TD1 - Normes et métriques

Espaces vectoriels normés

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *(on dit que p et q sont conjugués avec la convention que 1 et ∞ sont conjugués)*. On rappelle que pour $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{K}^n$, on note

$$\|a\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}, \qquad 1\leqslant p<\infty,$$

et

$$\|a\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

a) Vérifier que pour $p=1$ et pour $p=\infty$, $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On supposera dans la suite que $1<p<\infty$.

b) Montrer que pour tout $a,b\geqslant 0$, on a

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \qquad \text{(Inégalité de Young).}$$

c) Montrer que pour tout $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\mathbb{K}^n$, on a

$$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|\leqslant\|a\|_p\|b\|_q \qquad \text{(Inégalité de Hölder).}$$

Indication: Soit $A>0$. Écrire $|a_ib_i|=|Aa_i||b_i/A|$, appliquer l'inégalité de Young, puis sommer. Choisir alors A tel que $A^p\|a\|_p^p=\|b\|_q^q/A^q$.

d) Montrer que pour $1<p<\infty$, $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Indication: Appliquer l'inégalité de Hölder à $\sum_{i=1}^n|a_i||a_i+b_i|^{p-1}$ et à $\sum_{i=1}^n|b_i||a_i+b_i|^{p-1}$, puis sommer pour en déduire l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$.

Exercice 2

Pour $1\leqslant p\leqslant+\infty$, on définit $\ell^p(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\|u\|_p=\left(\sum_{n=0}^\infty|u_n|^p\right)^{1/p}<+\infty, \qquad 1\leqslant p<+\infty,$$

et

$$\|u\|_\infty=\sup_{n\geqslant 0}|u_n|<+\infty.$$

Montrer que :

a) $\ell^p(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

b) $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\ell^p(\mathbb{K})$.

Exercice 3

Soit $-\infty<a<b<+\infty$ et $C([a,b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit pour $f\in C([a,b])$ et $1\leqslant p\leqslant+\infty$,

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p\right)^{1/p}, \qquad 1\leqslant p<+\infty,$$

et

$$\|f\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

Montrer que $\big(C([a,b]),\|\cdot\|_p\big)$ est un espace vectoriel normé.
Indication: On pourra s'inspirer du cas discret.

Exercice 4

Soit $\mathbb{R}^n$ munit de la norme $\|\cdot\|_p$.

a) Dessiner pour $n=2$ et pour $p=1,2,\infty$ la boule unité de $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p)$, c'est-à-dire

$$B_p(0,1)=\left\{x\in\mathbb{R}^2:\|x\|_p\leqslant 1\right\}.$$

b) Montrer que pour $x\in\mathbb{R}^n$ et $p>q\geqslant 1$, on a

$$\|x\|_q n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\leqslant\|x\|_p\leqslant\|x\|_q.$$

Que peut-on en déduire des normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 5

Soient $n \geqslant 0$ et $|\cdot|$ une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note

$$\|M\| := \sup_{z \in \mathbb{K}^n, |z| \leqslant 1} |Mz|.$$

a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle, c'est-à-dire, que pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\|MN\| \leqslant \|M\| \|N\|$.

Exercice 6

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Montrer l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

En déduire que si $\|x\| = \|y\| = 1$ et $x \neq y$ alors $\|\frac{1}{2}(x+y)\| < 1$.
Montrer que sur $\mathbb{K}^n$ les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas issues d'un produit scalaire.

Exercice 7

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r > 0$, on note $S(x_0, r)$ la sphère de centre x_0 et de rayon r. Soient $a, a' \in E$, $r, r' > 0$ tels que $S(a, r) = S(a', r')$.

a) Montrer que si $a \neq a'$ alors $\|a - a'\| = r - r'$. *Indication: Considérer le point $p \in S(a, r)$ tel que $a' \in [a, p]$.*

b) De même, montrer que $\|a' - a\| = r' - r$.

c) En déduire que $a = a'$ et $r = r'$.

Exercice 8

On note E l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0) = 0$. Pour tout $f \in E$ on pose

$$N_1(f) = \|f'(t)\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|,$$

$$N_2(f) = \|f(t)\|_\infty + \|f'(t)\|_\infty.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E.

Exercice 9

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, pour tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d \in \mathbb{R}_d[X]$, on pose

$$N(P) = |a_0 + P'(1)| + \sum_{k=1}^{d} |a_k| \text{ et } \tilde{N}(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|.$$

a) Montrer que l'on a ainsi défini deux normes sur E.

b) Soit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $P_n(X) = 1 - \frac{X^n}{n}$. Montrer que cette suite converge vers le polynôme nul pour la norme N et vers le polynôme 1 pour la norme $\tilde{N}$.

c) Les normes N et $\tilde{N}$ sont-elles équivalentes ?

Espaces métriques

Exercice 10

Montrer que si $f : X \to Y$ est une injection et (Y, d) est un espace métrique, alors $\delta(x, y) = d\big(f(x), f(y)\big)$ est une métrique sur X.

Exercice 11

Vérifier que les espaces suivants sont des espaces métriques :

a) $\mathbb{R}^*$ avec $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$,

b) $\mathbb{R}$ avec $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$,

c) $C([0,1])$ avec $d(f, g) = \sup_{[0,1]} |f - g|$,

d) $C([0,1])$ avec $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$,

e) $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ avec $d(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |u_n - v_n|$.

Exercice 12

Soit $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques et $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$, on pose

$$d_p(x, y) = \|(d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n))\|_p,$$

où $\|\cdot\|_p$ est la norme sur $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\|(u_1, \ldots, u_n)\|_p = \begin{cases} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i| & \text{si } p = \infty \\ \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty. \end{cases}$$

Montrer que d_p définit une distance sur X.

Exercice 13

Soit (E, d) un espace métrique.

a) Montrer que $\overline{B(a,r)} \subset BF(a,r)$ et donner un exemple d'inclusion stricte *(on pourra considérer par exemple* $\{0\} \cup \{1\}$*)*.

b) Montrer qu'il y a égalité dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Exercice 14

On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$ et on pose $\delta(x,y) = \phi\big(d(x,y)\big)$ avec $\phi(t) = \frac{t}{1+t}$.

a) Vérifier que δ représente une distance dans $\mathbb{R}$.
Indication: Montrer et utiliser que ϕ est croissante et concave.

b) En précisant les ensembles $\{x \in \mathbb{R} : \delta(x,0) < r\}$ pour les $r > 0$, démontrer que d et δ sont topologiquement équivalentes.

c) Démontrer que d et δ ne sont pas deux distances équivalentes.

d) Dire si les résultats des questions (a) et (b) ci-dessus demeurent encore lorsque $\frac{t}{1+t}$ est remplacée par l'une des fonctions suivantes :

$$\text{(i) } t \mapsto \ln(1+t), \quad \text{(ii) } t \mapsto \arctan t, \quad \text{(iii) } t \mapsto t^2.$$

Exercice 15

Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques et soit δ_1, δ_2 des distances de l'espace produit $X_1 \times X_2$ définies par : $\delta_1(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$, $\delta_2(x,y) = \max\big(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\big)$, où $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$. Démontrer que δ_1 et δ_2 sont deux distances équivalentes.

Exercice 16

Soit $(X_j, d_j)_{j\geqslant 0}$ une suite d'espaces métriques, $X = \prod_{j\geqslant 0} X_j$ et notons d l'application définie de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$(*) \qquad d(x,y) = \sum_{j\geqslant 0} 2^{-j} \frac{d_j(x_j,y_j)}{1 + d_j(x_j,y_j)}$$

si $x = (x_j)_{j\geqslant 0}$, $y = (y_j)_{j\geqslant 0}$.

a) Expliquer pourquoi la série définissant d ci-dessus est convergente.

b) Démontrer que d est une métrique de X.

c) Soit $\big(x^{(k)}\big)_{k\geqslant 0}$ une suite d'éléments de X, avec $x^{(k)} = \big(x_j^{(k)}\big)_{j\geqslant 0}$, $x_j^{(k)} \in X_j$. Établir l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) Chaque suite « composante » $\big(x_j^{(k)}\big)_{k\geqslant 0}$ converge dans (X_j, d_j).

(ii) La suite $\big(x^{(k)}\big)_{k\geqslant 0}$ converge dans (X, d).

d) *[généralisation]* Démontrer qu'à toute série numérique à termes strictement positifs et convergente $\sum_{j\geqslant 0} \lambda_j$ correspond une métrique δ obtenue en remplaçant dans $(*)$ les coefficients 2^{-j} par λ_j et que la nouvelle distance est toujours topologiquement équivalente à d. Sont-elles des distances équivalentes ?

Exercice 17

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que d est une distance *ultramétrique* si elle vérifie l'inégalité triangulaire plus forte :

$$d(x,z) \leqslant \max\big\{d(x,y), d(y,z)\big\}.$$

a) Vérifier que la distance discrète sur un ensemble E quelconque est une distance ultramétrique.

b) Soit X un ensemble muni d'une distance ultramétrique. Vérifier les propriétés suivantes :

(i) si deux boules ouvertes (fermées) ont un point commun, alors nécessairement l'une contient l'autre ;

(ii) pour tout $a \in X$, pour tout $r > 0$ et pour tout $x \in B(a,r)$, on a $B(x,r) = B(a,r)$;

(iii) toute boule fermée de rayon non nul est ouverte ;

(iv) toute boule ouverte est fermée ;

(v) tout triangle est isocèle (autrement dit, étant donné trois points, les deux plus proches sont à la même distance du troisième).

Exercice 18 Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une *valeur absolue* sur $\mathbb{K}$ est une application, notée $|\cdot|$, définie sur $\mathbb{K}$ à valeurs dans $[0, \infty[$, et vérifiant les trois axiomes suivants : pour tous x, y de $\mathbb{K}$, on a

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{K}}$.
- $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.
- $|xy| = |x||y|$.

Montrer que l'application $(x,y) \longrightarrow |y-x|$ est une distance sur $\mathbb{K}$.

Exercice 19

Soit p un nombre premier. On appelle valuation p-adique l'application $v_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ définie comme :

— $v_p(0) = +\infty$;

— si n est un entier non nul, $v_p(n) = k$ si p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n ;

— si $n = \frac{a}{b}$ avec a et b des entiers non nuls, alors $v_p(n) = v_p(a) - v_p(b)$.

a) Soit $n = 315$. Calculer, pour tout nombre premier p, $v_p(n)$.

b) Calculer $v_p\left(\frac{12}{25}\right)$ pour $p = 2, 3, 5$.

c) Vérifier que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, on a $v_p(x - y) \geqslant \min(v_p(x), v_p(y))$, avec égalité si $v_p(x) = v_p(y)$.

d) On définit maintenant la valeur absolue p-adique comme l'application $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $|0|_p = 0$ et

$$|n|_p = \frac{1}{p^{v_p(n)}}, \qquad n \in \mathbb{Q}^*,$$

puis la distance p-adique par $d_p(n, m) = |n - m|_p$.

(i) Calculer $|250|_5$ et $|13/1750|_5$ et en déduire que $|250|_5 < |13/1750|_5$.

(ii) Vérifier que $|\cdot|_p$ est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ et que d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.

TD2 - Notions de base dans les espaces topologiques

Ouverts et fermés

Exercice 1

a) On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$. L'intervalle $[0,1[$ est-il ouvert ? Fermé ?

b) On munit $\mathbb{R}^2$ de la métrique euclidienne : $d_2(a,b) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$ où $a = (x_a, y_a)$ et $b = (x_b, y_b)$. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ?

$$A = \{(x,y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\},$$
$$B = \{(x,y) \mid -1 < x < 1, -1 \leqslant y < 1\},$$
$$C =]0,1[\ \times \{0\},$$
$$D = [0,1] \times \{0\}.$$

Exercice 2

Parmi les sous-ensembles suivants, préciser ceux qui sont ouverts, fermés (toujours en justifiant soigneusement)

a) Les sous-ensemble de $\mathbb{R}$:
$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1]$, $[0,1[$, $]-\infty,1]$, $[1,+\infty[$, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$.

b) Les sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:
$]-2,1[\times[0,3]$, $[0,1]\times\{9\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^3 > 0\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid yx < 1\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| < 1\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geqslant 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$.

Exercice 3

Soit $E = C([0;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$, et soit $A = \{f \in E \mid \forall t \in [0;1],\ f(t) > 0\}$.
Montrer que A est ouvert dans E.

Exercice 4

Soient (E,d) un espace métrique, $a \in E$ et F un fermé de E tel que a n'appartienne pas à F. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que a appartienne à U et F soit inclus dans V.

Exercice 5

Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que les singletons sont fermés.

Exercice 6

Soient (E,d) un espace métrique, A, B, $A_1, \dots A_n$ des parties non vides de E. Montrer que

a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\mathring{A} = \mathring{\mathring{A}}$,

b) $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$, $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$,

c) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset Int(A \cup B)$,

d) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,

e) $Int\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \mathring{A}_i$,

f) $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$.

Exercice 7

On munit $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, de sa topologie usuelle.
1. Donner un exemple d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ pour laquelle les 7 ensembles suivants sont distincts :

$$A, \mathring{A}, \overline{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{A}}, \mathring{\overline{\mathring{A}}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}.$$

Généraliser à $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$.

2. Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{\overline{A}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$.

Exercice 8

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

a) Montrer que pour toute partie A de E, on a

$$\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(\overline{A}) \subset \overline{\mathrm{Vect}(A)}.$$

b) En déduire que pour tout sous-espace vectoriel F de E, $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 9

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie A de E est étoilée s'il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in [0,1]$, le point $\lambda a + (1-\lambda)x$ appartient encore à E. Montrer que si A est étoilé alors $\overline{A}$ est encore étoilé.

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel normé et A et B deux parties de E. On définit

$$A + B = \{z \in E : \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y\}.$$

a) Démontrer que si A est ouvert alors $A + B$ est ouvert.

b) Démontrer que les parties $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées mais que $A + B$ n'est pas fermée.

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est ouvert. Démontrer que $F = E$.

Exercice 12 Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable de boules ouvertes.

Adhérence, densité, points isolés

Exercice 13 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

a) Montrer que $A \subset E$ est d'intérieur non vide si et seulement si A contient une boule ouverte.

b) En déduire que tout sous-espace vectoriel strict F de E est d'intérieur vide *(raisonner par l'absurde, et montrer que F contient alors E)*.

c) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.

d) Soit H un hyperplan de E. Démontrer que H est ou bien fermé ou bien dense dans E.

Exercice 14

Soit (X,d) un espace métrique et D un sous-ensemble de X. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

a) D est dense dans X.

b) Le complémentaire de D est d'intérieur vide.

c) Si F est un fermé contenant D, alors $F = X$.

d) Si U est un ouvert non vide de X alors $U \cap D$ est non vide.

Exercice 15

Soit (X,d) un espace métrique. Soient E et G deux ouverts denses dans X ; montrer que $E \cap G$ est encore dense dans X.

Exercice 16

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $a > 0$, l'ensemble des x vérifiant $|f(x)| > a$ est fini. Montrer que $X = \{x \mid f(x) = 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (On pourra raisonner par l'absurde, considérer $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon) \cap X = \varnothing$ et en déduire que $B(x_0, \varepsilon)$ est dénombrable).

Exercice 17

On note $X = l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soient Y l'espace des suites réelles tendant vers 0 et Z l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

a) Vérifier que $Z \subset Y \subset X$.

b) Montrer que Z est dense dans Y.

c) Montrer que Y et Z ne sont pas denses dans X.

Exercice 18

Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que $A \subset X$ rencontre toute partie dense dans X si et seulement si $\mathring{A} \neq \varnothing$.

Exercice 19

a) Soit $(G,+)$ un sous-groupe fermé de $(\mathbb{R},+)$. Montrer que soit $G = \mathbb{R}$, soit $G = \{0\}$, soit $G = a\mathbb{Z}$ où $a = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$ (on justifiera que a est bien défini et on montrera que a appartient à $\overline{G}$).

b) Soit maintenant $(G,+)$ un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non nécessairement fermé.

(i) Montrer que $\overline{G}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

(ii) En déduire que soit G est dense dans $\mathbb{R}$, soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$.

c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $H = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ak + bl \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$.

(i) Vérifier que H est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

(ii) A quelle condition existe-t-il $c \in \mathbb{R}$ tel que $H = c\mathbb{Z}$?

(iii) En déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 20

On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle. Déterminer les points isolés et les points d'accumulation de $\mathbb{Q}$.

Exercice 21

Soient (E, d) un espace métrique, A un sous-ensemble de E. Montrer que l'ensemble points d'accumulation de A est toujours fermé. Qu'en est-il de ses points isolés ?

Exercice 22

Soient (E, d) un espace métrique, A un sous-ensemble de E.

a) Montrer que $\partial A = \partial(E \backslash A)$.

b) Soit $x \in \overline{A} \backslash A$. Montrer que pour tout ouvert $\mathcal{V}$ contenant x, $\mathcal{V} \cap A$ n'est jamais fini.

c) En déduire que, si A est ouvert, tout $x \in \partial A$ est un point d'accumulation de A.

Exercice 23

Déterminer les valeurs d'adhérence de chacune des suites $(u_k)_{k \geqslant 0}$ suivantes :

a) $u_k = (-1)^k$,

b) $u_k = \sin \frac{k\pi}{3}$,

c) $u_k = e^{\sqrt{2}ki}$,

d) $u_k = (-1)^k\, k$.

Diamètre

Exercice 24

On munit $C([0,1])$ de la métrique d définie par $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$. Déterminer le diamètre de

a) $\{f \in C([0,1]) \mid 0 \leqslant f \leqslant 1\}$;

b) $\{f \in C([0,1]) \mid 0 \leqslant f \leqslant 1,\ f(0) = 0\}$.

Exercice 25

Soient (E, d) un espace métrique, et A et B des parties de E.

a) Montrer que si $A \subset B$ alors $\operatorname{diam} A \leqslant \operatorname{diam} B$.

b) Montrer que $\operatorname{diam} \mathring{A} \leqslant \operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$.

c) Montrer par un exemple que l'inégalité $\operatorname{diam} \mathring{A} \leqslant \operatorname{diam} A$ peut être stricte.

d) Montrer que $\operatorname{diam}(\operatorname{Fr}(A)) \leqslant \operatorname{diam} A$.

e) On suppose dans cette question que E est un espace vectoriel normé et que A est une partie non vide et bornée de E.

(i) Soit $x \in A$ et $u \in E$, $u \neq 0$. On considère $X = \{t \geqslant 0 : x + tu \in A\}$. Justifier que $\sup X$ existe dans $\mathbb{R}$.

(ii) En déduire que tout demi-droite issue d'un point x de A rencontre $\operatorname{Fr}(A)$ (i.e. l'intersection entre la demi-droite et la frontière de A est non vide).

(iii) En déduire que $\operatorname{diam}(\operatorname{Fr}(A)) = \operatorname{diam} A$.

Topologie induite, topologie produit

Exercice 26 Soient $(X_i, d_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'espaces métriques, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ le produit cartésien muni de distance usuelle

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(x_i, y_i),$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$. Le but de l'exercice est de démontrer les deux résultats suivants énoncés en cours :

a) Montrer qu'une suite $(x^{(k)})_k = ((x_1^{(k)}, \ldots x_n^{(k)}))_k$ de X converge vers $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans (X, d_∞) si et seulement si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, la suite $(x_i^{(k)})_k$ tend vers x_i dans (X_i, d_i).

b) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ et $r > 0$. Montrer que

$$B_X(x, r) = \prod_{i=1}^n B_{X_i}(x_i, r), \qquad (1)$$

où $B_X(x, r)$ (respectivement $B_{X_i}(x_i, r)$) désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r dans X (respectivement la boule ouverte de centre x_i et de rayon r dans X_i).

c) Est-ce que la formule (1) est vraie si on remplace les boules ouvertes par les boules fermées ?

d) Est-ce que la formule (1) est vraie si on remplace la distance d_∞ par une distance équivalente, par exemple par $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)$?

Exercice 27 On rappelle (voir cours) que si $(X_i, d_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille finie d'espaces métriques et si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de X_i, alors $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n$ est un ouvert de $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ (muni de la distance usuelle d_∞). Que pensez-vous de la réciproque ? Autrement dit, est-ce qu'un ouvert de X s'écrit toujours comme le produit cartésien d'ouverts de X_i ?

Exercice 28 Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On munit A de la topologie induite. Le but de l'exercice est de démontrer les résultats suivants vus en cours (mais dont la preuve a été laissée en exercice) :

a) Soit $\mathcal{O} \subset A$. Montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de A si et seulement si il existe un ouvert Ω de X tel que $\mathcal{O} = \Omega \cap A$.

b) Soit $F \subset A$. Montrer que F est un fermé de A si et seulement si il existe un ouvert G de X tel que $F = G \cap A$.

c) Soit $B \subset A$. Montrer que $\mathrm{Int}_X(B) \cap A \subset \mathrm{Int}_A(B)$, où $\mathrm{Int}_X(B)$ (respectivement $\mathrm{Int}_A(B)$) désigne l'intérieur de B dans (X, d) (respectivement dans (A, d_A) avec $d_A = d|A \times A$). Donner un exemple montrant qu'il n'y a pas égalité en général.

d) Soit $B \subset A$. Montrer que $\overline{B}^A = \overline{B} \cap A$, où $\overline{B}$ (respectivement $\overline{B}^A$) désigne l'adhérence de B dans X (respectivement dans A).

Exercice 29 Montrer que l'intervalle $]1, 2]$ est un fermé de $]1, 3[$ pour la topologie induite par $\mathbb{R}$. Est-ce que $]1, 2]$ est un fermé de $\mathbb{R}$?

Exercice 30 Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d).

a) Montrer que si A est un ouvert de X, alors les ouverts de A sont les ouverts de X contenus dans A.

b) Montrer que si A est un fermé de X, alors les fermés de A sont les fermés de X contenus dans A.

TD3 - Applications continues

Propriétés générales de la continuité

Exercice 1

Exhiber deux espaces métrique (X, d) et (Y, d') et une application continue $f : (X, d) \to (Y, d')$ tels que $\mathcal{U}$ ouvert de X n'implique pas que $f(\mathcal{U})$ soit ouvert dans Y.

Exercice 2

Soit $f : (X, d) \to (Y, d')$ une application entre 2 espaces métriques. Montrer que f est continue si et seulement si pour toute partie A de X, $f(\overline{A})$ est inclus dans $\overline{f(A)}$.

Exercice 3

Soit E un espace métrique et $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux applications continues. Que peut-on dire de $A = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$, $B = \{x \in E \mid f(x) > g(x)\}$ et $C = \{x \in E \mid f(x) \geqslant g(x)\}$?

Exercice 4

Soient f et g deux applications continues d'un espace métrique E_1 dans un espace métrique E_2. Montrer que $A = \{x \in E_1 \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E_1.

Exemples d'applications continues

Exercice 5

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Montrer que

a) Toute application constante sur E est continue.

b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $a \in E$, l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) = \lambda x + a \end{array} \right.$ est lipschitzienne.

c) Montrer que $x \mapsto \|x\|$ est continue.

Exercice 6

Soit $E = C([0;1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Vérifier que l'application $E \ni f \mapsto \int_0^1 |f(t)|dt$ est 1-lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. Les applications

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)dt \end{array} \right. \quad \text{et } B : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$$

sont-elles continues sur E si E est muni de la norme :

(a) $\|\cdot\|_\infty$, définie par $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$?

(b) $\|\cdot\|_1$, définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$?

(c) $\|\cdot\|_2$, définie par $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$?

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on pose $\|P\| = \max\{|a_k| \mid 0 \leqslant k \leqslant n\}$,

$$u(P)(X) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} a_k X^k \text{ et } v(P)(X) = \sum_{k=1}^n k a_k X^k.$$

Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E et que u et v sont des applications linéaires sur E. Les applications u et v sont-elles continues sur $(E, \|\cdot\|)$?

Homéomorphismes

Exercice 9

Soit E un espace métrique, d et δ deux distances sur E et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (E, d) & \longrightarrow & (E, \delta) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$

a) Montrer que d et δ sont topologiquement équivalentes si et seulement si f est un homéomorphisme.

b) Montrer que d et δ sont équivalentes si et seulement si f et f^{-1} sont lipschitziennes.

Exercice 10

Soit E un espace métrique, d_1 et d_2 deux métriques sur E. Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in E \times E$, on pose $\delta_1(x, y) = \max(d_1(x_1, y_1), d_1(x_2, y_2))$ et $\delta_2(x, y) = \max(d_2(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$.
Montrer que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si et seulement si $d_1 : (E \times E, \delta_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $d_2 : (E \times E, \delta_1) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont continues.
En particulier, d_1 est continue par rapport à δ_1.

Exercice 11

Soient f et g deux applications continues d'un espace métrique E_1 dans un espace métrique E_2. On suppose que $f = g$ sur une partie A de E_1, dense dans E_1. Montrer que $f = g$ sur E_1.
En particulier, deux applications définies et continues sur $\mathbb{R}$, qui coïncident sur $\mathbb{Q}$, sont égales.

Exercice 12

Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une isométrie entre deux espaces métriques, *ie* : $\forall x, y \in E$ on a $d_F(f(x), f(y)) = d_E(x, y)$. Montrer qu'alors f est un homéomorphisme sur son image. Est-elle nécessairement surjective ?

Exercice 13

Montrer (sans appliquer le théorème de Heine !) que l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0; 1]$ (on pourra raisonner par l'absurde et construire deux suites (x_n) et (y_n)).

Espaces d'applications et continuité

Exercice 14

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n, d'une norme $\|\cdot\|$.

a) Montrer que la trace est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que le déterminant est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices de taille n inversibles, est ouvert.

c) Montrer que $A_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rang}(M) \leqslant p\}$ est fermé. *(On pourra considérer les mineurs de taille $q > p$.)*

Exercice 15

Le but est de montrer que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni de N_∞ (par exemple).

a) Soit
$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
et pour $k \in \mathbb{N}^*$
$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{n}{k} \end{pmatrix}.$$
Montrer que $T_k \to T$ et que les matrices T_k sont diagonalisables pour k assez grand *(rappelons qu'une condition* suffisante *pour être dans $D_n(\mathbb{C})$ est d'avoir n valeurs propres distinctes).*

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: expliquer pourquoi il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. Montrer que l'application linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que $PT_kP^{-1} \to A$.

c) Conclure.

Exercice 16

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On note $F_b(X, Y)$ (respectivement $C_b(X, Y)$) l'espace des applications bornées (respectivement bornées et continues) de X dans Y. On définit pour $f, g \in F_b(X, Y)$
$$\delta(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

a) Vérifier que δ est une distance sur $F_b(X, Y)$.

b) Montrer que $C_b(X, Y)$ est fermé dans $F_b(X, Y)$.

Calculs de normes d'applications linéaires continues

Exercice 17

Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $u = (u_n)_{n \geqslant 0} \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, on pose $T : E \longrightarrow E$ et $\Delta : E \longrightarrow E$ définis par
$$T(u) = (u_{n+1})_{n \geqslant 0} \quad \text{et} \quad \Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \geqslant 0}.$$

(a) Montrer que T et Δ sont des applications linéaires continues de E dans E.

(b) Calculer leur norme.

Exercice 18

Soit $E = C([0,1];\mathbb{R})$ et $F = C^1([0,1];\mathbb{R})$. On pose pour $f \in E$ et $g \in F$

$$N_1(f) = \|f\|_\infty, \quad \text{et} \quad N_2(g) = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty.$$

a) Vérifier que N_2 est une norme sur F.

b) On pose

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad f \in E, x \in [0,1].$$

(i) Vérifier que si $f \in E$, alors $T(f) \in F$.

(ii) Montrer que T définit une application linéaire et continue de (E, N_1) dans (F, N_2).

(iii) Calculer la norme de T.

Exercice 19

On munit l'espace $E = C([0,1];\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Rappelons que

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2\,dt \qquad f \in E.$$

Pour $f \in E$ et $\varphi \in E$, on pose

$$T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt.$$

(a) Montrer que T_φ est une application linéaire continue de E dans $\mathbb{R}$ et calculer sa norme.

(b) Même question en remplaçant la norme $\|\cdot\|_2$ par la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Indication: Pour le calcul de la norme au (b), on pourra introduire la fonction $f_\varepsilon : t \longmapsto \dfrac{\varphi(t)}{|\varphi(t)| + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Exercice 20

Soit $E = C([-1,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On définit pour $f \in E$,

$$T(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_{-1}^0 f(t)\,dt.$$

a) Montrer que T est une forme linéaire continue sur E et que $\|T\| = 2$.
Indication: Pour le calcul de la norme, considérer la suite $(f_n)_n$ *définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & si\ -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n} \\ nx & si\ -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & si\ \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

b) Existe-t-il $f \in E$ de norme 1 telle que $|T(f)| = 2$?

TD4

Exercice 1

Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On pose $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$.
Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$.

Exercice 2

Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E. Montrer que s'il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui admet une limite $l \in E$, alors (x_n) converge vers l.

Exercice 3

Décrire les suites de Cauchy dans un espace E muni de la métrique discrète et montrer qu'un tel espace est complet.

Exercice 4

Déterminer si les suites $(u_n)_{n>0}$ suivantes sont de Cauchy :

a) $u_n = (-1)^n$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$;

b) $u_n = (n \sin \frac{1}{n}, \cos \frac{1}{n})$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$;

c) u_n dans $(C(\mathbb{R};\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, avec $u_n(t) = n - n^2|t|$ si $n|t| \leqslant 1$ et $u_n(t) = 0$ sinon.

Exercice 5

Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$.

a) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) \leqslant |x - y|$.

b) Mnotrer que d et $|\cdot|$ sont topologiquement équipementes.

c) En considérant la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = n$, montrer que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

Exercice 6

a) Montrer que $(\mathbb{R}_+, |\cdot|)$ est complet et que $f : x \mapsto \frac{x}{1-x}$ est un homéomorphisme de $[0; 1[$ sur $\mathbb{R}_+$.

b) Vérifier que la suite (u_n), avec $u_n = \tanh(n)$, est de Cauchy mais ne converge pas dans $[0; 1[$. La suite $\big(f(u_n)\big)$ est-elle de Cauchy dans $\mathbb{R}_+$?

Exercice 7

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Soit $A = B(0, 1)$. On considère deux distances sur A : $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ induite par la norme euclidienne, et $d_1(x, y) = \|x - y\|_2 + \left|\dfrac{1}{d_2(x, A^c)} - \dfrac{1}{d_2(y, A^c)}\right|$.

a) Vérifier que d_1 est une distance.

b) Montrer que l'identité $\mathrm{Id} : (A, d_1) \to (A, d_2)$ est un homéomorphisme.

c) Montrer que (A, d_2) n'est pas complet, mais que (A, d_1) est complet.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\Gamma := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ son graphe dans $\mathbb{R}^2$ euclidien.

a) Montrer que Γ est complet.

b) Est-ce encore vrai si f n'est pas continue ?

c) Est-ce que la complétude de Γ implique la continuité de f ?

Exercice 9

Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Montrer que N est une norme sur E, pour laquelle E est complet.

Exercice 10

On note $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles bornées que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit aussi $c_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0.

a) Montrer que $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

b) En déduire que $(c_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Exercice 11

Montrer que $\ell^p(\mathbb{K})$ est un espace de Banach, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Exercice 12 *(Théorème de Baire)*

Soit $(A_n)_n$ une suite d'ouverts denses dans un espace métrique complet (E, d).

a) Soit $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$.

(i) Montrer qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

(i) Pour tout $n \geqslant 0$, $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap A_n$,

(ii) Pour tout $n \geqslant 1$, $0 < r_n < \frac{1}{2^n}$.

(ii) Montrer que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. En déduire qu'elle converge. On note x_* sa limite.

(iii) Montrer que quels que soient $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, x_p appartient à $B(x_q, r_q)$. En déduire que x_* appartient à $B(x_0, r_0) \cap \bigcap_{n\geqslant 1} A_n$.

(iv) Montrer que $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n$ est dense dans E

b) Soit $X \subset \mathbb{R}$ un fermé dénombrable non vide. Montrer que X a au moins un point isolé (on pourra raisonner par l'absurde et considérer les ouverts $\omega_x = X\backslash\{x\}$ de X).

c) Soit $(F_n)_n$ une suite de fermés d'intérieur vide de E. Montrer que $\bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ est d'intérieur vide.

d) Montrer que $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$, quelle que soit la norme $\|\cdot\|$ considérée, n'est jamais complet (on pourra regarder la suite de fermés $\left(\mathbb{R}_n[X]\right)_n$ de $\mathbb{R}[X]$).

Exercice 13

Soit (E, d) un espace métrique complet, f une application de E dans E. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la n-ième itérée $f^n = f \circ \cdots \circ f$ soit strictement contractante. Montrer que f a un unique point fixe dans E.

Exercice 14

Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \qquad f \in E.$$

a) Vérifier que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

b) Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in E$ qui est le point fixe de l'opórateur T défini par

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(1-t^2)\,dt.$$

Indication: On pourra montrer que $T^2 = T \circ T$ est une application strictement contractante et appliquer le résultat de l'exercice 13.

c) En déduire qu'il existe une unique fonction $f \in E$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(1-x^2)$.

Exercice 15

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| < 1$. Montrer que, pour toute fonction bornée $g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, il existe une unique fonction bornée $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \lambda f(x+a) = g(x)$.

Exercice 16 *(Caractérisation des espaces de Banach)*

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On a vu en cours que si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, alors toute série absolument convergente est convergente. Le but de l'exercice est de montrer la réciproque, à savoir que si toute série normalement convergente est convergente, alors $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

On suppose que toute série normalement convergente converge. Soit $(x_n)_n \subset X$ une suite de Cauchy.

a) Construire une suite extraite $(x_{n_k})_k$ tel que pour tout k, $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ satisfait $\|y_k\| < \frac{1}{2^k}$.

b) En déduire que $\sum_{k\geqslant 0} y_k$, puis que $(x_n)_n$, convergent.

Exercice 17

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach.

a) Pour $a \in \mathcal{A}$, montrer que la série

$$\sum_n \frac{a^n}{n!}$$

converge vers un élément qu'on note e^a.

b) Vérifier que si $a, b \in \mathcal{A}$ commutent (c.-à-d. $ab = ba$), alors $e^a e^b = e^b e^a = e^{a+b}$.

TD5

Exercice 1

Les espaces suivants sont-ils compacts ?

a) $]0,1]$,

b) $[0;+\infty[$,

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+1\leqslant y\leqslant 2x+2\}$.

d) $\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*\}$ et $\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*\}\cup\{0\}$.

Exercice 2

Soit (E,d) un espace métrique. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de E dont on suppose qu'elle converge vers $\ell\in E$. Montrer que $K=\{u_n\mid n\geqslant 0\}\cup\{\ell\}$ est un compact de E.

Exercice 3

Montrer qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non trivial E n'est jamais compact. *Indication: Que peut-on dire de la suite $(n\,x)_{n\geqslant 0}$ si $E\ni x\neq 0$?*

Exercice 4

a) Soit X un espace topologique et C un espace compact. On considère la première projection $\pi : X\times C\to X$ définie par $f(x,y)=x$. Montrer que π est fermée, c.-à-d. que pour tout F fermé de $X\times C$, $\pi(F)$ est fermé de X.

b) Soit A un fermé de $\mathbb{R}^2$. Pour $i=1,2$ on note $p_i:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la i-ème projection $p_i(x_1,x_2)=x_i$. Montrer que que si $p_2(A)$ est compact alors $p_1(A)$ est fermé.

Exercice 5

Soit $O(n;\mathbb{R})=\{M\in\mathcal{M}(n;\mathbb{R})\mid MM^t=\mathrm{Id}\}$ l'ensemble des matrices orthogonales de dimension n dans $\mathbb{R}$. Montrer que $O(n;\mathbb{R})$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{M}(n;\mathbb{R})$.

Exercice 6

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$, on suppose que la sphère unité $S(0,1)=\partial B(0,1)$ est compacte. Montrer que $BF(0,1)$ est compacte *(on pourra associer $x_n/\|x_n\|$ à x_n si $x_n\neq 0$ dans E).*

Exercice 7

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie, K et F des parties non vides de E et soit $d(K,F)=\inf_{x\in K,y\in F} d(x,y)$. On suppose de plus que K est compacte et F fermée.

a) Montrer qu'il existe $a\in K$ et $b\in F$ tels que $d(K,F)=d(a,b)$.

b) On suppose en plus que $K\cap F=\varnothing$. En déduire que $d(K,F)>0$. Est-ce encore vrai si K est seulement supposée fermée ?

Exercice 8

Soit (K,d) un espace métrique compact. Si $x\in K$ et $\varnothing\neq F\subset K$, la distance de x à F est définie par : $d(x,F)=\inf_{y\in F} d(x,y)$.

a) Justifier que pour tout $r>0$, il existe $a_1,\ldots,a_n\in K$ tels que $K\subset\bigcup B(a_j,r)$. En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, il existe une partie finie $F^{(k)}$ de K telle que $d(x,F^{(k)})<\frac{1}{k}$ pour tout $x\in K$.

b) Montrer que $\forall x\in K$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists a\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}F^{(k)}$ tel que $d(x,a)<\varepsilon$. En déduire que K possède une partie dense dénombrable.

c) Donner un exemple d'une telle partie si $K=\overline{B}_2(0,1)$ est la boule unité fermée du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\|A\|:=n\sup_{i,j}|a_{ij}|$.

a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que pour tout $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\cdot B\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$.

c) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|(A,B)\|_\infty:=\max(\|A\|,\|B\|)$. Montrer que $\phi:\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\phi(A,B)=A\cdot B$ est continue.

d) Montrer que les applications $f,g:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par $f(A)=A^t$ (la transposée de A) et $g(A)=\overline{A}$ où, si $A=(a_{ij})$, $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$, sont continues.

En déduire que $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \overline{A}^t \cdot A = I_n\}$ est compact.

e) Montrer que le déterminant définit une application continue de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. En déduire que $GL_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est ouvert.

f) Montrer que $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 10

Soient E_1 un espace métrique compact, E_2 un espace métrique et $f : E_1 \to E_2$ une application continue et injective. Montrer que f est un homéomorphisme de E_1 sur $f(E_1)$.

Exercice 11

Soit (E, d_E) un espace métrique compact et (F, d_F) un espace métrique. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application localement bornée, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, il existe un voisinage V_x de x sur lequel f est bornée. Montrer que f est bornée sur E.

Exercice 12

Soit (X, d_X) un espace métrique et $f : X \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy, \qquad x \in X,$$

est continue sur X.

Exercice 13

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Si A et B sont deux parties de E, on note $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

a) Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.

b) Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Elle est dite *propre* si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

a) Montrer que si f est propre, alors l'image par f de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

b) Etablir l'équivalence suivante : l'application f est propre si et seulement si elle a la propriété suivante :

$$\|f(x)\| \to \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to \infty.$$

Exercice 15

Soit $E = C([0,1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer, sans utiliser le théorème de Riesz, que la boule unitée fermée de E n'est pas compacte.
Indication: On pourra pour cela considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ où $f_n(t) = 2n \int_0^t \mathbb{1}_{[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]}(t)dt$.

Exercice 16

On se donne une métrique d sur $X = [0,1]$ telle que l'identité $i : (X, |\cdot|) \longrightarrow (X, d)$ soit continue.

a) Montrer que tout sous-ensemble de X compact pour la topologie usuelle est aussi compacte pour la topologie définie par d. Montrer cette propriété pour les fermés.

b) En déduire que d et $|\cdot|$ sont topologiquement équivalentes sur X.

TD6

Exercice 1

Les espaces suivants sont-ils connexes ? Connexes par arcs ?

a) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ;

b) une boule dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ;

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$;

d) la sphère unité $S(0,1)$ dans un espace vectoriel normé.

Exercice 2

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que f est strictement monotone. *Indication: On pourra considérer l'image de* $\{(x,y) \in I^2 \mid x < y\}$ *par l'application* $(x,y) \in I^2 \mapsto f(y) - f(x) \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Montrer que les espaces suivants ne sont pas homéomorphes :

a) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$;

b) $\mathbb{R}^2\backslash\{x_0\}$, le cercle $C(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, et un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ une application continue. Supposons que $f(t)^2 = 1$ pour tout $t \in [a,b]$. Montrer que f est constante. Que peut-on dire si on suppose $e^{if(t)} = 1$ pour tout $t \in [a,b]$?

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2. Montrer que pour toute application continue $f\colon S(0,1) \to \mathbb{R}$ il existe $w \in S(0,1)$ tel que $f(w) = f(-w)$ (on pourra introduire la fonction $t \mapsto f(t) - f(-t)$).

Exercice 6

On note $F = \{0\} \times [-1;1] \cup [-1;1] \times \{0\}$, muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que F est compact et connexe.

b) Montrer que si $f : F \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(F)$ est un segment.

c) Déterminer les points $x \in F$ pour lesquels $F\backslash\{x\}$ est connexe.

d) Montrer que F n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 7 *Partie connexe non connexe par arcs*

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de la fonction $x \in]0,1] \mapsto \sin(1/x)$.

a) Montrer que Γ est connexe par arcs.

b) Montrer que son adhérence $\overline{\Gamma}$ (que l'on précisera) est connexe.

c) On va montrer que $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un chemin continu $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y)$ tel que $\gamma(0) = (1, \sin(1))$ et $\gamma(1) = (0,0)$.

(i) Soit $B = \{t \in [0,1] \mid \gamma_x(t) = 0\}$. Justifier l'existence de $b := \inf B$. Montrer que $b > 0$ et que $\gamma_x(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0,b[$.

(ii) Montrer que pour tout $a \in [0,b[$, l'ensemble $\frac{1}{\gamma_x}(]a,b[)$ contient un intervalle de longueur 2π. En déduire qu'il existe $s,t \in]a,b[$ tels que $\gamma_y(s) = 1$ et $\gamma_y(t) = -1$.

(iii) En déduire que $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arc.

Exercice 8

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, mais que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 9

Soit O un ouvert d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E.

a) Montrer que, pour tout $x \in O$, $\{y \in O \mid \exists \gamma \in \mathcal{C}([0;1], O),\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\}$ est un ouvert de E. En déduire une partition de O en ouverts disjoints.

b) Montrer que O est connexe si et seulement si O est connexe par arcs.

Exercice 10

Si U est une partie ouverte de la droite réelle $\mathbb{R}$, munie de la métrique usuelle, montrer que

a) U est connexe si et seulement si U est un intervalle ouvert ;

b) lorsque U n'est pas connexe, on peut trouver une famille dénombrable ou finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints I_k telle que $U = \cup_k I_k$.

Que peut-on dire d'un fermé de $\mathbb{R}$ en rapport avec les intervalles fermés ?

Exercice 11

Soit $\mathcal{P}$ une partie dénombrable de $\mathbb{R}^2$. Montrer que le complémentaire de $\mathcal{P}$ est connexe par arcs.

Exercice 12

Soit K un compact dans un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2.

a) Montrer que K^c admet une unique composante connexe non bornée, notée C_∞.

b) Soit $a \notin K \cup C_\infty$. Montrer qu'il existe R tel que $S(a, R) \subset C_\infty$, puis que l'application

$$p\colon x \in K \mapsto a + R\frac{x-a}{|x-a|} \in E$$

définit une surjection continue de K sur $S(a, R)$.

c) En déduire que si E est de dimension infinie, alors le complémentaire d'un compact K est toujours connexe. Ce résultat est-il vrai en dimension finie ?

Exercice 13

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On note A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $A = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$. Soit encore $g : A \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

a) Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que $g(A)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

d) Montrer que $g(A) \subset f'(I)$.

e) Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

f) Si I est ouvert, peut-on en conclure que $f'(I)$ est ouvert ?

Exercice 14

Soit (X,d) un espace métrique non vide. On dit que X est bien chainé si pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $x, y \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y \in X$ tels que

$$\text{pour } j \in \{0, \cdots, n-1\}, \qquad d(x_j, x_{j+1}) < \varepsilon.$$

a) Pour $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, on pose $C_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}, x_0 = x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ tels que pour tout $j, d(x_j, x_j$ $\varepsilon\}$. Montrer que $C_\varepsilon(x)$ est ouvert et fermé dans X. En déduire que si X est connexe, alors X est bien chainé.

b) On suppose dans cette question que X est compact et bien chainé.

(i) Soit A et B deux fermés disjoints de X. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $d(a, b) \geqslant \varepsilon$.

(ii) Montrer que X est connexe.

c) Si X est seulement fermé et bien chainé, est-il toujours connexe ? Justifier ou donner un contre-exemple.

Exercice 15 *(Rattrapage, juin 2013)*

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. On note $BF(0, r)$ la boule fermée dans $\mathbb{R}^2$ centrée à l'origine et de rayon $r > 0$, et $\Omega_r = \mathbb{R}^2 \backslash BF(0, r)$ son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Vérifier que si $x, y \in BF(0, r)$ et $t \in [0;1]$, alors $((1-t)x+ty) \in BF(0, r)$, et en déduire que $f(BF(0, r))$ est connexe.

b) Montrer que Ω_r est connexe par arcs (on pourra s'aider d'un dessin, *sans oublier de le justifier*), puis que $f(\Omega_r)$ est connexe.

c) Montrer que $f(BF(0, r))$ et $f(\Omega_r)$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$, puis qu'il existe des réels $a_r \leqslant b_r$ tels que

$$f(\mathbb{R}^2) = [a_r; b_r] \cup f(\Omega_r).$$

d) On suppose de plus que f est surjective. Montrer que $\forall r > 0,\ f(\Omega_r) = \mathbb{R}$. En déduire que pour tout $c \in \mathbb{R}$, on peut construire une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$ telle que $\|x_n\| \to +\infty$ et $\forall n,\ f(x_n) = c$.

TD7

Exercice 1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une partie non dénombrable A de E tel que pour tous $x, y \in A$ avec $x \neq y$, $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$. Montrer que E n'est pas séparable. En déduire que $\ell^\infty(\mathbb{R})$, l'ensemble des suites réelles bornées, n'est pas séparable.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si E est séparable et de dimension infinie, il existe une suite dense $(v_n)_n$ de vecteurs linéairement indépendants de E (une famille de vecteurs infinie est dite linéairement indépendante si toute sous-famille finie est linéairement indépendante au sens usuel).

Exercice 3

Soit $H = \ell^2(\mathbb{R})$, l'ensemble des suites de nombres réels de carré sommable, muni du produit scalaire défini pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\langle u, v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$. On note $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \exists N \in \mathbb{N}, u_n = 0\ \forall n \geqslant N\}$. Déterminer $F^\perp$ et montrer que $H \neq F \oplus F^\perp$. Comparer avec votre cours...

Exercice 4

a) Soient $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$, $x \in H$ tels que pour tout $y \in H$, la suite $(\langle x_n, y\rangle)_n$ converge vers $\langle x, y\rangle$ et la suite $(\|x_n\|)_n$ converge vers $\|x\|$. Montrer que $(x_n)_n$ converge vers x. *(Appliquer l'identité du parallèlogramme à $\|x_n - x\|^2$.)*

b) Soit $\ell^2(\mathbb{R}) = \{u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\geqslant 0} u_n^2 \text{ converge}\}$ munit du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$, soit $x^{(n)} \in \ell^2(\mathbb{R})$ définie par $x_k^{(n)} = 0$ si $k \neq n$, $x_n^{(n)} = 1$.

(i) Montrer que $\left(x^{(n)}\right)_n$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{R})$.

(ii) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\langle y, x^{(n)}\rangle = 0$ pour tout $y \in \ell^2(\mathbb{R})$. En déduire que le résultat de la question (**??**) est faux sans la seconde hypothèse.

Exercice 5

Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert réel, $\|\cdot\|$ la norme associée. On note H' le dual topologique de H : $H' = \{\varphi \mid H \to \mathbb{R},\ \varphi \text{ linéaire et continue}\}$, muni de la norme $\|\cdot\|_*$ définie pour $\varphi \in H'$ par $\|\varphi\|_* := \sup_{x\in H, \|x\|=1} \|\varphi(x)\|$.

a) Soient $a \in H$ et $\varphi_a : H \to \mathbb{R}$ l'application définie pour $x \in H$ par $\varphi_a(x) = \langle x, a\rangle$.

(i) Montrer que φ_a appartient à H'.

(ii) Calculer $\|\varphi_a\|_*$.

(iii) En déduire que pour tout $x \in H$, $x = 0$ si et seulement si pour tout $\varphi \in H'$, $\varphi(x) = 0$.

b) Soit $\varphi \in H' \backslash \{0\}$ et $a \in (\ker\varphi)^\perp \backslash \{0\}$. Vérifier que pour tout $x \in H$, $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ appartient à $\ker\varphi$.

c) En déduire que $\Phi : H \to H'$, définie pour $b \in H$ par $\Phi(b) = \varphi_b$, est une isométrie bijective (théorème de représentation de Riesz).

d) Application : Soit $E := \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = 0\}$. On munit E du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

(i) Montrer que $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ est linéaire et continue sur E.

(ii) Existe-t-il $a \in E$ tel que $\forall u \in E$, $\varphi(u) = \langle u, a\rangle$? Que peut-on en déduire sur E ?

e) Soit F un sous espace fermé de H, $F \neq H$. Montrer qu'il existe $\varphi \in H'$ non nulle telle que $\varphi|_F = 0$. Cela montre que tout sous-espace strict de H est inclus dans le noyau d'un élément non nul de H'.

f) Soit ψ une application linéaire continue de F à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\Psi \in H'$ tel que

(i) $\Psi|_F = \psi$,

(ii) $\|\Psi\|_* = \sup_{x\in F, \|x\|=1} \|\psi(x)\|$.

(On pourra essayer d'étendre ψ sur $F^\perp$...)

g) Soit $A \subset H$ et $\text{span}(A) = \{\sum_{j\in J} \lambda_j a_j \mid J \text{ fini },\lambda_j \in \mathbb{R},\ a_j \in A\}$. Montrer que $\text{span}(A)$ est dense dans H si et seulement si pour tout $x \in H$, $\langle x, a\rangle = 0$ quel que soit $a \in A$, implique $x = 0$.

Exercice 6

Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, $p :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^n p(t) dt$ soit finie. Soit encore H l'ensemble des fonctions f à valeurs réelles continues sur I telles que $\int_a^b f^2(t)p(t)dt$ soit finie. On définit pour $f, g \in H$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)p(t)dt.$$

a) Montrer que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien. On note $\| \cdot \|$ la norme associée.

b) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_n$ telle que

(i) Pour tout n, P_n est unitaire de degré n.

(ii) Pour tout $n \neq m$, $\langle P_n, P_m \rangle = 0$.

Cette suite est appelée suite de polynômes orthogonaux pour le poids p sur $]a, b[$.

c) On suppose dans cette question que $I =]0, 1[$ et que $p(t) = 1$ pour tout $t \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$. Déterminer U_0, U_1 et U_2 et montrer que $(U_n)_n$ est une base hilbertienne de H (on pourra utiliser le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs rélles ou complexes est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales).

d) On revient au cas général. Montrer qu'il existe deux suites $(\lambda)_n$ et $(\mu_n)_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+2} = (X + \lambda_n)P_{n+1} + \mu_n P_n.$$

Préciser le signe de μ_n.

e) On veut montrer que pour tout $n \geqslant 1$, P_n possède n racines simples dans $]a, b[$. Soient $\alpha_1, \dots \alpha_p$ les racines de multiplicité impaire de P_n et $Q(X) = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_p)$. Justifier que QP_n est de signe constant. Conclure.

DS1

13 novembre 2019

[durée : 2 heures]

Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet comporte trois exercices qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1 (Questions de cours) *Les trois questions de cours sont indépendantes.*

Soit (X, d) un espace métrique.

a) Montrer que pour tous $(x, y, z) \in X^3$, on a

$$d(y, z) \geqslant |d(x, y) - d(x, z)|.$$

b) Soit $x \in X$ et $r > 0$. Montrer que $B(x, r) = \{y \mid d(x, y) < r\}$ est un ensemble ouvert de X.

c) Soit $f : X \longrightarrow X$ une application et $x \in X$. Montrer que f est continue en x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x, alors la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Exercice 2 (Linéarité dans l'espace des suites)

Soit

$$c_0 = \Big\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Big\}$$

et

$$\ell^\infty = \Big\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \Big\}.$$

On rappelle que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel ℓ^∞ est muni de la norme

$$\|u\|_\infty := \sup_{n\geqslant 0} |u_n|, \quad \text{pour } u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty.$$

a) Justifier que c_0 est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞.

b) Montrer que c_0 est fermé dans ℓ^∞.

c) Montrer que l'intérieur de c_0 est vide.

d) Soit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} c_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} \end{array} \right. .$$

(i) Vérifier que φ est bien définie, linéaire et continue, et montrer que $\|\varphi\|_{\mathcal{L}(c_0,\mathbb{R})} \leqslant 1$.

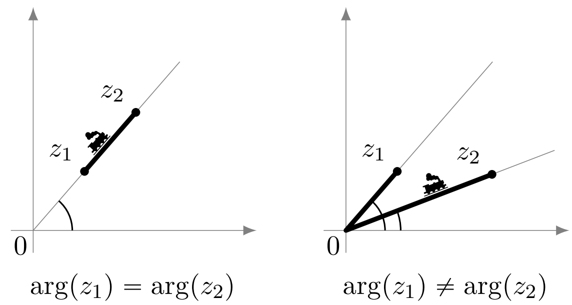
(ii) Montrer que $\|\varphi\|_{\mathcal{L}(c_0,\mathbb{R})} = 1$.

T.S.V.P.

Exercice 3 (Distance SNCF)

Pour un nombre complexe z, on note $\arg(z)$ son argument [1] dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ on définit

$$d_s(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1 - z_2| & \text{si } \arg(z_1) = \arg(z_2), \\ |z_1| + |z_2| & \text{sinon.} \end{cases}$$



a) Vérifier que d_s est une distance sur $\mathbb{C}$. *(On appelle cette distance la distance* SNCF.*)*

b) Soit $z_0 = 2$.

(i) Déterminer $B_{d_s}(z_0, 1)$, la boule ouverte de centre z_0 et de rayon 1 pour la distance d_s.

(ii) Soit d_u la distance usuelle sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire $d_u(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Est-ce que $B_{d_s}(z_0, 1)$ est un ouvert pour $(\mathbb{C}, d_u)$? Justifier.

(iii) Est-ce que les distances d_u et d_s sont équivalentes ?

c) On notera X_u l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de la distance d_u, et X_s l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de la distance d_s.

(i) Montrer que l'application $f : \begin{cases} X_s & \longrightarrow & X_u \\ z & \longmapsto & z+1 \end{cases}$ est lipschitzienne.

(ii) Montrer que l'application $f : \begin{cases} X_s & \longrightarrow & X_s \\ z & \longmapsto & z+1 \end{cases}$ n'est pas continue.

Indication: on pourra considérer la suite $z_n = \frac{i}{n}$, $n \geqslant 1$.

1. En fixant arbitrairement que $arg(0) = 0$.

Solutions du DS2

8 janvier 2020

[durée : 3 heures]

Exercice 1 *(Questions de cours)*

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a) $A =]-1,1[$ est un ouvert dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

b) $B = [1,2[$ est un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

c) $C = \{(\sin(t), \cos(t), e^t) \mid t \in [0,1]\}$ est un compact de $\mathbb{R}^3$ *(muni de la norme euclidienne)*.

d) La frontière d'une partie non vide d'un espace métrique est non vide.

e) Soit $n \geqslant 1$. Sur $\mathbb{R}_n[X]$, les polynômes de degré au plus n, on considère les deux normes définies pour $p \in \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\|p\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)| \quad \text{et} \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Alors il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$c_1 \|p\|_\infty \leqslant \|p\|_1 \leqslant c_2 \|p\|_\infty .$$

Solution:

a) L'affirmation est fausse : $A =]-1,1[$ n'est pas un ouvert dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que A soit un ouvert de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Alors, comme $0 \in A$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(0,r)$ de centre 0 et de rayon r (dans $\mathbb{C}$) est contenue dans A. Mais ceci est absurde car par exemple $\frac{ir}{2} \in B(0,r)$ et $\frac{ir}{2} \notin A$.

b) L'affirmation est fausse : $B = [1,2[$ n'est pas un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. En effet, raisonnons aussi par l'absurde et supposons que B soit un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Considérons alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$. Alors pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \in B$ et $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 2$. Mais si B était fermé alors 2 appartiendrait à B, ce qui n'est pas.

c) L'affirmation est vraie : C est un compact de $\mathbb{R}^3$. En effet, remarquons que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \varphi(t) = (\sin(t), \cos(t), e^t) \end{array}$$

est continue et $[0,1]$ est un compact. Or l'image d'un compact par une application continue est un compact. Ainsi, l'image de φ est un compact de $\mathbb{R}^3$. Donc $C = \varphi([0,1])$ est un compact de $\mathbb{R}^3$.

d) L'affirmation est fausse : la frontière d'une partie non vide d'un espace métrique n'est pas toujours non vide. Par exemple la frontière de l'espace tout entier est vide.

e) L'affirmation est vraie. En effet, remarquons que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie (de dimension $n+1$). Or d'après le cours, on sait que si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes. On en déduit donc que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$ et donc il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$c_1 \|p\|_\infty \leqslant \|p\|_1 \leqslant c_2 \|p\|_\infty .$$

Exercice 2 *(Normes fonctionnelles)*

Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe C^1 *(c.-à-d. dérivables et à dérivée continue sur* $[0,1]$*)*. On considère sur E les deux normes suivantes *(on ne demande pas de vérifier que ce sont bien des normes)* :

$$N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

où $\|g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|$.

a) Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

b) Sont-elles équivalentes à la norme $N(f) = \|f\|_\infty$? Justifier.

Solution:

a) Soit $f \in E$. Tout d'abord, il est clair que $|f(0)| \leqslant \|f\|_\infty$, ce qui donne immédiatement

$$N_1(f) \leqslant N_2(f).$$

D'autre part, pour $t \in [0,1]$, remarquons que

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\, du,$$

ce qui donne

$$|f(t)| \leqslant |f(0)| + \int_0^t |f'(u)|\, du \leqslant |f(0)| + t\|f'\|_\infty \leqslant |f(0)| + \|f'\|_\infty = N_1(f)$$

On a donc montré que pour tout $t \in [0,1]$, on a $|f(t)| \leqslant N_1(f)$, ce qui implique que $\|f\|_\infty \leqslant N_1(f)$. Comme d'autre part, on a clairement $\|f'\|_\infty \leqslant N_1(f)$, on en déduit que $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leqslant 2N_1(f)$. Ainsi, on a montré que pour tout $f \in E$, on a

$$N_1(f) \leqslant N_2(f) \leqslant 2N_1(f),$$

ce qui montre que N_1 et N_2 sont équivalentes.

b) Les deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes à la norme N. En effet, supposons par l'absurde que N_1 est équivalente à la norme N. Alors il existerait une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $f \in E$, on aurait

$$N_1(f) \leqslant cN(f).$$

En particulier, pour $n \geqslant 1$, considérons $f_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$. Alors $f_n'(t) = nt^{n-1}$. On remarque alors que $N_1(f_n) = |f_n(0)| + \|f_n'\|_\infty = n$ et $N(f_n) = \|f_n\|_\infty = 1$ ce qui donnerait $n \leqslant c$. On obtient donc une contradiction en faisant tendre n vers l'infini. Ainsi N_1 et N ne sont pas équivalentes. Comme N_2 est équivalente à N_1, on en déduit que N_2 n'est pas équivalente à N (par transitivité de la relation d'équivalence des normes).

Exercice 3 *(Complétude, compacité et homéomorphismes)*

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une bijection.

a) Dans cette question, on suppose que (Y, d_Y) est complet, que f est uniformément continue et que f^{-1} est continue. Montrer alors que (X, d_X) est complet.

b) On suppose maintenant que (X, d_X) est compact et que f est continue.

(i) Soit $A \subset X$. On notera $g = f^{-1} : Y \longrightarrow X$. Justifier que $g^{-1}(A) = f(A)$ où $g^{-1}(A)$ désigne l'image réciproque de A par g.

(ii) Montrer que f^{-1} est continue.

(iii) Peut affirmer que (Y, d_Y) est complet ? Justifier.

Solution:

a) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans (X, d_X) et $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Comme $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n, m \geqslant N \Longrightarrow d_X(x_n, x_m) < \delta.$$

Alors par (1), on en déduit que

$$n, m \geqslant N \Longrightarrow d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Ainsi, on obtient que la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y) qui est complet. On en déduit donc qu'il existe $y \in Y$ tel que $f(x_n) \xrightarrow{n\to+\infty} y$ dans (Y, d_Y). En utilisant maintenant le fait que f^{-1} est continue, on obtient alors que $x_n = f^{-1}(f(x_n)) \xrightarrow{n\to+\infty} f^{-1}(y)$ dans (X, d_X). On a donc montré que si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans (X, d_X), alors elle converge. Ceci montre donc que (X, d_X) est complet.

b) (i) Par définition, on a $g^{-1}(A) = \{y \in Y \mid g(y) \in A\} = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \in A\}$. Comme f est bijective, on a $f^{-1}(y) \in A$ si et seulement si $y \in f(A)$. Ainsi $g^{-1}(A) = \{y \in Y \mid y \in f(A)\} = f(A)$.

(ii) D'après un résultat du cours, rappelons que $g = f^{-1} : Y \longrightarrow X$ est continue si et seulement si pour tout fermé F de X, alors $g^{-1}(F)$ est un fermé de Y. Soit donc F un fermé de X. D'après (i), on a $g^{-1}(F) = f(F)$. Or F étant fermé dans X qui est compact, on en déduit que F est compact. De plus, f est continue et l'image d'un compact par une application continue est un compact. Ainsi, $f(F)$ est un compact de Y, donc en particulier $g^{-1}(F) = f(F)$ est un fermé de Y. On conclut finalement que $g = f^{-1}$ est continue.

(iii) L'espace (Y, d_Y) est complet. En effet, comme f est une bijection, on a $Y = f(X)$ et comme l'image d'un compact par une application continue est un compact, on en déduit que Y est compact. Or un compact est complet. Ainsi Y est complet.

Exercice 4 *(Partie connexe non connexe par arcs)* Dans le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ on considère $A =]0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n\geqslant 1} \left(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]\right)$ et $A' = \{(0,1)\}$. On pose $B = A \cup A'$.

a) Représenter graphiquement A et A'.

b) Montrer que $B \subset \overline{A}$.

c) Montrer que A est connexe par arcs et que B est connexe.

d) On souhaite montrer que B n'est pas connexe par arcs.
Soit $\gamma\colon [0,1] \to B$ une application continue telle que $\gamma(0) = (0,1)$ et $\gamma(1) = (1,1)$. On note, pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t) = \big(\gamma_x(t), \gamma_y(t)\big)$.

(i) Montrer que $t_* := \sup \gamma^{-1}(A') \in [0,1[$.

(ii) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in]t_*, t_* + \delta[$, $\gamma_x(t) > 0$ et $\gamma_y(t) > 0$.

(iii) En déduire que $\gamma_x(t) \in \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ pour $t \in]t_*, t_* + \delta[$, puis aboutir à une contradiction et conclure.

Solution:

M52_2019-20-DS2_img_exo4a.pdf

a) *Voir l'image ci-contre.*

b) Soit $x_n = (\frac{1}{n}, 1) \in A$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $x_n \xrightarrow{n\to\infty} (0,1)$ et donc $A' \subset \overline{A}$. Et comme de plus $A \subset \overline{A}$ par définition, nous avons $B \subset \overline{A}$.

c) Tout point $(\lambda, 0)$ de $]0,1] \times \{0\}$ est connecté par un chemin rectiligne, dans A, à $(1,0)$. Tout point $(\frac{1}{n}, \lambda)$ de $\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ est connecté par un chemin rectiligne, dans A, à $(\frac{1}{n}, 0) \in]0,1] \times \{0\}$. Ainsi tout point de A est connecté par chemin dans A à $(0,1) \in A$. En conclusion A est connexe par chemins, donc A est connexe et donc B est connexe car il vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$.

d) (i) Comme γ est continue et A' est fermé on trouve que $\gamma^{-1}(A')$ est un fermé de $[0,1]$ donc un compact. Ainsi nous avons $t_* = \max \gamma^{-1}(A') \in \gamma^{-1}(A') \subset [0,1]$ et comme $\gamma(1) = (1,0) \notin A'$ nous avons $t_* \in [0,1[$.

(ii) Comme γ_y est continue et $\gamma_y(t_*) = 1$ nous avons qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in]t_*, t_* + \delta[$, $\gamma_y(t) > 0$. De plus pour tout $t \in]t_*, t_* + \delta[$ nous avons $t > t_* = \max \gamma^{-1}(A')$ $\implies \gamma(t) \notin A' \implies \gamma(t) \in A \implies \gamma_x(t) \in]0,1]$.

(iii) D'après la question précédente $\gamma(t) \in \bigcup_{n\geqslant 1} \left(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]\right)$ pour $t \in]t_*, t_* + \delta[$ car $\gamma_x(t) > 0 \implies \gamma(t) \notin A'$ et $\gamma_y(t) > 0 \implies \gamma(t) \notin]0,1] \times \{0\}$. Ainsi d'une part, $\gamma_x(]t_*, t_* + \delta[) \subset \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est dénombrable, et d'autre part, l'image de intervalle $]t_*, t_* + \delta[$ par l'application continue γ_x est un intervalle. Mais un intervalle non vide est dénombrable si et seulement s'il est réduit à un point, par exemple $\{\frac{1}{n}\}$. Ainsi on trouve que $\gamma_x \equiv \frac{1}{n}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, sur $]t_*, t_* + \delta[$. Ce qui est en contradiction avec $\gamma_x(t) \xrightarrow{t \to t_*} \gamma_x(t_*) = 0$. En conclusion notre supposition est fausse : il n'existe pas de chemin dans B qui relie $(0, 1)$ à $(1, 1)$, donc B n'est pas connexe par chemins (même s'il est connexe).

Solutions du DS2

8 janvier 2020

[durée : 3 heures]

Exercice 1 *(Questions de cours)*

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a) $A =]-1, 1[$ est un ouvert dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

b) $B = [1, 2[$ est un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

c) $C = \{(\sin(t), \cos(t), e^t) \mid t \in [0, 1]\}$ est un compact de $\mathbb{R}^3$ *(muni de la norme euclidienne).*

d) La frontière d'une partie non vide d'un espace métrique est non vide.

e) Soit $n \geqslant 1$. Sur $\mathbb{R}_n[X]$, les polynômes de degré au plus n, on considère les deux normes définies pour $p \in \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\|p\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)| \quad \text{et} \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Alors il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$c_1 \|p\|_\infty \leqslant \|p\|_1 \leqslant c_2 \|p\|_\infty .$$

Solution :

a) L'affirmation est fausse : $A =]-1, 1[$ n'est pas un ouvert dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que A soit un ouvert de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Alors, comme $0 \in A$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(0, r)$ de centre 0 et de rayon r (dans $\mathbb{C}$) est contenue dans A. Mais ceci est absurde car par exemple $\frac{ir}{2} \in B(0, r)$ et $\frac{ir}{2} \notin A$.

b) L'affirmation est fausse : $B = [1, 2[$ n'est pas un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. En effet, raisonnons aussi par l'absurde et supposons que B soit un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Considérons alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$. Alors pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \in B$ et $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 2$. Mais si B était fermé alors 2 appartiendrait à B, ce qui n'est pas.

c) L'affirmation est vraie : C est un compact de $\mathbb{R}^3$. En effet, remarquons que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \varphi(t) = (\sin(t), \cos(t), e^t) \end{array}$$

est continue et $[0, 1]$ est un compact. Or l'image d'un compact par une application continue est un compact. Ainsi, l'image de φ est un compact de $\mathbb{R}^3$. Donc $C = \varphi([0, 1])$ est un compact de $\mathbb{R}^3$.

d) L'affirmation est fausse : la frontière d'une partie non vide d'un espace métrique n'est pas toujours non vide. Par exemple la frontière de l'espace tout entier est vide.

e) L'affirmation est vraie. En effet, remarquons que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie (de dimension $n+1$). Or d'après le cours, on sait que si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes. On en déduit donc que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$ et donc il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$c_1 \|p\|_\infty \leqslant \|p\|_1 \leqslant c_2 \|p\|_\infty .$$

Exercice 2 *(Normes fonctionnelles)*

Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe C^1 *(c.-à-d. dérivables et à dérivée continue sur* $[0,1]$*)*. On considère sur E les deux normes suivantes *(on ne demande pas de vérifier que ce sont bien des normes)* :

$$N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

où $\|g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|$.

a) Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

b) Sont-elles équivalentes à la norme $N(f) = \|f\|_\infty$? Justifier.

Solution :

a) Soit $f \in E$. Tout d'abord, il est clair que $|f(0)| \leqslant \|f\|_\infty$, ce qui donne immédiatement

$$N_1(f) \leqslant N_2(f).$$

D'autre part, pour $t \in [0,1]$, remarquons que

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\, du,$$

ce qui donne

$$|f(t)| \leqslant |f(0)| + \int_0^t |f'(u)|\, du \leqslant |f(0)| + t\|f'\|_\infty \leqslant |f(0)| + \|f'\|_\infty = N_1(f)$$

On a donc montré que pour tout $t \in [0,1]$, on a $|f(t)| \leqslant N_1(f)$, ce qui implique que $\|f\|_\infty \leqslant N_1(f)$. Comme d'autre part, on a clairement $\|f'\|_\infty \leqslant N_1(f)$, on en déduit que $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leqslant 2N_1(f)$. Ainsi, on a montré que pour tout $f \in E$, on a

$$N_1(f) \leqslant N_2(f) \leqslant 2N_1(f),$$

ce qui montre que N_1 et N_2 sont équivalentes.

b) Les deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes à la norme N. En effet, supposons par l'absurde que N_1 est équivalente à la norme N. Alors il existerait une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $f \in E$, on aurait

$$N_1(f) \leqslant cN(f).$$

En particulier, pour $n \geqslant 1$, considérons $f_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$. Alors $f_n'(t) = nt^{n-1}$. On remarque alors que $N_1(f_n) = |f_n(0)| + \|f_n'\|_\infty = n$ et $N(f_n) = \|f_n\|_\infty = 1$ ce qui donnerait $n \leqslant c$. On obtient donc une contradiction en faisant tendre n vers l'infini. Ainsi N_1 et N ne sont pas équivalentes. Comme N_2 est équivalente à N_1, on en déduit que N_2 n'est pas équivalente à N (par transitivité de la relation d'équivalence des normes).

Exercice 3 *(Complétude, compacité et homéomorphismes)*

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une bijection.

a) Dans cette question, on suppose que (Y, d_Y) est complet, que f est uniformément continue et que f^{-1} est continue. Montrer alors que (X, d_X) est complet.

b) On suppose maintenant que (X, d_X) est compact et que f est continue.

(i) Soit $A \subset X$. On notera $g = f^{-1} : Y \longrightarrow X$. Justifier que $g^{-1}(A) = f(A)$ où $g^{-1}(A)$ désigne l'image réciproque de A par g.

(ii) Montrer que f^{-1} est continue.

(iii) Peut affirmer que (Y, d_Y) est complet ? Justifier.

Solution :

a) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans (X, d_X) et $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Comme $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n, m \geqslant N \Longrightarrow d_X(x_n, x_m) < \delta.$$

Alors par (1), on en déduit que

$$n, m \geqslant N \Longrightarrow d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Ainsi, on obtient que la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y) qui est complet. On en déduit donc qu'il existe $y \in Y$ tel que $f(x_n) \xrightarrow{n\to+\infty} y$ dans (Y, d_Y). En utilisant maintenant le fait que f^{-1} est continue, on obtient alors que $x_n = f^{-1}(f(x_n)) \xrightarrow{n\to+\infty} f^{-1}(y)$ dans (X, d_X). On a donc montré que si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans (X, d_X), alors elle converge. Ceci montre donc que (X, d_X) est complet.

b) (i) Par définition, on a $g^{-1}(A) = \{y \in Y \mid g(y) \in A\} = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \in A\}$. Comme f est bijective, on a $f^{-1}(y) \in A$ si et seulement si $y \in f(A)$. Ainsi $g^{-1}(A) = \{y \in Y \mid y \in f(A)\} = f(A)$.

(ii) D'après un résultat du cours, rappelons que $g = f^{-1} : Y \longrightarrow X$ est continue si et seulement si pour tout fermé F de X, alors $g^{-1}(F)$ est un fermé de Y. Soit donc F un fermé de X. D'après (i), on a $g^{-1}(F) = f(F)$. Or F étant fermé dans X qui est compact, on en déduit que F est compact. De plus, f est continue et l'image d'un compact par une application continue est un compact. Ainsi, $f(F)$ est un compact de Y, donc en particulier $g^{-1}(F) = f(F)$ est un fermé de Y. On conclut finalement que $g = f^{-1}$ est continue.

(iii) L'espace (Y, d_Y) est complet. En effet, comme f est une bijection, on a $Y = f(X)$ et comme l'image d'un compact par une application continue est un compact, on en déduit que Y est compact. Or un compact est complet. Ainsi Y est complet.

Exercice 4 *(Partie connexe non connexe par arcs)* Dans le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ on considère $A =]0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n\geqslant 1} \left(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]\right)$ et $A' = \{(0,1)\}$. On pose $B = A \cup A'$.

a) Représenter graphiquement A et A'.

b) Montrer que $B \subset \overline{A}$.

c) Montrer que A est connexe par arcs et que B est connexe.

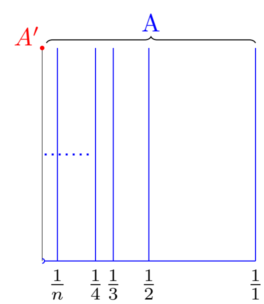
d) On souhaite montrer que B n'est pas connexe par arcs.
Soit $\gamma\colon [0,1] \to B$ une application continue telle que $\gamma(0) = (0,1)$ et $\gamma(1) = (1,1)$. On note, pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t) = \big(\gamma_x(t), \gamma_y(t)\big)$.

(i) Montrer que $t_* \coloneqq \sup \gamma^{-1}(A') \in [0,1[$.

(ii) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in]t_*, t_* + \delta[$, $\gamma_x(t) > 0$ et $\gamma_y(t) > 0$.

(iii) En déduire que $\gamma_x(t) \in \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ pour $t \in]t_*, t_* + \delta[$, puis aboutir à une contradiction et conclure.

Solution :



a) *Voir l'image ci-contre.*

b) Soit $x_n = (\frac{1}{n}, 1) \in A$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $x_n \xrightarrow{n\to\infty} (0,1)$ et donc $A' \subset \overline{A}$. Et comme de plus $A \subset \overline{A}$ par définition, nous avons $B \subset \overline{A}$.

c) Tout point $(\lambda, 0)$ de $]0,1] \times \{0\}$ est connecter par un chemin rectiligne, dans A, à $(1,0)$. Tout point $(\frac{1}{n}, \lambda)$ de $\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ est connecter par un chemin rectiligne, dans A, à $(\frac{1}{n}, 0) \in]0,1] \times \{0\}$. Ainsi tout point de A est connecter par chemin dans A à $(0,1) \in A$. En conclusion A est connexe par chemins, donc A est connexe et donc B est connexe car il vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$.

d) (i) Comme γ est continue et A' est fermé on trouve que $\gamma^{-1}(A')$ est un fermé de $[0,1]$ donc un compact. Ainsi nous avons $t_* = \max \gamma^{-1}(A') \in \gamma^{-1}(A') \subset [0,1]$ et comme $\gamma(1) = (1,0) \notin A'$ nous avons $t_* \in [0,1[$.

(ii) Comme γ_y est continue et $\gamma_y(t_*) = 1$ nous avons qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in]t_*, t_* + \delta[$, $\gamma_y(t) > 0$. De plus pour tout $t \in]t_*, t_* + \delta[$ nous avons $t > t_* = \max \gamma^{-1}(A')$ $\implies \gamma(t) \notin A' \implies \gamma(t) \in A \implies \gamma_x(t) \in]0,1]$.

(iii) D'après la question précédente $\gamma(t) \in \bigcup_{n\geqslant 1} \left(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]\right)$ pour $t \in]t_*, t_* + \delta[$ car $\gamma_x(t) > 0 \implies \gamma(t) \notin A'$ et $\gamma_y(t) > 0 \implies \gamma(t) \notin]0,1] \times \{0\}$. Ainsi d'une part, $\gamma_x(]t_*, t_* + \delta[) \subset \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est dénombrable, et d'autre part, l'image de intervalle $]t_*, t_* + \delta[$ par l'application continue γ_x est un intervalle. Mais un intervalle non vide est dénombrable si et seulement s'il est réduit à un point, par exemple $\{\frac{1}{n}\}$. Ainsi on trouve que $\gamma_x \equiv \frac{1}{n}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, sur $]t_*, t_* + \delta[$. Ce qui est en contradiction avec $\gamma_x(t) \xrightarrow{t \to t_*} \gamma_x(t_*) = 0$. En conclusion notre supposition est fausse : il n'existe pas de chemin dans B qui relie $(0,1)$ à $(1,1)$, donc B n'est pas connexe par chemins (même s'il est connexe).

Solutions du DS2

8 janvier 2020

[durée : 3 heures]

Exercice 1 *(Questions de cours)*

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a) $A =]-1, 1[$ est un ouvert dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

b) $B = [1, 2[$ est un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

c) $C = \{(\sin(t), \cos(t), e^t) \mid t \in [0, 1]\}$ est un compact de $\mathbb{R}^3$ *(muni de la norme euclidienne)*.

d) La frontière d'une partie non vide d'un espace métrique est non vide.

e) Soit $n \geqslant 1$. Sur $\mathbb{R}_n[X]$, les polynômes de degré au plus n, on considère les deux normes définies pour $p \in \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\|p\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |p(t)| \quad \text{et} \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Alors il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$c_1 \|p\|_\infty \leqslant \|p\|_1 \leqslant c_2 \|p\|_\infty .$$

Solution:

a) L'affirmation est fausse : $A =]-1, 1[$ n'est pas un ouvert dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que A soit un ouvert de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Alors, comme $0 \in A$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(0, r)$ de centre 0 et de rayon r (dans $\mathbb{C}$) est contenue dans A. Mais ceci est absurde car par exemple $\frac{ir}{2} \in B(0, r)$ et $\frac{ir}{2} \notin A$.

b) L'affirmation est fausse : $B = [1, 2[$ n'est pas un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. En effet, raisonnons aussi par l'absurde et supposons que B soit un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Considérons alors la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$. Alors pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \in B$ et $u_n \xrightarrow{n \to +\infty} 2$. Mais si B était fermé alors 2 appartiendrait à B, ce qui n'est pas.

c) L'affirmation est vraie : C est un compact de $\mathbb{R}^3$. En effet, remarquons que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \varphi(t) = (\sin(t), \cos(t), e^t) \end{array}$$

est continue et $[0, 1]$ est un compact. Or l'image d'un compact par une application continue est un compact. Ainsi, l'image de φ est un compact de $\mathbb{R}^3$. Donc $C = \varphi([0, 1])$ est un compact de $\mathbb{R}^3$.

d) L'affirmation est fausse : la frontière d'une partie non vide d'un espace métrique n'est pas toujours non vide. Par exemple la frontière de l'espace tout entier est vide.

e) L'affirmation est vraie. En effet, remarquons que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie (de dimension $n+1$). Or d'après le cours, on sait que si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes. On en déduit donc que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$ et donc il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$c_1 \|p\|_\infty \leqslant \|p\|_1 \leqslant c_2 \|p\|_\infty .$$

Exercice 2 *(Normes fonctionnelles)*

Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe C^1 *(c.-à-d. dérivables et à dérivée continue sur* $[0,1]$*)*. On considère sur E les deux normes suivantes *(on ne demande pas de vérifier que ce sont bien des normes)* :

$$N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

où $\|g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|$.

a) Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

b) Sont-elles équivalentes à la norme $N(f) = \|f\|_\infty$? Justifier.

Solution:

a) Soit $f \in E$. Tout d'abord, il est clair que $|f(0)| \leqslant \|f\|_\infty$, ce qui donne immédiatement

$$N_1(f) \leqslant N_2(f).$$

D'autre part, pour $t \in [0,1]$, remarquons que

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\, du,$$

ce qui donne

$$|f(t)| \leqslant |f(0)| + \int_0^t |f'(u)|\, du \leqslant |f(0)| + t\|f'\|_\infty \leqslant |f(0)| + \|f'\|_\infty = N_1(f)$$

On a donc montré que pour tout $t \in [0,1]$, on a $|f(t)| \leqslant N_1(f)$, ce qui implique que $\|f\|_\infty \leqslant N_1(f)$. Comme d'autre part, on a clairement $\|f'\|_\infty \leqslant N_1(f)$, on en déduit que $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leqslant 2N_1(f)$. Ainsi, on a montré que pour tout $f \in E$, on a

$$N_1(f) \leqslant N_2(f) \leqslant 2N_1(f),$$

ce qui montre que N_1 et N_2 sont équivalentes.

b) Les deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes à la norme N. En effet, supposons par l'absurde que N_1 est équivalente à la norme N. Alors il existerait une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $f \in E$, on aurait

$$N_1(f) \leqslant cN(f).$$

En particulier, pour $n \geqslant 1$, considérons $f_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$. Alors $f_n'(t) = nt^{n-1}$. On remarque alors que $N_1(f_n) = |f_n(0)| + \|f_n'\|_\infty = n$ et $N(f_n) = \|f_n\|_\infty = 1$ ce qui donnerait $n \leqslant c$. On obtient donc une contradiction en faisant tendre n vers l'infini. Ainsi N_1 et N ne sont pas équivalentes. Comme N_2 est équivalente à N_1, on en déduit que N_2 n'est pas équivalente à N (par transitivité de la relation d'équivalence des normes).

Exercice 3 *(Complétude, compacité et homéomorphismes)*

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une bijection.

a) Dans cette question, on suppose que (Y, d_Y) est complet, que f est uniformément continue et que f^{-1} est continue. Montrer alors que (X, d_X) est complet.

b) On suppose maintenant que (X, d_X) est compact et que f est continue.

(i) Soit $A \subset X$. On notera $g = f^{-1} : Y \longrightarrow X$. Justifier que $g^{-1}(A) = f(A)$ où $g^{-1}(A)$ désigne l'image réciproque de A par g.

(ii) Montrer que f^{-1} est continue.

(iii) Peut affirmer que (Y, d_Y) est complet ? Justifier.

Solution:

a) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans (X, d_X) et $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Comme $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n, m \geqslant N \Longrightarrow d_X(x_n, x_m) < \delta.$$

Alors par (1), on en déduit que

$$n, m \geqslant N \Longrightarrow d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Ainsi, on obtient que la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y) qui est complet. On en déduit donc qu'il existe $y \in Y$ tel que $f(x_n) \xrightarrow{n\to+\infty} y$ dans (Y, d_Y). En utilisant maintenant le fait que f^{-1} est continue, on obtient alors que $x_n = f^{-1}(f(x_n)) \xrightarrow{n\to+\infty} f^{-1}(y)$ dans (X, d_X). On a donc montré que si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans (X, d_X), alors elle converge. Ceci montre donc que (X, d_X) est complet.

b) (i) Par définition, on a $g^{-1}(A) = \{y \in Y \mid g(y) \in A\} = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \in A\}$. Comme f est bijective, on a $f^{-1}(y) \in A$ si et seulement si $y \in f(A)$. Ainsi $g^{-1}(A) = \{y \in Y \mid y \in f(A)\} = f(A)$.

(ii) D'après un résultat du cours, rappelons que $g = f^{-1} : Y \longrightarrow X$ est continue si et seulement si pour tout fermé F de X, alors $g^{-1}(F)$ est un fermé de Y. Soit donc F un fermé de X. D'après (i), on a $g^{-1}(F) = f(F)$. Or F étant fermé dans X qui est compact, on en déduit que F est compact. De plus, f est continue et l'image d'un compact par une application continue est un compact. Ainsi, $f(F)$ est un compact de Y, donc en particulier $g^{-1}(F) = f(F)$ est un fermé de Y. On conclut finalement que $g = f^{-1}$ est continue.

(iii) L'espace (Y, d_Y) est complet. En effet, comme f est une bijection, on a $Y = f(X)$ et comme l'image d'un compact par une application continue est un compact, on en déduit que Y est compact. Or un compact est complet. Ainsi Y est complet.

Exercice 4 *(Partie connexe non connexe par arcs)* Dans le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ on considère $A =]0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n \geqslant 1} \left(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]\right)$ et $A' = \{(0,1)\}$. On pose $B = A \cup A'$.

a) Représenter graphiquement A et A'.

b) Montrer que $B \subset \overline{A}$.

c) Montrer que A est connexe par arcs et que B est connexe.

d) On souhaite montrer que B n'est pas connexe par arcs.
Soit $\gamma \colon [0,1] \to B$ une application continue telle que $\gamma(0) = (0,1)$ et $\gamma(1) = (1,1)$. On note, pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t) = \big(\gamma_x(t), \gamma_y(t)\big)$.

(i) Montrer que $t_* := \sup \gamma^{-1}(A') \in [0,1[$.

(ii) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in]t_*, t_* + \delta[$, $\gamma_x(t) > 0$ et $\gamma_y(t) > 0$.

(iii) En déduire que $\gamma_x(t) \in \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ pour $t \in]t_*, t_* + \delta[$, puis aboutir à une contradiction et conclure.

Solution:

M52_2019-20-DS2_img_exo4a.pdf

a) *Voir l'image ci-contre.*

b) Soit $x_n = (\frac{1}{n}, 1) \in A$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $x_n \xrightarrow{n \to \infty} (0,1)$ et donc $A' \subset \overline{A}$. Et comme de plus $A \subset \overline{A}$ par définition, nous avons $B \subset \overline{A}$.

c) Tout point $(\lambda, 0)$ de $]0,1] \times \{0\}$ est connecté par un chemin rectiligne, dans A, à $(1,0)$. Tout point $(\frac{1}{n}, \lambda)$ de $\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ est connecté par un chemin rectiligne, dans A, à $(\frac{1}{n}, 0) \in]0,1] \times \{0\}$. Ainsi tout point de A est connecté par chemin dans A à $(0,1) \in A$. En conclusion A est connexe par chemins, donc A est connexe et donc B est connexe car il vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$.

d) (i) Comme γ est continue et A' est fermé on trouve que $\gamma^{-1}(A')$ est un fermé de $[0,1]$ donc un compact. Ainsi nous avons $t_* = \max \gamma^{-1}(A') \in \gamma^{-1}(A') \subset [0,1]$ et comme $\gamma(1) = (1,0) \notin A'$ nous avons $t_* \in [0,1[$.

(ii) Comme γ_y est continue et $\gamma_y(t_*) = 1$ nous avons qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in]t_*, t_* + \delta[$, $\gamma_y(t) > 0$. De plus pour tout $t \in]t_*, t_* + \delta[$ nous avons $t > t_* = \max \gamma^{-1}(A')$ $\implies \gamma(t) \notin A' \implies \gamma(t) \in A \implies \gamma_x(t) \in]0,1]$.

(iii) D'après la question précédente $\gamma(t) \in \bigcup_{n \geqslant 1} \left(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]\right)$ pour $t \in]t_*, t_* + \delta[$ car $\gamma_x(t) > 0 \implies \gamma(t) \notin A'$ et $\gamma_y(t) > 0 \implies \gamma(t) \notin]0,1] \times \{0\}$. Ainsi d'une part, $\gamma_x(]t_*, t_* + \delta[) \subset \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est dénombrable, et d'autre part, l'image de intervalle $]t_*, t_* + \delta[$ par l'application continue γ_x est un intervalle. Mais un intervalle non vide est dénombrable si et seulement s'il est réduit à un point, par exemple $\{\frac{1}{n}\}$. Ainsi on trouve que $\gamma_x \equiv \frac{1}{n}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, sur $]t_*, t_* + \delta[$. Ce qui est en contradiction avec $\gamma_x(t) \xrightarrow{t \to t_*} \gamma_x(t_*) = 0$. En conclusion notre supposition est fausse : il n'existe pas de chemin dans B qui relie $(0,1)$ à $(1,1)$, donc B n'est pas connexe par chemins (même s'il est connexe).