Espaces métriques.

Ouverts, fermés

Exercice 1. 1. Soient d et δ deux distances équivalentes sur E. Montrer que d et δ donnent les mêmes ouverts.

2. Soit (E,d) un espace métrique non borné et $\delta = \dfrac{d}{1+d}$. On sait que d et δ ne sont pas équivalentes (cf exo 23). Montrer néanmoins que d et δ donnent les mêmes ouverts.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $A = \{f \in E;\ f(x) > 0\ \forall x \in [0,1]\}$.

1. Montrer que A est ouvert pour $|| \ ||_\infty$.
2. Montrer que A n'est pas ouvert pour $|| \ ||_1$.
3. Soit $B = \{f \in E;\ \exists x \in [0,1],\ f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé pour $|| \ ||_\infty$.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel normé et A,B deux parties non vides de E, on pose $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que si B est un ouvert alors $A + B$ est un ouvert.

Exercice 4. Soit (X,τ) un espace topologique. Etant donnée une famille non vide $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X.

1. Comparer les ensembles $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, $\bigcup\limits_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$, $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}}$ d'une part et $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$, $\bigcap\limits_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$, $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}}$ d'autre part. Examiner en particulier le cas où I est fini.
2. Comparer les ensembles $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, $\bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$, $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}$ d'une part et $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$, $\bigcap\limits_{i\in I} \overline{A_i}$, $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}$ d'autre part. Examiner en particulier le cas où I est fini.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel normé, r un nombre réel, $r > 0$ et $a \in E$.

1. Montrer que l'intérieur de la boule fermé $\bar{B}(a,r)$ est la boule ouverte $B(a,r)$. Ce résultat est-il vrai dans tous les espaces métriques?
2. Montre que l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermé $\bar{B}(a,r)$

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé. Si C est une partie non vide de E, on dit que C est convexe si pour tout $x, y \in C$ et tout $t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in C$.

1. Montrer que les boules de E sont convexes.
2. Montrer que si C est un convexe d'intérieur non vide alors l'intérieur de C est convexe.
3. Montrer que si C est un convexe alors $\overline{C}$ est convexe.
4. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 7. Trouver un exemple d'espace métrique X possédant une partie A telle que les ensembles suivants soient distincts : A, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$, $\overline{\overset{\circ}{A}}$, $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$, $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$.

Exercice 8. on considère un espace métrique (X,d), un ouvert A de X et une partie quelconque B de X. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ et que cette inclusion peut ne pas être vraie si A n'est pas un ouvert.

Exercice 9. Soient (X,d) un espace métrique, A un ouvert de X et B une partie de X tels que $\overline{A} = X$ et $\overline{B}X$, montrer que $\overline{A \cap B} = X$.

Exercice 10. Soient U et V deux ouverts d'un espace métrique (X,d). Montrer que

$$U \cap V = \emptyset \implies \overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} = \emptyset.$$

Exercice 11. Soient (X,d) un espace métrique et A, B deux parties de X. On note $\mathrm{Fr}(A)$ la frontière de A. On rappelle que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$.

1. Montrer que $\mathrm{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$ et que $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$. Montrer à l'aide d'exemples que ces inclusions peuvent êtres strictes.
2. Montrer que si A est une partie de X à la fois ouverte et fermée alors $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.
3. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.
4. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

Exercice 12. Soient (X,d) un espace métrique, A une partie non vide de X et $x \in X$. On rappelle que $d(x,A) = \inf\{d(x,y);\ y \in A\}$. Montrer que $d(x,A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

Exercice 13. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ (muni de la distance usuelle). On pose $a = \sup(A)$. Montrer que $a \in \overline{A}$.

Exercice 14.

Normes

Exercice 15. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $||x||_1 \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ et $||x||_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$.

1. Vérifier que $||\ ||_1$, $||\ ||_2$ et $||\ ||_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ et décrire, pour chacune d'elles, les boules dans le cas $n = 2$.
2. Montrer que ces trois normes sont équivalentes.

Exercice 16. Pour $1 < p < \infty$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on définit $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$. Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $1 < p < \infty$, $||\ ||_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Fixons $1 < p, q < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. (**Inégalité de Young**) Si $a, b \geq 0$ alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. (Indication : étudier le minimum de la fonction définie par $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb$ pour $x \geq 0$.)
2. (**Inégalité d'Hölder**) Si $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, alors
$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq ||a||_p ||b||_q \left(= \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}\right).$$
Indication: montrer d'abord l'inégalité pour la cas $||a||_p ||b||_q = 1$.
3. (**Inégalité de Minkowski**) Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, alors
$$||a + b||_p \leq ||a||_p + ||b||_p.$$

Indication: montrer en utilisant l'inégalité d'Hölder que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i||a_i+b_i|^{p-1} \leq ||a||_p||a+b||_p^{p-1}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i||a_i+b_i|^{p-1} \leq ||b||_p||a+b||_p^{p-1}.$$

Conclure en sommant ces deux inégalités.

Exercice 17. Si $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on pose $||P||_1 = \sum_{k0}^{n} |a_k|$, $||P||_2 = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)^{1/2}$ et $||P||_\infty = \max\{|a_1|, ..., |a_n|\}$. On montre comme dans l'exercice 15 que ce sont trois normes sur $\mathbb{R}[X]$. Ces normes sont-elles équivalentes?

Exercice 18. Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $||A|| = \max\{|a_{i,j}| : 1 \leq i, j \leq n\}$. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $||AB|| \leq n||A|| \cdot ||B||$.

Exercice 19. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}$.

1. Pour $f \in E$, on pose $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Justifier que $||\ ||_\infty$ est une norme sur E. Pour $f \in E$ et $\varepsilon > 0$, représenter graphiquement $B(f, \varepsilon)$.
2. Pour $f \in E$, on pose $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Justifier que $||\ ||_1$ est une norme sur E.
3. Ces deux normes sont-elles équivalentes sur E?

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $||\ ||_1$ et $||\ ||_2$. On note $B_i(x, r)$ la boule ouverte de centre x et rayon $r > 0$ pour la norme $||\ ||_i$.

1. Montrer que $||\ ||_1 = ||\ ||_2$ ssi $B_1(0,1) = B_2(0,1)$.
2. Montrer que $||\ ||_1 \leq ||\ ||_2$ ssi $B_2(0,1) \subseteq B_1(0,1)$.
3. Pour tout $C > 0$, montrer que $||\ ||_1 \leq C||\ ||_2$ ssi $B_2(0,1) \subseteq B_1(0,C)$.

Distances

Exercice 21. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $\delta(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$. Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas équivalente à la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$.

Exercice 22. Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in E \times E$ tel que $x \neq y$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$.
2. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{R}^+$. On pose $r = \inf_{n\in\mathbb{N}} r_n$, $R = \sup_{n\in\mathbb{N}} r_n$ et on fixe $a \in E$. Expliciter à l'aide de r et R :
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(a, r_n) \text{ et } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(a, r_n).$$

Exercice 23. Soit $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application croissante vérifiant pour tout $u, v \in \mathbb{R}^+$, $\phi(u) = 0$ ssi $u = 0$ et $\phi(u+v) \leq \phi(u) + \phi(v)$.

Soit (E, d) un espace métrique.

Pour $x, y \in E$, on pose $\delta(x, y) = \phi[d(x, y)]$. Montrer que δ est une distance sur E.

En déduire que $\delta = \dfrac{d}{1+d}$ est une distance bornée sur E. Les distances d et δ sont-elles équivalentes? Même question si la distance d est bornée.

Exercice 24. Soient (X, d) et (Y, D) deux espaces métriques. Montrer que pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\delta_p((x, y), (x', y'))||(d(x, x'), D(y, y')||_p$ définit une distance sur $X \times Y$. Montrer que toutes ces distances sont équivalentes.

Exercice 1 Soient (E, d_1), (F, d_2) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue.

a) Montrer que $\forall A \subset E$, $\forall B \subset F$, on a

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \quad f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}, \quad f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset (f^{-1}(B))^{\circ}.$$

b) Montrer sur des exemples que les inclusions précédentes peuvent être strictes.

c) Peut-on comparer $f(\overset{\circ}{A})$ et $(f(A))^{\circ}$?

d) On suppose que f est continue et surjective et A dense dans E. Montrer que $f(A)$ est dense dans F.

Exercice 2 Soient (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction indicatrice de A, χ_A, soit continue. On rappelle que χ_A est définie par

$$\begin{aligned} \chi_A : \quad E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 3 Soient (E, d) un espace métrique et $f : E \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue;

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in E : f(x) < a\}$ et $\{x \in E : f(x) > a\}$ sont des ouverts de E;

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in E : f(x) \leqslant a\}$ et $\{x \in E : f(x) \geqslant a\}$ sont des fermés de E.

b) Lorsque f est continue et A une partie quelconque de E, montrer que

$$\inf_A f = \inf_{\overline{A}} f, \qquad \sup_A f = \sup_{\overline{A}} f.$$

On pourra considérer l'ensemble $B = \{x \in E : f(x) \geqslant \inf_A f\}$.

c) Une identité analogue est-elle valable lorsqu'on remplace $\overline{A}$ par $\overset{\circ}{A}$?

Exercice 4 Soit (E, d) un espace métrique. On rappelle que la distance à une partie A de E est la fonction

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}, \qquad (x \in E).$$

a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, la fonction

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) \end{aligned}$$

est 1-lipschitzienne (i.e. qu'elle vérifie

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y), \qquad \forall x, y \in E).$$

b) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que l'ensemble $\{x \in E : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.

c) Montrer que $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.

d) En déduire que si F et G sont deux fermés disjoints de E, il existe deux ouverts U et V tels que

$$F \subset U, \ G \subset V, \ U \cap V = \emptyset.$$

Exercice 5 (Lemme d'Urysohn) Soient (E,d) un espace métrique et A et B deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe une fonction continue $\varphi : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\varphi \equiv 1 \text{ sur } A, \quad \varphi \equiv 0 \text{ sur } B, \quad \text{et } 0 \leqslant \varphi \leqslant 1 \text{ sur } E.$$

<u>Indication</u> : on pourra considérer

$$\varphi(x) = \frac{d(x,B)}{d(x,A)+d(x,B)}.$$

Exercice 6 Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que :

a) tout fermé de E est une intersection dénombrable d'ouverts de E ;

b tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés de E.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel normé. On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E. Montrer que les applications suivantes sont continues :

$$\text{a)} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E)^2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array} \qquad \text{b)} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ A & \longmapsto & P(A), \end{array}$$

où P est un polynôme.

Exercice 8 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\| < +\infty \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ converge.}$$

Exercice 9 Soient X, Y deux espaces métriques et f une application de X dans Y. Supposons que $X = A \cup B$.

a) Montrer que si f est continue, alors $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont continues.

b) Montrer que la réciproque n'est pas vraie.

c) Montrer que si A et B sont ouverts (ou fermés) alors la réciproque est vraie, i.e. si $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont continues alors f est continue.

Exercice 10 Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(t) = \frac{t}{n+t}$. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle mais que la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 11 Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n, & \text{si } x \leqslant n \\ 0, & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 12 Soit $n \geqslant 1$ et $X = \mathbb{R}^n$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour $a = (a_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$\begin{array}{rll} T_a : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto T_a(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k, \quad \text{si } x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}. \end{array}$$

a) Vérifier que T_a est une application linéaire continue sur X.

b) Calculer sa norme.

Exercice 13 Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| < +\infty$. On considère $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et $T : E \to \mathbb{R}$ définit par

$$T(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n f(a_n).$$

a) Montrer que T est bien définie.

b) Montrer que T est une forme linéaire continue sur E.

c) Montrer que

$$\|T\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|.$$

Exercice 14 Soit $E = C([a,b],\mathbb{R})$, $a < b$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.

b) Pour $c \in [a,b]$, on considère

$$\begin{array}{rrcl} \delta_c : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(c). \end{array}$$

Montrer que δ_c est une forme linéaire sur E mais qu'elle n'est pas continue.

Exercice 15 Pour $f \in E = C([0,1],\mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

a) Soit $\mu : E \to E$ définit par

$$\mu(f)(x) := \int_0^x f(t)\,dt, \qquad x \in [0,1],\ f \in E.$$

(i) Montrer que μ est bien définit et que μ est une application linéaire continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans lui même.

(ii) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définit par

$$f_n(t) = n(1-t)^{n-1}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.

(iii) En déduire la norme de μ.

b) Refaire l'exercice, en munissant E de la norme de la convergence uniforme.

Exercice 16 On définit sur $C([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme, la forme linéaire

$$\Lambda(u) := \int_0^{1/2} u(t)\,dt - \int_{1/2}^1 u(t)\,dt, \qquad u \in C([0,1],\mathbb{R}).$$

a) Montrer que Λ est une forme linéaire continue sur $C([0,1],\mathbb{R})$ et que $\|\Lambda\| \leqslant 1$.

b) Montrer que $\|\Lambda\| = 1$.

<u>**Indication**</u> : on pourra calculer, pour $n \geqslant 3$, $\Lambda(u_n)$, avec u_n définit par

$$u_n := \begin{cases} 1 & \text{sur } \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ -1 & \text{sur } \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \\ \text{affine et continue} & \text{sur } \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Exercice 17 On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels, muni de la norme

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 \leqslant 1\},$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On note U l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que U est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Si $A \in U$, montrer que

$$B(A, \|A^{-1}\|^{-1}) \subset U.$$

Exercice 18 Soient E, F deux espaces métriques et $f, g : E \to F$ deux applications continues.

a) Montrer que $\Delta = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.

b) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que si A est dense dans E et si $f \equiv g$ sur A, alors $f \equiv g$ sur E.

c) Montrer que $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.

d) Est ce que la réciproque est vraie ? i.e., est-ce que

$$\Gamma_f \text{ fermé } \Longrightarrow f \text{ continue?}$$

<u>**Indication**</u> : on pourra considérer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 19 (Dualité des espaces ℓ^p.) Pour $1 < p < +\infty$, on note ℓ^p l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ telles que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < +\infty.$$

On note $e_j = (\delta_{i,j})_{i \geqslant 0}$, où

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

a) Soit $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ et $x^n := \sum_{j=0}^{n} x_j e_j$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \|x^n - x\|_p = 0$.

b) Soit $f \in (\ell^p)'$. On pose $\alpha_j = f(e_j)$, $j \geqslant 0$ et $\alpha = (\alpha_j)_{j \geqslant 0}$.

(i) Calculer $f(x^n)$ et montrer que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j x_j, \qquad \text{si } x = (x_j)_{j \geqslant 0} \in \ell^p.$$

(ii) Supposons que, pour tout $x = (x_j)_{j \geqslant 0} \in \ell^p$, on a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j x_j = \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j x_j.$$

Montrer que $\alpha_j = \beta_j$, $j \geqslant 0$.

(iii) On suppose que $\alpha \in \ell^q$, où q est l'exposant conjugué de p, i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que, pour tout $x = (x_j)_{j \geqslant 0} \in \ell^p$, la série $\sum_j \alpha_j x_j$ est convergente et que

$$\left| \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j x_j \right| \leqslant \|x\|_p \|\alpha\|_q.$$

(iv) En déduire que $\|f\| = \|\alpha\|_q$.

(v) On suppose que $\alpha \notin \ell^q$. Montrer qu'il existe $x^n \in \ell^p$ telle que $\|x^n\|_p = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} |f(x^n)| = +\infty$. Conclure à une absurdité.

(c) En déduire que $(\ell^p)'$ est isométriquement isomorphe à ℓ^q.

Exercice 20 On rappelle que ℓ^1, resp. ℓ^2, est l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\|x\|_1 := \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| < +\infty \qquad \text{resp. } \|x\|_2 := \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

On rappelle aussi que l'application signe, notée sgn, est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \varphi(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}. \end{aligned}$$

On considère enfin l'application $T : \ell^1 \longrightarrow \ell^2$ définie par $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Montrer que φ est une bijection telle que

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant 2\sqrt{|x - x'|}, \quad |\varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(y')| \leqslant |y - y'|(|y| + |y'|).$$

b) Montrer que T est bien définie et qu'elle est bijective.

c) Montrer que, pour tous $x, x' \in \ell^1$, on a

$$\|T(x) - T(x')\|_2 \leqslant 2\sqrt{\|x - x'\|_1}.$$

d) Montrer que, pour tous $y, y' \in \ell^2$, on a

$$\|T^{-1}(y) - T^{-1}(y')\|_1 \leqslant 2\|y - y'\|_2(\|y\|_2 + \|y'\|_2).$$

e) En déduire que ℓ^1 et ℓ^2 sont homéomorphes.

Exercice 21 a) Soit X un espace métrique et d_1 et d_2 deux distances sur X. Montrer que si d_1 et d_2 sont équivalentes, alors l'application identité

$$id : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$$

est un homéomorphisme.

b) On considère $X = \mathbb{R}$ et $d_1(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$, $d_2(x, y) := |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\mathbb{R}, d_1)$ est homéomorphe à $(\mathbb{R}, d_2)$, mais que d_1 et d_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 22 Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E. Montrer que l'application $\varphi : X \to X$ défini par

$$\varphi(x) := \begin{cases} x, \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est un homéomorphisme de $B_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$ sur $B_{\|\cdot\|_2}(0, 1)$.

Espaces complets. Point fixe

Exercice 1. Etablir si les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}$ sont complets : $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $]0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

1. Montrer que $C^1([0,1])$, muni de la norme uniforme, n'est pas complet.
2. Montrer que $C^1([0,1])$, muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, est complet.
3. Montrer que $C([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$, n'est pas complet.

Exercice 3. Montrer que $\ell^1 \subset \ell^\infty$, mais que $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un sous-espace fermé de $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Soit $A = B(0,1)$. On considère deux distances sur A : la distance d_1 induite par la norme euclidienne et $d_2(x,y) = \|x-y\|_2 + \left|\dfrac{1}{d_1(x,A^c)} - \dfrac{1}{d_1(y,A^c)}\right|$.

1. Vérifier que d_2 est une distance.
2. Montrer que $\mathrm{id}\colon (A,d_1) \to (A,d_2)$ est un homéomorphisme.
3. Montrer que (A,d_1) n'est pas complet.
4. Montrer que (A,d_2) est complet. Conclusion ?

Exercice 5. Soit $c_0 = \big\{(x_n) \subset \mathbb{R}\colon \lim_{n\to\infty} x_n = 0\big\}$.

1. Montrer que $c_0 \subset \ell^\infty$.
2. Montrer que c_0 est un espace de Banach.

Exercice 6. Soit (X,d) un espace métrique complet. On construit une suite $A_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ telle que $A_{n+1} \subset A_n$ et $r_n \to 0$.

1. Montrer que (x_n) est une suite de Cauchy.
2. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, montrer que $\{x\} = \cap_n A_n$.

Exercice 7. Soit $E = C(]0,1[)$. Pour $n \geq 2$ et $f, g \in E$, soit

$$d_n(f,g) = \sup_{x\in[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]} |f(x) - g(x)|.$$

1. Si $D_n(f,g) = \dfrac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}$, montrer que D_n vérifie l'inégalité triangulaire.
2. Soit $d(f,g) = \sum_{n\geq 2} \frac{D_n(f,g)}{2^n}$. Montrer que d est une distance sur E.
3. Montrer que (E,d) est complet.

Exercice 8. Soient (X,d) un espace métrique complet, $f\colon X \to X$ et $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $f^k = f\circ\cdots\circ f$ (k fois) est contractante. Montrer que f a exactement un point fixe.

Exercice 9. On munit $C([0,1])$ et $C([0,1]^2)$ de la norme uniforme. Si $f \in C([0,1])$ et $K \in C([0,1]^2)$, on pose

$$Tf(x) = \int_0^x K(x,y) f(y)\,dy, \qquad x \in [0,1].$$

On admet que $Tf \in C([0,1])$.

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}\big(C([0,1])\big)$.
2. Montrer que, pour $k \geq 1$, on a $\|T^k\| \leq \dfrac{\|K\|_\infty^k}{k!}$.

3. Montrer que, pour tout $g \in C([0,1])$ l'équation $Tf = f + g$ a exactement une solution.

Exercice 10. Montrer que l'équation $x'(t) = \frac{1}{2}\sin(x(t))$ admet exactement une solution $x \in C^1([-1,1])$ telle que $x(0) = 1$.

Exercice 11. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n$, $n \geq 0$. On veut montrer le résultat suivant : *il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$(x_n) \text{ soit bornée et à valeurs positives.} \tag{P}$$

1. Montrer que, si $0 \leq x_n < 10$ et $x_{n+1} \geq 0$, alors $x_{n+2} < 0$.
2. Montrer que, si $x_n > 11$, alors $x_{p+1} > 2x_p$ pour tout $p \geq n+1$.
3. En déduire que (P) $\iff$ $x_n \in [10,11]\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $X = \{\, (x_n) \subset [10,11] \,\}$, muni de la distance $d\big((x_n),(y_n)\big) = \sup_n |x_n - y_n|$ est complet.
5. Soit $F(x_n) = (y_n)$, où $y_n = \sqrt{100 + x_{n+1} - \sin n}$. Montrer que F est bien définie sur X et que $F\colon X \to X$ est contractante.
6. Conclure.

Exercice 12. Soient $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \leq 5\big\}$. Trouver un ensemble de paramètres (α,β) tels que le système

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha(1 + e^{x-5} + \cos y) \\ y = 3 + \beta(e^{x-5} - \sin y) \end{cases}$$

ait exactement une solution dans A.

Exercice 13. Soit $\phi\colon (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ un homémorphisme linéaire (ou "isomorphisme") entre les espaces vectoriels normés E et F. Montrer que E est un espace de Banach si et seulement si F est un espace de Banach.

Exercice 14. Soit ℓ^p ($p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$) l'espace vectoriel des suites $(x_n) \subset \mathbb{R}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ converge. On rappelle que l'on peut normer ℓ^p par $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$. Montrer que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est complet.

Exercice 15. Soient E un espace de Banach et $a \in E$. Soit $B\colon E \times E \to E$ une application bilinéaire et continue, non nulle. On note par $\|B\|$ la norme de B dans $\mathcal{L}(E \times E, E)$. On considère l'équation

$$x = a + B(x,x) \tag{$*$}$$

1. Montrer que si $\|a\|_E \leq \frac{1}{4\|B\|}$, alors
$$\exists r \geq 0 : \quad \|x\|_E \leq r \quad \Longrightarrow \quad \|a + B(x,x)\|_E \leq r.$$
2. Montrer que si $\|a\|_E < \frac{1}{4\|B\|}$ alors l'application $x \mapsto a + B(x,x)$ est une contraction dans la boule $\overline{B}(0,r')$, pour un certain $0 \leq r' < r$. En déduire que l'équation $(*)$ a au moins une solution dans E.
3. **Application.** On considère le système non-linéaire dans $\mathbb{R}^n$
$$x_i = a_i + \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,h,k}\, x_h x_k, \qquad a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad b_{i,h,k} \in \mathbb{R} \quad (i = 1,\ldots,n).$$
Donner une condition sur les coefficients a_i et $b_{i,h,k}$ telle que ce système possède une solution $x = (x_1,\ldots,x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Espaces compacts.

Exercice 1. Montrer que $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit X un ensemble muni de la distance triviale d (i.e. $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ sinon). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (X, d) soit compact.

Exercice 3. Soient K et L deux parties compactes d'un espace métrique (X, d). Montrer que $K \cup L$ est un compact.

Exercice 4. Soient n et m deux entiers strictement positifs, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$.

1. Montrer que pour tout compact K de $\mathbb{R}^m$, $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
2. Enoncer et montrer la réciproque de ce résultat.

Exercice 5. Soient K un compact et F un fermé d'un espace métrique (X, d) tels que $F \cap K = \emptyset$. Soit $d(K, F) = \inf\{d(x, y) : x \in K, y \in F\}$.

1. Montrer que $d(K, F) > 0$.
2. Montrer que si l'on suppose que F est compact, alors il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $d(x, y) = d(K, F)$.

Exercice 6. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$.

1. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.
2. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.
3. Montrer que si A et B sont fermés, cela n'implique pas que $A + B$ soit fermé.

Exercice 7. Soient K_n $(n \in \mathbb{N})$ et K des compacts d'un espace métrique (X, d) tels que

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n = K \text{ et pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ K_{n+1} \subset K_n.$$

Soit U un ouvert de (X, d) tel que $K \subset U$. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 8. Soient U et V deux ouverts et K un compact d'un espace métrique (X, d). On suppose que $U \cap V = \emptyset$ et $K \subset U \cup V$. Montrer que $U \cap K$ et $V \cap K$ sont compacts.

Exercice 9. Soit (K, d) un espace métrique compact et soit $(f_n)_n$ une suite décroissante de fonctions réelles continues sur K telles que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur K. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur K.

Exercice 10. Soient (K, d) un espace métrique compact et $f : K \to K$ une fonction telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ si $x, y \in K$ et $x \neq y$.

1. Montrer que f a au plus un point fixe.
2. Montrer qu'il existe un élément $a \in K$ tel que $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$ pour tout $x \in K$.
3. Montrer que a est le point fixe de f.
4. Pour $x_0 \in X$, on définit $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(d(x_n, a))_{n\geq 0}$ converge vers une limite $l \geq 0$.
5. Montrer que $l = 0$. Conclusion ?

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$.

1. Montrer que f est bornée.
2. La fonction f atteint-elle ses bornes ?
3. Montrer que f atteint au moins l'une de ses bornes.

Exercice 12. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
(i) (K, d) est compact ;
(ii) (K, d) est complet et pour tout $\varepsilon > 0$, K peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.

Exercice 13. Soient A et B deux parties convexes de $(E, \|\cdot\|)$.

1. Montrer que le plus petit ensemble convexe contenant à la fois A et B est $C = \{\lambda a + (1-\lambda)b; a \in A, b \in B, \lambda \in [0,1]\}$.

2. Montrer que si A et B sont compacts alors C est compact.

Exercice 14. Soit n un entier strictement positif et soit C un ensemble convexe et compact de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Pour $\epsilon > 0$, on pose $C_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, C) \leq \epsilon\}$.

1. Montrer que $C_\epsilon = C + \overline{B}(0, \epsilon)$.

2. En déduire que C_ϵ est encore un convexe compact de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 15. Soit n un entier strictement positif et soit F une partie fermée de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$ où d est la distance induite par $\|\cdot\|$.

Exercice 16. Soit n un entier strictement positif et soit $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Soit C un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$

1. Vérifier l'identité du parallélogramme : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
$$\|a+b\|_2^2 + \|a-b\|_2^2 = 2(\|a\|_2^2 + \|b\|_2^2).$$

2. A l'aide de l'identité du parallélogramme, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un **unique** $y \in C$ tel que $\|x - y\|_2 = d(x, C)$.

3. Notons $p(x)$ l'unique élément de C tel que $\|x - p(x)\|_2 = d(x, C)$.
   (a) Montrer que $\langle x - p(x), y - p(x)\rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$ (considérer $p(x) + t(y - p(x))$ pour $t \in [0,1]$).
   (b) Montrer que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\|p(x_1) - p(x_2)\|_2 \leq \|x_1 - x_2\|_2$.

Exercice 17. Soient (K, d) un espace métrique compact et $f : K \to K$ telle que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tout $x, y \in K$.

1. En considérant la suite $(f^n(x))_n$, montrer qu'il existe une sous-suite $(n_k)_k$ de $\mathbb{N}$ vérifiant $(n_{k+1} - n_k)_k$ est une suite strictement croissante et $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x)$ existe.

2. En déduire que $\lim_{k\to\infty} f^{n_{k+1}-n_k}(x) = x$.

3. En déduire que f est surjective

4. Montrer que f est bijective.

Expaces connexes

Exercice 1. Soit (X,d) un espace métrique et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-espaces connexes de X. On suppose que $\forall\, n\geq 0$, $A_n\cap A_{n+1}\neq\emptyset$. Montrer que $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ est connexe.

Exercice 2. Soit A une partie non vide, ouverte et fermée dans un espace métrique (X,d). Soit $a\in A$ et $\mathcal{C}_a$ la composante connexe de X contenant a. Montrer que $\mathcal{C}_a\subset A$. En déduire que tout ensemble $A\subset X$ qui non vide, ouvert, fermé et connexe est une composante connexe de X.

Exercice 3. Soit $E=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y)\colon x^2+y^2=R\}$, où $R>0$. Montrer que E présente deux composantes connexe, $E_1=\{(x,y)\colon x^2+y^2<R\}$ et $E_2=\{(x,y)\colon x^2+y^2>R\}$.

Exercice 4. Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application continue et surjective. Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est non-borné.
(*Indication :* Utiliser que le complémentaire d'un disque de $\mathbb{R}^2$ est connexe).

Exercice 5. Soit X la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée par les segments $I_n=[0,1]\times\{\frac{1}{n}\}$, où $n=1,2,\ldots$ et des points $P_0\equiv(0,0)$ et $P_1\equiv(1,0)$.

1. Montrer que les composantes connexes de X sont les I_n et $\{P_0\}$, $\{P_1\}$.
2. Soit A une parte ouverte et fermé de X, contenant P_0. Montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que A contient I_n pour tout $n\geq n_0$.

Exercice 6. Soit (X,d) un espace métrique et $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de compactes connexes non vides. Montrer que $K\equiv\bigcap_{n\geq 0} K_n$ est non compact et non vide. Montrer que K est connexe (*Indication :* utiliser que tout ouvert de X contenant K, contient aussi K_n, si n est suffisament grand).

Exercice 7. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$ avec la propriété suivante :

$$\forall\, a,b\in\mathbb{R},\quad a<b\quad\text{implique}\quad\exists\, c\in F\quad\text{telque}\quad a<c<b. \tag{$*$}$$

1. Montrer que F un intervalle fermé. (*Indication :* utiliser que tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts. On appliquera cette propriété à un ouvert de la forme $]a,b[\cap F^c$).
2. Soit $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivable et telle que $f(1-f')=0$. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ possède la propriété $(*)$. En déduire que $f=0$ ou $f'=1$.

Exercice 8. On dit qu'un espace métrique (X,d) vérifie la propriété du point fixe (PF), si toute fonction $f\in C(X,X)$ a au moins un point fixe dans X.

1. Montrer que tout intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ vérifie (PF). Montrer que les autres intervalles de $\mathbb{R}$ ne vérifient pas (PF).
2. Montrer que si X vérifie (PF), alors X est connexe.
3. Montrer que si $X=Y\cap Z$, et Y,Z sont deux fermés de X vérifiant (PF), et d'intersection réduite à un seul point, alors X vérifie (PF).

Exercice 9. Montrer qu'un espace métrique connexe ayant au moins deux éléments est non-dénombrable.

Exercice 10. Soit $R>0$. Montrer que dans un espace vectoriel normé $E,||\cdot||)$ de dimension ≥ 2, la sphère $S(0,R)$ est connexe par arcs. En déduire que $B(0,R)^c$ et $E\backslash\{0\}$ sont connexes par arcs.

Exercice 11. Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E de dimension ≥ 2.

1. Montrer que K^c a une composante connexe C non bornée.
2. Soit $a\in C$ et $S(a,R)$ une sph̀ere de grand rayon contenue dans $(K\cap\mathcal{C})^c$. Montrer que l'application $p\colon K\to S(a,R)$ définie par $p(x)=a+\frac{R(x-a)}{||x-a||}$ est une surjection continue.

3. Montrer que E est de dimension finie. En déduire que si K est un compact dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, alors K^c est connexe.

Exercice 12. Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et U un ouvert de E. Montrer que U est connexe si et seulement si :

$$\forall\, x, y \in U \quad \exists\, x_1, \ldots, x_n, \quad \text{avec} \quad x = x_1,\ x_n = y_n \quad \text{et} \quad [x_{i-1}, x_i] \subset U.$$

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \colon x > 0\}$. Montrer que A est connexe. En déduire que $A \cup \{(0,0)\}$ est connexe. Montrer que $A \cup \{(0,0)\}$ n'est pas connexe par arcs.
(*Indication :* utiliser que si $f \colon [a,b] \to A \cup \{(0,0)\}$ est un arc tel que $f = (f_1, f_2)$ et $f(a) = (0,0)$, $f(b) \neq (0,0)$, alors il existe une suite $t_n \to a$ telle que $f_1(t_n) = \frac{2}{\pi + 2n\pi}$).

Université Claude Bernard Lyon I
Licence troisime anne : topologie
Mardi 7 novembre 2006

Examen de topologie

Dure : 1H30. Aucun document n'est autoris

Question de cours

Soit E un espace topologique et A un sous-ensemble de E. Dmontrer que $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$.

Exercice 1

Soit f une fonction d'un espace mtrique (E, d) dans un espace mtrique (F, d'). Montrer que les affirmations suivantes sont quivalentes :

1. La fonction f est continue.
2. Pour chaque sous-ensemble B de F, $f^{-1}\left(\mathring{B}\right) \subset \overset{\circ}{\overline{f^{-1}}}(B)$.

Exercice 2

Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et soit d_1 l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui (x, y) associe $|e^x - e^y|$.

1. Montrer que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. La distance d_1 est-elle borne ?
3. Dcrire la boule $B(0, 1)$ relativement d_1.
4. Montrer que d_1 et d induisent la mme topologie (c'est–dire que toute boule ouverte pour d est incluse dans une boule ouverte pour d_1 et inversement).
5. Les distances d_1 et d sont elles quivalentes ?

Exercice 3

Soit X l'espace vectoriel des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\sup\{(1 + x^2)|f(x)| < \infty \; : \; x \in \mathbb{R}\}$$

. Pour $f \in X$, on pose

$$\|f\| = \sup\{(1 + x^2)|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur X.
2. Soit L dfinie de X dans $\mathbb{R}$ par $L(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.
   (a) Montrer que L est bien dfinie.
   (b) Montrer que L linaire et continue.
   (c) Calculer la norme de L.

Examen de Topologie
le 11 janvier 2005

Question de cours. Soient (K, d) un espace compact, (X, D) un espace métrique et $f : K \to X$. Si f est **continue** et **bijective**, montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 1. Soient $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$.
a) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $f(x) > f(0)$ si $\|x\| > R$.
b) En déduire que $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \inf\limits_{\|x\| \le R} f(x)$.
c) Montrer qu'il existe un x_0 tel que $f(x_0) \le f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Soient $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $\|g(x) - g(y)\| \le 1/2\|x - y\|$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = x - g(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$.
a) Montrer que $1/2\|x - y\| \le \|f(x) - f(y)\| \le 3/2\|x - y\|$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$.
b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, il y a exactement un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = z$.
c) En déduire que f est un homéomorphisme.

Problème 1. Soit $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \ ; \ a_1 + \ldots a_n = l} c_{a_1, \ldots, a_n} x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}.$$

Ici, $l \in \mathbb{N}^*$ est **fixé** et la somme se fait sur tous les entiers $a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_1 + \ldots + a_n = l$. Un exemple de tel P si $n = 3$, $l = 4$: $P(x, y, z) = \alpha x^4 + \beta x y^2 z + \gamma y^2 z^2 + \delta x z^3$.
a) Montrer que P est continue.
b) Calculer $P(tx)$ en fonction de $P(x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
Dans la suite, on suppose que $n \ge 2$.
c) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe.

d) Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_2 = 1\}$. Montrer que S est compact.
e) En considérant l'application $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S$, $h(x) = \dfrac{1}{\|x\|_2} x$, montrer que S est connexe.
f) Déduire des questions d) et e) qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(S) = [a, b]$.
g) Montrer que $a\|x\|_2^l \leq P(x) \leq b\|x\|_2^l$, $\forall \ x \in \mathbb{R}^n$.
h) On suppose que $P(x) \neq 0$, $\forall \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que P est de signe constant sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En déduire que l est pair.

Problème 2. Soit $n \geq 2$. On se propose de montrer que $B = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_2 < 1\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ 1/2 < \|x\|_2 < 2\}$ ne sont pas homéomorphes. On suppose, par l'absurde, qu'il existe un homéomorphisme $f : B \to C$.
a) Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = \|x\|_2$. Rappeler pourquoi g est continue.
b) Soit $K \subset C$ un ensemble compact. Montrer qu'il existe $a, b \in]1/2, 2[$ tels que $a \leq \|x\|_2 \leq b$, $\forall \ x \in K$.
c) Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_2 = 1\}$. Si $K \subset C$ un ensemble compact et si $S \subset K$, montrer que $g(C \setminus K)$ n'est pas un intervalle. En déduire que $C \setminus K$ n'est pas connexe.
d) Soit $L = f^{-1}(S)$. Montrer que $L \subset B$ est un compact. En déduire qu'il existe $r \in [0, 1[$ tel que $L \subset M = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_2 \leq r\}$.
e) Montrer que $B \setminus M$ est connexe. (Indication : $B \setminus M = h(]r, 1[\times S)$, où $h(t, y) = ty$.)
f) Soit $K = f(M)$. Montrer, à l'aide de la question c), que $C \setminus K$ n'est pas connexe.
g) Montrer que $f(B \setminus M) = C \setminus K$. Aboutir à une contradiction. Conclure.

Examen de Topologie

Le xxxx juin de xx heures xxx heures

Question de cours. Soit (X,d) un espace métrique compact. Montrer que $A \subset X$ est compact si et seulement si A est fermé dans X.

Exercice 1. Soit $l^\infty = \{(x_n) \subset \mathbb{R} \ ; \ (x_n) \text{ borné}\}$, muni de la norme $\|(x_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

On considre l'application $T : l^\infty \to \mathbb{R}$, $T(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$.

a) Montrer que T est bien définie, c'est-à-dire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$ est convergente.
b) Montrer que T est linéaire.
c) Montrer que $|T(x_n)| \leq \|(x_n)\|$. Que peut-on dire alors de $\|T\|$?
d) Montrer que $\|T\| = 1$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.
a) Montrer que, pour tout $a > 0$, l'ensemble $K_a = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ f(x) \geq a\}$ est compact.
b) Montrer que, s'il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) > 0$, alors f a un point de maximum, c'est–dire il existe un x_0 tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
c) Montrer que la conclusion du point **b)** reste valide si on suppose qu'il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) = 0$.
d) Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, mais n'ayant pas de point de maximum.

Exercice 3. Soient (X,d) un espace métrique et $L \subset X$ un compact non vide.
a) Montrer que pour tout $x \in X$ il existe un $y \in L$ tel que $\mathrm{dist}(x,K) = d(x,y)$.

b) Pour $\varepsilon > 0$, soit $L_\varepsilon = \{x \in X \ ; \ \mathrm{dist}(x, L) \leq \varepsilon\}$. Montrer que L_ε est fermé.
c) En utilisant la question **a)**, montrer que $L_\varepsilon = \displaystyle\bigcup_{y \in L} \overline{B}(y, \varepsilon)$.
d) En considérant le cas particulier où X est un espace normé, montrer que L_ε n'est pas forcément un compact.
e) On suppose (uniquement dans cette question) X compact. Montrer que L_ε est compact.
f) Montrer que L_ε est borné. Que peut-on en déduire si X est un espace normé de dimension finie ?
g) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_{1/n} = L$.
Dans les questions suivantes, on suppose X espace normé.
h) Si L est connexe, montrer que L_ε est connexe.
i) Si L est connexe par arcs, montrer que L_ε est connexe par arcs.
j) (Bonus) Si L est convexe, montrer que L_ε est convexe.