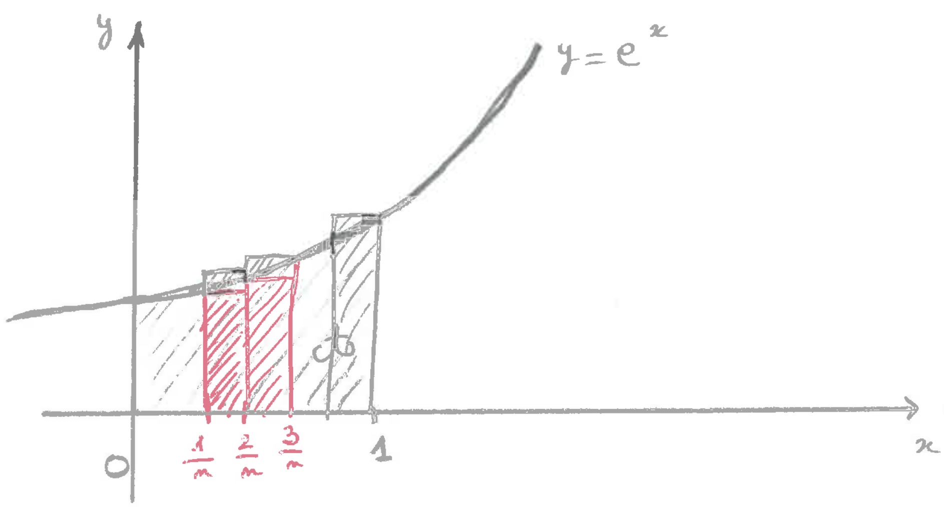
Cours d'analyse

Chapitre 1 Calcul intégral

L'objectif de ce chapitre est de :
* construire formellement l'intégrale d'une fonction (en particulier continue).
* donner les principales méthodes de calcul d'une intégrale.

1.1 Intégrale de Riemann

1.1.1 Motivation Nous allons introduire l'intégrale à l'aide d'un exemple. Considérons la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ en dessous du graphe de f et entre les droites d'équation $x=0$, $x=1$ et l'axe (Ox).



Fixons $n \geq 1$ et pour $1 \leq i \leq n$, considérons R_i^- (resp R_i^+) le rectangle ayant pour base $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ et pour hauteur $f\left(\frac{i-1}{n}\right) = e^{\frac{i-1}{n}}$ (resp $f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{\frac{i}{n}}$)

On a : $\text{aire}(R_i^-) = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$ et $\text{aire}(R_i^+) = \frac{1}{n} e^{\frac{i}{n}}$

D'où
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}} \leq ct \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{\frac{i}{n}}$$
$$\|$$
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} \leq ct \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i}$$

Or
$$\sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{j} = \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

somme d'une suite géométrique

$$= \frac{1-e}{1-e^{1/n}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n} \frac{(1-e)}{1-e^{1/n}}$$

$$= \frac{1-e}{\frac{1-e^{1/n}}{\frac{1}{n}}}$$

Or
$$\frac{1-e^{x}}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

D'où
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = 1-e$$

De m̂, on montre que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i} = 1-e$

D'où l'aire de notre région est $c_t = e - 1$.

1.1.2 Intégrale de fonctions en escalier.

Définition: Une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ est une suite finie, strictement croissante $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.

Autrement dit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, sont appelés les intervalles de la subdivision et le nombre

$$\delta(\sigma) = \operatorname*{Max}_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

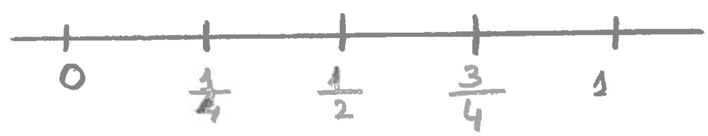
s'appelle le pas de la subdivision.

A chaque subdivision σ de $[a, b]$, nous associons l'ensemble S constitué par les points de la suite σ.

Autrement dit, si $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, alors $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Inversement, à chaque ensemble fini S de points de $[a, b]$, contenant a et b, on associera la subdivision σ obtenue en rangeant ces points de façon croissante.

Définition : Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$.
On dit que σ' est plus fine que σ si les ensembles S (resp S') associés à σ (resp σ') vérifie
$$S \subset S'.$$

Exemple



$\sigma = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ est plus fine que $\sigma' = (0, \frac{1}{2}, 1)$

et σ, σ' sont deux subdivisions de $[0,1]$.

Définition. Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a,b]$.
La réunion de σ et σ' est la subdivision σ'' dont l'ensemble associé est la réunion des ensembles associés à σ et σ'.

Exemple : Si $\sigma = (0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, 1)$ et $\sigma' = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$. Alors la réunion de σ et σ' est la subdivision
$$\sigma'' = (0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1).$$

Fonctions en escalier.

Définition Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que f est constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$.
Autrement dit, pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $c_i \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[$, $f(x) = c_i$

Remarques (1) Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
(2) Une fonction en escalier sur $[a,b]$ est nécessairement bornée : i.e $\exists M > 0$ tq $\forall x \in [a,b]$, $-M \leq f(x) \leq M$

(on prend $M = \max\left(|f(x_i)|, |c_i| \ 1 \leq i \leq n \right)$).

Exemple La fonction $x \longmapsto [x]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x, est en escalier sur tout intervalle $[a,b]$.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Nous dirons qu'une subdivision σ de $[a,b]$ est associée à f si la fonction f est constante sur chaque intervalle ouvert de la subdivision.
Si σ est une subdivision associée à f, on voit immédiatement que toute subdivision plus fine que σ est

encore associé à f. Il existe donc une infinité de subdivisions associées à une fonction en escalier ; la moins fine de toutes est formée des points a, b et des points de discontinuité de f appartenant à $]a,b[$.

Proposition ① : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier et pour chaque subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ associée à f, posons

$$I(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - x_{i-1}),$$

où f_i désigne la valeur (constante) de f sur $]x_{i-1}, x_i[$.

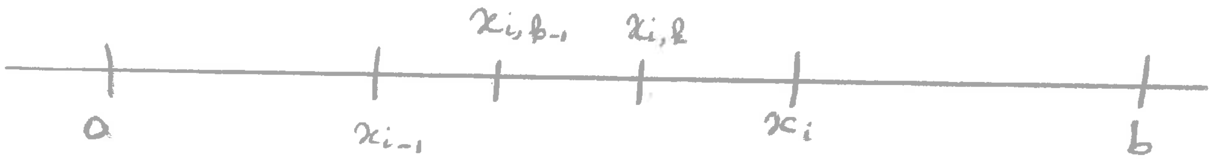
Alors $I(f,\sigma)$ ne dépend pas du choix de la subdivision σ associée à f.

Preuve : Il s'agit de prouver que si σ, σ' sont deux subdivisions associées à f, on a $I(f,\sigma) = I(f,\sigma')$.

1er cas : σ' est plus fine que σ.

Posons $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Comme σ' est plus fine que σ on obtient σ' en ajoutant des points à σ, ce qui revient à éventuellement subdiviser chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$. Désignons par $x_{i,k}$, $0 \leq k \leq \alpha_i$, les points de la subdivision σ' appartenant à $[x_{i-1}, x_i]$ et rangés dans l'ordre croissant, ce qui implique que

$$x_{i,0} = x_{i-1} \quad \text{et} \quad x_{i,\alpha_i} = x_i .$$



On a alors

$$I(f, \sigma') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\alpha_i} f_i (x_{i,k} - x_{i,k-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{k=1}^{\alpha_i} (x_{i,k} - x_{i,k-1})$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{\alpha_i} (x_{i,k} - x_{i,k-1}) = x_{i,\alpha_i} - x_{i,0} = x_i - x_{i-1}$

$$\Longrightarrow \quad I(f, \sigma') = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - x_{i-1}) = I(f, \sigma)$$

<u>2ie cas</u> <u>cas général</u> Soit σ, σ' deux subdivisions quelconques associées à f et soit σ'' leur réunion.

La subdivision σ'' est plus fine que σ et σ' et elle est encore associée à f

Le premier cas $\Longrightarrow I(f, \sigma'') = I(f, \sigma)$

et $I(f, \sigma'') = I(f, \sigma')$.

D'où $I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$. ■

<u>Définition</u> : (<u>Intégrale d'une fonction en escalier</u>)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier, $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ associée à f et f_i la valeur de f sur $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$.

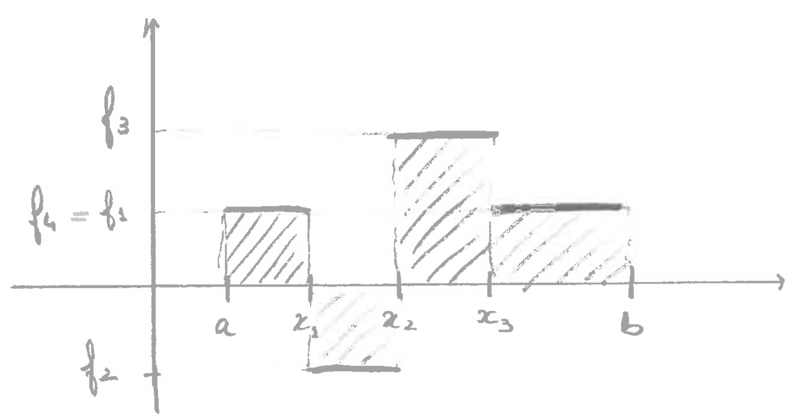
L'intégrale de f sur $[a, b]$ est le réel, noté $\int_a^b f(x)\,dx$ et défini par

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - x_{i-1})$$

<u>Remarques</u> ① Grâce à la prop①, $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas du choix de σ !

② L'intégrale de f ne dépend pas non plus des valeurs prises par f <u>aux points</u> de la subdivision !

③



L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au dessus de l'axe des abscisses moins l'aire de la partie située en dessous.

<u>Exemples</u>: 1 si f est la fonction constante égale à 1 sur $[a,b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = b-a.$$

2 Si f est une fonction qui est nulle sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors f est en escalier et

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

<u>Théorème</u> Soit $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier. Alors

(a) si $c \in]a,b[$ alors f est en escalier sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(relation de Chasles de l'intégrale)

(b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est en escalier et (linéarité de $\int$)

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \quad \left(\text{croissance de } \int\right).$$

En particulier si $\forall x \in [a,b]$, $0 \leq g(x)$ alors

$$0 \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(d) $|f|$ est en escalier et on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

preuve : (a) Il suffit d'utiliser une subdivision associée à f contenant le point c (ce qui est toujours possible en ajoutant au besoin le point c)

(b) Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a,b]$ associées resp. à f et g et si on considère σ'' la réunion de σ et σ', on obtient alors une subdivision associée à la fois à f et à g. Si on note alors $\sigma'' = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ cette subdivision et f_i (resp g_i) les valeurs de f (resp de g) sur $]x_{i-1}, x_i[$, on a :

$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[,\ (\lambda f+\mu g)(x) = \lambda f_i + \mu g_i$

Ainsi $\lambda f+\mu g$ est aussi en escalier et

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (\lambda f_i + \mu g_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - x_{i-1}) + \mu \sum_{i=1}^{n} g_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) Si on choisit une subdivision σ associée à la fois à f <u>et</u> à g alors l'hypothèse implique que

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[,\quad \underset{\displaystyle f_i}{\overset{\|}{f(x)}} \le \underset{\displaystyle g_i}{\overset{\|}{g(x)}}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0} \le \sum_{i=1}^{n} g_i (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b g(x)\,dx$$

(d) Si $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ est une subdivision adaptée à f alors $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[,\ f(x) = f_i$

et donc $|f(x)| = |f_i|$

Ainsi $|f|$ est aussi en escalier et

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \sum_{i=1}^{n} |f_i|(x_i - x_{i-1})$$

Or
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i|(x_i - x_{i-1})$$

D'où
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$\blacksquare$

1.1.3 Fonctions Riemann-intégrables

Construction de l'intégrale de Riemann

Soit f une fonction définie et bornée sur $[a,b]$.

On note
$$\mathcal{E}_-(f) = \{\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ en escalier telle que } \phi \leq f \text{ sur } [a,b]\}$$

$$\mathcal{E}_+(f) = \{\Psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ en escalier telle que } \Psi \geq f \text{ sur } [a,b]\}$$

Comme f est bornée, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ telle que

$$m \leq f \leq M \text{ sur } [a,b]$$

(i.e. $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$)

Donc $\mathcal{E}_-(f)$ et $\mathcal{E}_+(f)$ sont <u>non</u> vides car la fonction constante égale à m appartient à $\mathcal{E}_-(f)$

et ______ M ______ $\mathcal{E}_+(f)$.

Ainsi les ensembles $I_-(f) = \left\{ \int_a^b \phi(x)dx : \phi \in \mathcal{E}_-(f) \right\}$

et $I_+(f) = \left\{ \int_a^b \psi(x)dx : \psi \in \mathcal{E}_+(f) \right\}$

sont non vides.

De plus, $M(b-a)$ est un <u>majorant</u> de $I_-(f)$.

En effet, si $\phi \in \mathcal{E}_-(f)$ alors

$$\forall x \in [a,b], \quad \phi(x) \leq f(x) \leq M$$

et la propriété de l'intégrale sur les fonctions en escalier implique que

$$\int_a^b \phi(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a).$$

De même, $m(b-a)$ est un <u>minorant</u> de $I_+(f)$.

Ainsi, les deux quantités

$$i_a^b(f) = \sup I_-(f)$$

et

$$I_a^b(f) = \operatorname{Inf} I_+(f)$$

existent

(Un ensemble non vide majoré admet une borne supérieure
et un ensemble non vide minoré ——————— inférieure)

et il est clair que $\underline{i_a^b(f) \leq I_a^b(f)}$.

En effet, si $\phi \in \mathcal{E}_-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}_+(f)$ alors

$$\phi \leq \psi$$

et donc $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$,

ce qui donne

$$\underbrace{\sup_{\phi \in \mathcal{E}_-(f)} \int_a^b \phi(x)\,dx}_{i_a^b(f)} \leq \underbrace{\inf_{\psi \in \mathcal{E}_+(f)} \int_a^b \psi(x)\,dx}_{I_a^b(f)}$$

$$i_a^b(f) \leq I_a^b(f).$$

<u>Définition</u> On dit qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée est <u>intégrable</u> (ou Riemann-intégrable) si

$$i_a^b(f) = I_a^b(f)$$

On appelle alors cette valeur commune l'intégrale de f entre a et b et on la note

$$\int_a^b f(x)\,dx = i_a^b(f) = I_a^b(f).$$

Remarque : Une fonction en escalier est Riemann-intégrable et les deux définitions données page 8 et page 14 coïncident !

En effet, soit f une fonction en escalier. Notons pour un bref instant $\mathcal{J}(f)$ l'intégrale de f sur $[a,b]$ au sens de la définition donnée page 8. Remarquons que $f \in \mathcal{E}_-(f)$ (car f est en escalier et $f \leq f$). Ainsi, comme

$$i_a^b(f) = \sup I_-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \phi(x)\,dx \; \phi \in \mathcal{E}_-(f) \right\}$$

on a : $\mathcal{J}(f) \leq i_a^b(f)$.

De même, $f \in \mathcal{E}_+(f)$ et comme

$$I_a^b(f) = \operatorname{Inf} I_+(f) = \operatorname{Inf} \left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx : \psi \in \mathcal{E}_+(f) \right\}$$

on a : $I_a^b(f) \leq \mathcal{J}(f)$.

D'où $\mathcal{J}(f) \leq i_a^b(f) \leq I_a^b(f) \leq \mathcal{J}(f)$

ce qui implique que $i_a^b(f) = I_a^b(f)$ et donc f est intégrable. De plus,

$$\int_a^b f(x)\,dx = i_a^b(f) = I_a^b(f) = \mathcal{J}(f).$$

Donc les deux définitions d'intégrale coïncident sur les fonctions étagées !

On verra un peu plus tard que les fonctions continues sont Riemann-intégrables mais donnons tout de suite un exemple d'une fonction qui n'est pas Riemann-intégrable

<u>Exemple:</u> fonction <u>indicatrice de Dirichlet.</u>

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Soit $\psi \in \mathcal{E}_+(f)$: ψ en escalier et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) \geq f(x).$$

<u>Remarquons que</u> si $]x_{i-1}, x_i[$ est un intervalle d'une subdivision alors $]x_{i-1}, x_i[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ et donc $\forall x \in [0,1]$

$$\psi(x) \geq 1 \quad \text{Ainsi} \quad \int_0^1 \phi(x)\,dx \geq 1 \quad \text{et}$$

$$I_0^1(f) \geq 1$$

De même si $\varphi \in \mathcal{E}_-(f)$, φ est en escalier et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \leq f(x)$$

Mais $]x_{i-1}, x_i[\cap ([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ et

donc $\varphi(x) \leq 0$ et $\int_0^1 \varphi(x)\,dx \leq 0$

D'où $i_0^1(f) \leq 0$

Ainsi $I_0^1(f) \neq i_0^1(f)$

Donnons un critère d'intégrabilité.

<u>Théorème</u>. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée.

Alors f est <u>Riemann-intégrable</u> si et seulement si $\exists\ (\phi_n), (\psi_n)$ des fonctions en escalier telle que

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \phi_n(x))\,dx = 0$.

Dans ce cas, on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx$ existent

et $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx$

<u>preuve</u>: si f est intégrable, alors $i_a^b(f) = I_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

et par définition de la borne supérieure et inférieure, il existe deux suites $\phi_n \in \mathcal{E}_-(f)$ et $\psi_n \in \mathcal{E}_+(f)$

telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\,dx = i_a^b(f)$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx = I_a^b(f)$

D'où le résultat dans un sens.

Inversement, supposons qu'il existe $\phi_n \in \mathcal{E}_-(f)$ et $\psi_n \in \mathcal{E}_+(f)$ telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \phi_n(x))\, dx = 0$

Comme
$$\int_a^b \phi_n(x)\,dx \leq i_a^b(f) \leq I_a^b(f) \leq \int_a^b \psi_n(x)\,dx$$

on en déduit que
$$0 \leq I_a^b(f) - i_a^b(f) \leq \underbrace{\int_a^b (\psi_n(x) - \phi_n(x))\,dx}_{\downarrow \, 0}$$

et donc $I_a^b(f) = i_a^b(f)$.

Ainsi f est Riemann-intégrable.

De +, on a aussi :
$$0 \leq i_a^b(f) - \int_a^b \phi_n(x)\,dx \leq \underbrace{\int_a^b (\psi_n(x) - \phi_n(x))\,dx}_{\downarrow \, 0}$$

et
$$0 \leq \int_a^b \psi_n(x)\,dx - I_a^b(f) \leq \underbrace{\int_a^b (\psi_n(x) - \phi_n(x))\,dx}_{\downarrow \, 0}$$

ce qui permet d'en déduire que :

$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \phi_n(x)dx$ et $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx$ existent

et $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \phi_n(x)dx = i_a^b(f) = I_a^b(f) = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx$. ∎

Les principales propriétés vues sur l'intégrale des fonctions en escalier se généralisent maintenant à l'intégrale des fonctions Riemann-intégrables.

Théorème: Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées et Riemann-intégrables et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) $f+g$ est Riemann-intégrable et

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(b) λf est Riemann-intégrable et

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$$

(c) si $f \geq g$ sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(d) $|f|$ est Riemann-intégrable et

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

preuve: (a) D'après le théorème précédent, on sait qu'il existe des suites de fonctions en escalier (ϕ_n), (ψ_n), (θ_n) et (η_n) telles que

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n, \quad \theta_n \leq g \leq \eta_n$$

et $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \eta_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

D'où $$\phi_n + \theta_n \leq f+g \leq \psi_n + \eta_n$$

et $$\int_a^b \left(\psi_n(x)+\eta_n(x) - (\phi_n(x)+\theta_n(x))\right)dx =$$

$$= \int_a^b \left(\psi_n(x)-\phi_n(x)\right)dx + \int_a^b \left(\eta_n(x)-\theta_n(x)\right)dx$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où $f+g$ est intégrable et

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left(\psi_n(x)+\eta_n(x)\right)dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\int_a^b \psi_n(x)dx + \int_a^b \eta_n(x)dx\right]$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(b) se démontre de façon identique en séparant le cas $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ et $\lambda = 0$.

(c) Supposons d'abord que $g \equiv 0$, i.e. $f \geq 0$ sur $[a,b]$

On sait $\exists\ \phi_n \geq f$, ϕ_n en escalier tq

$$\int_a^b \phi_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

Comme $\phi_n \geq f \geq 0$ alors $\int_a^b \phi_n(x)\,dx \geq 0$

et donc à la limite, on a aussi $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Le cas général $f \geq g$ se déduit de ce qui précède en remarquant alors que $f - g \geq 0$

et $\int_a^b (f(x)-g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.

(d) Pour démontrer le (d), introduisons les deux fonctions $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$.

Autrement dit : $f_+(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } f(x)\geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x)<0 \end{cases}$

et $f_-(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x)<0 \end{cases}$

Il est clair que $\forall x\in[a,b]$, $f_+(x)\geq 0$ et $f_-(x)\geq 0$.

De plus, on a : $f=f_+-f_-$ et $|f|=f_++f_-$.

Maintenant, comme f est intégrable, il existe deux suites de fonctions en escalier $(\phi_n)_{n\geq 1}$ et $(\psi_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_n(x)-\phi_n(x))\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où $(\phi_n)_+ \leq f_+ \leq (\psi_n)_+$

Or si h est une fonction en escalier, on a vu que $|h|$ est aussi une fonction en escalier et donc

$$h_+=\frac{1}{2}(h+|h|) \text{ est aussi une fonction en escalier.}$$

Ainsi $(\phi_n)_+$ et $(\psi_n)_+$ sont en escalier

et on a : $0\leq (\psi_n)_+-(\phi_n)_+ \leq \psi_n-\phi_n$

d'où $0 \leq \int_a^b ((\psi_n)_+(x)-(\phi_n)_+(x))\,dx \leq \underbrace{\int_a^b (\psi_n(x)-\phi_n(x))\,dx}_{\longrightarrow 0}$

Ceci montre que f_+ est intégrable.

De même, on obtient que f_- est intégrable

D'où $|f| = f_+ + f_-$ est intégrable.

Il reste alors à remarquer qu'on a

$$-|f| \leq f \leq |f| .$$

D'où d'après le (c)

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

ce qui implique que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx .$$

■

23

Corollaire : soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et intégrable et soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que g est égale à f sauf sur un nombre fini de points

Alors g est intégrable et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

preuve : Par hypothèse, il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que $\left| \begin{array}{l} \forall x \in \,]x_{i-1}, x_i[\,, \quad f(x) = g(x), \\ \forall\, 1 \le i \le n \end{array}\right.$

D'où $\quad g(x) - f(x) = 0$ sur $]x_{i-1}, x_i[$ et

$g - f$ est en escalier et $\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = 0$.

Ainsi $g = (g-f) + f$ est intégrable et

$$\int_a^b g(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx}_{=0} + \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx.$$

Proposition (relation de Chasles)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et $c \in \,]a,b[$

Alors f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.

Dans ce cas, on a la relation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

<u>preuve:</u> se déduit de la relation de Chasles pour les fonctions en escalier. Exercice !

On adopte <u>une convention très pratique</u> dans la suite:

Si $a \leq b$ alors

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dans ce cas, la relation

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

est vraie quelques soient l'ordre entre a, b et c.

Nous allons exhiber maintenant des classes explicites de fonctions intégrables.

Nous dirons qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a une certaine propriété (comme être continue, monotone, dérivable, etc) <u>par morceaux</u> s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que f a cette propriété sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$ <u>et</u> si elle admet un prolongement ayant cette même propriété sur $[x_{i-1}, x_i]$.

Exemple: Les fonction en escalier sont des fonctions constantes par morceaux.

Théorème: Toute fonction monotone par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

preuve: D'après la relation de Chasles, on peut supposer que f est monotone sur $[a,b]$ et quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f est croissante sur $[a,b]$. On considère maintenant la subdivision de $[a,b]$ suivante $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ où pour $0 \leq i \leq n$, on pose $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$.

On construit alors les fonctions étagées suivante:

$$\begin{cases} \phi_n(t) = f(x_{i-1}) \\ \text{et} \quad \psi_n(t) = f(x_i) \end{cases} \quad \text{pour } t \in]x_{i-1}, x_i[, \quad 1 \leq i \leq n$$

On a donc $\phi_n(t) \leq f(t) \leq \psi_n(t)$ et

$$\int_a^b (\psi_n(t) - \phi_n(t))\,dt = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$\int_a^b \left(\psi_n(t) - \phi_n(t)\right)dt = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \left(f(b) - f(a)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Ainsi f est intégrable $\blacksquare$

Nous allons maintenant montrer que toute fonction continue par morceaux est Riemann intégrable. Pour cela nous allons avoir besoin de la notion de continuité uniforme.

Definition : Une fonction est uniformément continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x, y \in I,\ |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Remarque : rappelons que f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

si $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \exists \delta > 0 :$

$$\forall y \in I,\ |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Il est clair que f uniformément continue $\Longrightarrow$ f continue.

La continuité uniforme par rapport à la continuité impose qu'on puisse trouver un δ qui marche pour tous les $x \in I$ (il doit être uniforme !).

<u>Exemple</u>: (a) Une fonction lipschitzienne ($\exists K > 0$: $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$) est uniformément continue. (En effet, on peut prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$).

(b) La fonction $x \longmapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème de Heine</u>: Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f est uniformément continue.

<u>Remarque</u>: ⚠ il est fondamental que l'intervalle $[a, b]$ est fermé, borné !

<u>preuve du Théorème de Heine</u>: raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas uniformément continue sur $[a, b]$. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0$, $\exists x, y \in [a, b]$ tel que $|x - y| \leq \delta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

En appliquant ceci à $\delta = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, on construit deux suites $x_n, y_n \in [a, b]$ telles que

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

Comme $x_n \in [a,b]$ et $[a,b]$ est fermé, borné le théorème de Bolzano Weierstrass (voir M22) implique qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ de $(x_n)_n$ qui converge vers x. De même $y_{\varphi(n)} \in [a,b]$ et le théorème de Bolzano Weierstrass implique qu'il existe une sous-suite $(y_{\varphi(\psi(n))})_n$ de $(y_{\varphi(n)})$ qui converge vers y. On a, comme $(x_{\varphi(\psi(n))})$ est une sous-suite de $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers x, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{\varphi(\psi(n))} = x$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_{\varphi(\psi(n))} = y$.

De plus,
$$\left| x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))} \right| \leq \frac{1}{\varphi(\psi(n))}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(\psi(n)) = +\infty$ (car φ et ψ $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sont strictement croissantes). Donc

$$x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))} \longrightarrow 0$$

ce qui implique que $x = y$.

D'autre part, f est continue aux points $x = y$

D'où $$f(x_{\varphi(\psi(n))}) \longrightarrow f(x)$$

et $$f(y_{\varphi(\psi(n))}) \longrightarrow f(y) = f(x)$$

Ainsi $$f(x_{\varphi(\psi(n))}) - f(y_{\varphi(\psi(n))}) \longrightarrow 0$$

ce qui contredit le fait que $\left|f(x_{\varphi(\psi(n))}) - f(y_{\varphi(\psi(n))})\right| \geq \varepsilon$.

■

<u>Théorème</u>. Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable.

<u>preuve</u>: D'après la relation de Chasles, on peut supposer que f est continue sur $[a, b]$. Ainsi d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur $[a, b]$.

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tq

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Découpons $[a, b]$ en n intervalles avec $\frac{1}{n} \leq \delta$

en considérant la subdivision suivante:

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

On définit alors pour $t \in]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$

$$\begin{cases} \phi_n(t) = f(x_{i-1}) - \varepsilon \\ \psi_n(t) = f(x_{i-1}) + \varepsilon \end{cases}$$

Les fonctions ϕ_n et ψ_n sont étagées et on a :

$$t \in]x_{i-1}, x_i[\Rightarrow \phi_n(t) - f(t) = f(x_{i-1}) - \varepsilon - f(t)$$

$$= f(x_{i-1}) - f(t) - \varepsilon$$

et $\quad 0 \leq t - x_{i-1} \leq x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \leq \delta$

d'où $\quad f(x_{i-1}) - f(t) \leq \varepsilon$

ce qui donne $\quad \phi_n(t) - f(t) \leq 0$

De même, pour $t \in]x_{i-1}, x_i[$,

$$\psi_n(t) - f(t) = f(x_{i-1}) - f(t) + \varepsilon$$

et comme $0 \leq t - x_{i-1} \leq \delta$, on a

$$f(x_{i-1}) - f(t) \geq -\varepsilon$$

D'où $\quad \psi_n(t) - f(t) \geq 0.$

Ainsi $\quad \phi_n(t) \leq f(t) \leq \Psi_n(t)$

Enfin,

$$\int_a^b \left(\Psi_n(t) - \phi_n(t)\right) dt = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \left(\cancel{f(x_{i-1})} + \varepsilon - \cancel{f(x_{i-1})} + \varepsilon \right)$$

$$= 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= 2\varepsilon (b-a)$$

Ceci montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \left(\Psi_n(t) - \phi_n(t)\right) dt = 0$$

Ainsi le critère d'intégrabilité vue page 17 implique que f est intégrable.

1.2 Primitives et intégrales

L'intégrale de Riemann peut apparaître comme un objet assez abstrait avec lequel il peut être difficile de faire des calculs.

Le miracle se produit quand on établit le lien avec les primitives.

1.2.1. Primitives d'une fonction réelle.

Définition. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est <u>une primitive</u> de f sur I si F est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Remarque : Si F_0 est une primitive de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ alors l'ensemble des primitives de f sur I est donné par

$$\{F : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telles qu'il existe } C \in \mathbb{R}, \; F = F_0 + C\}$$

En effet, si $F = F_0 + C$ alors F est dérivable sur I et $F' = (F_0 + C)' = F_0' + C' = F_0' = f$ donc F est une primitive de f sur I

Réciproquement si F est une primitive de f alors $F' = f = F_0'$. D'où

$$(F - F_0)' = 0.$$

Or I étant un intervalle, $F - F_0$ est constante et donc $\exists\, C \in \mathbb{R} / \; F = F_0 + C$

Notation Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive F,

on note
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

où C est une constante arbitraire.

Autrement dit, le symbole $\int f(x)\,dx$ désigne l'ensemble des primitives.

1.2.2 Propriétés des primitives :

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions qui admettent des primitives $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Autrement dit $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.

Alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha F + \beta G$ est dérivable sur I

et
$$(\alpha F + \beta G)'(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x)$$
$$= \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Ceci donne immédiatement le résultat suivant.

$$\boxed{\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx}$$

De même si $u : J \longrightarrow I$ est dérivable sur J et F est une primitive de f sur I, on a

$F \circ u$ dérivable sur J

et $\forall x \in J$, $(F \circ u)'(x) = F'(u(x)) \times u'(x) = f(u(x)) \times u'(x)$.

D'où

Théorème (formule du changement de variable).

Si F est une primitive de f sur I et $u : J \longrightarrow I$ dérivable sur J, alors sur J :

$$\int f(u(x)) \times u'(x)\, dx = (F \circ u)(x) + C$$

Exemple 1 : on veut calculer

$$\int 2x \cos(x^2)\, dx.$$

On pose $u(x) = x^2$. Alors $u'(x) = 2x$

D'où $\displaystyle\int 2x \cos(x^2)\, dx = \int \cos(u(x))\, u'(x)\, dx = \sin(u(x)) + C$

$= \sin(x^2) + C.$

Exemple 2. Calculer $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ sur $]-1,1[$.

On pose $x = \sin t$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Alors $dx = \cos t\, dt$.

D'où $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt$

$$= \int \cos^2 t\, dt$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C$$

$$= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + C.$$

Enfin la formule de dérivation d'un produit permet d'établir la formule d'intégration par parties.

En effet, si $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables, alors uv est dérivable et

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

D'où :

Théorème (intégration par parties).

Soient $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables

Alors
$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Exemple Calculer $\int \arctan(x)\,dx$.

Soit $u(x) = \arctan(x)$ $\quad u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$v(x) = x$ $\quad v'(x) = 1$

D'où
$$\int \arctan(x)\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$
$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2). + C.$$

1.3.3. Théorème fondamental du calcul intégral.

Nous allons montrer dans cette section que toute fonction continue admet une primitive et faire le lien avec le calcul d'une intégrale. Pour ceci, nous allons d'abord prouver un résultat intéressant par ailleurs : le théorème de la moyenne.

Théorème (de la moyenne) Si f est continue sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

preuve : f est continue sur $[a,b]$ (fermé, borné), donc il existe $x_1, x_2 \in [a,b]$ tel que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad , \quad \forall x \in [a,b].$$

D'où par "croissance" de l'intégrale, on a :

$$f(x_1)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(x_2)(b-a)$$

Ainsi

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \in [f(x_1), f(x_2)].$$

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f implique alors qu'il existe $c \in [x_1, x_2]$ tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

■

Le théorème suivant montre que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Théorème Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

La fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

<u>preuve</u> remarquons tout d'abord que f étant continue sur I, alors pour tout $x \in I$, la fonction f est intégrable sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$). Donc F est bien définie.

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Le théorème de la moyenne implique alors qu'il existe $c_h \in [x, x+h]$ tel que $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h)$

D'où
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c_h).$$

Mais
$$x \le c_h \le x+h \Longrightarrow \lim_{h \to 0} c_h = x$$

$$\underset{f \text{ continue}}{\Longrightarrow} \lim_{h \to 0} f(c_h) = f(x).$$

Ainsi $\lim_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$

Donc F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

De plus, $F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

Donc F est bien une primitive de f qui s'annule en a.

Si G est une autre primitive de f qui s'annule en a, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tq $G = F + C$.

Comme $F(a) = G(a) = 0$, on en déduit que $C = 0$ et donc $G = F$, ce qui montre l'unicité. ■

<u>Théorème (fondamental de l'analyse)</u>

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit F une primitive (quelconque) de f sur $[a,b]$.

Alors $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

<u>preuve</u>: notons F_0 la primitive de f qui s'annule en a (elle existe d'après le théorème précédent). Comme F et F_0 sont deux primitives de f, il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $F = F_0 + C$.

D'où $$F(b)-F(a) = \big(F_0(b)+c\big) - \big(F_0(a)+c\big)$$
$$= F_0(b) - F_0(a)$$
$$= F_0(b) \quad \text{car} \quad F_0(a) = 0$$

Or $$F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ , d'où}$$
$$F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt \text{ , ce qui donne}$$
$$F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)\,dt. \qquad \blacksquare$$

$$F(b) - F(a) = (F_0(b)+c) - (F_0(a)+c)$$
$$= F_0(b) - F_0(a)$$
$$= F_0(b) \quad \text{car} \quad F_0(a) = 0$$

Or $F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$, d'où $F_0(b) = \int_a^b f(t)dt$, ce qui donne.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Notation. En calcul intégrale, la quantité $F(b)-F(a)$ se note souvent $\left[F(x)\right]_a^b$. Ainsi la formule du théorème fondamentale de l'analyse s'écrit aussi. $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$, où F est une primitive de f sur $[a,b]$

Les résultats qui suivent découlent des résultats analogues pour les primitives.

Corollaire (changement de variable). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow I$ de classe C^1 avec $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f(u)du$$

preuve. la formule de changement de variable page 34 affirme que

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F\circ\varphi)(t) + C,$$

où F est une primitive de f.

D'où $$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (F\circ\varphi)(\beta) - (F\circ\varphi)(\alpha),$$

d'après le théorème fondamental de l'analyse.

Comme $b = \varphi(\beta)$ et $a = \varphi(\alpha)$, on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)\,du,$$

en appliquant une nouvelle fois le théorème fondamental de l'analyse ∎

<u>Corollaire</u> (<u>Intégration par parties</u>) Soient $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur I et $a, b \in I$.

Alors $$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

<u>preuve:</u> découle immédiatement de la formule de changement de variable pour les primitives et du théorème fondamental de l'analyse. ∎

Souvent on note le terme $u(b)v(b) - u(a)v(a)$ dans la formule de changement de variable $\left[u(x)v(x)\right]_a^b$.

Autrement dit, la formule de changement de variable s'écrit.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

<u>Exemple:</u> Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin(\sqrt{t})\,dt.$

On pose $u = \sqrt{t}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, $dt = 2\sqrt{t}\,du$
$= 2u\,du$

D'où (formule de changement de variable)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u \sin(u)\,du$$

$2u$	2
$-\cos(u)$	$\sin(u)$

$\Longrightarrow$ Intégration par partie

$$I = -2\underbrace{\cancel{\left[u\cos(u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}}_{=0} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,du$$

$$I = 2\left[\sin u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

<u>Remarques:</u> Soit $a > 0$ et $f: [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

① Si f est paire, alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

En effet, d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

et si on fait le changement de variable $x = -u$ dans la première intégrale, on a :

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)\,(-du) = -\int_{a}^{0} f(u)du$$

$$= \int_{0}^{a} f(u)du$$

D'où

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

② Si f est impaire, alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

En effet, on raisonne de même :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

et $$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)\,du$$

f impaire $\Longrightarrow f(-u) = -f(u)$

D'où $$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du$$

et $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

1.3. Compléments sur le calcul de primitive.

1.3.1. Primitives de $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, P polynôme, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Pour calculer une primitive d'une fonction f de la forme

$$f(x) = P(x)\,e^{\alpha x},$$ où P est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

on doit effectuer des intégration par parties successives en dérivant le polynôme autant de fois que nécessaire pour se ramener au calcul d'une primitive de $e^{\alpha x}$.

Exemple: Calculer $\int (x^2+x+1)\,e^{2x}\,dx$

$$u(x) = x^2+x+1 \qquad u'(x) = 2x+1$$
$$v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \qquad v'(x) = e^{2x}$$

D'où $$\int (x^2+x+1)e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x+1)e^{2x}\,dx$$

$$u(x) = 2x+1 \qquad u'(x) = 2$$
$$v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \qquad v'(x) = e^{2x}$$

$$\int (2x+1)e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(2x+1)e^{2x} - \int e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(2x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

D'où :

$$\boxed{\int (x^2+x+1)e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}}$$

1.3.2. Primitives de $f(x) = \cos(\alpha x)e^{\beta x}$ ou $\sin(\alpha x)e^{\beta x}$

Pour calculer une primitive d'une fonction f de la forme $f(x) = \cos(\alpha x)e^{\beta x}$, ou $f(x) = \sin(\alpha x)e^{\beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ il faut effectuer deux intégrations par parties " en intégrant deux fois par exemple $e^{\beta x}$ et en dérivant le cos et le sin "

<u>Exemple</u>: Calculer $\int \cos(2x)e^{2x}\,dx$.

$u(x) = \cos(2x)$ $\qquad$ $u'(x) = -2\sin(2x)$

$v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ $\qquad$ $v'(x) = e^{2x}$

$$\Longrightarrow \int \cos(2x)e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\cos(2x)\,e^{2x} + \int \sin(2x)e^{2x}\,dx$$

$u(x) = \sin(2x)$ $\qquad$ $u'(x) = 2\cos(2x)$

$v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ $\qquad$ $v'(x) = e^{2x}$

$$\int \sin(2x)\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x)\,e^{2x} - \int e^{2x}\cos(2x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \int \cos(2x)e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\cos(2x)\,e^{2x} + \frac{1}{2}\sin(2x)\,e^{2x} - \int \cos(2x)e^{2x}\,dx$$

$$2\int \cos(2x)e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\cos(2x)+\sin(2x)\right)e^{2x} + C$$

et donc $\boxed{\displaystyle\int \cos(2x)\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{4}\left(\cos(2x)+\sin(2x)\right)e^{2x}+C,\quad C\in\mathbb{R}.}$

1.3.3 Primitives de fractions rationnelles

On veut calculer

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

où $\quad P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

1ère étape: on décompose la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ en éléments simples

On est alors ramené à calculer des primitives de termes suivants :

(a) $\int E(x)\,dx$, où $E \in \mathbb{R}[X]$

(b) $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n}$

(c) $\int \dfrac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ avec $\Delta = b^2-4ac < 0$

(d) $\int \dfrac{x}{(ax^2+bx+c)^n}$ avec $\Delta = b^2-4ac<0$.

Je ne reviens pas sur (a) !

<u>Intégration de (b).</u> On a :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + C , & \text{si } n=1 \\ \dfrac{1}{1-n}\,\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + C , & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

<u>Intégration de (c).</u> On transforme ax^2+bx+c en un terme de la forme $1+t^2$, de la façon suivante :

$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ (remarquons que $a \neq 0$ car sinon $\Delta = b^2 < 0$ ce qui est absurde)

· D'où

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$= -\frac{\cancel{a}\Delta}{4a^{\cancel{2}}}\left[1+\left(\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)^2\right]$$

Posons $u = \dfrac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$

alors $dx = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,du$

et $$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\int\frac{du}{\left(\frac{-\Delta}{4a}\right)^n(1+u^2)^n}$$

$$= K\int\frac{du}{(1+u^2)^n}$$

avec $$K = \frac{(4a)^n\sqrt{-\Delta}}{2a\,(-\Delta)^n}.$$

· On est donc ramené au calcul de :

$$I_n(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} \quad , \quad n \geqslant 1$$

Le calcul de $I_n(t)$ se fait par récurrence.

Remarquons que $I_1(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + C$.

De plus, pour $I_n(t)$, on effectue une intégration par partie.

$$u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n} \qquad u'(t) = -2nt \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}$$

$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$

$$\Rightarrow I_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

Ecrivons $t^2 = 1 + t^2 - 1$

D'où
$$I_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \Bigg(\underbrace{\int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt}_{I_n(t)} - \underbrace{\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}}_{I_{n+1}(t)} \Bigg)$$

Ainsi

$$I_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\, I_n(t) - 2n\, I_{n+1}(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{I_{n+1}(t) = \frac{1}{2n} \frac{t}{(1+t^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n(t)}$$

Comme on connaît $I_1(t) = \arctan(t) + C$, on peut calculer $I_2(t)$ puis $I_3(t)$, etc....

<u>Intégration de (d)</u>: on fait apparaître la dérivée de ax^2+bx+c.

$$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{2a} \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Le terme $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ correspond au cas (c).

Le premier terme lui se calcule:

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} = \begin{cases} \ln|ax^2+bx+c| + C & \text{si } n=1 \\ \dfrac{1}{1-n} \dfrac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

1.3.4 Primitives de fonctions du type $\cos^n(x)\sin^p(x)$

① **Si p est impair**, $p = 2k+1$, on écrit

$$\int \cos^n(x)\sin^p(x)\,dx = \int \cos^n(x)\sin^{2k}(x)\sin(x)\,dx$$

$$= \int \cos^n(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^k \sin(x)\,dx$$

puis on pose $u = \cos x$. D'où $du = -\sin x\,dx$

et on a $\displaystyle\int \cos^n(x)\sin^p(x)\,dx = -\int u^n(1-u^2)^k\,du$

et on est ramené à un polynôme.

② **Si q est impair**, on fait le même raisonnement mais en échangeant le rôle du cos et du sin.

On fait donc le changement de variable $u = \sin(x)$.

③ **Si p et q sont pairs**,

on linéarise la fonction à l'aide des formules d'Euler ou des formules trigonométriques.

Exemple: calculer $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx$

On écrit $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

D'où $\cos^2(x)\sin^2(x) = -\dfrac{1}{16}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2$

$$= -\frac{1}{16}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}+2\right)\left(e^{2ix}+e^{-2ix}-2\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+1-2e^{2ix}+1+e^{-4ix}-2e^{-2ix} + 2e^{2ix}+2e^{-2ix}-4\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}-2-\cancel{2\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)} + \cancel{2\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(2\cos(4x)-2\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{8}$$

Ainsi $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx = \int\left(-\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{8}\right)dx$

$$= -\frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{x}{8}$$

1.3.5 Primitives de fonctions du type $\cos(ax)\cos(bx)$:

On utilise les formules de trigonométrie suivantes.

$$\begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right) \\ \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right) \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right) \end{cases}$$

Exemple : $$\int \sin(4x)\cos(5x)dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(9x) + \sin(-x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\sin(9x) - \sin(x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}\cos(9x) + \cos(x)\right) + C.$$

1.3.6. Primitives de fractions rationnelles en $\cos(x)$ et $\sin(x)$:

Supposons qu'on veuille intégrer une fonction du type $f(\sin x, \cos x)$ où f est une fraction rationnelle de deux variables

(i.e $f(X,Y) = \dfrac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$, P, Q deux polynômes en X, Y, ie P et Q sont de la forme $\sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j$).

On doit faire un changement de variable pour se ramener à une fraction rationnelle classique.

Pour savoir quel changement de variable on doit effectuer, on suit <u>les règles de Bioche</u>:

Si la forme $f(\sin x, \cos x)\,dx$ est invariante par le changement.

* de x en $-x$, on pose $u = \cos x$
* de x en $\pi - x$, on pose $u = \sin x$
* de x en $\pi + x$, on pose $u = \tan x$

Si les trois changements précédents ne donnent rien, on fait le changement de variable $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

On rappelle alors que
$$\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ \sin(x) = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ \tan(x) = \dfrac{2u}{1-u^2} \\ dx = \dfrac{2}{1+u^2}\,du \end{cases} \quad , u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

<u>Exemple</u>: calculer $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2(x) - \cos^2(x)}\,dx$

• Si x devient $-x$, la forme $\dfrac{\cos x}{\sin^2(x)-\cos^2(x)}\,dx$ devient

$$\frac{\cos(-x)}{\sin^2(-x) - \cos^2(-x)}\,d(-x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)-\cos^2(x)}\,dx \neq \frac{\cos x}{\sin^2(x)-\cos^2(x)}\,dx$$

• Si x devient $\pi - x$, on a :

$$\frac{\cos(\pi-x)}{\sin^2(\pi-x)-\cos^2(\pi-x)}\, d(\pi-x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)-\cos^2(x)}(-dx)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin^2(x)-\cos^2(x)}\,dx$$

$\rightsquigarrow$ on fait le changement de variable $u = \sin(x)$.

D'où $du = \cos(x)\,dx$ et

$$\sin^2(x)-\cos^2(x) = \sin^2(x)-(1-\sin^2(x)) = 2\sin^2(x)-1$$
$$= 2u^2-1$$

Ainsi
$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)-\cos^2(x)}\,dx = \int \frac{du}{2u^2-1}$$

et on est donc ramené à une fraction rationnelle qu'on décompose en élément simple puis qu'on intègre suivant la méthode vue précédemment.

1.3.7. Intégrale des fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et f une fraction rationnelle en 2 variables. On s'intéresse ici à

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

On commence par mettre le trinôme ax^2+bx+c sous forme canonique, puis par un changement de variable linéaire $(u = \alpha x + \beta)$, on se ramène à l'un des trois cas suivants :

(1) $\displaystyle\int g\left(u, \sqrt{-u^2+1}\right) du$

(2) $\displaystyle\int g\left(u, \sqrt{u^2+1}\right) du$, où g est une fraction rationnelle

ou

(3) $\displaystyle\int g\left(u, \sqrt{u^2-1}\right) du$

<u>Cas (1)</u> : $\displaystyle\int g\left(u, \sqrt{-u^2+1}\right) du$

On se place sur un intervalle où $|u| \leq 1$. On pose alors $u = \cos(t)$, où $t \in [0, \pi]$.

On a alors $du = -\sin t \, dt$

De +, $\sqrt{-u^2+1} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = \sin t$

car si $t \in [0, \pi]$, $\sin t \geq 0$

D'où
$$\int g(u, \sqrt{-u^2+1})\,du = -\int g(\cos t, \sin t) \sin t\, dt$$

et on est ramené à une fraction rationnelle en $\cos t$ et $\sin t$ qu'on intègre par la méthode précédente.

Pour les cas (2) et (3), nous devons introduire les <u>fonctions hyperboliques</u>.

La fonction "cosinus hyperbolique", notée ch, est définie par

$$ch : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

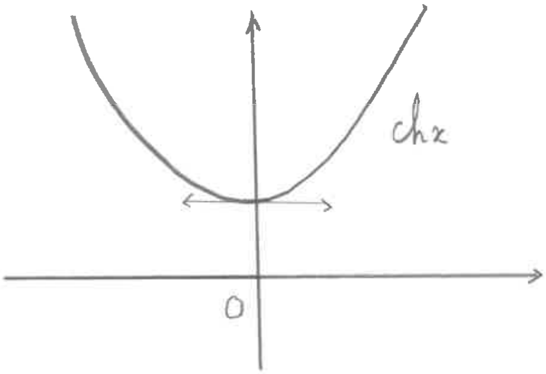
La fonction "sinus hyperbolique", notée sh, est définie par

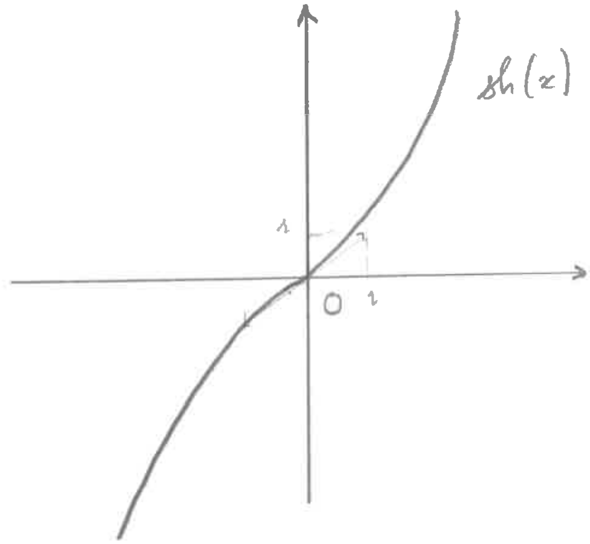
$$sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On vérifie que ch et sh sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, ch est paire, sh est impaire.

De plus, on a : $ch'(x) = sh(x)$
et $sh'(x) = ch(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Enfin, $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$





<u>cas (2)</u> : $\int g(u, \sqrt{u^2+1})du$.

On pose $u = sh(t)$. On a $du = ch(t)dt$

et $\sqrt{u^2+1} = \sqrt{1+sh^2(t)} = \sqrt{ch^2(t)} = ch\,t$ car

$ch(t) \geq 1 > 0$.

D'où $\int g(u, \sqrt{u^2+1})du = \int g(sh\,t, ch\,t)\, ch\,t\, dt$

Comme $sh\,t$ et $ch\,t$ s'expriment en fonction de e^t et

$e^{-t} = \frac{1}{e^t}$ et g est une fraction rationnelle

de deux variables, on voit que si on pose

$v = e^t$, on est ramené à une fraction

rationnelle en v et on peut alors intégrer

par la méthode vue précédemment.

Si on veut ensuite exprimer la primitive en fonction de la variable x de départ, il est important de pouvoir "inverser les calculs", en particulier dans le changement $u = sh(t)$ pouvoir exprimer t en fonction de u. Cela peut se faire de la façon suivante : on écrit

$$u = sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{et on pose} \quad h = e^t.$$

Ceci donne $2u = h - \frac{1}{h}$, i.e.

$$h^2 - 2uh - 1 = 0$$

$$\Delta = 4u^2 + 4 = 4(u^2+1) > 0$$

D'où deux racines $h_1 = \dfrac{2u - 2\sqrt{1+u^2}}{2} = u - \sqrt{1+u^2}$

et $h_2 = \dfrac{2u + 2\sqrt{1+u^2}}{2} = u + \sqrt{1+u^2}$

Si $u \geqslant 0$ (ce qui équivaut à $t \geqslant 0$), on a

$\sqrt{1+u^2} \geqslant \sqrt{u^2} = |u| = u$, d'où

$u - \sqrt{1+u^2} \leqslant 0$ et donc $e^t \neq h_1$

D'où $e^t = h_2 = u + \sqrt{1+u^2}$

et $\boxed{t = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) \quad , u \geq 0}$

Si $u < 0$ (ce qui équivaut à $t < 0$), on a

$$\sqrt{1+u^2} \geq |u| = -u > u$$

et $\sqrt{1+u^2} + u \geq 0$ et $-\sqrt{1+u^2} + u < 0$

D'où $e^t = h_2 = u + \sqrt{1+u^2}$

i.e. $\boxed{t = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) \quad , u < 0}$

Finalement, $\boxed{u = sh(t) \Leftrightarrow t = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right).}$

<u>Cas ③</u> $\displaystyle\int g\left(u, \sqrt{u^2-1}\right) du$.

Pour que cette primitive ait un sens, il faut bien sûr se placer sur un intervalle où $u^2 \geq 1$ (pour que $u^2 - 1 \geq 0$)

Si $u \geq 1$, on pose $u = ch(t)$, $t \geq 0$ alors

$$du = sh(t)\,dt \quad \text{et} \quad \sqrt{u^2-1} = \sqrt{ch^2(t) - 1}$$
$$= \sqrt{sh^2(t)}$$
$$= sh(t)$$

D'où $\displaystyle\int g(u, \sqrt{u^2-1})\,du = \int g(ch\,t, sh\,t)\,ch(t)\,dt$

et on conclut comme précédemment.

Remarquons que $u = ch(t),\ t \geqslant 0 \iff t = \ln(u + \sqrt{u^2-1})$
$u \geqslant 1$

Si $u \leqslant -1$, on pose $u = -ch(t)$, $t \geqslant 0$ et on conclut comme précédemment.

<u>Exemple</u>. Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2+4x+2}}$ sur $]0, +\infty[$.

On a : $4x^2+4x+2 = (2x+1)^2+1$

On pose $u = 2x+1$, $u > 1$.

On a $du = 2\,dx$ et $2x = u-1$.

D'où $\displaystyle\int \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2+4x+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-1)\sqrt{1+u^2}}$

On pose alors $u = sh(t)$.

Alors $du = ch(t)\,dt$ et $\sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+sh^2(t)}$
$= ch(t)$

D'où

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2+4x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{ch(t)}\,dt}{(sh\,t-1)\,\cancel{ch(t)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{sh(t)-1}$$

Or $sh(t)-1 = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} - 1 = \dfrac{e^t - e^{-t} - 2}{2}$

et si on pose $v = e^t$, on a :

$$sh(t)-1 = \frac{v - \frac{1}{v} - 2}{2} = \frac{v^2 - 2v - 1}{2v}$$

et $dv = e^t\,dt$, i.e. $dt = \dfrac{dv}{v}$

D'où

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2+4x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\cancel{v}\,\frac{(v^2-2v-1)}{\cancel{v}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2-2v-1}$$

Il reste alors à intégrer une fraction rationnelle.

$$\Delta = 4 - 4(-1) = 8$$

D'où $v_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

et $v_2 = 1 - \sqrt{2}$

i.e $$\frac{1}{v^2 - 2v - 1} = \frac{1}{\left(v - (1+\sqrt{2})\right)\left(v - (1-\sqrt{2})\right)}$$

$$= \frac{a}{v - (1+\sqrt{2})} + \frac{b}{v - (1-\sqrt{2})}$$

On calcule a et b et on trouve $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

et $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

D'où

$$\frac{1}{v^2 - 2v - 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{v - (1+\sqrt{2})} - \frac{1}{v - (1-\sqrt{2})}\right)$$

et $$\int \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2+4x+1}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{v - (1+\sqrt{2})} - \frac{1}{v - (1-\sqrt{2})}\right)dv$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\left(v - (1+\sqrt{2})\right) - \ln\left(v - (1-\sqrt{2})\right)\right) + C$$

Il reste à exprimer v en fonction de x :

rappelons les différents changements de variables effectués

$$\begin{cases} u = 2x+1 \\ u = sh(t) \iff t = \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) \quad \text{(voir page 60)} \\ v = e^t \end{cases}$$

D'où $\quad v = e^t = e^{\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)}$

$$v = u+\sqrt{1+u^2}$$

$$= 2x+1+\sqrt{1+(2x+1)^2}$$

Ainsi

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2+4x+1}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{v-(1+\sqrt{2})}{v-(1-\sqrt{2})}\right)+C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{2x+\cancel{1}+\sqrt{1+(2x+1)^2}-\cancel{1}-\sqrt{2}}{2x+\cancel{1}+\sqrt{1+(2x+1)^2}-\cancel{1}+\sqrt{2}}\right)+C$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2+4x+1}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{2x-\sqrt{2}+\sqrt{1+(2x+1)^2}}{2x+\sqrt{2}+\sqrt{1+(2x+1)^2}}\right)+C}$$

Pour finir ce chapitre sur l'intégration, nous allons parler des sommes de Riemann.

14 Sommes de Riemann :

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée, $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ et soit $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ n points tels que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$.

On définit alors

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

La quantité $S(f, \sigma, \xi)$ s'appelle une somme de Riemann associée à f, σ et ξ.

Remarque. Si on désigne par φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ satisfaisant à $\varphi(x) = f(\xi_i)$, $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$, alors

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = S(f, \sigma, \xi).$$

Rappelons que si $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ est une subdivision de $[a,b]$, le pas de la subdivision σ est la quantité $\delta(\sigma)$ et définie par

$$\delta(\sigma) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

Nous allons voir que si f est intégrable, les sommes $S(f, \sigma, \xi)$

tendent vers $\int_a^b f(x)\,dx$ lorsque $\delta(\sigma) \longrightarrow 0$, quelque soit le choix des points ξ_i associés.

Théorème Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ et toute suite $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$,

$$\delta(\sigma) \leq h \Longrightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f, \sigma, \xi) \right| \leq \varepsilon$$

preuve:

1er cas: f est continue sur $[a,b]$. (En première lecture, on pourra se contenter de la preuve dans ce cas là).

D'après le théorème de Heine, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ /

$$\left.\begin{array}{l} |x - y| \leq \delta \\ x, y \in [a,b] \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\delta(\sigma) < \delta$ et soit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$

Alors $$\int_a^b f(x)\,dx - S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right]$$

c'est à dire

$$\int_a^b f(x)\,dx - S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x)-f(\xi_i)\big)\,dx$$

D'où

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f,\sigma,\xi) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-f(\xi_i)|\,dx$$

Or si $x \in [x_{i-1}, x_i]$, on a $|x-\xi_i| \leq |x_i - x_{i-1}| \leq \delta(\delta) < \delta$

D'où $|f(x)-f(\xi_i)| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

Ainsi

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f,\sigma,\xi) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} \cancel{(b-a)}$$

$$= \varepsilon$$

Ceci achève la preuve dans le cas où f est continue.

<u>2ième cas</u>: <u>cas général</u> (pour les plus courageux !)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et intégrable et soit $\varepsilon > 0$

D'après le critère vu page 17, il existe deux fonctions en escalier $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

telle que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\displaystyle\int_a^b (\psi(t) - \varphi(t))\,dt \leq \frac{\varepsilon}{4}$

Notons $\Theta = \psi - \varphi$. La fonction Θ est aussi en escalier

et vérifie (1) $\boxed{0 \leq f - \varphi \leq \Theta \text{ et } \displaystyle\int_a^b \theta(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{4}.}$

Les fonctions φ et Θ n'ont qu'un nombre fini de points de discontinuité ; nous désignerons par $\{y_1, \dots, y_p\}$ l'ensemble (s'il est non vide) constitué par les points de discontinuité de ces deux fonctions ; et nous utiliserons le fait que ces fonctions restent constantes sur $]y_i, y_{i+1}[$, $1 \leq i \leq p-1$ (nous supposons ici avoir ordonné les points y_i, c'est à dire $y_1 < y_2 < \dots < y_p$).

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ et soit $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$, $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$

On a $$\int_a^b f(x)\,dx - S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))\,dx$$

Si l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ ne contient aucun de points $y_1, \dots, y_p$ et si on désigne par φ_i et Θ_i

les valeurs constantes respectivement prises par φ et Θ sur cet intervalle, on a pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$|f(x) - f(\xi_i)| = |f(x) - \varphi_i + \varphi_i - f(\xi_i)|$$

$$= |f(x) - \varphi(x) + \varphi(\xi_i) - f(\xi_i)|$$

$$\leq |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)|$$

$$\leq \Theta(x) + \Theta(\xi_i) = 2\,\Theta(x) \qquad \text{d'après (1)}$$

D'où : $$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))\,dx \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(\xi_i)|\,dx$$

et donc

(2) $$\boxed{\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))\,dx \right| \leq 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Theta(x)\,dx, \quad \text{si } [x_{i-1}, x_i] \cap \{y_1, \dots, y_p\} = \emptyset}$$

D'autre part, chaque point $y_1, \dots, y_p$ appartient <u>au plus</u> à deux intervalles fermés $[x_{i-1}, x_i]$.

Il existe donc au plus $2p$ intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ contenant des points de discontinuité de φ ou Θ et pour ces intervalles, on a

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))\,dx \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(\xi_i)|\,dx$$

i.e (3) $$\boxed{\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))\,dx \right| \leq 2M(x_i - x_{i-1}) \leq 2M\,\delta(\sigma)}$$

où $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < +\infty$ (car f est bornée)

et $\delta(\sigma) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ est le pas de la subdivision.

Désignons par

$$I = \left\{ i \in [\![1, n]\!] : [x_{i-1}, x_i] \cap \{y_1, \dots, y_p\} = \emptyset \right\}$$

et $$J = \left\{ i \in [\![1, n]\!] : [x_{i-1}, x_i] \cap \{y_1, \dots, y_p\} \neq \emptyset \right\}$$

On a vu que $\operatorname{card}(J) \leq 2p$.

On a :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f, \sigma, \xi) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))\,dx \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))\,dx \right|$$

$$= \sum_{i \in I} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))\,dx \right| + \sum_{i \in J} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\xi_i))\,dx \right|$$

la dernière égalité étant vraie car

$$[\![1,n]\!] = I \cup J \quad \text{et} \quad I \cap J = \emptyset.$$

D'après (2), on a

$$\sum_{i\in I}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(\xi_i))dx\right| \leq 2\sum_{i\in I}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\theta(x)dx$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\theta(x)dx \quad (\text{car } \theta \geq 0).$$

$$= 2\int_a^b \theta(x)dx$$

$$\leq 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{d'après (1)}$$

De plus, puisque $\text{card}(J) \leq 2p$, on obtient avec (3)

que

$$\sum_{i\in J}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(\xi_i))dx\right| \leq 2M\,\delta(\sigma)\times\text{card}(J)$$

$$\leq 4Mp\,\delta(\sigma)$$

D'où

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S(f,\sigma,\xi)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4Mp\,\delta(\sigma)$$

On voit donc que si on pose $h = \dfrac{\varepsilon}{8Mp}$

alors $\delta(\sigma) \leq h \Longrightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - S(f, \sigma, \xi) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$= \varepsilon$.

<u>Corollaire</u> Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et intégrable. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)}$$

<u>preuve</u>: on choisit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ et $x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$, $0 \leq k \leq n$

Alors $\delta(\sigma) = \dfrac{b-a}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

De plus, si on choisit $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ avec

$$\xi_k = a + k\,\frac{b-a}{n} = x_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

on a $$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Le théorème précédent implique alors que:

$\forall \varepsilon>0, \exists h>0$ tel que

$$\delta(\sigma) \leq h \Longrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx - S(f, \sigma, \xi)\right| \leq \varepsilon$$

D'où si $n \geq n_0 \geq \frac{b-a}{h}$, on a

$$\delta(\sigma) = \frac{b-a}{n} \leq h \quad \text{et donc}$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$

<u>Exemple d'application</u>: Soit

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

On remarque que $\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{n}}$

c'est à dire:

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

Posons $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, $t \in [0,1]$

La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc bornée et Riemann intégrable

On a alors

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et le corollaire implique que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= \left[\ln(1+t)\right]_0^1$$

$$= \underline{\ln 2}$$

Chapitre 2. Développements limités

Le but de ce chapitre est d'approcher une fonction par un polynôme. Ces approximations vont être particulièrement utiles dans l'étude locale des fonctions (calcul de limite, étude de branches infinies, ...) puis par la suite dans l'étude des courbes paramétrées. L'outil qui va nous donner ces approximations est les développements limités (en abrégé DL).

2.1 Comparaison des fonctions

2.1.1 Fonctions négligeables

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage I de x_0 et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.}$$

On écrit alors $f = o(g)$ (ou $f(x) = o(g(x))$) au voisinage de x_0.

<u>Exemple:</u> $x^3 = o(x^2)$ au voisinage de 0

et $x^2 = o(x^3)$ au voisinage de $+\infty$.

<u>Propriétés:</u>

1. si $f = o(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$
2. si $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$ alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$
3. Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ alors
$$f_1 + f_2 = o(g)$$
4. si $f = o(g)$ alors $\dfrac{1}{g} = o\left(\dfrac{1}{f}\right)$ si f et g ne s'annulent pas au voisinage de x_0

<u>preuve:</u> exercice

⚠ (•) $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$ $\not\Longrightarrow$ $f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$

Par exemple, au voisinage de 0, $x^2 = o(x)$

$$-x^3 = o(-x + x^2)$$

mais $x^2 - x^3 \neq o(x^2)$.

(•) Avec les quotients de fonction, il n'y a pas de propriétés générals

<u>Remarque:</u> $f = o(1)$ signifie que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

2.1.2. Fonctions équivalentes

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 s'il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = (1+\varepsilon(x))\, g(x), \forall x \in I$$

On note alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$

Remarque $f \underset{x_0}{\sim} g \iff f = g + o(g)$

Théorème (1)

(1) La relation $\sim$ au voisinage de x_0 est une relation d'équivalence i.e. elle est symétrique, réflexive et transitive

(2) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existe. Dans ce cas, les deux limites sont égales.

(3) On peut prendre le produit, le quotient (si bien défini) et les puissances des équivalents:

c'est à dire

(i) Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$

(ii) Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et si f_1 ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors g_1 ne s'annule pas au voisinage de x_0

et on a $\dfrac{1}{f_1} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g_1}$

(iii) si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et si $f_1 > 0$ au voisinage de x_0

alors $g_1 > 0$ au voisinage de x_0 et

$\forall r \in \mathbb{R}$, $f_1^r \underset{x_0}{\sim} g_1^r$

(4) si $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = x_0$ et si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors

$$f \circ \phi \underset{a}{\sim} g \circ \phi.$$

preuve : $\boxed{(1)}$ (•) Il est clair que $\sim$ est réflexive : $f \underset{x_0}{\sim} f$

(il suffit pour cela de prendre $\varepsilon(x) = 0$, $\forall x \in I$!)

(•) si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$, $x \in I$

et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$. Comme $\lim\limits_{x \to x_0}(1 + \varepsilon(x)) = 1$, il existe

un voisinage J de x_0, $J \subset I$, tel que $1 + \varepsilon(x) > 0$ $\forall x \in J$

et on peut donc défini $\varepsilon^\#$: $J \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \varepsilon^\#(x) = -\frac{\varepsilon(x)}{1 + \varepsilon(x)}$$

On a $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon^\#(x) = 0$ et

$$\left(1+\varepsilon^{\#}(x)\right) f(x) = \left(1 - \frac{\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}\right) f(x)$$

$$= \left(\frac{1+\cancel{\varepsilon(x)}-\cancel{\varepsilon(x)}}{1+\varepsilon(x)}\right) f(x)$$

$$= \frac{1}{1+\varepsilon(x)} f(x)$$

$$= g(x).$$

Ainsi $g \underset{x_0}{\sim} f$ et la relation $\sim$ est symétique.

(c) Enfin, si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors il existe un voisinage I de x_0 et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I$, $f(x) = \left(1+\varepsilon(x)\right) g(x)$, et $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et il existe un voisinage J de x_0 et une fonction $\varepsilon^{\#} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in J$, $g(x) = \left(1+\varepsilon^{\#}(x)\right) h(x)$ et

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon^{\#}(x) = 0.$$

L'intersection $I \cap J$ est un voisinage de x_0 et pour tout $x \in I \cap J$, on a :

$$f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x) = (1+\varepsilon(x))(1+\varepsilon^{\#}(x))h(x)$$

$$= (1+\varepsilon(x)+\varepsilon^{\#}(x)+\varepsilon(x)\varepsilon^{\#}(x))h(x)$$

$$= (1+\tilde{\varepsilon}(x))h(x),$$

où $\tilde{\varepsilon} : I \cap J \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \tilde{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x)+\varepsilon^{\#}(x)+\varepsilon(x)\varepsilon^{\#}(x)$$

Comme $\lim\limits_{x\to x_0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0$, on en déduit que

$f \underset{x_0}{\sim} h$ et donc $\sim$ est transitive.

$\boxed{2}$ découle immédiatement de la définition et des propriétés des limites.

$\boxed{3}$ (i) Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors il existe un voisinage I de x_0 et deux fonctions $\varepsilon_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en x_0 et

$$f_1 = (1+\varepsilon_1)g_1$$
$$f_2 = (1+\varepsilon_2)g_2$$

Alors $$f_1 f_2 = (1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2)g_1 g_2$$

Posons alors $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$$

La fonction ε vérifie $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

et $$f_1(x) f_2(x) = (1 + \varepsilon(x)) g_1(x) g_2(x)$$

Ceci prouve que $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

(ii) Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et f_1 ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 alors il existe un voisinage I de x_0 et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0 et $\forall x \in I$, $f_1(x) = (1 + \varepsilon(x)) g_1(x)$.

Cette relation implique bien sûr que $\forall x \in I$, $g_1(x) \neq 0$ (car sinon f s'annulerait sur I, ce qui est contraire à l'hypothèse).

On peut alors écrire $\forall x \in I$, on a :

$$\frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{1+\varepsilon(x)} \frac{1}{g_1(x)} = \left(1 + \frac{-\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}\right) \frac{1}{g_1(x)}$$

Comme $\lim_{x \to x_0} \frac{-\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)} = 0$, on en déduit que $\frac{1}{f_1} \underset{x_0}{\sim} \frac{1}{g_1}$.

(iii) si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et si $f_1 > 0$ au voisinage de x_0

alors il existe un voisinage I de x_0 et une fonction

$\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in I,\ f_1(x) > 0$

$$\forall x \in I,\ f_1(x) = (1+\varepsilon(x))g_1(x)$$

et $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Quitte à réduire I, comme $\lim\limits_{x \to x_0} (1+\varepsilon(x)) = 1$,

on peut supposer que $\forall x \in I,\ 1+\varepsilon(x) > 0$.

Ainsi $\forall x \in I,\ g_1(x) = \frac{f_1(x)}{1+\varepsilon(x)} > 0$.

Donc les deux fonctions f_1^r et g_1^r sont bien

définies sur I. De +, $\forall x \in I$, on a :

$$f_1^r(x) = e^{r\ln(f_1(x))} = e^{r\ln((1+\varepsilon(x))g_1(x))}$$

$$= e^{r\ln(1+\varepsilon(x)) + r\ln(g_1(x))}$$

$$= e^{r\ln(1+\varepsilon(x))}\, g_1^r(x).$$

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} e^{r\ln(1+\varepsilon(x))} = 1$, si on posons $\varepsilon^{\#}(x) = e^{r \ln(1+\varepsilon(x))} - 1$, $x \in I$

on a $\lim_{x \to x_0} \varepsilon^{\#}(x) = 0$

et $f_1^r(x) = \left(1 + \varepsilon^{\#}(x)\right) g_1^r(x)$, $x \in I$.

Ceci prouve que $f_1^r \sim g_1^r$.

$\boxed{(4)}$ Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors il existe un voisinage I de x_0 et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et $\forall x \in I$, $f(x) = (1+\varepsilon(x)) g(x)$.

De plus, comme $\lim_{x \to a} \phi(x) = x_0$, alors par définition de la limite : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tq

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |\phi(x) - x_0| < \varepsilon$$

(On écrit ici la preuve pour $a, x_0 \in \mathbb{R}$; le lecteur est invité à écrire les détails si l'un des deux ou les deux est $\pm\infty$).

On peut choisir $\varepsilon > 0$ tq $|\phi(x) - x_0| < \varepsilon \Longrightarrow \phi(x) \in I$.

On obtient alors que pour tout

$x \in]x-a, x+a[$, $f(\phi(x)) = \left(1 + \varepsilon(\phi(x))\right) g(\phi(x))$.

Comme $\lim_{x \to a} \varepsilon(\phi(x)) = 0$, on en déduit que $f \circ \phi \underset{a}{\sim} g \circ \phi$. $\blacksquare$

⚠ (a) En général, on ne peut pas additionner (ou soustraire) des équivalents.

Par exemple. $x^2 - x \underset{0}{\sim} -x$ et $x \underset{0}{\sim} x$

mais $(x^2 - x + x) \underset{0}{\not\sim} x - x = 0$!

(b) On ne peut pas composer les équivalents par une fonction à <u>gauche</u>.

Par exemple, $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ mais

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

et donc $e^{x^2+x} \underset{+\infty}{\not\sim} e^{x^2}$ (voir remarque ci-dessous)

<u>Remarque</u>: Dans le cas où g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 (*), on peut reformuler la notion de fonction négligeable et équivalentes comme suit:

(*) (sauf éventuellement en x_0)

$f = o(g)$ au voisinage de $x_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

$f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

⚠ Ces deux reformulation n'ont de sens que si $\dfrac{f}{g}$ est bien défini au voisinage de x_0 et donc si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0.

Si g s'annule sur <u>tout</u> voisinage de x_0 (c'est à dire si $\forall I$ voisinage de x_0, il existe $a \in I$ tel que $g(a) = 0$) alors il faut utiliser les définitions avec la fonction ε.....

<u>Proposition 2</u> On a : (au voisinage de 0)

(a) $o(x^n) + o(x^m) = o(x^l)$, où $l = \min(n, m)$

(b) $o(x^n)\,o(x^m) = o(x^{n+m})$

(c) $x^n\,o(x^m) = o(x^{n+m})$

<u>preuve</u> : (a) Si $f = o(x^n)$ et $g = o(x^m)$ alors par définition on a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x^m} = 0$.

D'où si $l = \min(n,m)$, on a $l \leq n$ et $l \leq m$

et donc
$$\frac{f(x)+g(x)}{x^l} = \underbrace{\frac{f(x)}{x^n}}_{\substack{\downarrow x\to 0\\ 0}} x^{n-l} + \underbrace{\frac{g(x)}{x^m}}_{\substack{\downarrow x\to 0\\ 0}} x^{m-l}$$

Comme $n-l \geqslant 0$ et $m-l \geqslant 0$ les deux fonctions $x \longmapsto x^{n-l}$ et $x \longmapsto x^{m-l}$ sont bornés et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x^l} = 0$$

Ceci prouve que $f+g = o(x^l)$.

(b) est un cas particulier de la propriété ② page ② !

(c) Si $f(x) = o(x^m)$ alors

$$\frac{x^n f(x)}{x^{n+m}} = \frac{f(x)}{x^m} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Ainsi $x^n f(x) = o(x^{n+m})$.

2.2 Développements limités

<u>Définition</u>: Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet un <u>développement limité à l'ordre n en x_0</u>

s'il existe des coefficients réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$\left(f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \right)$$

au voisinage de x_0.

En abrégé on écrit f admet un $DL_n(x_0)$.

Si f admet un $DL_n(x_0)$, la partie polynomiale $\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ s'appelle <u>la partie régulière</u> du $DL_n(x_0)$

et $o((x-x_0)^n)$ s'appelle <u>le reste</u> du $DL_n(x_0)$.

On montrera que la partie régulière et le reste d'un $DL_n(x_0)$ (quand le $DL_n(x_0)$ existe) sont uniques et donc il n'y a aucune ambiguïté à parler de <u>la</u> partie régulière et <u>du</u> reste d'un $DL_n(x_0)$....

<u>Exemple:</u> Si $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ - intervalle ouvert alors f admet un $DL_1(x_0)$ donné par:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + o(x-x_0)$$

En effet, par définition de la dérivabilité, on a:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

D'où si on pose $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$, $x \in I \setminus \{x_0\}$

$= 0$ si $x = x_0$

Alors $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + (x-x_0)\,\varepsilon(x)$$

$$= f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + o\left((x-x_0)\,\varepsilon(x)\right).$$

Proposition 3 Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors pour tout $m < n$, f admet un $DL_m(x_0)$.

preuve: Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k (x-x_0)^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Or $\forall\, m+1 \leq k \leq n$, on a:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)^k}{(x-x_0)^m} = \lim_{x \to x_0} (x-x_0)^{k-m} = 0$$

Ainsi $$\sum_{k=m+1}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) = o\left((x-x_0)^m\right)$$

D'où $$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^m\right),$$

ce qui montre que f admet un $DL_m(x_0)$.

Nous allons démontrer l'unicité du développement limité.

<u>Lemme (4)</u> Soit P un polynôme de degré n. Si $P(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0, alors $P \equiv 0$.

<u>preuve.</u> soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ le développement de P, et supposons par l'absurde que l'un des a_k est non nul.

Soit p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$

Alors en divisant par x^p l'égalité

$$\sum_{k=p}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = o(x^n) = o(x^p)$$

on a :

$$a_p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} = o(1).$$

En faisant tendre $x \longrightarrow 0$, on obtient $a_p = 0$ ce qui contredit la définition de p. Ainsi tous les a_k sont nuls.

Proposition 5 Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors ce DL est unique ; autrement dit la partie principale et le reste sont uniques.

preuve: Supposons que f admet 2 $DL_n(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o_1((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} a'_k (x-x_0)^k + o_2((x-x_0)^n)$$

Alors
$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - a'_k)(x-x_0)^k = o_2((x-x_0)^n) - o_1((x-x_0)^n)$$
$$= o((x-x_0)^n)$$

D'après le lemme précédent, $\forall\, 0 \leq k \leq n$, $a_k = a'_k$

Le résultat suivant montre que le $DL_n(x_0)$ d'une fonction f s'il existe est la meilleure approximation de f au voisinage de x_0 par un polynôme de degré n en $x - x_0$.

Théorème 6 Supposons que f admet un $DL_n(x_0)$.

$$f(x) = P(x-x_0) + o((x-x_0)^n) \quad \text{où } P \text{ est}$$

un polynôme de degré n. Alors pour tout polynôme Q de degré n, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\left|f(x) - P(x-x_0)\right| \leq \left|f(x) - Q(x-x_0)\right|,$$

pour tout x tel que $|x - x_0| < \delta$.

preuve : Si $P = Q$ le résultat est évident.

Supposons donc $P \neq Q$.

Si on écrit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b'_k x^k$

cela signifie qu'il existe $0 \leq k \leq n$ tel que $b_k \neq b'_k$

Soit p le plus petit indice tel que $b_p \neq b'_p$

Alors
$$P(x) - Q(x) = \sum_{k=0}^{n} (b_k - b'_k) x^k$$

$$= \sum_{k=p}^{n} (b_k - b'_k) x^k$$

$$= (b_p - b'_p) x^p + o(x^p) \quad \text{au voisinage de } 0.$$

$$= a_p x^p + o(x^p), \quad a_p \neq 0$$

D'où
$$P(x-x_0) - Q(x-x_0) = a_p (x-x_0)^p + o((x-x_0)^p)$$

au voisinage de x_0.

On a alors :

$$f(x) - Q(x-x_0) - a_p(x-x_0)^p = f(x) - P(x-x_0) + P(x-x_0) - Q(x-x_0) - a_p(x-x_0)^p$$

Or $f(x) - P(x-x_0) = o\left((x-x_0)^n\right) = o\left((x-x_0)^p\right)$

(car $p \leq n$)

D'où

$$f(x) - Q(x-x_0) - a_p(x-x_0)^p = o\left((x-x_0)^p\right)$$

Par définition, il existe $\delta_1 > 0$ tq

$$|x-x_0| < \delta_1 \Longrightarrow \left|o\left((x-x_0)^p\right)\right| \leq \frac{|a_p|}{2}|x-x_0|^p$$

D'où pour tout x tel que $|x-x_0| < \delta_1$,

on a :
$$\begin{aligned} |f(x) - Q(x-x_0)| &= |f(x) - Q(x-x_0) - a_p(x-x_0)^p + a_p(x-x_0)^p| \\ &= \left|o\left((x-x_0)^p\right) + a_p(x-x_0)^p\right| \\ &\geq |a_p|\,|x-x_0|^p - \left|o\left((x-x_0)^p\right)\right| \\ &\geq |a_p|\,|x-x_0|^p - \frac{|a_p|}{2}|x-x_0|^p \\ &= \frac{|a_p|}{2}|x-x_0|^p \end{aligned}$$

D'autre part, $f(x) - P(x-x_0) = o\left((x-x_0)^n\right)$

$$= o\left((x-x_0)^p\right).$$

Ainsi il existe $\delta_2 > 0$ tel que

$$\left|f(x) - P(x-x_0)\right| \leq \frac{|a_p|}{2}\,|x-x_0|^p,$$

pour tout x tel que $|x-x_0| < \delta_2$

En prenant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, on en déduit que

pour tout x tel que $|x-x_0| < \delta$, on a :

$$\left|f(x) - P(x-x_0)\right| \leq \frac{|a_p|}{2}\,|x-x_0|^p \leq \left|f(x) - Q(x-x_0)\right|,$$

d'où le résultat. ■

Dans la pratique, on ramène le calcul d'un $DL_n(x_0)$ au calcul d'un $DL_n(0)$.

Proposition 7 Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et soit g définie au voisinage de 0 par

$$g(x) = f(x+x_0).$$

Alors f admet un $DL_n(x_0)$ si et seulement si g admet un $DL_n(0)$. Dans ce cas, si

20

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n), \quad \text{au voisinage de } 0$$

alors $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \quad \text{au voisinage de } x_0.$$

preuve: Suppose que g admette un $DL_n(0)$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Alors $$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k = g(x-x_0) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

et donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x-x_0) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k}{t^n}$$

$$= 0$$

Ainsi f admet un $DL_n(x_0)$ et on a.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right).$$

On vérifie facilement que le raisonnement est réversible. ∎

Corollaire 8. On suppose que f admet un $DL_n(0)$.

Si f est paire (respectivement impaire) alors la partie régulière du $DL_n(0)$ est paire (respectivement impaire).

preuve : Si f admet un $DL_n(0)$ alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{au voisinage de } 0$$

et

$$f(-x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\left(\text{car} \quad o((-1)^n x^n) = o(x^n) \right)$$

Si f est paire, on a alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + o(x^n)$$

et par unicité du $DL_n(0)$, on en déduit que

$$\forall\, 0 \le k \le n, \quad a_k = (-1)^k a_k,$$

ce qui implique que $\forall\, 0 \le k \le n$, k impaire, $a_k = 0$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est une fonction paire

(car elle ne contient que des puissances paires de x)

Si f est impaire, on raisonne de même.

<u>Définition</u> : Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$.

On dit que f admet un $DL_n(\pm\infty)$ (un développement limité d'ordre n au voisinage de $\pm\infty$) si la fonction g définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ admet un $DL_n(0)$.

Si ce développement est

$$g(t) = P(t) + o(t^n) \quad , \text{ au vois. de } 0$$

alors au voisinage de $\pm\infty$, on a

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

2.3. Formules de Taylor Young

La formule de Taylor Young va nous permettre d'obtenir le DL de la plupart des fonctions usuelles.

Commençons par un lemme.

<u>Lemme 9</u>. Soit $k \in \mathbb{N}$ et g une fonction dérivable au voisinage de 0. Si $g'(h) = o(h^k)$ alors

$$g(h) = g(0) + o(h^{k+1}).$$

preuve : Par hypothèse, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists h_0 > 0$ tel que $|h| \leq h_0 \Longrightarrow |g'(h)| \leq \varepsilon |h|^k$

Ainsi si $0 \leq |c| \leq |h|$, on a

$$|g'(c)| \leq \varepsilon |c|^k \leq \varepsilon |h|^k$$

ce qui montre que $\displaystyle\sup_{0 \leq |c| \leq |h|} |g'(c)| \leq \varepsilon |h|^k$.

L'inégalité des accroissements finis assure alors que :

$$|g(h) - g(0)| \leq |h| \sup_{|c| \leq |h|} |g'(c)| \leq \varepsilon |h|^{k+1}$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists h_0 > 0$ /

$$|h| \leq h_0 \Rightarrow |g(h) - g(0)| \leq \varepsilon |h|^{k+1},$$

ce qui montre que $g(h) - g(0) = o\left(h^{k+1}\right)$. ∎

Théorème 10 (Formule de Taylor-Young). Soient $n \geq 1$ et f une fonction définie et n fois dérivables au voisinage de x_0. Alors, f admet un $DL_n(x_0)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right),$$

au voisinage de x_0

preuve : Faisons une preuve par récurrence sur l'entier n.

Pour $n=1$, on a vu que c'était vrai (voir exemple page 13)

Supposons que la formule de Taylor Young est vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Soit donc f une fonction définie et $(n+1)$ fois dérivable au voisinage de x_0. Alors f' est n fois dérivable au voisinage de x_0 et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Ainsi f' admet un $DL_n(x_0)$ et

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Introduisons la fonction g définie au voisinage de 0 par

$$g(h) = f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

La fonction g est dérivable au voisinage de 0 et on a :

$$g'(h) = f'(x_0+h) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k h^{k-1}$$

$$= f'(x_0+h) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} h^{k-1}$$

i.e

$$g'(h) = f'(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} h^k$$

La proposition (7) implique alors que

$$g'(h) = o(h^n) \quad \text{au voisinage de } 0$$

et le lemme (9) dit que

$$g(h) = g(0) + o(h^{n+1}).$$

Or $\quad g(0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$

D'où $\quad g(h) = o(h^{n+1})$

Une nouvelle application de la proposition (7) implique

alors que f admet un $DL_{n+1}(x_0)$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n+1}).$$

$\blacksquare$

Remarque : On vient de voir que si f est n fois dérivable au voisinage de x_0 $(n \geq 1)$, alors f admet un $DL_n(x_0)$. Il est naturel de se demander si la réciproque est vraie.

On peut voir facilement que pour $n = 1$, c'est vraie

Ainsi :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff f \text{ admet un } DL_1(x_0).$$

En revanche, c'est faux en général pour $n \geq 2$.

Par exemple, on montre que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x + x^2 + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

admet un $DL_2(0)$ (car $x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \underset{0}{o}(x^2)$ au vois de 0)

mais la dérivée seconde en 0 n'existe pas

(exercice !)

En application directe de la formule de Taylor Young, on a très facilement les DL suivants qu'il faut connaître <u>par cœur</u>.

Au voisinage de 0 :

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n+1}\right)}$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).}$$

⚠ dans la formule précédente, par convention, $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$ pour $k=0$, vaut 1.

Ainsi

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right)}$$

2.4. Opérations sur les DL

Pour calculer le DL d'une fonction n fois dérivable on utilise rarement la formule de Taylor Young sauf si on est en présence d'une fonction extrêmement simple dont il est facile de calculer les dérivées successives. Dans la plupart des cas, on utilise les DL des fonctions usuelles (qu'il faut connaître par coeur) et les opérations sur les DL

2.4.1 Somme, produit et composée

Dans la suite si P est un polynôme, on notera P_m la somme de ses monômes de degré $\leq m$.

Autrement dit, si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors

pour $m \in \mathbb{N}$,
$$P_m(X) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m} a_k X^k & \text{si } m \leq n \\ P(X) & \text{si } m > n \end{cases}$$

Proposition 11 : On suppose que f et g ont des $DL_n(0)$ de la forme

$$f(x) = P(x) + o(x^n), \quad g(x) = Q(x) + o(x^n),$$

où P et Q sont des polynômes de degré $\leq n$.

Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ et fg ont des $DL_n(0)$ de la forme

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda P(x) + \mu Q(x)) + o(x^n)$$

et

$$(fg)(x) = (PQ)_n(x) + o(x^n)$$

Le résultat pour $\lambda f+\mu g$ est immédiat et découle du fait que $\lambda\, o(x^n)+\mu\, o(x^n)=o(x^n)$.

Montrons le résultat pour fg :

On a :

$$(fg)(x)=\left(P(x)+o(x^n)\right)\left(Q(x)+o(x^n)\right)$$

$$=P(x)Q(x)+\left(P(x)+Q(x)+o(x^n)\right)o(x^n)$$

Remarquons que $P(x)+Q(x)+o(x^n)$ est une fonction bornée au voisinage de 0 et donc

$$\left(P(x)+Q(x)+o(x^n)\right)o(x^n)=o(x^n)$$

D'où

$$(fg)(x)=P(x)Q(x)+o(x^n)$$

Comme P et Q sont des polynômes de degré $\leq n$, il existe un polynôme $R(X)$ tel que :

$$P(x)Q(x)=(PQ)_m(x)+x^{m+1}R(x)$$

et comme $x^{n+1}R(x)=o(x^n)$, on en déduit que

$$(fg)(x) = (PQ)_n(x) + o(x^n)$$

<u>Exemple 1</u> Le $DL_n(0)$ de e^x donne ceux de

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

par une simple application de la proposition 11.

On obtient ainsi :

$$\boxed{ch(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{sh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})}$$

<u>Exemple 2</u> Soit $f(x) = e^x \cos(x)$. Déterminer le $DL_4(0)$ de f.

On a $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

D'où $$f(x) = 1 - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + x - \frac{x^3}{2} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

D'où

$$f(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

<u>Proposition 12</u> : On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$ de la forme $f(x) = P(x) + o(x^n)$, $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ où P et Q sont des polynômes de degré $\leq n$.

<u>Si</u> $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ de la forme

$$f(g(x)) = \left[P(Q(x))\right]_n + o(x^n)$$

<u>preuve</u>: Ecrivons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon_1(x) \quad , \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$g(x) = \sum_{l=0}^{n} b_l x^l + x^n \varepsilon_2(x) \quad , \text{ où } \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

De plus, comme g est continue en 0 et $g(0) = 0$, on a $b_0 = 0$.

On obtient alors que

$$(1) \quad \underline{f(g(x)) = P(g(x)) + (g(x))^n \varepsilon_1(g(x))}$$

Mais nous avons

$$\left(g(x)\right)^n = \left(\sum_{l=1}^{n} b_l x^l + x^n \varepsilon_2(x)\right)^n$$

$$= x^n \left(\sum_{l=1}^{n} b_l x^{l-1} + x^{n-1} \varepsilon_2(x)\right)^n$$

$$= x^n h(x),$$

où $h(x) = \left(\sum_{l=1}^{n} b_l x^{l-1} + x^{n-1}\varepsilon_2(x)\right)^n$ est

une fonction bornée au voisinage de 0

Ainsi $\left(g(x)\right)^n \varepsilon_1(g(x)) = x^n h(x) \varepsilon_1(g(x))$

et comme $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(g(x)) = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

on en déduit que

$$(2) \quad \underline{\left(g(x)\right)^n \varepsilon_1(g(x)) = o(x^n).}$$

D'autre part, nous avons aussi

$$P(g(x)) - P(Q(x)) = P(Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)) - P(Q(x))$$

i.e

$$P(g(x)) - P(Q(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\left(Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)\right)^k - Q(x)^k \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \left[\left(Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)\right)^k - Q(x)^k \right]$$

avec la formule du binôme de Newton

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{nj} \varepsilon_2(x)^j Q(x)^{k-j} - Q(x)^k \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} x^{nj} \varepsilon_2(x)^j Q(x)^{k-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k x^n \varepsilon_2(x) \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} x^{n(j-1)} \varepsilon_2(x)^{j-1} Q(x)^{k-j}$$

$$= x^n \varepsilon_2(x)\, r(x) ,$$

où $r(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} x^{n(j-1)} \varepsilon_2(x)^{j-1} Q(x)^{k-j}$

Comme r est une fonction bornée au voisinage de 0,

on a (β) $\underline{P(g(x)) - P(Q(x)) = o(x^n)}$.

Ainsi avec (1), (2), (3), on en déduit que

$$f(g(x)) = P(Q(x)) + o(x^n).$$

Il reste à remarquer que

$$P(Q(x)) = \big(P(Q(x))\big)_n + o(x^n)$$

pour en déduire le résultat. $\blacksquare$

<u>Exemple</u>: Calculer le $DL_4(0)$ de $e^{\sin x}$.

On a $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$

et $u(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

D'où

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

2.4.2 Quotient et intégration des DL

Rappelons d'abord le théorème de division suivant les puissances croissantes

Proposition 13 Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes avec $B(0) \neq 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes Q_n et R_n uniques tels que

$$(*) \quad A(X) = B(X)\, Q_n(X) + X^{n+1} R_n(X) \quad \text{et } d^\circ Q_n \leq n.$$

On appelle Q le quotient à l'ordre n de la division de A par B.

preuve: existence: On effectue une récurrence sur l'entier n.

$n=0$ on pose $Q(0) = \dfrac{A(0)}{B(0)}$ (qui existe car $B(0) \neq 0$)

Par construction $A(X) - Q(0)B(X)$ est un polynôme et comme $A(0) - Q(0)B(0) = 0$, ce polynôme admet 0 comme racine et donc il se factorise par X. Autrement dit il existe un polynôme $R_0 \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A(X) - Q(0)B(X) = X R_0(X)$$

i.e $$A(X) = Q(0)B(X) + X R_0(X),$$

ce qui prouve le cas $n=0$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour tous polynômes et tout $i \leq n$.

Montrons que si $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $B(0) \neq 0$ alors il existe deux polynômes Q_{n+1} et R_{n+1} tels que

$$A(X) = B(X)\, Q_{n+1}(X) + X^{n+2} R_{n+1}(X) \text{ et } d°Q_{n+1} \leq n+1.$$

Appliquons tout d'abord l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, il existe deux polynômes Q_n et R_n tels que

$$A(X) = B(X)\, Q_n(X) + X^{n+1} R_n(X) \quad \text{et } d°Q_n \leq n.$$

Appliquons alors le cas $n=0$ à R_n et B :

il existe une constante k et un polynôme T tels que

$$R_n(X) = k\, B(X) + X\, T(X)$$

D'où :

$$A(X) = B(X) Q_n(X) + k X^{n+1} B(X) + X^{n+2} T(X)$$

$$= (Q_n(X) + k X^{n+1}) B(X) + X^{n+2} T(X)$$

Posons $Q_{n+1}(X) = Q_n(X) + k X^{n+1}$

et $R_{n+1}(X) = T(X)$

Alors $d°Q_{n+1} \leq n+1$ et $A(X) = B(X)\, Q_{n+1}(X) + X^{n+2} R_{n+1}(X)$

On obtient donc le résultat par récurrence.

Théorème 14. Supposons que f et g admettent des $DL_n(0)$ de la forme
$$f(x) = A(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = B(x) + o(x^n),$$
où A et B sont des polynômes de degré $\leq n$.

Si $g(0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$ de la forme
$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + o(x^n),$$
où Q est le quotient à l'ordre n de la division suivant les puissances croissantes de A par B.

preuve: remarquons d'abord que comme $g(0) \neq 0$, il existe un voisinage de 0 sur lequel $\frac{f}{g}$ est bien définie.

Sur ce voisinage, écrivons
$$f(x) = A(x) + o(x^n)$$
et d'après la propriété 13, on a $A(x) = B(x)Q(x) + x^{n+1}R(x)$,

où Q et R sont deux polynômes et $d°Q \leq n$.

D'où

$$f(x) = B(x)Q(x) + x^{n+1}R(x) + o(x^n)$$

$$= B(x)Q(x) + o(x^n) \quad \text{car} \quad x^{n+1}R(x) = o(x^n)$$

Or $B(x) = g(x) - o(x^n)$.

D'où $f(x) = Q(x)g(x) + (1 - Q(x))o(x^n)$

et $$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{1 - Q(x)}{g(x)} o(x^n)$$

Remarquons que $x \longmapsto \dfrac{1 - Q(x)}{g(x)}$ est bornée sur un voisinage de 0.

Donc $$\frac{1 - Q(x)}{g(x)} o(x^n) = o(x^n).$$

D'où $$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + o(x^n).$$

Ainsi $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$ et sa partie régulière est le quotient Q à l'ordre n de la division suivant les puissances croissantes de A par B

Exemple: Calculer le $DL_5(0)$ de $\tan x$.

Ecrivons $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $\cos 0 = 1 \neq 0$

De plus
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $A(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ par $B(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

$$
\begin{array}{l|l}
x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} & 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \\ \cline{2-2}
-\left(x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24}\right) & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 \\ \cline{1-1}
\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} & \\
-\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{x^7}{72}\right) & \\ \cline{1-1}
\dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{x^7}{72} &
\end{array}
$$

D'où
$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)}$$

Théorème 15 (intégration des DL)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction dérivable au voisinage de 0.

Si f' admet un $DL_n(0)$ de la forme

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ de la forme

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o(x^{n+1})$$

preuve : Posons $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et

$$Q(x) = \int_0^x P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k .$$

On a : $Q'(x) = P(x)$ et

$$f'(x) - Q'(x) = f'(x) - P(x) = o(x^n)$$

Le lemme 9 (page 22) implique alors que.

$$f(x) - Q(x) = f(0) - \underbrace{Q(0)}_{=0} + o\left(x^{n+1}\right).$$

D'où $\quad f(x) = f(0) + Q(x) + o\left(x^{n+1}\right).$ ■

<u>Exemple:</u>

D'après la formule vue page 27 (pour $\alpha = -1$), on a:

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right).}$$

Or $\quad \log'(1+x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $\log(1+0) = \log 1 = 0$

Donc en intégrant, on obtient

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).}$$

2.5. Applications des DL.

2.5.1. Calcul de limites.

Pour calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ lorsqu'on obtient une forme indéterminée, une méthode consiste à calculer un DL de f et de g pour pouvoir comparer leur comportement en 0.

Exemple: Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin x}$.

On a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

D'où $e^x + e^{-x} - 2\cos x = 2 + x^2 - 2 + x^2 + o(x^2)$

$= 2x^2 + o(x^2)$

De +, $\sin x = x + o(x)$

d'où $x \sin x = x^2 + o(x^2)$

On a donc $\dfrac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin x} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

Ainsi $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin x} = 2$

2.5.2. Etude locale près des points critiques

On rappelle que pour une fonction réelle f dérivable, un point critique est un point x_0 tel que $f'(x_0) = 0$.

Ces points peuvent être de 3 natures différentes

* un minimum local : il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V$, $f(x) \geq f(x_0)$
* un maximum local : il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V$, $f(x) \leq f(x_0)$
* ni l'un ni l'autre ! (pensez à $x \longmapsto x^3$ en 0...)

Les développements limités peuvent être un moyen de déterminer si un point critique est un minimum local / maximum local ou ni l'un ni l'autre !

Théorème 16 Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et supposons que f admet un $DL_p(x_0)$ de la forme

$$(*) \qquad f(x) = f(x_0) + \alpha (x - x_0)^p + o((x - x_0)^p)$$

avec $\alpha \neq 0$ et $p \geq 2$.

Alors

* Si p est impair, le point x_0 n'est ni un minimum, ni un maximum.
* Si p est pair et $\alpha > 0$, alors x_0 est un minimum local strict.
* Si p est pair et $\alpha < 0$, alors x_0 est un maximum local strict.

Remarque: l'hypothèse (*) implique que x_0 est un point critique

car $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha(x-x_0)^{p-1} + o\left((x-x_0)^{p-1}\right)$$

et comme $p \geq 2$, on a :
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0,$$

ce qui prouve que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$

preuve (du thm 16)

* supposons p pair et $\alpha > 0$

Comme p est pair, $\forall x$, $(x-x_0)^p \geq 0$; et comme par définition $\lim_{x \to x_0} \frac{o((x-x_0)^p)}{(x-x_0)^p} = 0$, alors $\exists\, \delta > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow \frac{|o((x-x_0)^p)|}{(x-x_0)^p} \leq \frac{\alpha}{2}$$

En particulier, pour $0 < |x - x_0| \leq \delta$, on a

$$o\left((x-x_0)^p\right) \geqslant -\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p$$

Donc, pour $0 < |x - x_0| \leq \delta$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant f(x_0) + \alpha (x-x_0)^p - \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p \\ &\geqslant f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p \\ &> f(x_0) \end{aligned}$$

Ainsi x_0 est un minimum local strict.

* Si p est pair et $\alpha < 0$ on raisonne de la même manière

$\exists\, \delta > 0 \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta \implies \dfrac{o\left((x-x_0)^p\right)}{(x-x_0)^p} \leq -\dfrac{\alpha}{2}$

$$\implies o\left((x-x_0)^p\right) \leq -\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p$$

d'où

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x_0) + \alpha(x-x_0)^p - \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p \\ &= f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p \\ &< f(x_0) \qquad (\text{car } \alpha < 0\,!) \end{aligned}$$

Donc x_0 est un maximum local strict.

46

* Si p est impair et $\alpha > 0$ (Le cas $\alpha < 0$ se traite de façon similaire)

Comme précédemment $\exists\, \delta > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| \leq \delta \implies \left| \frac{o\left((x-x_0)^p\right)}{(x-x_0)^p} \right| \leq \frac{\alpha}{2}$$

(Notez la différence ici avec les 2 cas précédents : on doit mettre $|(x-x_0)^p|$ au dénominateur car $(x-x_0)^p$ n'est plus nécessairement positif ...)

Maintenant si $0 < x - x_0 < \delta$, alors

$$o\left((x-x_0)^p\right) \geq -\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p$$

et on en déduit que

(1) $0 < x - x_0 < \delta \implies f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p > f(x_0)$

D'autre part, si $-\delta < x - x_0 < 0$, alors

$$o\left((x-x_0)^p\right) \leq -\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p$$

et donc

(2) $-\delta < x - x_0 < 0 \implies f(x) \leq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^p < f(x_0)$

On voit donc qu'avec (1) et (2), x_0 n'est ni un maximum ni un minimum local

De façons similaire, on montre le résultat suivant.

Théorème 17 : Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et supposons que f admet un $DL_p(x_0)$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \alpha(x-x_0)^p + o((x-x_0)^p)$$

où $\alpha \neq 0$ et $p \geq 2$.

Alors, le graphe de f admet la droite

$$\Gamma : \quad y = a_0 + a_1(x-x_0)$$

comme tangente au point x_0 et

* si p est impair, le graphe de f traverse sa tangente en $(x_0, f(x_0)) = (x_0, a_0)$ (on dit que x_0 est un point d'inflexion)
* si p est pair et $\alpha > 0$, le graphe de f reste localement au dessus de Γ.
* si p est pair et $\alpha < 0$, le graphe de f reste localement en dessous de Γ.

2.5.3. Branches infinies et asymptotes

Théorème 18. Supposons que f admet un "développement limité" en $\pm\infty$ de la forme

$$(*) \quad f(x) = ax + b + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Alors la droite Γ d'équation

$$\Gamma \quad y = ax + b$$

est une asymptote de $\mathcal{C}_f$ (la courbe de f) au voisinage de $\pm\infty$. De plus, en notant a_k, $k \geq 1$, le premier terme non nul, la position de Γ par rapport à $\mathcal{C}_f$ est donnée par le signe de $\frac{a_k}{x^k}$.

preuve. D'après $(*)$, on a

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0$$

et donc Γ est bien une asymptote de $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

De plus, par définition de a_k, on a

$$f(x) = ax + b + \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right), \quad x \to \pm\infty.$$

Ainsi $$f(x) - (ax+b) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \frac{a_k}{x^k}$$

Remarquons alors que si $f \underset{x_0}{\sim} g$ $\quad (x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$

alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0

En effet, par définition, on a

$$f(x) = (1+\varepsilon(x))\,g(x),$$

où $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Donc en particulier, il existe un voisinage V de x_0

tel que $x \in V \Longrightarrow |\varepsilon(x)| \leq 1/2$

$$\Longrightarrow -1/2 \leq \varepsilon(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 + \varepsilon(x)$$

Ainsi comme $f(x) = (1+\varepsilon(x))\,g(x)$, on voit

que pour $x \in V$, $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

Ceci achève la preuve du théorème. $\blacksquare$

<u>Exemple</u> Soit $f(x) = x \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$.

Etudier les branches infinies de f en $+\infty$

Cherchons un DL de f en $+\infty$

Pour cela, on pose $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$, pour se ramener en 0.

D'où
$$g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} \arctan \frac{1}{t}$$

Or pour $t > 0$, on a $\arctan \frac{1}{t} + \arctan t = \frac{\pi}{2}$

D'où
$$g(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan t\right)$$

$$= \frac{\pi}{2t} - \frac{1}{t}\arctan(t)$$

Cherchons maintenant un DL en 0 de

$$h(t) = \arctan(t)$$

On se rappelle que h est dérivable et $h'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Or $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$

D'où $h'(t) = 1 - t^2 + t^4 + o(t^4)$

Par intégration, on obtient : 51

$$h(t) = h(0) + t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)$$

Or $h(0) = \arctan(0) = 0$.

D'où $\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)$.

Ainsi $g(t) = \frac{\pi}{2t} - \frac{1}{t}\left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)\right)$

$$= \frac{\pi}{2t} - 1 + \frac{t^2}{3} - \frac{t^4}{5} + o(t^4)$$

Si on revient à $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$, on obtient

$$f(x) = -1 + \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{5x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

On voit donc que la droite Γ : $y = -1 + \frac{\pi}{2}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

De plus, $f(x) - \left(-1 + \frac{\pi}{2}x\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^2}$

et comme $\forall x \neq 0$, $\frac{1}{3x^2} > 0$,

on voit que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de son asymptote.

2.6. Formule de Taylor avec reste intégral et formule de Taylor-Lagrange

Rappelons que si f est n fois dérivables au voisinage de x_0, alors f admet un $DL_n(x_0)$ de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$

C'est la formule de Taylor Young et le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ s'appelle le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Taylor de f au point x_0.

Sous des conditions de régularité un peu plus fortes, on peut dire plus de choses sur le reste dans la formule de Taylor Young.

Théorème (19) (Formule de Taylor Lagrange)

Si f est de classe C^n sur $[a,b]$ (i.e f est n fois dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}$ est continue sur $[a,b]$) et si f est $(n+1)$-fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

preuve : Soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - M \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où M est une constante choisie telle que

$g(a) = 0$ (ce qui est possible car $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \neq 0$)

On a aussi clairement $g(b) = 0$.

De plus, la fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle qui implique qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$

Or

$$g'(x) = -\sum_{k=0}^{n} \left(-k \frac{(b-x)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x)\right) + M \frac{(b-x)^n}{n!}$$

$$= M \frac{(b-x)^n}{n!} - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x)\right)$$

D'où

$$g'(x) = M \frac{(b-x)^n}{n!} - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$$

En particulier

$$0 = g'(c) = M \frac{(b-c)^n}{n!} - \frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c)$$

$$= \frac{(b-c)^n}{n!} \left(M - f^{(n+1)}(c)\right)$$

Comme $c \neq b$, on en déduit que nécessairement $M = f^{(n+1)}(c)$

En écrivant alors que

$$0 = g(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

on obtient finalement que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

On en déduit immédiatement une inégalité qui permet d'estimer l'erreur quand on approche f par son polynôme de Taylor

Corollaire (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Si f est de classe C^n sur $[a,b]$ et f est $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$ alors si $f^{(n+1)}$ est bornée sur $]a,b[$

on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in]a,b[} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

preuve : découle immédiatement de la formule de Taylor-Lagrange

Pour finir, on termine par une autre formule exacte pour le reste

Théorème 20 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Si f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

preuve : La démonstration se fait par récurrence sur l'entier n

Pour $n=0$: f est de classe C^1 sur $[a,b]$ et on a vu au chapitre 1 qu'alors

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt.$$

(C'est la formule fondamentale de l'analyse !).

Supposons la formule vraie au rang n.

Nous avons donc :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Effectuons une intégration par parties dans l'intégrale :

$$u(t) = f^{(n+1)}(t) \qquad u'(t) = f^{(n+2)}(t)$$

$$v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad v'(t) = \frac{(b-t)^n}{n!}$$

D'où

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = -\left[\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b$$

$$+ \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

Ainsi :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt,$$

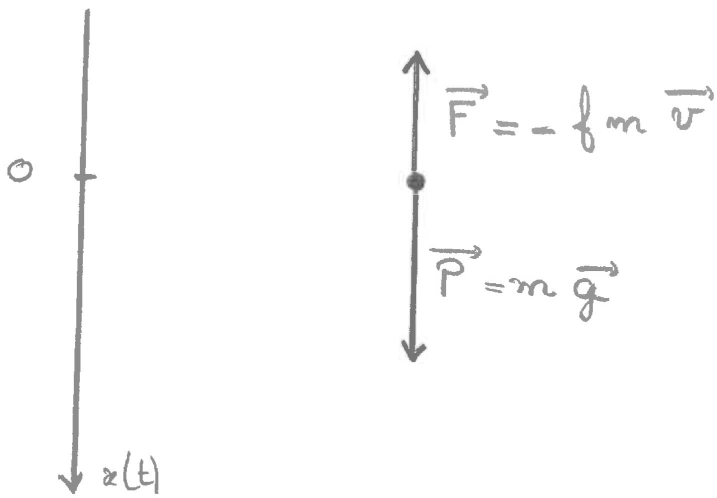
ce qui montre la formule au rang $(n+1)$.

Ainsi par récurrence la formule est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

$\blacksquare$

Chapitre 3. Equation différentielle

<u>Exemple</u>: Si on cherche à modéliser la chute d'un parachutiste de masse m, si on suppose que la force de frottement F est proportionnel à la vitesse, on a la situation suivante.



(où f est le coefficient de frottement)

(où $\vec{g}$ est la force de gravitation.

alors le principe fondamental de la mécanique assure que

$$\vec{F} + \vec{P} = m\,\vec{a} \qquad (\text{où } \vec{a} \text{ est l'accélération})$$

Ainsi $\quad -fm\,v + mg = m\,a = m\,v'(t)$

(car l'accélération est la dérivée de la vitesse)

D'où
$$\boxed{v'(t) = g - f\,v(t)}$$

Cette équation est ce qu'on appelle une équation différentielle. Nous allons apprendre dans ce chapitre à résoudre ce type d'équation.

① Définitions et généralités

Définitions ⓐ Une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme:

$$(1) \qquad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

où F est une fonction de $(n+2)$-variables.

ⓑ Une solution de (1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (1).

ⓒ Résoudre (1) ou intégrer (1) c'est chercher toutes les solutions de (1) sur le plus grand intervalle I possible.

ⓓ Une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire si elle est de la forme

$$a_0(x) y + a_1(x) y' + \dots + a_n(x) y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

e) Une équation différentielle linéaire est <u>homogène</u> (ou sans second membre) si la fonction g ci-dessus est identiquement nulle :

$$a_0(x)\, y + a_1(x) y'(x) + \dots + a_n(x)\, y^{(n)} = 0$$

f) Enfin, une équation différentielle linéaire est <u>à coefficient constants</u> si les fonction a_i ci-dessus sont constantes :

$$a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)} = g(x),$$

où les a_i sont des constante réelles et g est une fonction continue

<u>Proposition 1</u> (<u>principe de linéarité</u>)

Si y_1 et y_2 sont solutions d'une équation différentielle linéaire homogène

$$(E) \quad a_0(x) y + a_1(x) y' + \dots + a_n(x) y^{(n)} = 0$$

alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de (E).

Autrement dit, l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire <u>homogène</u> forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

<u>preuve</u> : c'est une simple vérification qui découle

du fait que si y_1 et y_2 sont n fois dérivables alors pour tout $k \in \{0,1,\dots,n\}$, on a :

$$\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)^{(k)}(x) = \lambda_1 y_1^{(k)}(x) + \lambda_2 y_2^{(k)}(x).$$

Proposition 2 (principe de superposition)

Soit

$$(E) \quad a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = g(x),$$

une équation différentielle linéaire

et

$$(E_h) \quad a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0$$

l'équation différentielle linéaire homogène associée.

Alors l'ensemble des solutions de (E) est formé des fonctions $y(x) = y_0(x) + y_h(x)$,

où y_0 est une solution (particulière) de (E) et y_h parcourt l'ensemble des solutions de (E_h)

preuve : Soit y_0 une solution de (E).

Alors y est une solution de $(E) \iff a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$

et comme y_0 est une solution de (E), on a :

$$a_0(x)y_0 + a_1(x)y_0' + \dots + a_n(x)y_0^{(n)} = g(x).$$

D'où

y solution de $(E) \iff a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = a_0(x)y_0 + \cdots + a_n(x)y_0^{(n)}$

$\iff a_0(x)(y-y_0) + a_1(x)(y-y_0)' + \cdots + a_n(x)(y-y_0)^{(n)} = 0$

$\iff y - y_0$ est solution de (E_h)

$\iff y = y_0 + y_h$, où y_h parcourt l'ensemble des solutions de (E_h)

$\blacksquare$

II Equation différentielle linéaire du premier ordre

Théorème 3 I un intervalle.

Soit $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et A une primitive de a

Les solutions de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + a(x)y = 0$$

sur I sont les fonctions y définies par

$$y(x) = k\, e^{-A(x)},$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

preuve Tout d'abord, on vérifie que si $y(x) = k e^{-A(x)}$ alors y est dérivable et on a :

$$y'(x) = -k A'(x) e^{-A(x)}$$

Or A est une primitive de a donc $A'(x) = a(x)$ et on obtient $y'(x) = -k a(x) e^{-A(x)}$.

D'où :

$$y'(x) + a(x) y(x) = -k a(x) e^{-A(x)} + k a(x) e^{-A(x)}$$
$$= 0$$

Ainsi y est solution de (E).

Réciproquement, supposons que y soit une solution de (E) et considérons $z(x) = e^{A(x)} y(x)$.

La fonction z est dérivable et on a :

$$z'(x) = -A'(x) e^{A(x)} y(x) + e^{A(x)} y'(x)$$

Or y solution de $(E) \Longrightarrow y'(x) = -a(x) y(x)$

et donc
$$z'(x) = -a(x) e^{A(x)} y(x) - a(x) e^{A(x)} y(x)$$
$$= 0$$

Comme I est un intervalle, la fonction z est donc constante sur I. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ z(x) = k$.

Ainsi $$y(x) = k e^{-A(x)}, \quad x \in I.$$ ■

Corollaire (4) Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I et

soit $(E) : y' + a(x) y = b(x)$

une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre.

Notons
$$(E_h) : \quad y' + a(x) y = 0$$
l'équation homogène associée et soit A une primitive de a.

Alors les solutions de (E) sont les fonctions $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :
$$y(x) = y_0(x) + k e^{-A(x)},$$
où $k \in \mathbb{R}$ et y_0 est une solution particulière de (E).

preuve : c'est une conséquence immédiate du principe de superposition et du théorème (3) ■

La question soulevée par ce corollaire est comment trouver une solution particulière de (E) ?

Il existe une méthode générale qui porte le nom de variation de la constante.

L'idée est la suivante. On résoud d'abord l'équation homogène associée

$$y' + a(x)y = 0$$

dont on sait que les solutions sont de la forme

$$y(x) = k\,e^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R},$$

où $A : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

La méthode de la variation de la constante revient à chercher la solution particulière sous la forme

$$y_0(x) = k(x)\,e^{-A(x)},$$

où $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer pour que y_0 soit solution de (E).

On y_0 solution de $(E) \iff y_0'(x) + a(x)y_0(x) = b(x)$

et comme $y_0'(x) = k'(x)e^{-A(x)} - A'(x)k(x)e^{-A(x)}$

$$= k'(x)e^{-A(x)} - a(x)k(x)e^{-A(x)}.$$

D'où

y_0 solution de $(E) \iff k'(x)e^{-A(x)} - \cancel{a(x)k(x)e^{-A(x)}} + \cancel{a(x)k(x)e^{-A(x)}} = b(x)$

$$\iff k'(x) = b(x)\,e^{A(x)}$$

$$\iff k(x) = \int b(x)\,e^{A(x)}\,dx.$$

Ainsi on voit que si $B_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (9)

est une primitive de $b(x) A(x)$, alors

$y_0(x) = B(x) e^{-A(x)}$ est une solution particulière de (E)

<u>Exemple</u> Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x^3 y' + (2 - 3x^2) y = x^3.$$

Plaçons nous sur $I_1 =]0, +\infty[$.

Sur cet intervalle, on a :

$$(E) \Leftrightarrow y' + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) y = 1$$

L'équation homogène associée est alors :

$$(E_h) : \quad y' + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) y = 0.$$

On sait que l'ensemble des solutions de (E_h) est donné

par

$$y_h(x) = k e^{-\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) dx}$$

$$= k e^{\frac{1}{x^2} + 3\ln(x)}$$

$$y_h(x) = k x^3 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

On cherche alors une solution particulière y_0 sous la forme

$$y_0(x) = k(x)\, x^3\, e^{\frac{1}{x^2}}, \quad k : I_1 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est dérivable.}$$

Or $\quad y_0'(x) = k'(x)\, x^3\, e^{\frac{1}{x^2}} + 3\, k(x)\, x^2\, e^{\frac{1}{x^2}} - 2\, k(x)\, \cancel{x^3}\, \frac{1}{\cancel{x^3}}\, e^{\frac{1}{x^2}}$

D'où

$$1 = k'(x)\, x^3\, e^{\frac{1}{x^2}} + \cancel{3\, k(x)\, x^2\, e^{\frac{1}{x^2}} - 2k(x)\, e^{\frac{1}{x^2}}}$$
$$+ \cancel{\left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) k(x)\, x^3\, e^{1/x^2}}$$

ce qui équivaut à $\quad k'(x) = \frac{1}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}$

D'où $\quad k_0(x) = +\frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{x^2}}$ est une solution

et donc $\quad y_0(x) = +\frac{1}{2}\, x^3$ est une solution particulière de (E) sur I_1

Ainsi les solutions de (E) sur $I_1 =]0, +\infty[$ sont de la forme

$$\underline{y(x) = k\, x^3\, e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{2}\, x^3, \quad k \in \mathbb{R}}$$

On peut faire la même chose sur $]-\infty, 0[$.

Peut on obtenir une solution sur $\mathbb{R}$?

Remarquons que si y est une solution sur $\mathbb{R}$

alors
$$y(x) = \begin{cases} k_1 x^3 e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{2}x^3 & , x > 0 \\ k_2 x^3 e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{2}x^3 & , x < 0 . \end{cases}$$

Remarquons que $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} 0} x^3 e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$

et $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} 0} x^3 e^{\frac{1}{x^2}} = -\infty$

donc si on veut une solution sur $\mathbb{R}$, pour que y soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut que $k_1 = k_2 = 0$.

Dans ce cas, on a : $y(x) = \frac{1}{2}x^3$ qu'on peut prolonger en 0 en posant $y(0) = 0$ et on vérifie que c'est une solution sur $\underline{\mathbb{R}}$.

Pour finir avec les équations différentielles linéaires du 1er ordre, on énonce le théorème de Cauchy Lipschitz.

Théorème 5 (Thm de Cauchy-Lipschitz)

Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues sur un intervalle ouvert I et soit (E) l'équation dif

$$(E) \qquad y' + a(x)y = b(x).$$

Alors, pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y de (E) telle que

$$y(x_0) = y_0.$$

preuve. Fixons $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ et posons

$$z(x) = e^{+\int_{x_0}^{x} a(t)dt} y(x).$$

$$\text{D'où} \quad y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} z(x).$$

$$\text{et} \quad y'(x) = -a(x) e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} z(x) + e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} z'(x).$$

$$\text{Ainsi} \begin{cases} y \text{ vérifie } (E) \\ \text{et } y(x_0) = y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} z'(x) = b(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \\ z(x_0) = y_0. \end{cases}$$

$$\iff z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s) e^{\int_{x_0}^{s} a(t)dt} ds$$

$$\iff y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s) e^{\int_{x_0}^{s} a(t)dt} ds \right]$$

III Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans cette section, on s'intéresse aux équation du type :

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = g(x),$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle ouvert I.

On notera (comme d'habitude) l'équation différentielle homogène associée

$$(E_h) \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

Pour résoudre l'équation (E), l'idée est la même que pour résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 1, on résoud d'abord l'équation homogène (E_h) associée puis on applique le principe de superposition en cherchant une solution particulière de (E) qu'on ajoute ensuite aux solutions générales de (E).

III.1. Résolution de l'équation homogène

On cherche donc à résoudre

$$(E_h) \qquad ay'' + by' + cy = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Fort de la situation à l'ordre 1, il est naturel de se demander si une fonction du type

$$y(x) = e^{rx}$$

peut être solution de (E_h) pour un certain $r \in \mathbb{C}$.

La fonction y est bien évidemment deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $y'(x) = r e^{rx}$ puis $y''(x) = r^2 e^{rx}$.

Alors

y est solution de $(E_h) \iff a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0$

$$\iff (ar^2 + br + c) e^{rx} = 0$$

comme $e^{rx} \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient que

y est solution de $(E_h) \iff ar^2 + br + c = 0$

Ainsi tout dépend de l'équation

$$(E_c) \qquad aX^2 + bX + c = 0$$

L'équation (E_c) s'appelle l'<u>équation caractéristique</u> associée à (E).

⚠ (E_c) est ici une équation polynomiale de degré 2

Suivant le discriminant de cette équation caractéristique

$\Delta = b^2 - 4ac$, on a différentes situations.

1er cas: si $\Delta > 0$. On sait alors qu'on a deux solution réelle $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

et le calcul précédent montre que

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \text{ et } y_2(x) = e^{r_2 x}$$

sont solutions de (E_h).

2ie cas si $\Delta = 0$ On sait que l'équation (E_c) possède une solution double $r_3 = \frac{-b}{2a}$

et le calcul précédent montre que

$$y_3(x) = e^{r_3 x}$$

est solution de (E_h)

Vérifions en fait que $y_4(x) = x e^{r_3 x}$ est aussi solution de (E_h)

La fonction y_4 est deux fois dérivables, et on a:

$$y_4'(x) = e^{r_3 x} + r_3 x e^{r_3 x}$$

16

puis $y_4''(x) = r_3 e^{r_3 x} + r_3 e^{r_3 x} + r_3^2 x e^{r_3 x}$

$= 2r_3 e^{r_3 x} + r_3^2 x e^{r_3 x}$

D'où $a y_4''(x) + b y_4'(x) + c y_4(x) = a\left(2r_3 + r_3^2 x\right) e^{r_3 x}$

$+ b\left(1 + r_3 x\right) e^{r_3 x} + c x e^{r_3 x}$

$= \left[2 a r_3 + a r_3^2 x + b + b r_3 x + c x\right] e^{r_3 x}$

$= \left[2 a r_3 + b + x\left(a r_3^2 + b r_3 + c\right)\right] e^{r_3 x}$

Or r_3 est solution de (E_c) donc $a r_3^2 + b r_3 + c = 0$

et comme $r_3 = -\dfrac{b}{2a}$, on a $2 a r_3 + b = 0$

D'où $a y_4''(x) + b y_4'(x) + c y_4(x) = 0$

Ainsi y_4 est bien solution de (E_h)

D'où

$$\boxed{\text{$y_3(x) = e^{r_3 x}$ et $y_4(x) = x e^{r_3 x}$ sont solutions de (E_h).}}$$

3ème cas : $\Delta < 0$

L'équation caractéristique (E_c) admet alors deux racines complexes conjuguées (car l'équation est à coefficients réels) qu'on note $\alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Le calcul précédent montre alors que $x \longmapsto e^{(\alpha+i\beta)x}$ et $x \longmapsto e^{(\alpha-i\beta)x}$ sont solutions de (E_h). Remarquons que ces solutions sont à valeurs complexes et non réelles car $\beta \neq 0$. Remarquons néanmoins que

$$\frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta x)}\right) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

et $$\frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}\right) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

et par le principe de linéarité, on en déduit que

$y_5(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $y_6(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

sont solutions de (E_h).

On a donc démontré la proposition suivante.

Proposition 6 : Soit

(E_h) $\quad ay'' + by' + cy = 0$,

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

et

$$(E_c) \qquad aX^2 + bX + c = 0$$

l'équation caractéristique associée.

(i) si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors

$$y_h(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$ est solution de (E_h)

pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, où r_1 et r_2 sont solutions de (E_c)

(ii) si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors

$$y_h(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x) e^{r x}$$ est solution de (E_h)

pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, où r est solution de (E_c)

(iii) si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors

$$y_h(x) = \lambda_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \lambda_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$ est

solution de (E_h) pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, où

$\alpha + i\beta$ est solution de (E_c)

preuve: il suffit d'appliquer ce qui précède et le principe de linéarité.

Avec les notations de la proposition, introduisons

$$(f_1(x), f_2(x)) = \begin{cases} (e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) & , \text{ si } \Delta > 0 \\ (e^{rx}, x e^{rx}) & , \text{ si } \Delta = 0 \\ (e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)) & , \text{ si } \Delta < 0 \end{cases}$$

La proposition 6 affirme que si $\mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions de (E_h), alors

$$\operatorname{Vect}\{f_1, f_2\} \subset \mathcal{S}.$$

Nous allons montrer qu'on a en fait égalité et que $\{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathcal{S}$.

Pour cela, nous allons utiliser le lemme suivant d'algèbre linéaire :

Lemme 7 : Soit $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$

preuve : Si $u_1 = (0,0)$ alors $\{u_1, u_2\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ et $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \times y_2 - x_2 \times 0 = 0$

De même, si $u_2 = (0,0)$ alors $\{u_1, u_2\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ et $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

On peut donc supposer maintenant que $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ et $u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

<u>Montrons que</u> si $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$ alors $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Pour cela, il suffit de montrer que $\{u_1, u_2\}$ est libre car $\operatorname{card}\{u_1, u_2\} = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

Soient donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

Alors
$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0 & (1) \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0 \\ \lambda_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 & (2) \times x_1 - (1) \times y_1 \end{cases}$$

$$\underset{x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda_2 = 0.$$

Si on revient au système de départ, on a aussi
$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 = 0 & (1) \\ \lambda_1 y_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Comme $u_1 = (x_1, y_1) \neq (0,0)$ alors

soit $x_1 = 0$ et alors $(1) \Longrightarrow \lambda_1 = 0$

soit $y_1 = 0$ et alors $(2) \Longrightarrow \lambda_1 = 0$.

Ainsi $\{u_1, u_2\}$ est libre et donc une base de $\mathbb{R}^2$

<u>Montrons réciproquement</u> que si $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ alors $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$.

Pour cela, on va montrer la contraposée à savoir que si $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ alors $\{u_1, u_2\}$ n'est pas libre.

Distinguons deux cas : $x_1 = 0$ et $x_1 \neq 0$.

Si $x_1 = 0$ alors $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Longrightarrow x_2 y_1 = 0$

Comme $u_1 = (x_1, y_1) \neq (0,0)$ alors $x_2 = 0$

D'où $u_1 = (0, y_1)$ et $u_2 = (0, y_2)$

et $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$. Ainsi on peut écrire

$$u_1 = \frac{y_1}{y_2} u_2 .$$

et donc $\{u_1, u_2\}$ est lié

Si $x_1 \neq 0$ alors $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Longrightarrow y_2 = \dfrac{y_1 x_2}{x_1}$

et on peut écrire

$$u_2 = \frac{x_2}{x_1} u_1$$ et donc $\{u_1, u_2\}$ est lié.

Notation - définition

Si $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} := x_1 y_2 - x_2 y_1$$

De plus, avec les notation de la proposition ⑥,

on définit le wronskien de (E_h), noté $w(x)$,

comme

$$w(x) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

On a alors

Corollaire ⑧ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w(x) \neq 0$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les vecteurs $(f_1(x), f_1'(x))$ et $(f_2(x), f_2'(x))$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

preuve : 1er cas $\Delta > 0$ Alors

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0$$

car $r_1 \neq r_2$ (les 2 solution de (E_c) sont distinctes car $\Delta > 0$)

2ième cas : $\Delta = 0$ Alors

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & x e^{rx} \\ r e^{rx} & (1+rx) e^{rx} \end{vmatrix} = (1 + rx - rx) e^{2rx}$$

$$= e^{2rx} > 0$$

3ième cas $\Delta < 0$ Alors

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ (\alpha \cos(\beta x) - \beta \sin(\beta x)) e^{\alpha x} & (\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)) e^{\alpha x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x} \left[\cancel{\alpha \cos(\beta x) \sin(\beta x)} + \beta \cos^2(\beta x) - \cancel{\alpha \cos(\beta x) \sin(\beta x)} + \beta \sin^2(\beta x) \right]$$

$$= \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \quad \text{car } \beta \neq 0$$

Dans les trois cas, le wronskien est non nul et le lemme 7 permet de conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $u_1 = (f_1(x), f_1'(x))$, $u_2 = (f_2(x), f_2'(x))$, alors $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 9 : Soient

(E_h) $\quad a y'' + b y' + c y = 0$, $\quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

et (E_c) $\quad a X^2 + b X + c = 0$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E_R). 24

(i) si $\Delta > 0$ et si r_1 et r_2 sont les 2 solutions de (E_C), alors

$$\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \ , \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(ii) si $\Delta = 0$ et si r est la solution (double) de (E_C)

alors

$$\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x) e^{rx} \ , \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(iii) si $\Delta < 0$ et si $\alpha + i\beta$ est une solution de (E_C)

alors

$$\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto \left(\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x} \ , \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

De plus, dans les 3 cas, $\dim(\mathcal{S}) = 2$.

preuve En utilisant les notations page 19, juste après la proposition 6, il s'agit de montrer que

$$\mathcal{S} = \operatorname{Vect}\{f_2, f_2\}$$

et que $\{f_1, f_2\}$ est libre.

D'après la proposition 6, on sait déjà que

$$\operatorname{Vect}\{f_1, f_2\} \subset \mathcal{S}$$

Montrons l'inclusion réciproque : $\mathcal{S} \subset \mathrm{Vect}\{f_1, f_2\}$.

Soit y une solution de (E_h) ; autrement dit

y est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0$$

D'après le corollaire ⑧, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe

$\lambda_1(x) \in \mathbb{R}$, $\lambda_2(x) \in \mathbb{R}$ tels que

$$(*) \quad \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \lambda_1(x) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_1'(x) \end{pmatrix} + \lambda_2(x) \begin{pmatrix} f_2(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix}$$

i.e
$$\begin{cases} \lambda_1(x)\, f_1(x) + \lambda_2(x)\, f_2(x) = y(x) & (1) \\ \lambda_1(x)\, f_1'(x) + \lambda_2(x)\, f_2'(x) = y'(x) & (2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1(x)\big(f_1(x) f_2'(x) - f_1'(x) f_2(x)\big) = y(x) f_2'(x) - y'(x) f_2(x) & (1) \times f_2'(x) - (2) \times f_2(x) \\ \lambda_2(x)\big(f_2(x) f_1'(x) - f_2'(x) f_1(x)\big) = y(x) f_1'(x) - y'(x) f_1(x) & (1) \times f_1'(x) - (2) \times f_1(x) \end{cases}$$

Or $w(x) = f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x) \neq 0$

D'où
$$\begin{cases} \lambda_1(x) = \dfrac{1}{w(x)} \big(y(x) f_2'(x) - y'(x) f_2(x) \big) \\ \lambda_2(x) = \dfrac{1}{w(x)} \big(y'(x) f_1(x) - y(x) f_1'(x) \big) \end{cases}$$

Montrons que λ_1 et λ_2 sont constants.

D'après $(*)$, on a $y(x) = \lambda_1(x) f_1(x) + \lambda_2(x) f_2(x)$

d'où $$y'(x) = \lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_1(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) + \lambda_2(x) f_2'(x)$$

et toujours d'après $(*)$, on a $y'(x) = \lambda_1(x) f_1'(x) + \lambda_2(x) f_2'(x)$

Ainsi, on en déduit que

$$\lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) + \cancel{\lambda_1(x) f_1'(x)} + \cancel{\lambda_2(x) f_2'(x)} = \cancel{\lambda_1(x) f_1'(x)} + \cancel{\lambda_2(x) f_2'(x)}$$

soit $$\underline{\lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) = 0} \qquad (**)$$

Remarquons que

$$y(x) = \lambda_1(x) f_1(x) + \lambda_2(x) f_2(x)$$
$$y'(x) = \lambda_1(x) f_1'(x) + \lambda_2(x) f_2'(x)$$

et donc $$y''(x) = \lambda_1(x) f_1''(x) + \lambda_2(x) f_2''(x) + \lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x)$$

Comme y est solution, on a :

$$0 = a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = \lambda_1(x)\left(a f_1''(x) + b f_1'(x) + c f_1(x)\right)$$
$$+ \lambda_2(x)\left(a f_2''(x) + b f_2'(x) + c f_2(x)\right)$$
$$+ a\left(\lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x)\right)$$

Comme f_1 et f_2 sont aussi solution de (E_h), on a :

$$0 = a f_1''(x) + b f_1'(x) + c f_1(x) = a f_2''(x) + b f_2'(x) + c f_1(x).$$

D'où

$$0 = a\left(\lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x)\right)$$

Or $a \neq 0$, ce qui implique que

$$\underline{\lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x) = 0} \qquad (***)$$

En réécrivant $(**)$ et $(***)$, on a le système suivant

$$\begin{cases} \lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) = 0 & (1) \\ \lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ce système se réécrit comme :

$$\lambda_1'(x) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_1'(x) \end{pmatrix} + \lambda_2'(x) \begin{pmatrix} f_2(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mais d'après le corollaire 8, on en déduit que

$$\lambda_1'(x) = \lambda_2'(x) = 0 \quad , \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Donc λ_1 et λ_2 sont constants : $\lambda_1(x) = \lambda_1$, $x \in \mathbb{R}$
$\lambda_2(x) = \lambda_2$, $x \in \mathbb{R}$

et en reportant dans $(*)$, on en déduit que

$$y(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ce qui prouve que

$$\mathcal{S} \subset \mathrm{Vect}\{f_1, f_2\}$$

D'où $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2\}$.

<u>Il reste à mq</u> $\{f_1, f_2\}$ est libre

<u>1er cas.</u> $\Delta > 0$, $f_1(x) = e^{r_1 x}$, $f_2(x) = e^{r_2 x}$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \quad (1)$$

Si on dérive, on obtient

$$0 = \lambda_1 r_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 r_2 e^{r_2 x} \qquad (2)$$

En appliquant (1) et (2) avec $x = 0$, on en déduit

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_1 (r_1 - r_2) = 0 \end{cases}$$

Comme $r_1 \neq r_2$, on en déduit que $\lambda_1 = 0$

et donc $\lambda_2 = 0$

Ainsi $\{f_1, f_2\}$ est libre.

2ième cas $\underline{\Delta = 0}$ $\quad f_1(x) = e^{rx}$, $f_2(x) = x e^{rx}$

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$0 = \lambda_1 e^{rx} + \lambda_2 x e^{rx}$$

Avec $x = 0$, la relation donne $\lambda_1 = 0$

Ainsi $0 = \lambda_2 x e^{rx}$ et si on prend $x = 1$,

on obtient alors $0 = \lambda_2 e \Rightarrow \lambda_2 = 0$

Ainsi $\{f_1, f_2\}$ est libre.

3ième cas $\underline{\Delta < 0}$ $\quad \begin{cases} f_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ f_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{cases}$, $\beta \neq 0$

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$0 = \lambda_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \lambda_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Effectuons $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2\beta}$. On obtient alors

$$0 = \lambda_1 \quad \text{et} \quad 0 = \lambda_2 e^{\alpha \frac{\pi}{2\beta}}$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Ainsi $\{f_1, f_2\}$ est libre

Dans les trois cas, $\{f_1, f_2\}$ est libre et donc constitue une base de $\mathcal{S}$.

Donc $\dim(\mathcal{S}) = \text{card}\{f_1, f_2\} = 2$.

III 2. Recherche d'une solution particulière

III 2 1. Cas où le second membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$:

Dans certains cas, on peut prévoir à l'avance la forme d'une solution.

Théorème (10) : Soient

$$(E) : \quad a y'' + b y' + c y = P(x) e^{sx},$$

où $a \neq 0$, $P \in \mathbb{R}_d[X]$ - l'espace des polynômes de degré $\leq d$ et $s \in \mathbb{R}$.

Alors l'équation (E) admet une solution de la forme $Q(x) e^{sx}$, avec

(i) $Q \in \mathbb{R}_d[X]$ si s n'est pas racine de l'équation caractéristique (E_c)

(ii) $Q \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$ si s est racine simple de (E_c)

(iii) $Q \in \mathbb{R}_{d+2}[X]$ si s est racine double de (E_c)

preuve : Posons $y(x) = Q(x)e^{sx}$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$

Alors y est deux fois dérivables et

$$y'(x) = Q'(x)e^{sx} + sQ(x)e^{sx}$$

$$y''(x) = Q''(x)e^{sx} + 2sQ'(x) + s^2Q(x)e^{sx}$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si

$$P(x)e^{sx} = \left[aQ''(x) + (2as+b)Q'(x) + (as^2+bs+c)Q(x)\right]e^{sx}$$

ce qui est équivalent à

$$(*) \quad P(x) = aQ''(x) + (2as+b)Q'(x) + (as^2+bs+c)Q(x).$$

Nous devons donc montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie $(*)$.

Pour cela, nous distinguons trois cas.

1^er^ cas : <u>s n'est pas racine de (E_c), i.e $as^2+bs+c \neq 0$</u>

Introduisons l'application

$$\varphi \quad \mathbb{R}_d[X] \longrightarrow \mathbb{R}_d[X]$$
$$Q \longmapsto aQ'' + (2as+b)Q' + (as^2+bs+c)Q$$

Il est clair que φ est linéaire

De plus, si $Q(X) = a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_1X + a_0$

Alors

$$Q \in \ker \varphi \iff \varphi(Q) = 0$$

$$\iff (as^2+bs+c)Q(X) + (2as+b)Q'(X) + aQ''(X) = 0$$

$$\iff (as^2+bs+c)\sum_{k=0}^{d} a_k X^k + (2as+b)\sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1} + a\sum_{k=2}^{d} k(k-1)a_k X^{k-2} = 0$$

$$\iff (as^2+bs+c)\sum_{k=0}^{d} a_k X^k + (2as+b)\sum_{k=0}^{d-1} (k+1)a_{k+1} X^{k} + a\sum_{k=0}^{d-2} (k+2)(k+1)a_{k+2} X^{k} = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{d-2}\left[a(k+1)(k+2)a_{k+2} + (2as+b)(k+1)a_{k+1} + (as^2+bs+c)a_k\right]X^k + \left[(2as+b)\,d\,a_d + (as^2+bs+c)a_{d-1}\right]X^{d-1} + (as^2+bs+c)a_d X^d = 0.$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} (as^2+bs+c)\,a_d = 0 \\ (2as+b)\,d\,a_d + (as^2+bs+c)a_{d-1} = 0 \\ (as^2+bs+c)a_k + (2as+b)(k+1)a_{k+1} + a(k+1)(k+2)a_{k+2} = 0, \quad 0 \leq k \leq d-2 \end{cases}$$

Par récurrence, on en déduit que

$$a_k = 0, \quad 0 \leq k \leq d.$$

D'où $\ker \varphi = \{0\}$

Ainsi φ est injective mais comme φ $\mathbb{R}_d[X] \longrightarrow \mathbb{R}_d[X]$

on en déduit que φ est bijective.

En particulier, $\forall P \in \mathbb{R}_d[X]$, $\exists Q \in \mathbb{R}_d[X]$

tel que $\quad P(X) = aQ''(X) + (2as+b)Q'(X) + (as^2+bs+c)Q(X)$

2ème cas : <u>s est racine simple de (E_c), ainsi</u>

<u>$as^2+bs+c = 0$ mais $2as+b \neq 0$</u>

On considère cette fois l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_{d+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_d[X]$$
$$Q(X) \longmapsto (2as+b)Q'(X) + aQ''(X).$$

L'application φ est linéaire et on vérifie

que $\ker \varphi = \{ Q(X) : Q \text{ polynôme constant} \}$.

En particulier, $\dim(\ker \varphi) = 1$.

Le théorème du rang affirme alors que

$$\dim(\mathbb{R}_{d+1}[X]) = \dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi)$$

Ainsi $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = d+2-1 = d+1$

Or $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbb{R}_d[X]$ et $\dim(\mathbb{R}_d[X]) = d+1$

Ainsi $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}_d[X]$.

Autrement dit, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$

il existe $Q \in \mathbb{R}_{d+2}[X]$ tel que

$$P = \varphi(Q)$$

i.e $$a\,Q''(X) + (2as+b)\,Q'(X) = P(X).$$

3ᵉ cas : s est racine double de (E_c), i.e $as^2+bs+c = 2as+b = 0$

Dans ce cas, il est clair qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_{d+2}[X]$

tel que $$a\,Q''(X) = P(X).$$ ∎

III. 2. 2 Cas où le second membre est de la forme $e^{\alpha x}[P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)]$

Théorème 11 : Soient

(E) $ay''+by'+cy = e^{\delta x}[P_1(x)\cos(\gamma x) + P_2(x)\sin(\gamma x)]$

où $a, b, c, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$

L'équation (E) admet une solution de la

forme $y(x) = e^{\delta x} x^m [Q_1(x)\cos(\gamma x) + Q_2(x)\sin(\gamma x)]$

où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $n = \sup(\deg P_1, \deg P_2)$

et $m = 0$ si $s + i\gamma$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique (E_c) et $m = 1$ si $s + i\gamma$ est racine de (E_c).

preuve : admise.

III.2.3. Méthode de la variation des constantes.

On reprend les notations de III.1. En particulier on considère les deux fonctions f_1, f_2 qui forment une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_h) associée (voir page 19 et théorème 9).

On va chercher une solution de l'équation (E) sous la forme

$$y(x) = \lambda_1(x) f_1(x) + \lambda_2(x) f_2(x),$$

où λ_1, λ_2 sont des fonctions 2 fois dérivables.

Alors $y'(x) = \lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) + \lambda_1(x) f_1'(x) + \lambda_2(x) f_2'(x)$

Pour simplifier les calculs, on va supposer en plus que λ_1 et λ_2 vérifient

$$(*)\quad \underline{\lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}}$$

D'où
$$y'(x) = \lambda_1(x) f_1'(x) + \lambda_2(x) f_2'(x).$$

On obtient alors en redérivant :

$$y''(x) = \lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x) + \lambda_1(x) f_1''(x) + \lambda_2(x) f_2''(x).$$

D'où

$$\begin{aligned} a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = {} & \lambda_1(x)\left[a f_1''(x) + b f_1'(x) + c f_1(x)\right] \\ & + \lambda_2(x)\left[a f_2''(x) + b f_2'(x) + c f_2(x)\right] \\ & + a\left(\lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x)\right) \end{aligned}$$

Comme f_1 et f_2 sont solution de (E_h), on a

$$a f_i''(x) + b f_i'(x) + c f_i(x) = 0 \quad , i = 1, 2,$$

ce qui donne :

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = a\left(\lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x)\right)$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) = 0 \\ \text{et} \\ a\left(\lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x)\right) = g(x), \end{cases}$$

où g est le second membre de (E).

Le système se réécrit sous la forme

$$\lambda_1'(x) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_1'(x) \end{pmatrix} + \lambda_2'(x) \begin{pmatrix} f_2(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} g(x) \end{pmatrix}$$

D'après le corollaire 8, on sait qu'il existe un unique couple $(\gamma_1(x), \gamma_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\gamma_1(x) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_1'(x) \end{pmatrix} + \gamma_2(x) \begin{pmatrix} f_2(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} g(x) \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de chercher une primitive de γ_1 et γ_2.

$$\lambda_1(x) = \int \gamma_1(x)\,dx \quad \text{et} \quad \lambda_2(x) = \int \gamma_2(x)\,dx$$

Chapitre 4. Courbes paramétrées

4.1. Définitions générales.

Dans toute la suite, le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et tout point du plan sera représenté par ses coordonnées (x, y) dans ce repère.

Définition : Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto f(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$

Le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ décrit une courbe Γ du plan appelée courbe paramétrée (de paramètre t).

L'application f est un paramétrage de Γ et le système d'équations

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

définit une paramétrisation de Γ.

Remarque : Une même courbe peut avoir plusieurs paramétrages ou paramétrisations.

Ainsi le cercle de centre O et de rayon 1 peut être paramétrée par

$$\cdot\ f_1(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

ou

$$\cdot\ f_2(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1]$$

Plan d'étude d'une courbe paramétrée

$$\Gamma = \{ f(t) = (x(t), y(t)), \ t \in I \}$$

L'étude comprend six étapes.

① Domaine de définition de f

$$D = \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y \quad , \text{ où } f(t) = (x(t), y(t)).$$

② Recherche de périodes et symétries :

(i) S'il existe $T > 0$ tel que

$$\forall t \in D, \quad t + T \in D \text{ et}$$

on a : $\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$

alors on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur T, et obtenir toute la courbe Γ

(ii) si $t \in D \Rightarrow -t \in D$ et si on a une des propriétés suivantes

(a) $\forall\, t \in D, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$

alors la courbe Γ est parcourue 2 fois et on peut restreindre l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$

(b) $\forall\, t \in D, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$,

alors on restreint l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$ et on complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

(c) $\forall\, t \in D, \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$,

alors on restreint l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$ et on complète par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

(d) $\forall\, t \in D, \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$,

alors on restreint l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$ et on complète par symétrie par rapport à l'origine

3 Etude des branches infinies

Définition. La courbe paramétrée Γ présente une branche infinie si au moins une des coordonnées $x(t), y(t)$ tend

vers l'infini quand t tend vers une valeur finie t_0 ④
ou l'infini

On étudie, s'il y en a, les branches infinies (voir section 4.2)
(asymptotes verticales, horizontales, obliques,...)

④ Dérivées et tableau de variation

On étudie les variations de x et y en étudiant les signes de x' et y' et on représente leurs variations dans un seul tableau.

⑤ Etude de points particuliers

Définition ① On dit que $M \in \Gamma$ de coordonnés $(x(t_0), y(t_0))$ est un point stationnaire (ou singulier) si

$$x'(t_0) = y'(t_0) = 0$$

② On dit que $M \in \Gamma$ est un point double s'il existe $t_1, t_2 \in D$, $t_1 \neq t_2$ tels que

$$M = (x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2)).$$

* On étudie les points stationnaires (et leur nature), voir section 4.3.

* On cherche éventuellement les points doubles ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$$

* On cherche éventuellement les points d'intersection avec les axes, ce qui revient à résoudre

$x(t) = 0$ et $y(t) = 0$.

6 <u>Représentation graphique</u>

La dernière étape consiste à dessiner la courbe Γ en utilisant les renseignements des étapes précédentes.

<u>Remarque</u>. Dans le tracé, le paramètre t n'apparaît pas c'est $x(t)$ et $y(t)$ qui se lisent sur la courbe. Le paramètre t s'interprète comme le temps et le point $M(t)$ désigne la position d'un mobile à l'instant t. La courbe Γ est alors la courbe décrite par le mobile au cours du temps.

Quand t augmente, le tracé évolue comme suit

* si $x \nearrow$ et $y \nearrow$, on se déplace vers la droite et vers le haut.

* si $x \nearrow$ et $y \searrow$, on se déplace vers la droite et vers le haut.

* si $x \searrow$ et $y \nearrow$, on se déplace vers la gauche et vers le haut.

* si $x \searrow$ et $y \searrow$, on se déplace vers la gauche et vers le bas.

4.2. Etude des branches infinies.

Détermination pratique des branches infinies

1. si $\lim_{t \to t_0} x(t) = a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = \pm \infty$ alors Γ admet la droite d'équation $x = a$ comme asymptote verticale.

   Si $x(t) - a$ est positif, la courbe est à droite de l'asymptote, si $x(t) - a$ est négatif, la courbe est à gauche de l'asymptote.

2. Si $\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm \infty$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = a \in \mathbb{R}$, alors Γ admet la droite d'équation $y = a$ comme asymptote horizontale. Si $y(t) - a$ est

positif. Γ est au dessus de son asymptote et si $y(t)-a$ est négatif, elle est en dessous.

3 Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$,

alors on étudie $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$

(a) si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, alors Γ admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses

(b) si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, alors Γ admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

(c) si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

alors on étudie $\lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - ax(t))$

(ci) si $\lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - ax(t)) = \pm\infty$, alors Γ admet une branche parabolique dans la direction la droite d'équation $y = ax$.

(cii) si $\lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - ax(t)) = b \in \mathbb{R}$ alors Γ admet la droite Δ d'équation

$$y = ax+b$$

comme asymptote oblique. La position de Γ par rapport à Δ est donnée par le signe de $y(t) - ax(t) - b$. Si $y(t) - ax(t) - b$ est positif, alors la courbe Γ est au dessus de son asymptote et si $y(t) - ax(t) - b$ est négatif, elle est en dessous.

4.3 Etude des points stationnaires.

Supposons que x et y soient n fois dérivables au voisinage d'un point t_0.

Alors pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on note

$$\overrightarrow{f^{(k)}}(t_0) = \left(x^{(k)}(t_0), y^{(k)}(t_0)\right).$$

si $\overrightarrow{f'}(t_0) \neq (0,0)$, le point $M(t_0) : (x(t_0), y(t_0))$ est appelé un point ordinaire et la droite Δ passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{f'}(t_0)$ est appelée la tangente à Γ en $M(t_0)$

Une représentation paramétrique de Γ est donc

$$\Delta : \begin{cases} x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t-t_0) \\ y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t-t_0). \end{cases}$$

Rappelons que

si $\overrightarrow{f'}(t_0) = (0,0)$ alors on dit que le point $M(t_0)$ $(x(t_0), y(t_0))$ est un point stationnaire de Γ.

Comment déterminer la tangente en un point stationnaire ?

Soit $p = \min\{ \ell \in \mathbb{N}^* \quad \overrightarrow{f^{(\ell)}}(t_0) \neq (0,0) \}$

Alors la tangente à Γ en $M(t_0)$ est la droite Δ passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) = (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$.

Notons $q = \min\{ \ell \in \mathbb{N}^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{f^{(\ell)}}(t_0) \neq \lambda \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) \}$

Remarquons que $q > p+1$ car

- si $q < p$, on a $\overrightarrow{f^{(\ell)}}(t_0) = (0,0)$ par définition de p et donc $\overrightarrow{f^{(\ell)}}(t_0) = 0\ \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$
- et si $q = p$, $\overrightarrow{f^{(\ell)}}(t_0) = \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$

Autrement dit, q est le premier entier strictement supérieur à p tel que les vecteurs $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ et $\overrightarrow{f^{(q)}}(t_0)$ ne soient pas colinéaires.

Ecrivons la formule de Taylor Young à l'ordre q (10)

pour x et y et on obtient

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{k=p}^{q} \overrightarrow{f^{(k)}}(t_0) \frac{(t-t_0)^k}{k!} + o((t-t_0)^q)$$

Or par définition de q, pour $p+1 \leq k \leq q-1$,
il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{f^{(k)}}(t_0) = \lambda_k \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$

D'où

$$f(t) = f(t_0) + \left[\frac{(t-t_0)^p}{p!} + \lambda_{p+1} \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!} + \dots + \lambda_{q-1} \frac{(t-t_0)^{q-1}}{(q-1)!} \right] \cdot \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) + \overrightarrow{f^{(q)}}(t_0) \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o((t-t_0)^q)$$

Si $x_1(t)$ et $y_1(t)$ désigne les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ dans la base $\left(\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{f^{(q)}}(t_0)\right)$

on a :

$$x_1(t) \underset{t \to t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!}$$

$$y_1(t) \underset{t \to t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^q}{q!}$$

Selon la parité de p et q, on en déduit les résultats suivants :

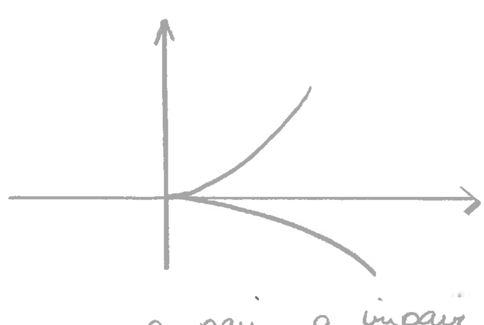
① Si p est pair et q impair, au voisinage de t_0, $x_1(t) \geq 0$ et $y_1(t)$ a le signe de $t - t_0$ ainsi Γ traverse sa tangente en $M(t_0)$. On dit qu'on a <u>un rebroussement de 1ère espèce</u>.

② Si p est pair et q pair, au voisinage de t_0, $x_1(t) \geq 0$ et $y_1(t) \geq 0$: Γ ne traverse pas la tangente en $M(t_0)$. On parle de point de <u>rebroussement de 2ième espèce</u>.

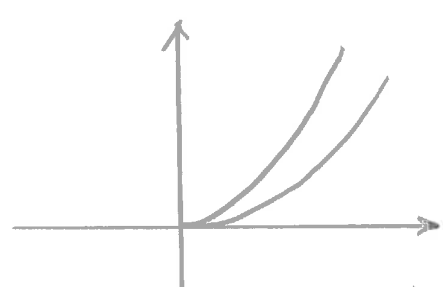
③ Si p est impair et q pair, au voisinage de t_0, $x_1(t)$ change de signe et $y_1(t) \geq 0$, alors Γ touche sa tangente en $M(t_0)$ et on parle de <u>"méplat"</u>

④ Si p est impair et q est impair, au voisinage de t_0, $x_1(t)$ et $y_1(t)$ changent de signe : Γ traverse sa tangente en $M(t_0)$ et on parle de <u>point d'inflexion</u>

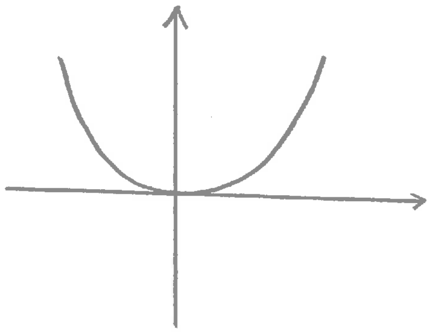
Géométriquement, on a une des 4 situations suivantes.



p pair, q impair
(point de rebroussement de 1ère espèce)

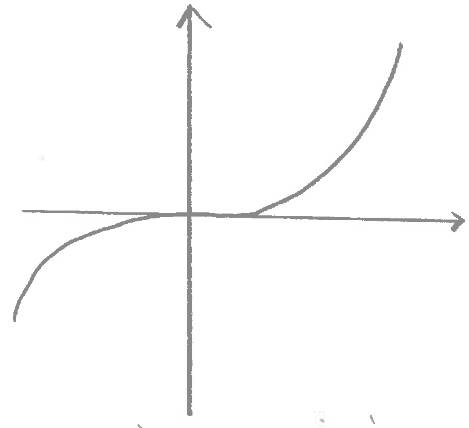


p pair, q pair
(point de rebroussement de 2ième espèce)



p impair, q pair

(point méplat)



p impair, q impair

(point d'inflexion)

Exemple: Etudier et tracer la courbe

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

① Le domaine de définition de $f(t) = (x(t), y(t))$ est

$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

② Pas de période, ni de symétrie.

③ Etude des branches infinies

(a) On a $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t) = +\infty$

On doit étudier $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{2}{t}} = \dfrac{\cancel{t^2}\left(1 + \frac{1}{t^4}\right)}{\cancel{t^2}\left(1 + \frac{2}{t^3}\right)}$

$$\xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 1$$

On étudie alors $y(t) - x(t) = \cancel{t^2} + \frac{1}{t^2} - \cancel{t^2} - \frac{2}{t}$

D'où $\lim_{t \to \pm\infty} y(t) - x(t) = 0$

Ainsi la droite Δ, d'équation $y = x$, est asymptote à la courbe quand $t \longrightarrow \pm\infty$.

De plus, $y(t) - x(t) = -\frac{2}{t}\left(1 - \frac{1}{2t}\right)$

D'où $y(t) - x(t) \underset{t \to \pm\infty}{\sim} -\frac{2}{t}$

Ainsi au voisinage de $+\infty$, $y(t) - x(t) < 0$ et donc la courbe Γ est en dessous de Δ,

et au voisinage de $-\infty$, $y(t) - x(t) > 0$ et donc la courbe Γ est au dessus de Δ.

(b) Etude au voisinage de 0

On a $\lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} x(t) = +\infty$ et $\lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} x(t) = -\infty$

et $\lim_{t \to 0} y(t) = +\infty$.

On étudie alors

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{2}{t}} = \frac{\frac{1}{t^2}\left(1 + t^4\right)}{\frac{2}{t}\left(1 + \frac{t^3}{2}\right)}$$

d'où $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{2}{t}} = \frac{1}{2t}$

On a $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ <}} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -\infty$

Ainsi Γ admet au voisinage de 0 une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées

2) Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

On a $x'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^2}$

$$= 2 \cdot \frac{t^3 - 1}{t^2}$$

$$= \frac{2(t-1)(t^2+t+1)}{t^2}$$

d'où $x'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant 1$.

De plus, $y'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^3}$

$$= 2 \frac{t^4 - 1}{t^3}$$

$$= \frac{2(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^3}$$

Ainsi $\operatorname{sgn}(y'(t)) = \operatorname{sgn}(t(t-1)(t+1))$

D'où

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
t		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$t-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$t+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$y'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

(5) On voit qu'il y a un seul point critique.

$$M(1) = (3, 2).$$

Pour déterminer quel type de point on a, on peut faire un DL de $x(t)$ et $y(t)$ en $t=1$.

Pour cela, on pose $u = t-1$, i.e $t = 1+u$

et on a $x(t) = t^2 + \frac{2}{t} = (1+u)^2 + \frac{2}{1+u}$

$$= 1 + u^2 + 2u + 2\left[1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)\right]$$

$$= 3 + 3u^2 - 2u^3 + o(u^3)$$

D'où $\underline{x(t) = 3 + 3(t-1)^2 - 2(t-1)^3 + o((t-1)^3)}$

16

De m̂, $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$

$$= (1+u)^2 + \frac{1}{(1+u)^2}$$

$$= 1 + 2u + u^2 + \left(1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)\right)^2$$

$$= 1 + \cancel{2u} + u^2 + 1 + u^2 - \cancel{2u} + 2u^2 - 2u^3 + o(u^3)$$

$$= 2 + 4u^2 - 2u^3 + o(u^3)$$

D'où $\underline{y(t) = 2 + 4(t-1)^2 - 2(t-1)^3 + o((t-1)^3)}$

On voit donc que

$$\frac{\overrightarrow{f^{(2)}}(1)}{2!} = (3,4)$$

i.e $\overrightarrow{f^{(2)}}(1) = (6,8)$

Ainsi $\underline{p = 2 \text{ est pair.}}$

De plus $\frac{\overrightarrow{f^{(3)}}(1)}{6} = (-2,-2)$

D'où $\overrightarrow{f^{(3)}}(1) = (-12,-12)$

On voit que $\overrightarrow{f^{(3)}}(1)$ et $\overrightarrow{f^{(2)}}(1)$ ne sont pas colinéaires donc $q = 3$ est impair.

(17)

Selon notre classification, le point $M(1) = (3, 2)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce.

Point double ?

On cherche $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^*$, $t_1 \neq t_2$ tels que $f(t_1) = f(t_2)$,

c'est à dire qui vérifie :

$$(S) \quad \begin{cases} t_1^2 + \dfrac{2}{t_1} = t_2^2 + \dfrac{2}{t_2} \\ t_1^2 + \dfrac{1}{t_1^2} = t_2^2 + \dfrac{1}{t_2^2} \end{cases}$$

D'où

$$(S) \iff \begin{cases} t_1^2 - t_2^2 = 2\left(\dfrac{1}{t_2} - \dfrac{1}{t_1}\right) \\ t_1^2 - t_2^2 = \dfrac{1}{t_2^2} - \dfrac{1}{t_1^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{(t_1 - t_2)}(t_1 + t_2) = 2\dfrac{\cancel{(t_1 - t_2)}}{t_1 t_2} \\ t_1^2 - t_2^2 = \dfrac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 t_2^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t_1 + t_2 = \dfrac{2}{t_1 t_2} \\ \cancel{(t_1 - t_2)}(t_1 + t_2) = \dfrac{\cancel{(t_1 - t_2)}(t_1 + t_2)}{t_1^2 t_2^2} \end{cases}$$

Remarquons d'après (1) que si t_1 et t_2 existent

alors $t_1 + t_2 \neq 0$

D'où $(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = \dfrac{2}{t_1 t_2} \\ 1 = \dfrac{1}{t_1^2 t_2^2} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = \dfrac{2}{t_1 t_2} \\ t_1 t_2 = \pm 1 \end{cases}$

si $t_1 t_2 = 1$ alors $t_1 + t_2 = 2$

Alors t_1 et t_2 sont racines de

$0 = (X - t_1)(X - t_2) = X^2 - (t_1 + t_2)X + t_1 t_2$

i.e $0 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$

D'où $t_1 = t_2 = 1$ absurde.

Donc $t_1 t_2 = -1$ et $t_1 + t_2 = -2$

D'où t_1 et t_2 sont solution de

$0 = X^2 + 2X - 1$

$\Delta = 4 - 4(-1) = 8$

$t_1 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$

et $t_2 = -1 - \sqrt{2}$

On obtient donc que

$$M(t_1) = (x(t_1), y(t_1)) \text{ est un point double}$$

Or $x(t_1) = (-1+\sqrt{2})^2 + \dfrac{2}{-1+\sqrt{2}}$

$$= 1 + 2 - 2\sqrt{2} + \frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= 3 - 2\sqrt{2} + \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2-1}$$

$$= 5$$

et

$$y(t_1) = (-1+\sqrt{2})^2 + \frac{1}{(-1+\sqrt{2})^2} = 3 - 2\sqrt{2} + \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$$

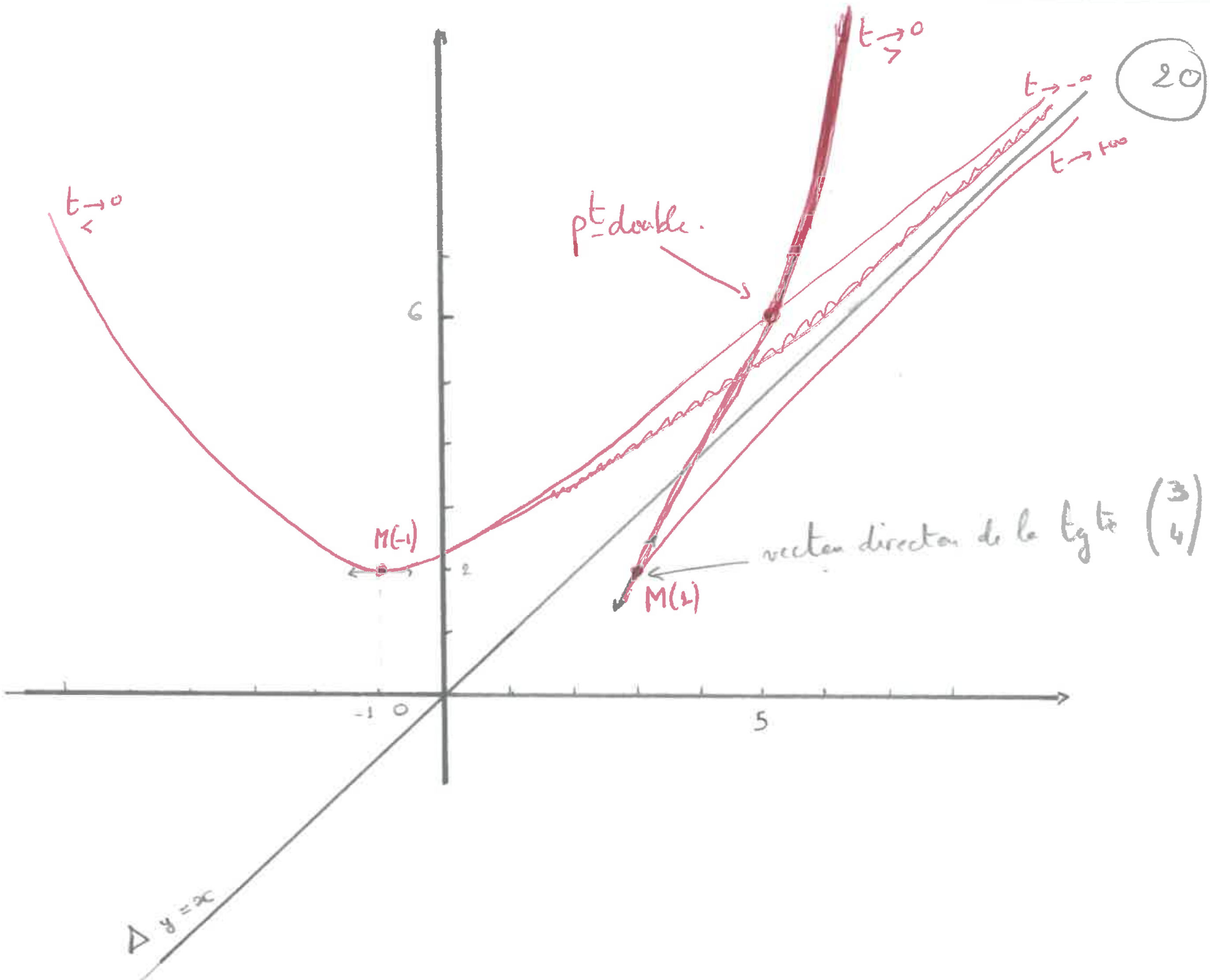
$$= 3 - 2\sqrt{2} + \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$$

$$= 3 - 2\sqrt{2} + \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8}$$

$$= 6$$

D'où $\underline{M(t_1) = (5, 6) \text{ est un point double}}$

On peut finalement tracer la courbe.



20
t → 0<
t → 0>
t → -∞
t → +∞
pt double.
6
2
M(-1)
M(1)
vecteur directeur de la tgte $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$
-1
0
5
Δ y = x