, 2z-4, z, -1)\ z \in \mathbb{R}\}$

il y a donc $\boxed{\text{une infinité de solutions}}$

Chapitre 2 - Espaces vectoriels.

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de ses opérations usuelles. Un scalaire sera un élément de $\mathbb{K}$.

2.1 Généralités

2.1.1. Définitions, exemples

Définition 1 Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}$ espace vectoriel ($\mathbb{K}$-e.v en abrégé) est un ensemble non vide E sur lequel est définie

- une addition "+" $\quad E \times E \longrightarrow E$, $\quad (x, y) \longmapsto x + y$

- une multiplication externe "." $\quad \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$, $\quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda . x$

vérifiant les 8 propriétés suivantes

(i) (axiome d'associativité) $\forall x, y, z \in E \quad (x+y)+z = x+(y+z)$

(ii) (axiome de commutativité) $\forall x, y \in E : \quad x+y = y+x$

(iii) $\exists e \in E, \forall x \in E \quad x+e = e+x = x$

(iv) $\forall x \in E, \exists x' \in E \quad x+x' = x'+x = e$

(v) (axiome de distributivité) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \quad \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$

(vi) (axiome de distributivité) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad (\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$

(vii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad (\alpha \times \beta).x = \alpha.(\beta.x)$

(viii) $\forall x \in E, \quad 1.x = x$

Proposition 1 (a) S'il existe un élément e satisfaisant (iii) alors cet élément est unique et s'appelle l'élément neutre pour +

(b) S'il existe un élément $x' \in E$ satisfaisant (iv) alors il est unique et s'appelle le symétrique ou l'opposé de x.

preuve : (a) supposons $\exists e, e'$ satisfaisant (iii). Alors

$$e' = e' + e = e + e' = e$$

(b) supposons $\exists x', x''$ satisfaisant (iv).

On a $\quad x + x' = x' + x = e$

et $\quad x + x'' = x'' + x = e$

On a $x' + (x + x'') = x' + e = x'$

et $x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = e + x'' = x''$

D'où $x' = x''$.

Les éléments de E sont appelés <u>des vecteurs</u> et l'élément neutre e, souvent noté aussi 0_E, est appelé le <u>vecteur nul</u>.

Le symétrique ou l'opposé de x sera noté $-x$

Voici quelques règles de calcul.

<u>Proposition 2</u> Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $u, v, w \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$

(a) $0.u = 0_E$

(b) $\lambda.0_E = 0_E$

(c) $(-1).u = -u$

(d) $\lambda.u = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $u = 0_E$

(e) $u + w = v + w \iff u = v$

<u>preuve</u>: (a) On a : $\underset{\|(vi)}{(0+0).u} = 0.u$

$\Longrightarrow 0.u + 0.u = 0.u$

$\underset{(iii)}{\Longrightarrow} 0.u + 0.u = 0.u + 0_E$

$$\underset{(iv)}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{0.u + \underbrace{0.u + (-0.u)}_{=0_E}}_{\displaystyle 0.u} = \underbrace{0.u + (-0.u)}_{\displaystyle 0_E} + 0_E$$

$$0.u = 0_E$$

(b) La preuve est la même en partant de l'égalité $0_E + 0_E = 0_E$

(c) On a :

$$u + (-1).u \underset{(vii)}{=} 1.u + (-1).u \underset{(vi)}{=} (1+(-1)).u = 0.u = 0_E$$

$$\Longrightarrow \quad -u = (-1).u$$

(d) D'après (a) et (b) on a déjà que si $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$ alors $\lambda.u = 0_E$.

Réciproquement, supposons $\lambda.u = 0_E$ et $\lambda \neq 0$.

On multiplie alors par $\frac{1}{\lambda}$ ce qui donne

$$\frac{1}{\lambda}.(\lambda.u) = \frac{1}{\lambda}.0_E \underset{(b)}{=} 0_E$$

$$\frac{1}{\lambda}.(\lambda.u) \overset{(vii)}{=} \left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda\right).u = 1.u = u$$

D'où $u = 0_E$.

(e) Si $u + w = v + w$, on ajoute $-w$ et on utilise l'associativité d'où

$$
\begin{array}{ccc}
(u+w) - w & = & (v+w) - w \\
\| & & \| \\
u + (w - w) & = & v + (w - w) \\
\| & & \| \\
u + 0_E & = & v + 0_E \\
\| & & \| \\
u & = & v
\end{array}
$$

Exemple 1 : Soit $n \geqslant 1$ et $E = \mathbb{K}^n$.

On pose pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{K}^n$

et $\lambda \in \mathbb{K}$

* $x + x' = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$
* $\lambda . x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

Alors E muni de ces deux lois est un espace vectoriel.

(exercice) L'élément neutre est $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0)$ et l'opposé d'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ est le vecteur $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$.

Exemple ② : L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}$ et pour $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f+g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } (f+g)(x) = f(x)+g(x), \; x \in \mathbb{R}$$

et $$\lambda f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \; x \in \mathbb{R}.$$

Alors $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont l'élément neutre est la fonction identiquement nulle et si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'opposé de f est la fonction $-f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto -f(x)$$

Exemple ③ Soit $\mathcal{S} = \{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_n \in \mathbb{R} \}$

Alors $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-e.v. muni des opérations

$$\begin{cases} u+v = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda . u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

Exemple ④ : L'espace $\mathbb{R}_n[X] = \{ P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n ; \; a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n \}$ des polynômes de degré $\leq n$

On munit cet espace des deux opérations :

$$(P+Q)(X) = P(X)+Q(X) = (a_0+a'_0)+(a_1+a'_1)X+\cdots+(a_n+a'_n)X^n$$

et $(\lambda P)(X) = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \cdots + \lambda a_n X^n$

Alors $\mathbb{R}_n[X]$ muni de ces 2 opérations est un $\mathbb{R}$-e.v.

<u>Soustraction</u> : L'opération qui à $(u,v) \longmapsto u+(-v)$ s'appelle la <u>soustraction</u>. Le vecteur $u+(-v)$ se note $u-v$.

On vérifie facilement que $\lambda(u-v) = \lambda u - \lambda v$
et $(\lambda-\mu)u = \lambda u - \mu u$. (exercice).

2.1.2. Sous espaces vectoriels

<u>Définition 2</u> Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Une partie F de E est un sous espace vectoriel de E (en abrégé s.e.v.) si

(a) $0_E \in F$

(b) $\forall u \in F, \forall v \in F, u+v \in F$

(c) $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in F$

<u>Remarque</u> : on peut remplacer les conditions (b) et (c) de la définition par (b') $\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda u + \mu v \in F$.

Proposition 3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un s.e.v. de E.
Alors F muni des opérations de E est lui-même un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

preuve : D'après (b) et (c), il est clair que les 2 opérations

$$\begin{aligned} F \times F &\longrightarrow F \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times F &\longrightarrow F \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

sont bien définies. Les propriétés (i), (ii), (v), (vi), (vii) et (viii) sont alors vérifiées sur F car elles sont vérifiées par les éléments de E et $F \subset E$!
Il reste simplement à vérifier (iii) et (iv).
Mais d'après (a), $0_E \in F$ et on a donc pour tout $x \in F \subset E$: $x + 0_E = 0_E + x = x$.
Donc (iii) est vérifié pour F.
Il reste (iv). Soit $x \in F$. D'après (c),
$-x = (-1).x \in F$ et on a : $x - x = 0_E$.

Donc (iv) est aussi vérifiée

Tout ceci prouve que F est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Exemples * $\{0\}$ et E sont des s.e.v. de E.

* si $E = \mathbb{R}^3$, alors

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$$ est un s.e.v de E

mais $$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x+y+z = 1\}$$ n'est pas un s.e.v de E

(exercice !).

Définition 3 Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E. On dit qu'un vecteur $v \in E$ est combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_n$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Définition 4 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie non vide de E. On note

$$\mathrm{Vect}(A) \doteq \{v \in E : \exists \lambda_i \in \mathbb{K},\ \exists v_i \in A,\ 1 \leq i \leq n \text{ tels que } v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n\}$$

Autrement dit, $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A.

En particulier, si $A = \{v_1, \dots, v_n\} \subset E$, on note aussi $\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathrm{Vect}\, A = \left\{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{K}, \\ 1 \leq i \leq n \end{array} \right\}$

Proposition (4) : Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-e.v E.

Alors $\mathrm{Vect}(A)$ est un s.e.v de E.

preuve : (a) Comme $A \neq \emptyset$, $\exists\, v \in A$.

On a alors $0_E = 0.v \in \mathrm{Vect}(A)$.

(b) Soit $u \in \mathrm{Vect}(A)$, $v \in \mathrm{Vect}(A)$.

Alors $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, $v = \sum_{j=1}^{p} \lambda'_i v'_i$

où $\lambda_i, \lambda'_i \in \mathbb{K}$ et $v_i, v'_i \in A$.

Ainsi $u + v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda'_i v'_i$

et donc $u + v \in \mathrm{Vect}(A)$.

(c) Soit $u \in \mathrm{Vect}(A)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $v_i \in A$

D'où $\lambda u = \sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i v_i$ (en utilisant l'axiome de distributivité (V))

et donc $\lambda u \in \mathrm{Vect}(A)$.

· On peut conclure que $\mathrm{Vect}(A)$ est un s.e.v. de E.

Le résultat suivant donne des propriétés très utiles en pratique.

__Proposition 5__ : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et $F = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_n\}$ où $v_1, \dots, v_n \in E$.

Les opérations suivantes sur les vecteurs v_i ne changent pas F.

1. On peut ajouter à l'un des vecteurs v_i une combinaison linéaire des autres vecteurs. Par exemple, si

$$v'_n = v_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{K}$$

alors $F = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_{n-1}, v'_n\}$

2. Si l'un des vecteurs, par exemple v_n, est combinaison linéaire des autres vecteurs, alors on peut l'enlever : $F = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$

3. On peut changer l'ordre des vecteurs et on peut multiplier l'un des vecteurs v_i par un scalaire non nul : si $\alpha \neq 0$, alors

$$F = \mathrm{Vect}\{\alpha v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n\}$$

preuve: Le troisième point est trivial. Montrons le premier et le second.

1. On a :

$$u \in \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_{n-1}, v'_n\} \iff \exists \lambda_i \in \mathbb{K} \quad u = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i + \lambda_n v'_n$$

$$\iff \exists \lambda_i \in \mathbb{K} : u = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n \alpha_i v_i + \lambda_n v_n$$

$$\iff \exists \lambda_i \in \mathbb{K} \quad u = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i + \lambda_n \alpha_i) v_i + \lambda_n v_n$$

$$\iff u \in \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$$

Donc $\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_{n-1}, v'_n\} = \mathrm{Vet}\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$

2. Supposons que $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k$ où $\alpha_k \in \mathbb{K}$

On a:

$$u \in \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\} \iff \exists \lambda_i \in \mathbb{K} : u = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j v_j + \lambda_n v_n$$

$$\iff \exists \lambda_i \in \mathbb{K} \quad u = \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j + \lambda_n \alpha_j) v_j$$

$$\iff u \in \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$$

Donc $\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\} = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$

2.1.3. Familles génératrices - Familles libres.

Définition 5 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E, A \neq \emptyset$

On dit que A est une famille génératrice de E si $E = \text{Vect}(A)$. Autrement dit, si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire (finie) de vecteurs de A.

Exemples: ① Tout vecteur $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme

$$u = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1).$$

En notant $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$

on voit que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

② Tout polynôme P tel que $\deg(P) \leq n$, s'écrit sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \quad \text{avec } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

On en déduit que $\{1, X, \dots, X^n\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ - l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

③ Dans $\mathbb{R}^3$, considérons F le sous espace vectoriel

$$F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} v_1 = (1,1,2) \\ v_2 = (2,1,3) \\ v_3 = (-1,1,0). \end{array}$$

Alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une partie génératrice de F

Mais on peut aussi donner une partie génératrice de F avec deux éléments seulement !

En effet, on remarque que $v_3 = 3v_1 - 2v_2$.

On a alors en utilisant la proposition ⑤ que

$$F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, 3v_1 - 2v_2\}$$

$$= \text{Vect}\{v_1, v_2\}.$$

Ainsi $\{v_1, v_2\}$ est aussi une partie génératrice de F.

Définition ⑥ Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E. On dit que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une famille libre ou que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement indépendants si

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E \ , \lambda_i \in \mathbb{K}, i=1,\dots,n\right) \Longrightarrow \lambda_i = 0, i=1,\dots,n.$$

Proposition ⑥ Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $v_1,\dots,v_n$ des vecteurs de E.

① Lorsque $n=1$, $\{v_1\}$ est libre $\Longleftrightarrow v_1 \neq 0_E$

② Une famille contenant le vecteur nul n'est pas libre.

③ Une sous famille d'une famille libre est une famille libre

④ La famille $\{v_1,\dots,v_n\}$ est libre si et seulement si aucun des vecteurs v_i n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

preuve : ①, ② et ③ sont faciles et laissés en exercice

Montrons ④ Par définition, la famille $\{v_1,\dots,v_n\}$ n'est pas libre si et seulement si il existe un n-uplets de scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$$

Or $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0) \Longleftrightarrow \exists\ i \in \{1,\dots,n\}$ tq $\lambda_i \neq 0$.

D'où $\{v_1, \dots, v_n\}$ n'est pas libre si et seulement si il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $i \in \{1, \dots, n\}$

tq $\lambda_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$.

Or $\lambda_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E \iff \lambda_i \neq 0$

et $\lambda_i v_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j v_j$

i.e $v_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} v_j$.

D'où $\{v_1, \dots, v_n\}$ n'est pas libre si et seulement si il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que v_i s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Par contraposé, on obtient (4) $\blacksquare$

Exemples: (1) Dans $\mathbb{R}^n$, les vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ sont libres.

② Dans $\mathbb{R}[X]$ - l'espace vectoriel des polynômes, (22)
la famille $\{1, X, \dots, X^n\}$ est libre

③ Dans l'exemple ci dessus où $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$
$v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (2,1,3)$, $v_3 = (-1,1,0)$.

On a vu que $v_3 = 3v_1 - 2v_2$

Donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas libre.

Par contre $F = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et
la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre <u>car</u>

si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ alors
$(\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2) = (0,0,0)$

ce qui donne
$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & (1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (2) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & (1) \\ \lambda_2 = 0 & (1) - (2) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ainsi $\{v_1, v_2\}$ est libre et génératrice de F.

<u>Vocabulaire</u> Si E est un $\mathbb{K}$-e.v et $\{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs de E. Lorsque $\{v_1, \dots, v_n\}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est <u>liée</u>.

2.2 Espaces vectoriels de dimension finie

2.1.1. Bases d'un espace vectoriel

<u>Définition</u>: Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

(1) On dit que <u>E est de dimension finie</u> s'il admet une famille génératrice contenant un nombre fini de vecteurs.

(2) Soit $v_1, v_2, \dots, v_n$ des vecteurs de E. On dit que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est <u>une base</u> de E si $\{v_1, \dots, v_n\}$ est à la fois libre et générateur de E.

Le résultat fondamental suivant prouve l'existence de bases d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème (7) (<u>de la base incomplète</u>): Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie tel que $E \neq \{0_E\}$. Soient $\mathcal{A} = \{u_1, \dots, u_p\}$ une famille libre de E et

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_q\}$ une famille génératrice de E.

Alors $p \leq q$. De plus, soit $\mathcal{A}$ est une base de E, soit il existe au plus $q-p$ vecteurs $v_{i_1}, \dots, v_{i_r} \in \mathcal{B}$ tel que $\{u_1, \dots, u_p, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ soit une base de E.

preuve: (admis en cours)

① La famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E, donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbb{K}$ tq

$$u_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_q v_q.$$

L'un au moins des α_i est non nul car sinon $u_1 = 0_E$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{A}$ est libre.

Quitte à changer l'indexation des v_j, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. D'où en utilisant la proposition ⑤, on a:

$$\mathrm{Vect}\{u_1, v_2, v_3, \dots, v_q\} = \mathrm{Vect}\left\{u_1 - \sum_{j=2}^{q} \alpha_j v_j, v_2, \dots, v_q\right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\{\alpha_1 v_1, v_2, \dots, v_q\}$$

$$= \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$$

$$= E.$$

On en déduit que $\mathcal{B}_1 = \{u_1, v_2, \dots, v_q\}$ est générateur de E.

Donc il existe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tel que

$$u_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_q v_q.$$

Si $\beta_2 = \dots = \beta_q = 0$ alors $u_2 = \beta_1 u_1$ ce qui contredit le fait que $\mathcal{L}$ est libre.

Donc il existe $j \in \{2, \dots, q\}$ tel que $\beta_j \neq 0$ et quitte à changer l'indexation, on peut supposer que $\beta_2 \neq 0$.

Comme précédemment, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, v_3, \dots, v_q\} &= \mathrm{Vect}\{u_1, u_2 - \beta_1 u_1 - \sum_{j=3}^{q} \beta_j v_j, v_3, \dots, v_q\} \\ &= \mathrm{Vect}\{u_1, \beta_2 v_2, v_3, \dots, v_q\} \\ &= \mathrm{Vect}\{u_1, v_2, v_3, \dots, v_q\} \\ &= E. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{C}_2 = \{u_1, u_2, v_3, \dots, v_q\}$ est générateur de E.

Si $p > q$ en réitérant le procédé, on obtient que $\mathcal{C}_p = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ est une famille génératrice de E.

D'où $u_{q+1} \in \mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_q\}$ ce qui contredit le fait que $\mathcal{A}$ est libre.

Ainsi $p \leq q$ et en réitérant le procédé, on obtient que $\mathcal{C}_p = \{u_1, u_2, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots, v_q\}$ est génératrice de E.

(2) Si $\mathcal{A}$ est génératrice de E, alors $\mathcal{A}$ est une base de E et c'est fini !

Si $\mathcal{A}$ n'est pas une base de E, on considère les familles génératrices de E de la forme

$$\{u_1, \dots, u_p, v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\}$$

et on choisit parmi elles une ayant le plus petit nombre d'éléments ; $\underline{\{u_1, \dots, u_p, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}}$

Notons que comme $\{u_1, u_2, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots, v_q\}$ est génératrice de E, on a : $p + r \leq p + (q-p) = q$

i.e $\underline{r \leq q - p}$.

Si $\{u_1, \dots, u_p, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ n'est pas libre alors il existe $(\beta_1, \dots, \beta_p, \beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}) \neq (0, \dots, 0)$ tel que

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_{i_j} v_{i_j} = 0_E$$

Si tous les $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}$ sont nuls, on a

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i = 0 \quad \text{et comme } \mathcal{A} \text{ est libre}$$

on en déduit que $\beta_1 = \dots = \beta_p = 0$ ainsi

$$(\beta_1, \dots, \beta_p, \beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}) = (0, 0, \dots, 0) \quad \text{absurde}$$

Donc $\exists\, j \in \{1, \dots, r\}$ tq $\beta_{i_j} \neq 0$. Quitte à réordonner, on peut supposer que $\beta_{i_1} \neq 0$.

D'où

$$E = \mathrm{Vect}\,\{u_1, \dots, u_p, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}\}$$

$$= \mathrm{Vect}\,\Big\{u_1, \dots, u_p, \overbrace{\beta_{i_1} v_{i_1} - \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i - \sum_{j=2}^{r} \beta_{i_j} v_{i_j}}^{=\,0_E}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}\Big\}$$

$$= \mathrm{Vect}\,\{u_1, \dots, u_p, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}\}$$

ce qui contredit la minimalité de $\{u_1, \dots, u_p, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$.

Ainsi $\{u_1, \dots, u_p, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ est libre et génératrice.

Donc c'est une base de E. $\blacksquare$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 8 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie tel que $E \neq \{0_E\}$.

Alors

1. L'espace E admet des bases et toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments n. On dit que E est de dimension n et on note $n = \dim E$.

2. On suppose que $n = \dim E$ et on considère p vecteurs de E, $v_1, \dots, v_p$.

(a) si $p > n$, alors $\{v_1, \dots, v_p\}$ n'est pas libre

(b) si $p < n$ alors $\{v_1, \dots, v_p\}$ n'est pas génératrice

(c) si $p = n$ et $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre, alors $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une base de E

(d) si $p = n$ et $\{v_1, \dots, v_p\}$ est génératrice, alors $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une base de E.

preuve: (1) Comme $E \neq \{0_E\}$, il existe $u_1 \in E$, $u_1 \neq \{0_E\}$. (29)

La famille $\{u_1\}$ est libre, on peut alors utiliser le théorème de la base incomplète pour la compléter en une base de E par des vecteurs d'une famille génératrice finie de E.

A présent, si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E formées de m et n éléments. On a $\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ est génératrice. D'où le théorème (7) implique que $m \leq n$.

De même $\mathcal{B}_2$ est libre et $\mathcal{B}_1$ est génératrice. D'où le théorème (7) implique que $n \leq m$.

Ainsi $m = n$

(2) (a) Si $n = \dim E$ alors il existe d'après le (1) une base $\mathcal{B}$ formée de n éléments.

Si $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre, comme $\mathcal{B}$ est génératrice, le thm (7) implique une nouvelle fois que $p \leq n$.

Ainsi par contraposé si $p > n$ alors $\{v_1, \dots, v_p\}$ n'est pas libre.

(b) Si $\{v_1, \dots, v_p\}$ est génératrice, comme $\mathcal{B}$ est libre alors $n \leq p$.

Par contraposé, si $n > p$ alors $\{v_1, \dots, v_p\}$ n'est pas génératrice.

c) Si $p = n$ et si $\{v_1, \dots, v_n\}$ n'est pas génératrice,

on peut trouver $v_{n+1} \notin \operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Donc $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ serait libre ce qui contredit

le point 2 (a).

d) Si $p = n$ et $\{v_1, \dots, v_n\}$ n'est pas libre,

alors il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tq

$$\operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\} = \operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, \dots, v_n\}$$

$$= E$$

Ainsi $\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}$ est génératrice, ce

qui contredit le point 2 (b).

<u>Remarque:</u> Par convention, $\dim\{0_E\} = 0$ et

$\emptyset$ est une base de $\{0_E\}$.

<u>Exemples</u> 1) La famille de vecteurs $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$

où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ...

...... $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$

est une base $\mathbb{R}^n$ qu'on appelle la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

En comptant les vecteurs de cette base, on en déduit que

$$\boxed{\dim \mathbb{R}^n = n.}$$

2 La famille $\{1, X, \dots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ appelé la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

On en déduit que $\boxed{\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1}$

3 Soit
$$F = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x + y + z = 0\}.$$

On vérifie que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

De plus, $u = (x, y, z) \in F \iff x + y + z = 0$

$$\iff z = -x - y$$

D'où si $u = (x, y, z) \in F$ alors on peut écrire sous la forme $u = (x, y, -x-y)$

$$= x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

Si on pose $e_1 = (1, 0, -1)$, $e_2 = (0, 1, -1)$ ceci prouve que si $u \in F$ alors il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $u = x e_1 + y e_2$.

Ainsi $u \in \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$

Donc $F \subset \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$

On vérifie aisément avec les coordonnées de e_1 et e_2 que $e_1, e_2 \in F$ Ainsi $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} \subset F$

et donc $\underline{F = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}}$.

Autrement dit, la famille $\{e_1, e_2\}$ est génératrice de F.

De plus, elle est libre <u>car</u>

si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ alors

$$\lambda_1 (1, 0, -1) + \lambda_2 (0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

soit $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Donc $\{e_1, e_2\}$ est libre et génératrice de F donc c'est une base de F et $\underline{\dim F = 2}$

Proposition Soit E un $\mathbb{K}$espace vectoriel et soit $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E. LASSE (= Les assertions suivantes sont équivalents):

(i) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de E.

(ii) Pour tout $v \in E$, il existe des uniques scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i .$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés <u>les coordonnées</u> de v dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

<u>preuve:</u> <u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u> Soit $v \in E$. Comme $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, elle est en particulier génératrice et donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

Nous devons montrer que les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont uniques. Supposons qu'il existe $\lambda_1', \dots, \lambda_n' \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \lambda_1' e_1 + \dots + \lambda_n' e_n$$

Alors $(\lambda_1 - \lambda_1')e_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda_n')e_n = 0_E$

Mais la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ est libre (car c'est une base). Ainsi on a $\forall i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lambda_i - \lambda'_i = 0 \text{ , c'est-à-dire } \lambda_i = \lambda'_i .$$

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (i)</u>: Par hypothèse tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_n$.

Ainsi $\{e_1, \dots, e_n\}$ est génératrice de E.

Montrons qu'elle est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E .$$

Remarquons qu'on peut aussi écrire $0_E = \sum_{i=1}^{n} 0 . e_i$.

Par unicité de l'écriture d'un vecteur v comme combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_n$, on en déduit que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = 0$.

Ainsi $\{e_1, \dots, e_n\}$ est libre et génératrice de E.

Donc c'est une base de E. ∎

Proposition 10: Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n.

1. Tout sous espace vectoriel F de E est de dimension finie.
2. Si F est un s.e.v de E, alors $\dim F \leq \dim E$
3. Si F est un s.e.v de E et $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

preuve: Soit F un s.e.v de E si $F = \{0_E\}$ alors F est de dimension finie et $\dim F = 0 \leq n$.

Supposons donc $F \neq \{0_E\}$ et soit $v \in F \setminus \{0_E\}$

La famille $\{v\}$ est une famille libre de F.

Remarquons de plus que toute famille libre de F est une famille libre de E et comme E est de dimension n, toutes les familles libres de F ont au plus n éléments (d'après la proposition 8 2 (a)).

Considérons l'ensemble K des entiers k tel qu'il existe une famille libre de F ayant k éléments.

$$K = \{ k \in \mathbb{N} \ / \ \exists \{v_1, \dots, v_k\} \subset F \text{ et } \{v_1, \dots, v_k\} \text{ famille libre} \}$$

Cet ensemble K est non vide car $1 \in K$ ($\{v\}$ est une famille libre de F). De plus, ce qui précède montre aussi que K est borné par n.

Ainsi K est un sous ensemble non vide et borné de $\mathbb{N}$; il admet donc un maximum qu'on note p.

Soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille libre de F ayant p éléments.

<u>Montrons que</u> $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une famille génératrice de F.

On raisonne par l'absurde en supposant que $\{v_1, \dots, v_p\}$ n'est pas génératrice. Ainsi il existe $w \in F$ tel que $w \notin \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$.

On en déduit alors que $\{v_1, \dots, v_p, w\}$ est libre.

En effet, supposons que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda w = 0_E$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda \in \mathbb{K}$

Si $\lambda \neq 0$ alors on peut écrire que

$$w = -\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 + \dots + \frac{\lambda_p}{\lambda} v_p\right)$$

et donc $w \in \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ ce qui est contraire à la construction de w.

Ainsi $\lambda = 0$ mais alors $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$ et comme $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre on en déduit que

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda = 0$, ce qui montre que $\{v_1, \dots, v_p, w\}$ est libre. On a donc trouvé une famille de vecteurs de F à $(p+1)$ éléments qui est libre. C'est absurde par définition de p.

Ainsi $\{v_1, \dots, v_p\}$ est génératrice de F

On en conclut donc que F est de dimension finie. De plus, comme $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre et génératrice de F, c'est une base de F et

$$\dim F = p.$$

On a vu que $p \leq n = \dim E$.

D'où $\dim F \leq \dim E$

Il reste ③ à prouver. Soit F un s.e.v de E telle que $\dim F = \dim E$.

Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de F, alors $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une famille libre de F et donc de E. Mais comme $\dim E = n$, le théorème ⑧ implique que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une famille génératrice de E. Ainsi

$$E = \operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_n\} = F.$$

■

2.2.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E. Le rang de $\{v_1, \dots, v_p\}$ est l'entier $\operatorname{rg}(\{v_1, \dots, v_p\}) = \dim(\operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_p\})$.

Proposition (11) Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $\{v_1, \dots, v_p\}$ des vecteurs de E

Alors (1) $rg(\{v_1, \dots, v_p\}) \leq \min(n, p)$

(2) $rg(\{v_1, \dots, v_p\}) = p$ ssi $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre.

(3) $rg(\{v_1, \dots, v_p\}) = n$ ssi $\{v_1, \dots, v_p\}$ est génératrice de E.

(4) $rg(\{v_1, \dots, v_n\}) = n$ ssi $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de E

preuve : découle du théorème (8).

Elimination de Gauss pour calculer le rang d'une famille de vecteurs, on utilise la méthode du pivot de Gauss pour en déduire les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs.

Exemple Soient
$$u_1 = (1, 0, 1, 2)$$
$$u_2 = (0, 2, 1, -1)$$
$$u_3 = (2, 2, 3, 3)$$
$$u_4 = (1, -2, 0, 3)$$

Calculer $rg(\{u_1, u_2, u_3, u_4\})$

On commence par écrire les coordonnées des vecteurs en colonne.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

puis en combinant chaque colonne avec la première colonne, on cherche à mettre un zéro sur la première ligne de la $2^{ème}$, $3^{ème}$ et $4^{ème}$ colonne

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3' = u_3 - 2u_1 & u_4' = u_4 - u_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

et remarquons que $F = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}$

d'après la proposition 5

Puis on recommence avec la $2^{ème}$ ligne

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3'' = u_3' - u_2 & u_4'' = u_4' + u_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi $F = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3'', u_4''\} = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$

On remarque alors que $\{u_1, u_2\}$ est libre

Donc $\{u_1, u_2\}$ est une base de F

et $rg(\{u_1, u_2, u_3, u_4\}) = \dim F = 2$.

Remarquons aussi que cette méthode permet de trouver la relation entre u_1, u_2, u_3, u_4 car :

$$0_{\mathbb{R}^4} = u_3'' = u_3' - u_2 = u_3 - 2u_1 - u_2$$

$$0_{\mathbb{R}^4} = u_4'' = u_4' + u_2 = u_4 - u_1 + u_2.$$

La méthode pour trouver le rang d'un système de vecteurs est donc d'écrire la "matrice" dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs puis d'appliquer l'algorithme de Gauss pour arriver à une matrice dite échelonnée i.e du type

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & * & * & & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ * & * & \vdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le rang du système est égal au nombre de colonnes non nulles.

2.2.3 Représentations paramétique / cartésienne

Un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ peut être défini de plusieurs façons.

- Systèmes d'équations cartésiennes : Le s.e.v F peut être défini comme l'ensemble des vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ qui sont solutions d'un système linéaire de p équations de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1} x_1 + \cdots + a_{pn} x_n = 0 \end{cases}$$

Le système (S) s'appelle <u>un système d'équations cartésiennes</u> définissant F.

<u>Exemple:</u> $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \right\}$

- <u>Système d'équations paramétriques:</u> Le sous espace F peut être définie comme l'ensemble des vecteurs $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels tels que

$$(S) \begin{cases} x_1 = \lambda_1 e_{11} + \cdots + \lambda_p e_{1p} \\ x_2 = \lambda_1 e_{21} + \cdots + \lambda_p e_{2p} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_1 e_{n1} + \cdots + \lambda_p e_{np} \end{cases}$$

où les e_{ij} sont des réels donnés, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$

- Un système (S) s'appelle un système d'équations paramétriques définissant F.

Exemple: $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} x = 2\lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \right\}$

Il faut s'avoir passer d'un système d'équation paramétriques à un systèmes d'équations cartésiennes et inversement et il faut aussi savoir trouver une base à partir d'un système d'équations paramétriques ou cartésiennes.

Exemple 1 Soit $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0 \right\}$.

Trouver un système d'équation paramétrique et une base de F.

On a $u = (x,y,z) \in F \iff z = -y-x$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\lambda - \mu. \end{cases}$$

De plus, $u = (x,y,z) \in F \iff$

$$u = (x, y, -x-y)$$

$$= x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$$

Si on pose $e_1 = (1,0,-1)$, $e_2 = (0,1,-1)$,

le système $\{e_1, e_2\}$ est générateur de F.

De +, il est libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires). Ainsi $\{e_1, e_2\}$ est une base de F. et $\dim F = 2$

<u>Exemple 2</u> $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \right\}$

On a $u = (x,y,z) \in F \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = y \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

De plus,

$u = (x,y,z) \in F \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $u = \lambda(2,1,1)$

D'où si $e_1 = (2,1,1)$, on en déduit

que $\{e_1\}$ est un système générateur de F

Comme $e_1 \neq (0,0,0)$, $\{e_1\}$ est aussi libre

Ainsi $\{e_1\}$ est une base de F

et $\dim F = 1$

2.3. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Proposition 12 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, E_1, E_2 deux s.e.v de E.

Alors (1) $E_1 \cap E_2$ est un s.e.v de E.

(2) La somme $E_1 + E_2$, définie par

$$E_1 + E_2 = \{v \in E : \exists v_1 \in E_1, \exists v_2 \in E_2 \text{ tel que } v = v_1 + v_2\}$$

est aussi un s.e.v de E

preuve : (1) • Comme E_1 et E_2 sont des s.e.v de E, on a

$0_E \in E_1$, $0_E \in E_2$ et donc $0_E \in E_1 \cap E_2$

• Soient $x, y \in E_1 \cap E_2$.

Alors $x, y \in E_1$, E_1 s.e.v de E, d'où

$x + y \in E_1$.

De même $x, y \in E_2$, E_2 s.e.v de E, d'où

$x + y \in E_2$

Ainsi $x + y \in E_1 \cap E_2$

- Si $x \in E_1 \cap E_2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

  $x \in E_1$, E_1 s.e.v donc $\lambda x \in E_1$

  $x \in E_2$, E_2 s.e.v donc $\lambda x \in E_2$

  Ainsi $\lambda x \in E_1 \cap E_2$.

Ceci prouve que $E_1 \cap E_2$ est un s.e.v de E.

(2). On a $0_E \in E_1$, $0_E \in E_2$ donc

$$0_E = 0_E + 0_E \in E_1 + E_2$$

- Soient $v, w \in E_1 + E_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$v \in E_1 + E_2 \implies \exists\, v_1 \in E_1, \exists\, v_2 \in E_2$ tq $v = v_1 + v_2$

$w \in E_1 + E_2 \implies \exists\, w_1 \in E_1, \exists\, w_2 \in E_2$ tq $w = w_1 + w_2$

D'où $\lambda v + w = \lambda(v_1 + v_2) + (w_1 + w_2)$

$$= \lambda v_1 + w_1 + \lambda v_2 + w_2$$

Or pour $i = 1, 2$, E_i est un s.e.v

et $v_i, w_i \in E_i$. D'où $\lambda v_i + w_i \in E_i$

Ainsi $\lambda v + w \in E_1 + E_2$.

Donc $E_1 + E_2$ est un s.e.v.

Définition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de E.

On dit que : (a) la somme $E_1 + E_2$ est <u>directe</u> si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. On la note alors $E_1 \oplus E_2$

(b) les s.e.v E_1 et E_2 sont <u>supplémentaires</u> dans E si $E = E_1 \oplus E_2$.

Autrement dit, E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $\begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ \text{et} \\ E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \end{cases}$

Proposition 13 : Soient E un $\mathbb{K}$e.v et E_1, E_2 deux s.e.v de E. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $E = E_1 \oplus E_2$

(ii) Pour tout $x \in E$, il existe un <u>unique</u> couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

<u>preuve</u> : <u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u> si $E = E_1 \oplus E_2$ alors comme $E = E_1 + E_2$, pour tout $x \in E$,

$x \in E_1 + E_2$ et donc il existe $x_1 \in E_1$,

$x_2 \in E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Montrons l'unicité. Supposons qu'il existe $x_1' \in E_1$,

$x_2' \in E_2$ tel que $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$.

D'où $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$

Comme $x_1, x_1' \in E_1$ et E_1 est un s.e.v, on en

déduit que $x_1 - x_1' \in E_1$. De même, $x_2, x_2' \in E_2$

et E_2 est un s.e.v, donc $x_2 - x_2' \in E_2$.

D'où $x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in E_1 \cap E_2$.

Mais par hypothèse $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

D'où $x_1' = x_1$ et $x_2' = x_2$.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (i).</u> il est clair que (ii) $\Longrightarrow E = E_1 + E_2$

Il reste à montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

Soit $x \in E_1 \cap E_2$. On peut alors décomposer x

de deux façons

$$x = \underbrace{x}_{\in E_1} + \underbrace{0_E}_{\in E_2} = \underbrace{0_E}_{\in E_1} + \underbrace{x}_{\in E_2}$$

Par unicité, on en déduit que $x = 0_E$.

2.3.2. Cas de la dimension finie

Proposition 14 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de E.
Si $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_p\}$ est une base de E_1
et $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ est une base de E_2
Alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{e_1, \dots, e_p, v_1, \dots, v_\ell\}$ est une famille génératrice de $E_1 + E_2$.

preuve: Soit $x \in E_1 + E_2$. Alors $\exists (x_1, x_2) \in E_1 + E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
Comme $x_1 \in E_1$ et $\mathcal{B}_1$ est une base de E_1 alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$x_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

De même, $\exists \mu_1, \dots, \mu_\ell \in \mathbb{R}$ tels que

$$x_2 = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j v_j$$

D'où

$$x = x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j v_j,$$

ce qui montre que

$$E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \text{ et}$$

donc $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est génératrice de E_1+E_2 ■

<u>Remarques:</u> ① La proposition 14 reste valable si on suppose seulement que $\mathcal{B}_1$ est une partie génératrice de E_1 et $\mathcal{B}_2$ est une partie génératrice de E_2 (c'est ce qu'on utilise dans la preuve!).

② ⚠ En général, même si $\mathcal{B}_1$ (respectivement $\mathcal{B}_2$) est une base de E_1 (respectivement E_2) alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ n'est pas une base de $E_1 + E_2$.

Par exemple, considérons

$$u_1 = (1,0,0), \quad u_2 = (0,1,0)$$
$$u_3 = (1,1,0), \quad u_4 = (0,0,1)$$

et $E_1 = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$

$E_2 = \mathrm{Vect}\{u_3, u_4\}$

Alors $\{u_1, u_2\}$ est une base de E_1

(on voit que le système est libre et il

est générateur de E_1)

De même $\{u_3, u_4\}$ est une base de E_2

En revanche $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ n'est pas une base de $E_1 + E_2$ car il n'est pas libre ; remarquez que $u_3 = u_1 + u_2$ par exemple.

Théorème 15. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

preuve: Comme E est de dimension finie, on sait que $E_1 \cap E_2$, E_1 et E_2 sont tous des espaces vectoriels de dimension finie (Proposition 10)

Soit $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_r\}$ une base de $E_1 \cap E_2$

Donc en particulier, $\mathcal{B}$ est une famille libre à la fois de E_1 et de E_2. Le théorème de la base incomplète nous permet alors de compléter $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_p\}$ de E_1

et on une base $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_q\}$ de E_2.

D'après la proposition 14, la famille

$$\mathcal{F} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q\}$$

est une famille génératrice de $E_1 + E_2$.

Montrons qu'elle est aussi libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q$ des réels tels que

$$(*) \quad \boxed{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i w_i = 0_E}$$

Alors $$\sum_{i=1}^{q} \gamma_i w_i = -\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i - \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i$$

et comme $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_p \in E_1$, on en

déduit que $$\sum_{i=1}^{q} \gamma_i w_i \in E_1$$ et de

plus, comme $w_1, \dots, w_q \in E_2$, on obtient que

$$\sum_{i=1}^{q} \gamma_i w_i \in E_1 \cap E_2.$$

Ainsi il existe $\delta_1, \dots, \delta_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{q} \gamma_i w_i = \sum_{i=1}^{r} \delta_i u_i$$

D'où $\sum_{i=1}^{r} \delta_i u_i - \sum_{i=1}^{q} \gamma_i w_i = 0_E$.

Mais $\mathcal{B}_2$ est libre donc on en déduit que

pour tout $i = 1, \dots, q$, $\gamma_i = 0$.

En reportant dans $(*)$, on obtient que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i = 0_E$$

Or $\mathcal{B}_1$ est libre et donc on en déduit que

pour tout $1 \leq i \leq r$ et tout $1 \leq j \leq p$, on a

$$\lambda_i = \mu_j = 0.$$

Ainsi $(*) \Longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_p = 0$

Donc $\mathcal{F}$ est libre. Comme elle est génératrice de $E_1 + E_2$, c'est une base de $E_1 + E_2$!

Ainsi
$$\begin{aligned} \dim(E_1 + E_2) &= \operatorname{card} \mathcal{F} \\ &= r + p + q \\ &= r + p + r + q - r \end{aligned}$$

Or $r + p = \operatorname{card}(\mathcal{B}_1) = \dim E_1$

$r + q = \operatorname{card}(\mathcal{B}_2) = \dim E_2$

et $r = \mathrm{card}(\mathcal{B}) = \dim(E_1 \cap E_2)$.

D'où $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$. ∎

On en déduit la caractérisation suivante

Théorème (16) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1, E_2 deux s.e.v de E, $\{u_1, \dots, u_p\}$ une base de E_1 et $\{v_1, \dots, v_q\}$ une base de E_2.

Alors $E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ est une base de E.

preuve : On note $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$

Supposons d'abord que $E = E_1 \oplus E_2$ et montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E.

On sait par la proposition (14) que $\mathcal{B}$ est une partie génératrice de $E_1 + E_2 = E$

De plus, comme $E = E_1 \oplus E_2$, on a $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et le théorème (15) implique que $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$

Or $\{u_1, \dots, u_p\}$ est une base de E_1 donc $\dim E_1 = p$

et $\{v_1, \ldots, v_q\}$ est une base de E_2 donc $\dim E_2 = q$.

D'où $\dim(E_1 + E_2) = \dim E = p+q$.

Ainsi $\mathcal{B}$ est une partie génératrice de E

et $\operatorname{card} \mathcal{B} = p+q = \dim E$.

D'où on en déduit par le théorème 8 que

$\mathcal{B}$ est une base de E.

Réciproquement si $\mathcal{B}$ est une base de E.

Alors $E = E_1 + E_2$. En effet, si $x \in E$

alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ des réels tel que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j v_j$$

et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in E_1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \mu_j v_j \in E_2$

ce qui prouve que $x \in E_1 + E_2$

Ainsi $E = E_1 + E_2$.

D'autre part

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E = \operatorname{card}(\mathcal{B})$$

$$= p+q = \dim E_1 + \dim E_2$$

D'où $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1+E_2)$

$= 0$

Ainsi $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Donc $\left.\begin{array}{l} E = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \end{array}\right| \Longrightarrow E = E_1 \oplus E_2$

<u>Théorème 17</u> Soient E un $\mathbb{K}$e.v, E_1, E_2 deux s.e.v de E.

Alors $E = E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ \text{et} \\ \dim E = \dim E_1 + \dim E_2 \end{cases}$

<u>preuve:</u> $\boxed{\Longrightarrow}$ si $E = E_1 \oplus E_2$ alors

$E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

D'où $\dim E = \dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \underbrace{\dim(E_1 \cap E_2)}_{0}$

$= \dim E_1 + \dim E_2$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $E = E_1 + E_2$ et $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$

Alors $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1+E_2)$

$= \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E = 0$

D'où $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

et donc $E = E_1 \oplus E_2$ ■

Montrons pour finir ce chapitre que tout sous espace vectoriel admet un sous espace vectoriel supplémentaire.

Proposition 18 : Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et E_1 un sous espace vectoriel de E. Alors il existe un sous espace vectoriel E_2 de E tel que $E = E_1 \oplus E_2$

preuve : Soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ une base de E_1. En particulier, $\{u_1, \dots, u_p\}$ est une famille libre de E_1 et donc de E. Le théorème de la base incomplète permet alors de compléter $\{u_1, \dots, u_p\}$ en une base $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ de E.

Posons $E_2 = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_q\}$.

E_2 est un sous espace vectoriel de E et $\{v_1, \dots, v_q\}$ est une base de E_2 (il est générateur de E_2 par définition et il est libre car $\{v_1, \ldots, v_q\}$ est une sous famille de $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$ qui est libre !)

Le Théorème 16 implique alors que $E = E_1 \oplus E_2$.

$\blacksquare$

Chapitre 3. Application linéaires

3.1 Définitions et propriété

Définition. Soient E, F deux $\mathbb{K}$ e.v et $f: E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est linéaire si

(i) $\forall\, u, v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$

(ii) $\forall\, u \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Il est clair que (i) et (ii) sont équivalents à

$$\boxed{\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)}$$

Notation. $\mathcal{L}(E,F)$ – l'ensemble des applications linéaire de E dans F.

Définition: Soit E, F deux $\mathbb{K}$ e.v

(a) On dit que f est un isomorphisme de E sur F si f est une application linéaire et bijective de E sur F

(b) On dit que f est un endomorphisme de E si f est une application linéaire de E vers E.

(c) On dit que f est un automorphisme de E si f est un endomorphisme bijectif de E (donc autrement dit un isomorphisme de E sur E)

Remarques Supposons $f : E \longrightarrow F$ linéaire.

Alors (a) $\forall u_1, \ldots, u_n \in E, \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

on a
$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$$

(b) $f(0_E) = 0_F$

(c) $\forall u \in E, \quad f(-u) = -f(u)$

preuve : (a) récurrence sur le nombre de vecteurs n.

(c) On applique la propriété de linéarité et le fait si x est un élément d'un ev alors
$(-1) \cdot x = -x$ (voir chapitre 2).

D'où $f(-u) = f((-1) \cdot u) = (-1) \cdot f(u) = -f(u)$.

(b) On écrit que
$$0_F = f(u) - f(u) = f(u) + f(-u) = f(u-u)$$
$$= f(0_E).$$

Exemples

① L'application $\Theta : E \longrightarrow F$ telle que
$\forall u \in E, \ \Theta(u) = 0_F$ est une

application linéaire, appelée application nulle.

2 L'application $Id_E : E \longrightarrow E$

$$u \longmapsto u$$

est une application linéaire appelée l'identité de E.

C'est un automorphisme de E.

3 L'application φ $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

telle que $\varphi(f) = f'$, $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est

une application linéaire.

4 L'application $I : C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto I(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

est linéaire.

Proposition 1 Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel

preuve. Il suffit de montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de

$$\mathcal{F}(E,F) = \{ h : E \longrightarrow F \text{ application de } E \text{ dans } F \}$$

1. L'application nulle Θ est une application linéaire. Donc $\Theta \in \mathcal{L}(E,F)$.

2. Soient $f,g \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Pour tous $(u,v) \in E^2$, pour tout $\mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$(\lambda f+g)(\mu u+v) = \lambda f(\mu u+v) + g(\mu u+v)$$

f,g linéaire $\longrightarrow$

$$= \lambda (\mu f(u)+ f(v)) + \mu g(u)+g(v)$$

$$= \mu (\lambda f(u)+g(u)) + \lambda f(v)+g(v)$$

$$= \mu (\lambda f+g)(u) + (\lambda f+g)(v)$$

Donc $\lambda f+g \in \mathcal{L}(E,F)$.

Ainsi $\mathcal{L}(E,F)$ est un s.e.v de $\mathcal{F}(E,F)$ donc un $\mathbb{K}$ espace vectoriel

<u>Proposition 2.</u> Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G) \Longrightarrow g\circ f \in \mathcal{L}(E,G)$
2. Si f est un isomorphisme de E sur F alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E

preuve: 1 Soient $(u,v) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$(g\circ f)(\lambda u+v) = g(f(\lambda u+v))$$

$$= g(\lambda f(u)+f(v)) \quad f \text{ linéaire}$$

$$= \lambda g(f(u)) + g(f(v)) \quad g \text{ linéaire}$$

$$= \lambda (g\circ f)(u) + (g\circ f)(v)$$

D'où $g\circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

2 Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme alors par définition f est linéaire <u>et</u> bijective.

Ainsi $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est bijective. Il reste à montrer qu'elle est linéaire.

Soient $v_1, v_2 \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Comme f est bijective de $E \longrightarrow F$, il existe $u_1, u_2 \in E$ tel que $v_i = f(u_i)$, $i = 1,2$.

D'où $\lambda v_1 + v_2 = \lambda f(u_1) + f(u_2)$

$$= f(\lambda u_1 + u_2) \quad f \text{ linéaire}$$

et donc

$$f^{-1}(\lambda v_1 + v_2) = f^{-1}\big(f(\lambda u_1 + u_2)\big)$$

$$= \lambda u_1 + u_2$$

$$= \lambda f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2).$$

D'où $\quad f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. $\blacksquare$

3.2 Image d'une application linéaire

Rappelons que si $f : E \longrightarrow F$ (est une application d'un ensemble E dans un ensemble F) et si $A \subset E$ alors on note

$$f(A) = \{ y \in F : \exists\, x \in A,\ y = f(x) \}$$

$$= \{ f(x) : x \in A \}$$

et $f(A)$ s'appelle l'image directe de A par f.

Proposition 3 Soit E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriel et

$f \in \mathcal{L}(E, F)$

Si E' est un sous espace vectoriel de E alors $f(E')$ est un sous espace vectoriel de F.

<u>preuve:</u> Comme E' est un s.e.v de E, on a :

$0_E \in E'$ et donc $0_F = f(0_E) \in f(E')$

D'autre part, si $y_1, y_2 \in f(E')$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in E'$.

D'où $$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \underset{f \text{ linéaire}}{=} f(\lambda x_1 + \mu x_2)$$

Comme E' est un s.e.v de E, nécessairement

$\lambda x_1 + \mu x_2 \in E'$ et donc $\lambda y_1 + \mu y_2 \in f(E')$.

Cela implique alors que $f(E')$ est un s.e.v. de F.

<u>Définition:</u> Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle <u>image de f</u> l'ensemble noté $\mathrm{Im} f$ et défini par

$$\mathrm{Im} f = f(E).$$

D'après la proposition 3, $\mathrm{Im} f$ est un s.e.v. de F

De +, par définition de la surjectivité, on a

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im} f = F$$

3.3 Noyau d'une application linéaire.

<u>Définition</u> : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle <u>noyau</u> de f et on note $\ker(f)$, l'ensemble défini par

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

Autrement dit, $\ker f = f^{-1}(\{0_F\})$ ⚠ Ici $f^{-1}(\{0_F\})$ désigne l'image réciproque de $\{0_F\}$; cela n'a rien à voir avec une quelconque bijectivité de f....

<u>Proposition ①</u> : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

Alors $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.

<u>preuve</u> : • $0_E \in \ker f$ car $f(0_E) = 0_F$

• Soient $x_1, x_2 \in \ker f$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

Alors $f(x_1) = f(x_2) = 0_F$ et

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \underset{f \text{ linéaire}}{=} \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = \lambda_1 0_F + \lambda_2 0_F$$
$$= 0_F.$$

Ainsi $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \ker f$ et $\ker f$ est un sous espace vectoriel de E. ■

<u>Exemples</u>. ① Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+y+z=0\}$

On vérifie que l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y,z) \longmapsto 2x+y+z$

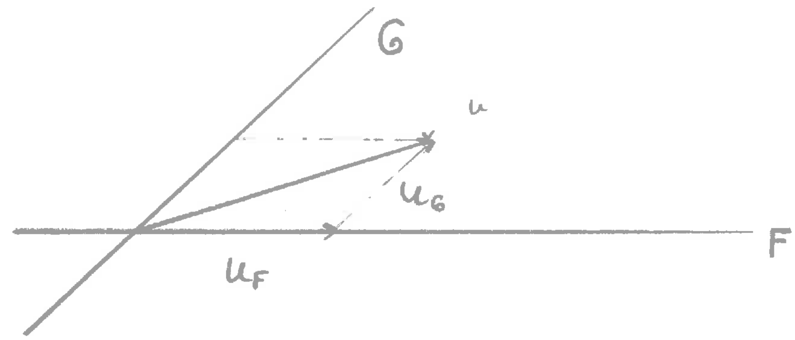
est linéaire et $G = \ker f$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

② Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et F, G deux sous espaces vectoriels de E supplémentaires :

$$E = F \oplus G$$

Soit $p : E = F \oplus G \longrightarrow E$
$u = u_F + u_G \longrightarrow p(u) = u_F$

L'application p s'appelle la projection sur F parallèlement à G



On vérifie facilement que p est linéaire

et $\ker p = G$ et $\operatorname{Im} p = F$.

Théorème 5 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors f est injective $\Longleftrightarrow \ker f = \{0_E\}$

preuve:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f injective et montrons que $\ker f = \{0_E\}$

On a vu qu'on a toujours $0_E \in \ker f$

Si maintenant $x \in \ker f$ Alors remarquons par définition

que $0_F = f(x) = f(0_E)$.

Comme f est injective, nécessairement $x = 0_E$

Ainsi $\ker f = \{0_E\}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons réciproquement que $\ker f = \{0_E\}$ et montrons

que f est injective.

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.

Comme f est linéaire, on a $0_F = f(x) - f(y)$

$= f(x - y)$

D'où $x - y \in \ker f = \{0_E\}$

Ainsi $x - y = 0_E$ et $x = y$

Ceci montre que f est injective.

3.4. Applications linéaires en dimension finie

Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire et que E est de dimension finie, la théorie de la dimension fournit de nouvelles propriétés très riches pour l'application linéaire f.

3.4.1 Construction et caractérisation:

si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\dim E < +\infty$ alors f est entièrement déterminée par son action sur les vecteurs d'une base de E.

Théorème 6: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie n et que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E.

Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ n vecteurs de F.

Alors il existe une et une seule application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$, $f(e_i) = v_i$.

preuve: Existence Comme $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x) \in \mathbb{K}$

<u>uniques</u> tels que $$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) e_i \qquad (*)$$

Définissons alors
$$f : E \longrightarrow F$$
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) e_i \longmapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) v_i$$

Montrons que f est linéaire

Soient $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Ecrivons $$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y) e_i$$

Alors $$\lambda x + y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i(x) + \lambda_i(y)) e_i$$

Ainsi par unicité de l'écriture dans $(*)$, on a

$$\lambda_i(\lambda x + y) = \lambda \lambda_i(x) + \lambda_i(y), \quad 1 \leq i \leq n$$

et par définition de f, on a

$$f(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i(x) + \lambda_i(y)) v_i$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) v_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y) v_i$$

$$= \lambda f(x) + f(y).$$

Ainsi f est linéaire.

De plus, comme $\lambda_j(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$

on a
$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(e_i)\, v_j = v_i \quad , \; 1 \leq i \leq n.$$

Unicité supposons qu'il existe $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que
$$f(e_i) = g(e_i) = v_i \quad , \; 1 \leq i \leq n$$

Soit $x \in E$ Alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\, e_i$

et donc par linéarité de f et g, on a
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) g(e_i)$$
$$= g(x)$$

D'où pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$

et donc $f = g$ $\blacksquare$

3.4.2 Rang d'une application linéaire

Proposition 7 Soit E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et

On suppose que $n = \dim E < +\infty$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

(a) $\operatorname{Im} f$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

(b) si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, alors

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$$

<u>Définition</u>: Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\dim E < +\infty$, la dimension de $\mathrm{Im} f$ s'appelle <u>le rang de f</u>.

On la note $\mathrm{rg}(f)$.

Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))}$$

<u>Remarque</u>: D'après la proposition 7, on a

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}),$$

où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E.

Ainsi, le $\mathrm{rg}(f)$ est égal au rang du système de vecteurs $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

<u>preuve de la proposition 7</u>:

On a déjà vu que $\mathrm{Im}(f)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel (c'est un s.e.v de F; voir proposition 3).

D'autre part, pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(e_i) \in \mathrm{Im}(f)$.

Donc $\quad \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\} \subset \text{Im}(f)$.

<u>Montrons que</u> $\quad \text{Im}(f) \subset \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$

Soit $y \in \text{Im}(f)$. Alors $\exists\, x \in E : y = f(x)$

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

tels que $\quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

Par linéarité de f, on a :

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$$

Ainsi $\quad y \in \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$

et $\quad \text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

Ceci prouve le (b) et on a aussi

$$\dim\left(\text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}\right) \leq n < +\infty$$

Ainsi $\quad \dim(\text{Im}(f)) \leq n < +\infty$

$\blacksquare$

<u>Théorème 8</u> <u>(Théorème du rang)</u> : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\dim E < +\infty$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f)$$

Autrement dit,

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + rg(f)$$

preuve 1er cas : si $\ker f = E$. Alors cela signifie que

pour tout $x \in E$, $f(x) = 0_F$ et donc

$\mathrm{Im} f = \{0_F\}$ et $rg(f) = 0$

et $\dim(\ker f) + rg(f) = \dim(\ker f) = \dim E$.

2ie cas : si $\ker f \neq E$. Alors il existe un supplémentaire

$G \neq \{0_E\}$ de $\ker f$ dans E.

Soient alors $\{u_1, \dots, u_p\}$ une base de $\ker f$ et

$\{v_1, \dots, v_q\}$ une base de G.

Comme $E = \ker f \oplus G$, le système $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$

est une base de E.

Ainsi la proposition 7 implique que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(u_1), \dots, f(u_p), f(v_1), \dots, f(v_q)\}$$

$$= \mathrm{Vect}\{f(v_1), \dots, f(v_q)\}$$

car $u_i \in \ker f$ et donc $f(u_i) = 0_F$

Ainsi $\{f(v_1), \dots, f(v_q)\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Montrons qu'elle est libre.

Pour cela, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{K}$ tels que

$$(*) \qquad \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_q f(v_q) = 0_F$$

Il s'agit de montrer que pour tout $1 \leq i \leq q$, $\lambda_i = 0$.

Par linéarité de f, l'équation $(*)$ peut se réécrire comme

$$0_F = f\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i\right).$$

Ceci est équivalent au fait que $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i \in \ker f$.

Mais comme $v_i \in G$, $1 \leq i \leq q$, on a aussi

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i \in G.$$

Donc $$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i \in G \cap \ker f$$

Rappelons nous alors que G est un supplémentaire de $\ker f$ dans E, donc en particulier

$$\ker f \cap G = \{0_E\}.$$

D'où $$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i = 0_E.$$

Maintenant, rappelons nous que la famille $\{v_1, \dots, v_q\}$

est libre puisque c'est une base de G.

Ainsi pour tout $1 \leq i \leq q$, $\lambda_i = 0$.

Donc $\{f(v_1), f(v_q)\}$ est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ et

$$rg(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = q.$$

Pour conclure, il suffit de noter que

$\dim \ker f = p$ car $\{u_1, \dots, u_p\}$ est une base de $\ker f$,

et $\dim E = p+q$ car $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ est une base de E

D'où
$$\dim E = p+q = \dim \ker f + rg(f).$$

■

Corollaire 9 : Soient E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

Supposons qu'il existe un isomorphisme $f : E \longrightarrow F$.

Alors E est de dimension finie si et seulement si F est de dimension finie.

De plus, dans ce cas, on a $\dim E = \dim F$

preuve: Supposons que E soit de dimension finie.

Comme f est surjective, on a $\operatorname{Im} f = F$

et comme f est injective, on a $\ker f = \{0_E\}$.

La proposition 7 implique que F est de dimension finie et le théorème du rang donne

$$\begin{aligned}\dim E &= \dim \ker f + \dim(\operatorname{Im} f)\\ &= \dim(\operatorname{Im} f) = \dim F.\end{aligned}$$

Si au départ, on sait que F est de dimension finie, on fait le même raisonnement avec $f^{-1}: F \longrightarrow E$ qui est un isomorphisme de F sur E d'après la proposition 2.

Corollaire 10: Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie et tels que

$$\dim(E) = \dim(F).$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

LASSE (Les assertions suivantes sont équivalentes)

(i) f est bijective

(ii) f est injective

(iii) f est surjective

<u>preuve</u>: Il est clair qu'il suffit de démontrer que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Or (ii) $\Longleftrightarrow$ $\ker f = \{0_E\}$ (Théorème 5)

$\Longleftrightarrow$ $\dim E = \dim \mathrm{Im}(f)$ (Théorème du rang)

$\Longleftrightarrow$ $\dim F = \dim \mathrm{Im}(f)$ (car $\dim E = \dim F$)

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = F$ (car $\mathrm{Im} f$ est un s.e.v de F)

$\Longleftrightarrow$ f surjective

$\Longleftrightarrow$ (iii)

■

Chapitre 4. Calcul matriciel.

4.1. Définition et premières opérations.

<u>Définition</u> Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Une <u>matrice à m lignes et n colonnes</u> à coefficient dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est la donnée de $m \times n$ éléments $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{smallmatrix}\right)$ rangé dans un tableau.

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

On écrit aussi $M = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Une matrice est dite <u>carrée</u> si le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes.

On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ - l'ensemble des matrices carrées de taille (n,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. ②

L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ peut être muni de deux opérations qui en font un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

- <u>une addition (interne)</u> : si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la somme $A+B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$A+B = (a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

- <u>une multiplication (externe)</u> :

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, le produit $\lambda.A$ est la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$\lambda.A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}.$$

<u>Exemples</u> : ① Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Alors $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 2 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

et $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

Théorème 1 L'ensemble $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel

preuve : on vérifie sans peine les 8 axiomes d'espace vectoriel. Remarquons que $0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})} = (0)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nulles

De plus, si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ alors l'opposé de A est

$$-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$$

car $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} + (-a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = (0)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$

Pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$E_{i,j} = \begin{array}{r} \\ \\ i^{\text{ème}}\text{ ligne} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 \; 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $j^{\text{ème}}$ colonne

dont tous les coefficients sont nuls sauf celui se trouvant à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

Proposition 2 Le système $\{E_{i,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ constitue une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. En particulier, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $m \times n$.

preuve : Le système $\mathcal{B} = \{E_{i,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ est générateur de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. En effet, soit $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Alors $$M = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} E_{i,j}$$

ce qui prouve que $M \in \mathrm{Vect}\left\{E_{i,j} : \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n \end{array}\right\}$

Ainsi $\mathcal{B}$ est générateur de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

De plus, $\mathcal{B}$ est libre. En effet, si $\lambda_{i,j} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ et

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})}$$

Alors $$(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = (0)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},$$

ainsi $\lambda_{i,j} = 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Donc $\mathcal{B}$ est libre et générateur de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

et donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

En particulier,

$$\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})) = \mathrm{card}(\mathcal{B}) = m \times n < +\infty$$

4.2. Produit matriciel

Définition Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et

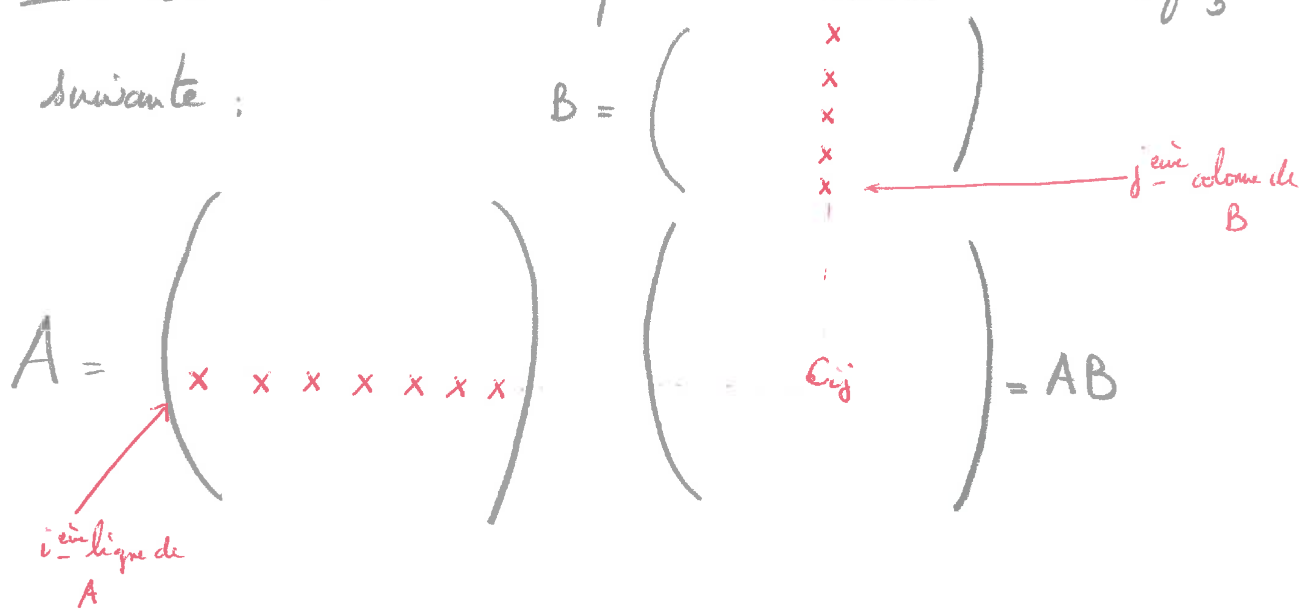
$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le produit

$C = AB$ est la matrice de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ définie

par $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad , \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p . \end{array}$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante :



<u>Exemple.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Alors

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>Remarque:</u> Attention, le produit AB de deux matrices A et B n'est défini que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B.

⚠ Le produit de deux matrices A et B n'est pas commutatif en général (même si AB et BA sont définis).

Pour s'en convaincre, prenez $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $AB \neq BA$.

⚠ $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et pourtant $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$!

⚠ $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Alors on vérifie que

$$AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

<u>Théorème 3</u> : Soient A, B et C trois matrices et supposons que les produits AB, AC et BC sont définis. Alors on a :

a) $A(BC) = (AB)C$ (le produit est associatif).

b) $A(B+C) = AB + AC$ } distributivité du produit par rapport à la somme

c) $(A+B)C = AC + BC$

d) $A.0 = 0.A = 0$

e) $A I_n = I_n A = A$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

où $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice

carrée $n \times n$ qu'on appelle matrice identité d'ordre n.

preuve : a) Posons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

$$C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le r}} .$$

BC est bien défini et $BC \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$

et $A(BC)$ est bien défini et $A(BC) \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$.

De plus, le terme x_{ij} de BC, $\begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le r \end{matrix}$

est $$x_{ij} = \sum_{l=1}^{p} b_{i,l} c_{l,j}$$

et le terme $\alpha_{i,j}$ de $A(BC)$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le r$

est $$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_{k,j}$$

$$\boxed{\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \sum_{l=1}^{p} b_{k,l} c_{l,j}}$$

De même, le terme $\gamma_{i,j}$ de AB est

$$\gamma_{i,j} = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l}\, b_{l,j} \quad , \begin{array}{l} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p \end{array}$$

et donc le terme $\beta_{i,j}$ de $(AB)C$ est

$$\beta_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} \gamma_{i,k}\, c_{k,j} \quad , \begin{array}{l} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le r \end{array}$$

i.e.

$$\beta_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}\, b_{l,k} \right) c_{k,j}$$

$$\beta_{i,j} = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} \sum_{k=1}^{p} b_{l,k}\, c_{k,j}$$

On voit alors que $\beta_{i,j} = \alpha_{i,j}$, $\begin{array}{l} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le r \end{array}$

et donc $\boxed{A(BC) = (AB)C.}$

Les autres propriétés se démontrent de la même façon et sont laissées en exercice ■

On rappelle que $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

et on définit pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad A^{p+1} = A^p \times A, \ p \geq 0.$$

Proposition 4 (formule du binôme de Newton pour les matrices).

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$AB = BA.$$

Alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$$

preuve: se démontre par récurrence. Elle est similaire à la preuve pour les réels et donc est aussi laissée en exercice.

4.3. Inversion des matrices.

Définition: On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$

La matrice B est alors appelée la **matrice inverse** de A et est notée A^{-1}.

Proposition 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et supposons A inversible. Alors

a) son inverse est unique.

b) A^{-1} est aussi inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est aussi inversible alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

preuve : (a) Supposons qu'il existe $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $A B_1 = B_1 A = I_n$ (1)

et $A B_2 = B_2 A = I_n$ (2)

Alors $B_2 (A B_1) = B_2 I_n = B_2$ d'après (1)

et comme le produit est associatif, on a :

$B_2 (A B_1) = (B_2 A) B_1 = I_n B_1 = B_1$ d'après (2)

Ainsi $B_1 = B_2$

(b) évident !

(c) On a :

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B$$
$$= B^{-1}B = I_n$$

et $$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_n A^{-1}$$
$$= AA^{-1} = I_n$$

Ces deux relations prouvent que AB est inversible

et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ∎

Proposition ⑥ : Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

supposons que C soit inversible

Alors si $AC = BC$, on a nécessairement $A = B$

preuve : il suffit de remarquer que si $AC = BC$

alors $(AC)C^{-1} = (BC)C^{-1}$ et donc

$A(CC^{-1}) = B(CC^{-1})$, i.e $AI_n = BI_n$

soit $A = B$ ∎

Théorème 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

LASSE :

(i) A est inversible

(ii) Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.

(iii) Il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_n$

(iv) Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\exists !\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AX = Y$.

De plus, dans ce cas, on a : $A^{-1} = B = C$.

<u>preuve</u> : (i) $\Rightarrow$ (ii) évident.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Considérons

$$\begin{aligned} \varphi \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto XA \end{aligned}$$

L'application φ est linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda X_1 + X_2) &= (\lambda X_1 + X_2)A \\ &= \lambda X_1 A + X_2 A \\ &= \lambda \varphi(X_1) + \varphi(X_2) \end{aligned}$$

De plus, φ est injective car

$$X \in \ker \varphi \Longrightarrow XA = 0 \Longrightarrow (XA)B = 0$$

$$(XA)B = X(AB) = X I_n = X$$

D'où $\ker \varphi = \{0\}$ et φ est injective

Comme $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut en déduire que φ est bijective (voir corollaire 10 chapitre 3)

En particulier, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donc $I_n \in \mathrm{Im}(\varphi)$ ce qui implique qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$I_n = \varphi(C) = CA$$

D'autre part, remarquons que si $AB = I_n$ et $CA = I_n$ alors

$$B = I_n B = (CA)B = C(AB) = C I_n = C$$

D'où $B = C$

et comme $AB = I_n = CA = BA$,

on a déduit que $A^{-1} = B = C$

(iii) ⇒ (iv) Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

Il est clair que ψ est linéaire

et elle est injective car si $X \in \ker \psi$,

alors $AX = 0$ et en composant à gauche

par C, on a :

$$C(AX) = 0$$
$$\| $$
$$(CA)X$$
$$\|$$
$$I_n X$$
$$\|$$
$$X$$

L'endomorphisme ψ est injective et le corollaire 10

du chapitre 3 implique une nouvelle fois que

ψ est bijectif.

Ainsi pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

tel que $\quad Y = \Psi(X) = AX$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Notons $\{E_1, \ldots, E_n\}$ la base

canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne.}$$

(voir proposition 2)

Alors pour chaque $1 \leq i \leq n$, il existe un unique

$X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\quad E_i = AX_i$

Ecrivons $\quad A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $X_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$,

puis on définit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$B = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Alors $\quad E_i = AX_i \Longrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$, $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\Longrightarrow AB = I_n$$

On a vu alors dans la preuve de (ii) $\Rightarrow$ (iii) que si $AB = I_n$ alors on a aussi $BA = I_n$ et donc finalement A est inversible.

Calcul pratique de A^{-1}.

Pour vérifier si une matrice A est ou non inversible et calculer le cas échéant l'inverse de A, on se ramène à la résolution du système $AX = Y$.

<u>Exemple</u> soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Etudier l'inversibilité de A et calculer si elle existe A^{-1}.

Pour cela, soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = Y$

Or $AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = a & (e_1) \\ x - y = b & (e_2) \\ x - y + z = c & (e_3) \end{cases}$$

19

$$AX=Y \iff \begin{cases} x - z = a & (e_1) \\ -y + z = b-a & (e_2)-(e_1) = (e'_2) \\ -y+2z = c-a & (e_3)-(e_1) = (e'_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - z = a \\ -y+z = b-a \\ z = c-b & (e'_3)-(e'_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a+z = a-b+c \\ y = z+a-b = a-2b+c \\ z = -b+c \end{cases}$$

Donc pour tout $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique $X = \begin{pmatrix} a-b+c \\ a-2b+c \\ -b+c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$AX = Y$$

Ceci prouve que A est inversible. De plus

$$AX = Y \Rightarrow X = A^{-1}Y$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-b+c \\ a-2b+c \\ -b+c \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

D'où $$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Pour finir, nous allons exhiber quelques matrices particulières.

Définition : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

① A est dite diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.

② A est dite triangulaire supérieure si tous ses coefficients sous la diagonale sont nuls.

③ On appelle transposée de A et on ${}^tA$ la matrice dont les lignes sont les colonnes de A.
Autrement dit, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors ${}^tA = (a_{ji})_{1 \leq i,j \leq n}$.

④ Une matrice A est dite symétrique si ${}^tA = A$.

Propriété ① Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $D' = \mathrm{diag}(\mu_i)$, alors

$$DD' = D'D = \mathrm{diag}(\lambda_i \mu_i).$$

② $D^n = \mathrm{diag}(\lambda_i^n)$.

③ Si pour $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i \neq 0$ alors D est inversible et $D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$

Chapitre 5 Applications linéaires et matrices

5.1. Représentation matricielle des vecteurs

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est formé des vecteurs

$$e_1 = (1,0,\dots,0)\ ,\ e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,0,1)$$

et que la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est formée des matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a ainsi une identification entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

On vérifie que φ est linéaire et elle transforme la base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ en la base $(E_1, \dots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ainsi φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, le choix d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E donne lieu à une identification entre E et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\begin{aligned} \psi : \quad E &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n &\longmapsto [x]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme précédemment, ψ est un isomorphisme de E sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Plus généralement, si $x_1, \dots, x_p \in E$, on associe la matrice $[x_1, \dots, x_p]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$[x_1, \dots, x_p]_{\mathcal{B}} = \left([x_1]_{\mathcal{B}}, [x_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [x_p]_{\mathcal{B}} \right)_{\mathcal{B}}$$

où la $i$ème colonne est formée des coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ du $i$ème vecteur x_i

Autrement dit, si $x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} e_j$, $1 \leq i \leq p$, alors

$$[x_1, \dots, x_p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & & \lambda_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix}$$

5.2 Matrice d'une application linéaire

Dans tout ce paragraphe, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n et m, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E et $\mathcal{C} = \{f_1, \dots, f_m\}$ est une base de F.

Définition Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, est la matrice définie par :

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = [f(e_1), \dots, f(e_n)]_{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

Autrement dit, si

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{j,i} f_j \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

(Une telle décomposition existe et est unique car $\mathcal{C}$ est une base de F et $f(e_i) \in F$!), alors

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,i} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

<u>Notation</u> Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, alors pour simplifier, on notera $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

<u>Exemple</u> Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$(x, y, z) \longmapsto (2x + z,\ x + y - z,\ y - 5z,\ x + y + z).$$

Donner la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

On calcule $f(1,0,0) = (2,1,0,1)$
$f(0,1,0) = (0,1,1,1)$ et $f(0,0,1) = (1,-1,-5,1)$

D'où

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Proposition 1 : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application quelconque

(a) si f est linéaire et $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, alors pour tout $u \in E$, on a :

$$[f(u)]_{\mathcal{C}} = A \times [u]_{\mathcal{B}}$$

(b) Réciproquement, s'il existe $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $u \in E$, on ait

$$[f(u)]_{\mathcal{C}} = A \times [u]_{\mathcal{B}},$$

alors f est linéaire et $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = A$.

preuve. (a) Notons $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$. Comme f est linéaire, on a

$$f(u) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(e_j)$$

Or par définition de $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, on a

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i$$

D'où $$f(u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_j a_{i,j} f_i$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} \right) f_i$$

On en déduit que

$$[f(u)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{m,j} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \, [u]_{\mathcal{B}}$$

(b) Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et si pour tout $u \in E$,

on a $[f(u)]_{\mathcal{C}} = A \times [u]_{\mathcal{B}}$, alors si $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, on obtient que

$$f(u) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} \right) f_i .$$

On vérifie alors facilement que f est linéaire et

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = A . \qquad \blacksquare$$

<u>Exemple.</u> Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Calculons

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x + z \\ x + y - z \\ y - 5z \end{pmatrix}$$

Alors l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (2x+z, x+y-z, y-5z)$$

est linéaire et sa matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = A$$

5 3 Lien avec le calcul matriciel.

Proposition ② Soient E, F deux $\mathbb{K}$ e.v de dimension finie, $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) une base de E (resp. de F)

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Alors

$$\mathrm{Mat}(\lambda f + \mu g, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \lambda \,\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mu \,\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

En particulier, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ & f & \longmapsto & \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \end{array}$$

est un isomorphisme et on a

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = m \times n$$

(on a supposé ici que $n = \dim(E)$ et $m = \dim(F)$)

preuve : Notons $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

et $$B = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$$

Par définition de la matrice d'une application linéaire,

on a $$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i$$

$$, 1 \leq j \leq n$$

et $$g(e_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{i,j} f_i$$

Où, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$.

D'où $$(\lambda f + \mu g)(e_j) = \lambda f(e_j) + \mu g(e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) f_i$$

On en déduit que

$$\mathrm{Mat}(\lambda f + \mu g, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$$

$$= \lambda (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} + \mu (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$$

$$= \lambda \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mu \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

Cette égalité prouve que ϕ est linéaire.

De plus, la proposition ① implique que ϕ est bijective.

En effet, si $f \in \ker(\phi)$ alors $A = \phi(f) = \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$
$= 0$

Mais d'après la prop ①, on en déduit que pour tout $u \in E$,

$$[f(u)]_{\mathcal{C}} = A\,[u]_{\mathcal{B}} = 0,$$

ce qui implique que $f(u) = 0_F$.

D'où $f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$

Ceci prouve que ϕ est injective.

D'autre part, ϕ est surjective car si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ on sait d'après la prop ① qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = A$

et donc $\phi(f) = A$

Pour finir, il reste à appliquer le corollaire (5) du chapitre (3) qui implique que comme ϕ est bijective alors $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}))$

$$= m \times n.$$

<u>Proposition (3)</u> Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ e.v de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ leurs bases respectives.

(1) si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors

$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{D}) = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

(2) On suppose que $\dim E = \dim F$ et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ est inversible. Dans ce cas, on a

$$\mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) = \left(\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})\right)^{-1}$$

<u>preuve.</u> (1) Soit $u \in E$. On a, d'après la proposition (1) (point (a)) :

$$[(g \circ f)(u)]_{\mathcal{D}} = [g(f(u))]_{\mathcal{D}}$$

$$= \mathrm{Mat}(g, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \times [f(u)]_{\mathcal{C}}$$

Toujours avec la proposition 1 (point a), on a :

$$[f(u)]_{\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times [u]_{\mathcal{B}}$$

D'où $$[(g \circ f)(u)]_{\mathcal{D}} = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times [u]_{\mathcal{B}}$$

La proposition 1 (point b) implique alors que

$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{D}) = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

2 On a

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}) = I_n$$

D'autre part, on a :

f est bijective $\Longleftrightarrow \exists\, g \in \mathcal{L}(F, E)$ tq $g \circ f = \mathrm{Id}_E$

De +, dans ce cas, $f^{-1} = g$.

D'où f est bijective $\Longleftrightarrow \exists\, g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que

$$\mathrm{Mat}(g, \mathcal{C}, \mathcal{B}) \times \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = I_n$$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ est inversible

De +, dans ce cas, on a

$$\mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{C}, \mathcal{B})$$
$$= \left(\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})\right)^{-1}$$

5.4 Changements de base

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n,
$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ deux bases de E.

Soit $[e'_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p_{1,j} \\ \vdots \\ p_{n,j} \end{pmatrix}$ le vecteur colonne formé des coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$,

c'est à dire $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\, e_i$, $1 \leq j \leq n$.

Definition: On appelle <u>matrice de passage</u> de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est le vecteur formé des coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$

Autrement dit, $P = [e'_1, \dots, e'_n]_{\mathcal{B}}$
$$= \left([e'_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [e'_n]_{\mathcal{B}}\right)$$

soit encore

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & & \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque: On voit immédiatement que si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors

$$P = \mathrm{Mat}(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

Comme Id_E $E \longrightarrow E$ est inversible, il découle de la proposition (3) que P est inversible

$$\text{et} \quad P^{-1} = \mathrm{Mat}(Id_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Ainsi P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$

Il découle immédiatement de la proposition (1) le résultat suivant

Proposition (4) Soit P la matrice de passage de la la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Alors pour tout $u \in E$, on a :

$$[u]_{\mathcal{B}} = P \times [u]_{\mathcal{B}'}$$

et $$[u]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} [u]_{\mathcal{B}}$$

<u>Exemple</u> Dans $\mathbb{R}^3$, on note par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et par $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ le système défini par

$$e'_1 = (1,1,1)$$
$$e'_2 = (1,0,1)$$
$$e'_3 = (0,1,1).$$

On vérifie facilement que $\mathcal{B}'$ est libre et comme $\operatorname{card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on en déduit que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est donné par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Calculons son inverse</u>

Soient $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

tel que

$$PX = Y \qquad (*)$$

$$(*) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = a & (1) \\ x + z = b & (2) \\ x + y + z = c & (3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = a & \\ z - y = b - a & (2) - (1) \\ z = c - a & (3) - (1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a - y = a + b - c \\ y = z + a - b = c - b = -b + c \\ z = c - a = -a + c \end{cases}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b - c \\ -b + c \\ -a + c \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $u = (2, 3, -1)$. Calculer $[u]_{\mathcal{B}'}$

On a $[u]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} [u]_{\mathcal{B}}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

D'où $u = 6e'_1 - 4e'_2 - 3e'_3$

Théorème 5 (Formule de changement de base)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$

$B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$

Alors $B = Q^{-1} A P$

Autrement dit

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') = \left(\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_F, \mathcal{C}', \mathcal{C})\right)^{-1} \times \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$

preuve : Soit $u \in E$. D'après la proposition 4 et 1, on a :

$$[f(u)]_{\mathcal{C}'} = Q^{-1}\,[f(u)]_{\mathcal{C}}$$

$$= Q^{-1}\,\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times [u]_{\mathcal{B}}$$

$$= Q^{-1} \times \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times P \times [u]_{\mathcal{B}'}$$

Une nouvelle application de la proposition 1 (point b) permet d'en déduire que

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') = Q^{-1} \times \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times P.$$

$\blacksquare$

Définition : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que

$$B = P^{-1} A P.$$

Corollaire 6 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

1. si $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$, $B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$

et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

on a $$B = P^{-1} A P.$$

② Réciproquement, si A et B sont deux matrices semblables et $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de E tel que
$$B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$$

preuve ① est une conséquence directe du théorème ⑤

② Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et telle que $$B = P^{-1} A P,$$

avec $$A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$$

Soient $e'_1, \dots, e'_n$ les vecteurs de E tel que

$$P = [e'_1, \dots, e'_n]_{\mathcal{B}}$$

Montrons que $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ est une base de E.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e'_i = 0 \quad (*)$$

Notons $E_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $1 \leq i \leq n$, défini

par
$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

Rappelons que $\{E_1, \ldots, E_n\}$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

De +, on a $e'_i = PE_i$

Ainsi $(*) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P E_i = 0$

$$\Longrightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i\right) = 0$$

$$\underset{P \text{ inversible}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

Donc $\mathcal{B}'$ est libre et comme $\operatorname{card}(\mathcal{B}') = n = \dim E$

$\mathcal{B}'$ est une base de E.

Dans ce cas, $P = \operatorname{Mat}(Id, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

et alors $B = P^{-1}\,\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})\,P$

$$= \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$$

$\blacksquare$

Fin du cours d'algèbre....