Feuille 1 :
Fonctions Holomorphes–Fonctions classiques

Exercice 1 Soit f la fonction définie par $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ où

(a) f est différentiable.

(b) f est $\mathbb{C}$–dérivable.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & \text{si } x+iy \neq 0, \\ 0 & \text{si } x+iy = 0. \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas différentiable en 0, mais possède des dérivées partielles qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann en 0.

Exercice 3 (a) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x+iy) = x + 2ixy$. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?

(b) Soit $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ définie par $g(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$. La fonction g est-elle holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Exercice 4 Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On note $P = \Re(f)$ et $Q = \Im(f)$ les parties réelle et imaginaire de f.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est constante sur U.
   (b) P est constante sur U.
   (c) Q est constante sur U.
2. En déduire que les assertions précédentes sont aussi équivalentes à :
   (d) $\overline{f}$ holomorphe sur U.
   (e) $|f|$ est constante sur U.

Exercice 5 Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U.

(a) Montrer que si $f(U) \subset \mathbb{R}$ alors f est constante.

(b) Que peut-on dire de f si sa partie réelle est holomorphe sur U ?

(c) Même question si $|f|$ est holomorphe.

Exercice 6 Soient Ω, Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ une application holomorphe.

(a) On suppose dans cette question que f est un C^1-difféomorphisme. Montrer que f^{-1} est holomorphe sur Ω'.

(b) On suppose dans cette question qu'il existe un point $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Montrer alors que f admet un inverse local au voisinage de z_0 et que, de plus, cet inverse est holomorphe au voisinage de $f(z_0)$.

On pourra utiliser le théorème d'inversion locale qu'on rappellera au préalable.

Exercice 7 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes telles que

$$\Re(f(z)) = x^2 - y^2 - x - y, \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Exercice 8 (Fonctions harmoniques) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une application $u\colon U \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dite *harmonique* si elle est de classe C^2 et vérifie $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (l'opérateur $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ s'appelle le laplacien).

1. Montrer que pour toute fonction $f\colon U \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable, $\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$.
2. Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe sur U. En admettant que f est de classe C^2 sur U, montrer que sa partie réelle u et sa partie imaginaire v sont harmoniques sur U (autrement dit f est harmonique sur U).
3. Montrer que si $u\colon U \to \mathbb{R}$ est harmonique, alors la fonction $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ est holomorphe sur U.
4. Montrer que l'application $u\colon z = x + iy \mapsto 2xy$ est harmonique sur $\mathbb{C}$. Trouver toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est égale à u.
5. Montrer que l'application $z = x + iy \mapsto e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ est harmonique sur $\mathbb{C}$. Trouver toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est égale à u.
6. Que dire d'une fonction holomorphe f sur un ouvert connexe telle que $|f|^2$ est harmonique ?
7. Soit f holomorphe sur U. On suppose que f ne s'annule pas sur U. Montrer que $\log |f|$ est harmonique.

Exercice 9 (Dérivation des séries entières) Soit f la fonction définie sur $D(0, R)$ par une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ est égal à R.
2. Le but de cette question est de montrer que f est holomorphe sur $D(0, R)$, et que $f'(z) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ pour tout $z \in D(0, R)$.
   (a) Soit $|z_0| < R$ et r tel que $|z_0| < r < R$. Pour $z \in D(0, r)$, vérifier que
   $$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(z),$$
   où $h_n(z) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k$.
   (b) Montrer que la série $\sum_n h_n$ est normalement convergente sur $D(0, r)$.
   (c) En déduire le résultat.
3. Montrer que f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable et exprimer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que f admet une primitive sur $D(0, R)$.

Exercice 10 (Analyticité des séries entières)

1. Montrer qu'une fonction analytique sur un ouvert $\mathcal{U}$ (autrement dit développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathcal{U}$) est holomorphe sur $\mathcal{U}$.

   Indication : on pourra utiliser l'exercice précédent.

2. Montrer que la somme f d'une série entière de rayon de convergence R est une fonction analytique sur $D(0, R)$.

Exercice 11 Soit $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et Log la détermination principale du logarithme.

1. A t-on $\text{Log}(e^z) = z$ pour tout $z \in (\exp)^{-1}(U)$? Sinon, déterminer un ouvert V de $\mathbb{C}$ où cette égalité est vraie.
2. Soit $P^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re\text{e(z)} > 0\}$. A t-on $\text{Log}(zz') = \text{Log}z + \text{Log}z'$ pour tous $z, z' \in P^+$?
3. Même question en remplaçant P^+ par $\pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im\text{m(z)} > 0\}$.

Exercice 12 Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe. On appelle détermination holomorphe sur U du logarithme de f toute application F holomorphe sur U telle que

$$e^{F(z)} = f(z) \text{ pour tout } z \in U.$$

1. On suppose qu'une telle fonction F existe. Calculer $F'(z)$ pour $z \in U$.
2. On suppose qu'une telle fonction F existe et on suppose aussi que U est connexe. Expliciter toutes les déterminations holomorphes sur U du logarithme de f.
3. Dans son disque de convergence, calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$.

Exercice 13 Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle détermination holomorphe sur U de la fonction arctangente toute fonction holomorphe f sur U, ‡ valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ telle que $\tan(f(z)) = z$, $(z \in U)$.

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur U de la fonction arctangente, alors $-i \notin U$ et $i \notin U$.
2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant ni i, ni $-i$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) f est une détermination holomorphe de la fonction arctangente sur U,

   (ii) $2if(z)$ est une détermination holomorphe sur U du logarithme de $\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

3. Soit U un ouvert **connexe** de $\mathbb{C}$ ne contenant ni i, ni $-i$. Supposons qu'il existe sur U une détermination holomorphe de la fonction arctangente. Expliciter toutes les déterminations holomorphes sur U de la fonction arctangente
4. Soit $U := \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geqslant 1\}$.

   a) Construire sur U une détermination holomorphe f de la fonction arctangente.

   b) Déterminer $f(U)$.

   c) Donner pour $|z| < 1$, le développement en série entière de f.

Université Lille 1 **Master 1 mathématiques**
Analyse Complexe Approfondie **Année 2012-13**

Feuille 2 :
Primitives, Indices et Formules de Cauchy.

Exercice 1 Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\dfrac{f'}{f}$ a une primitive dans U.

(ii) Il existe dans U une détermination holomorphe du logarithme de f.

Dans ce cas, quelles sont toutes les déterminations holomorphes sur U du logarithme de f ? Donner une condition géométrique sur U pour que f admette une détermination holomorphe du logarithme.

Exercice 2 Soit $U = D(0,1[\setminus\{0\}$. Montrer que dans U il n'existe aucune détermination holomorphe du logarithme.

Exercice 3 Soit γ le cercle centré en 2 et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{z}dz$.

Exercice 4 On fixe $a \in]0,1[$ et $r \in]0,1-a[$. Soit γ le cercle de centre a et de rayon r (parcouru une fois dans le sens direct). Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$, on définit g par $g(z) = 2\dfrac{z-a}{z^2-1}$. Soit $\Gamma = g \circ \gamma$.

(a) Montrer que Γ est un circuit tracé dans $\mathbb{C}^*$.

(b) Calculer $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$.

Exercice 5 Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1 (parcouru une fois dans le sens direct). Calculer :

(a) $\int_\gamma e^z dz$.

(b) Pour $n \geq 1$, $\int_\gamma \frac{e^z}{z^n} dz$.

(c) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz$.

(d) $\int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz$.

(e) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2} dz$.

Exercice 6 Calculer de deux manières différentes $\displaystyle\int_\gamma \frac{z-1}{z}dz$ où γ est le circuit dont le support est le carré de sommets $1+i$, $1-i$, $-1-i$ et $-1+i$ parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 7 Soit γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$. En calculant de deux manières différentes $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, donner la valeur de

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

Exercice 8 (a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \neq 1$. Montrer que l'application $t \longmapsto \frac{1}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$.

(b) Pour $|\alpha| \neq 1$, soit $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2}$. En considérant l'intégrale curviligne d'une fonction bien choisie le long du cercle unité, calculer $f(\alpha)$. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1\}$?

Exercice 9 Soit $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

(a) Montrer qu'il existe sur V une détermination holomorphe de $(z^2-1)^{1/2}$.

(b) Montrer que néanmoins, il n'existe pas de de détermination holomorphe de $\log(z^2-1)$.

Exercice 10 Soit U un domaine et f une fonction holomorphe sur U telle que$f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.

(a) Montrer que pour tout circuit γ tracé dans U on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \in \mathbb{Z}.$$

(b) En déduire que si pour tout $n \geq 2$, il existe sur U une détermination holomorphe de $(f(z))^{1/n}$, alors il existe sur U une détermination holomorphe de $\log f$.

Exercice 11 Soit $U = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$.

(a) Soit γ un circuit tracé dans U. Montrer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = 0.$$

(b) Montrer qu'il existe une unique fonction f holomorphe sur U telle que $f'(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $z \in U$ et $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$.

(c) Existe-t-il une primitive de $z \longmapsto \frac{1}{z^2+1}$ dans $D(0,1[$? dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$?

Exercice 12 Soit $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une application continue, non bornée, prenant la valeur 0 en 0. Notons $U = \mathbb{C} \setminus \delta(\mathbb{R}^+)$, et soit $\gamma : [0,1] \to U$ un circuit tracé dans U. Notons $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, \delta(t))$.

a) Montrer que φ est continue.

b) En déduire que φ est constante. Que vaut-elle ?

c) Conclure : pour tout circuit γ tracé dans U, on a $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 0$.

d) En déduire qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme dans U.

Exercice 13 Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur U telles que

(i) la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur U vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$;

(ii) il existe $M > 0$ telle que $|f_n(z)|\leqslant M$, $\forall n\geqslant 0$, $\forall z \in U$.

a) Soit $z_0 \in U$ et $R > 0$ tel que $D(z_0, R[\subset U$. Montrer que, $\forall a \in D(z_0, R[$,

$$f(a) = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz\,,$$

où γ_r est le cercle de centre z_0 et de rayon $r \in]|z_0 - a|, R[$. En déduire que f est continue en a.

b) Montrer que, $\forall a \in D(z_0, R[$,

$$f(a) = \sum_{n \geqslant 0} (a - z_0)^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \,,$$

et en déduire que f est holomorphe sur U.

Exercice 14 Soit $R \geqslant 1$ et $f : D(0, R[\to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $D(0, R[$. On suppose que, pour tout $z \in D(0, 1[$, on a

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{1 - |z|} \, .$$

Montrer que $\forall n \geqslant 0$:

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n + 1) \, .$$

Feuille 3 :
Principes des zéros isolés, principe du maximum.

Exercice 1 Etudier l'existence et l'unicité de fonctions holomorphes f sur un voisinage connexe U de 0 telles que :

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \geqslant 1$. b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \exp(-n)$, $\forall n \geqslant 1$.

Exercice 2 Soient f et g deux fonctions entières telles que :

$$|f(z)| \leqslant |g(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Montrer que tout zéro z_0 de g est un zéro de f et que la multiplicité de f au point z_0 est au moins aussi grande que celle de g.

b) En déduire que f et g sont proportionnelles.

Exercice 3 On fixe $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose $a = e^{2i\pi t}$ et on note

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2} \right\}.$$

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U telle que :

$$f(az) = f(z), \quad \forall z \in U.$$

Enfin on définit $g : U \to \mathbb{C}$ par $g(z) = zf'(z) - f'(1)$, $z \in U$.

a) Calculer $g(a^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que g est identiquement nulle sur U.

c) Montrer que f est constante.

d) La conclusion subsiste-t-elle si on prend $t \in \mathbb{Q}$?

Exercice 4 Soient U un domaine de $\mathbb{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel (*i.e.* $z \in U \Rightarrow \overline{z} \in U$) et f une fonction holomorphe sur U.

a) Montrer que la fonction $f^* : U \to \mathbb{C}$ définie par $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, $z \in U$, est holomorphe sur U.

b) Montrer que $I = U \cap \mathbb{R}$ est non vide et même contient un segment non réduit à un point.

c) Montrer qu'il existe deux fonctions g et h holomorphes sur U, à valeurs réelles sur I et telles que $f = g + ih$. Y a-t-il unicité du couple (g, h) ?

d) Montrer que pour tout $z \in U$, on a $\overline{g(\overline{z})} = g(z)$ et $\overline{h(\overline{z})} = h(z)$. Calculer $\overline{f(\overline{z})}$.

Exercice 5 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction analytique.

1. Montrer que $\forall x \in]a, b[$ il existe $r_x > 0$ et g_x une fonction holomorphe sur $D(x, r_x[$ telle que $g_{x|]x-r_x, x+r_x[} \equiv f$.
2. En déduire qu'il existe Ω un domaine de $\mathbb{C}$ contenant $]a, b[$ et une unique fonction g holomorphe sur Ω telle que $g_{|]a,b[} \equiv f$.

Exercice 6 a) Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $L := \{z_0 + tb : t \in \mathbb{R}\}$ où $b \in \mathbb{C}^*$. Soit f une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \backslash L$. Montrer que f est holomorphe sur Ω.

b) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m}(z) > 0\}$, continue et bornée sur $\overline{\mathbb{H}_+}$ et ne prenant que des valeurs réelles sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante (On pourra chercher à prolonger f sur $\mathbb{C}$).

Exercice 7 Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert de centre 0 et de rayon $r > 1$ et ne prenant que des valeurs réelles sur le cercle unité. Que peut-on dire de f ?

Exercice 8 (Application du lemme de Schwarz) Soient $D = D(0, 1[$ et g holomorphe sur D. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|g(z)| < M$ pour tout $z \in D$.

1. On pose $f(z) = \frac{g(z)}{M}$ et $\varphi(z) = \frac{z - f(0)}{1 - \overline{f(0)}z}$.
   (a) Montrer que φ est holomorphe sur D et que $\varphi(D) \subset D$.
   (b) En déduire que, pour tout $z \in D$:
   $$\frac{|g(z) - g(0)|}{M^2 - \overline{g(0)}g(z)} \leq \frac{|z|}{M}.$$
2. On suppose de plus que $|g'(0)| = M$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = M$ tel que $g(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.

Exercice 9 Soit $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0, R)$. Pour $r \in [0, R[$, on pose :
$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)| .$$

a) Montrer que M est une fonction croissante.

b) Montrer que s'il existe $r_1 \neq r_2$ tels que $M(r_1) = M(r_2)$, alors f est constante sur $D(0, R)$.

c) Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Pour $r > 0$, on pose $s(r) = \dfrac{M(r)}{r^n}$.
   (i) Montrer que s est décroissante et que si P n'est pas de la forme $a_n z^n$, alors s est strictement décroissante. (Pour comparer $s(r_1)$ et $s(r_2)$, on pourra considérer $f(z) = z^n P\left(\dfrac{r_1 r_2}{z}\right)$.)
   (ii) Montrer que, pour tout $r > 0$, on a $|a_n| \leqslant s(r)$, puis que $\lim\limits_{r \to +\infty} s(r) = |a_n|$.
   Redémontrer le résultat du (i), en considérant la fonction $f(z) = \dfrac{P(z)}{z^n}$.
   (iii) En déduire que si P n'est pas de la forme $a_n z^n$, alors il existe z de module 1 tel que $|P(z)| > |a_n|$.
   (iv) Montrer que si P est majoré par 1 sur le disque unité, alors $|P(z)|$ est majoré par $|z|^n$ hors du disque unité.

Exercice 10 Soit $0 < r < R$ et $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe tel que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{D(0, r)}$.

a) Montrer qu'il existe $\rho \in]r, R[$ tel que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{D(0, \rho)}$.

b) En déduire que
$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{it}| \, dt .$$
(On montrera qu'il existe une détermination holomorphe de $\log f$ sur $D(0, \rho)$).

Exercice 11 Soit $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leqslant C$, $\forall z \in D(0, R)$.

a) Montrer que $|f'(0)| \leqslant \dfrac{C}{R}$.

b) Montrer que $|f'(0)| = \dfrac{C}{R}$ si et seulement s'il existe λ, $|\lambda| = 1$, tel que $f(z) = \dfrac{C\lambda}{R} z$, $\forall z \in D(0, R)$.

Exercice 12 Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω, f non constante. On suppose que $|f|$ admet une minimum local dans Ω. Montrer alors que ce minimum est nécessairement nul. En particulier, f s'annule au moins une fois.

Exercice 13 Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω, f non constante. Soit $a \in \Omega$.

(a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ et

$$\mu := \min_{|z-a|=r} |f(z) - f(a)| > 0.$$

(b) Soit $\omega \in D(f(a), \mu/2)$ et notons par f_ω la fonction définie sur Ω par $f_\omega(z) = f(z) - \omega$.

(i) Justifier qu'il existe $\zeta_\omega \in \overline{D(a, r)}$ tel que

$$|f_\omega(\zeta_\omega)| = \inf_{z \in \overline{D(a,r)}} |f_\omega(z)|.$$

(ii) Montrer que nécessairement $\zeta_\omega \in D(a, r)$.

(iii) En déduire que f_ω s'annule au moins une fois dans $D(a, r)$.
Indication : on pourra utiliser l'exercice 12.

(iv) En déduire que $D(f(a), \mu/2) \subset f(\Omega)$.

(c) Enoncez le théorème obtenu.

Feuille 4 :
Singularités, théorème des résidus, principe de variation de l'argument et théorème de Rouché.

Exercice 1 Déterminer les singularités des fonctions suivantes, leur nature et les résidus correspondants :

$$\textbf{a)}\ \frac{\sin z}{z^3-\pi^2 z}, \qquad \textbf{b)}\ \mathrm{cotan} z-\frac{1}{z}, \qquad \textbf{c)}\ \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1}, \quad \textbf{d)}\ \pi\,\mathrm{cotan}(\pi\, z).$$

Exercice 2 On suppose que a et b sont tels que $0<|a|<|b|$. Trouver le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)},$$

dans la couronne $\{z\in\mathbb{C} : |a|<|z|<|b|\}$.

Exercice 3 Trouver le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)},$$

dans la couronne $\{z\in\mathbb{C} : 1<|z|<2\}$.

Exercice 4 Si γ désigne le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique, calculer :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{e^z-e^{-z}}{z^4}\,dz\,.$$

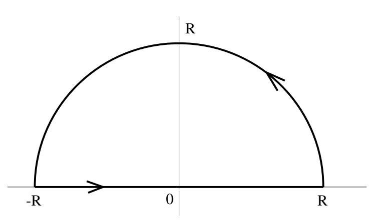
Exercice 5 On note γ le cercle de centre 0 et de rayon $3/2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, calculer :

$$\int_\gamma \frac{5z^2+1}{z(z-1)}\,dz \quad \text{et} \quad \int_\gamma \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}\,dz\,.$$

Exercice 6 Pour $r\neq 1$, on note γ_r le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{1/z}}{z-1}\,dz\,.$$

Exercice 7 Considérons le contour suivant ($R\in\mathbb{R}^{+*}$) :



a) On fixe $a \in \mathbb{R}^+$. Calculer l'intégrale de

$$z \longmapsto \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$$

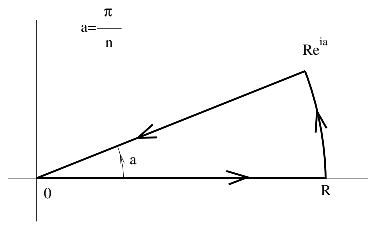
sur ce circuit. En faisant tendre R vers $+\infty$, déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\, dx.$$

b) En intégrant $ze^{iz}/(1+z^2)$ sur le même contour, calculer

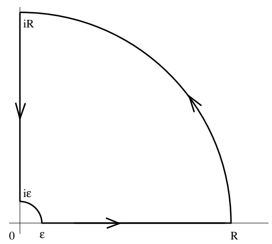
$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}\, dx.$$

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. En considérant le contour suivant, puis en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que :



$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}.$$

Exercice 9 En intégrant $\dfrac{e^{iz}}{z}$ sur le circuit suivant, puis en faisant tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$



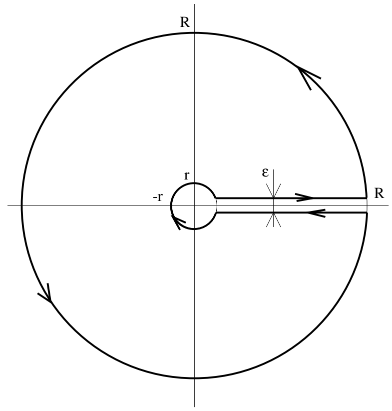
Exercice 10 On fixe $\alpha \in]0,1[$. On considère la détermination du logarithme définie sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, et on pose pour $z \in U$:

$$f(z) = z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\log(z)}.$$

a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $0 < \varepsilon < r < 1 < R$, on considère le circuit $\gamma_{\varepsilon,r,R}$ ci-dessous et on pose

$$I(\varepsilon, r, R) = \int_{\gamma_{\varepsilon,r,R}} \frac{f(z)}{z+1}\, dz.$$



b) Calculer $I(\varepsilon, r, R)$ par le théorème des résidus.

c) Déterminer $I(r, R) = \lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon, r, R)$.

d) Déterminer $\lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ R \to +\infty}} I(r, R)$ et en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Exercice 11 *On fixe $a \in \mathbb{C}$, $|a| \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$. Montrer que l'équation $1 + z + az^n = 0$ a toutes ses racines dans le disque $D(0, 2[$.*

Exercice 12 *Soit $P(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots a_m$ un polynôme. On suppose que $|P(z)| \leqslant 1$, $\forall z \in D(0, 1]$. Montrer qu'il existe z_0, $|z_0| = 1$, tel que $|P(z_0)| = 1$.*

Exercice 13 *Soit $r > 0$ et U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque fermé $D(0, r]$. Soit f holomorphe sur U. On suppose que*

$$|f(0)| + r|f'(0)| < m := \inf_{|z|=r} |f(z)|.$$

Montrer que f possède au moins deux zéros dans le disque ouvert $D(0, r[$.

Exercice 14 Considérons dans le plan complexe l'équation suivante :

$$e^{-z} + z - \lambda = 0 \tag{1}$$

où λ est un paramètre complexe. On notera Δ_0 le demi-plan $\Re(z) > 0$ et Δ_1 le demi-plan $\Re(z) > 1$.

1. Fixons $\lambda \in \Delta_1$ et pour $R > |\lambda| + 1$, soit $\mathfrak{D}_R$ le demi-disque de centre 0 et de rayon R contenu dans le demi-plan Δ_0. Montrer que l'équation (1) a une unique solution à l'intérieur de $\mathfrak{D}_R$.
2. En déduire que pour tout $\lambda \in \Delta_1$, l'équation (1) a une unique solution $x(\lambda)$ dans Δ_0.
3. Montrer que l'application $\lambda \longmapsto x(\lambda)$ est analytique dans Δ_1.

Devoir Maison 1 : Fonctions Holomorphes–Fonctions Harmoniques

Exercice 1 (Cauchy-Riemann en polaires) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0 et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. On note $P = \Re\mathrm{e}(\mathrm{f})$ et $Q = \Im\mathrm{m}(\mathrm{f})$ les parties réelle et imaginaire de f. Pour $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, on pose $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$, $(r_0, \vartheta_0) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.*

a) *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est dérivable en* z_0.

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial \vartheta}(z_0) = ir_0 \dfrac{\partial f}{\partial r}(z_0)$.

(iii) $\dfrac{\partial P}{\partial r}(r_0\cos(\vartheta_0), r_0\sin(\vartheta_0)) = \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial Q}{\partial \vartheta}(r_0\cos(\vartheta_0), r_0\sin(\vartheta_0))$ *et*
$\dfrac{\partial P}{\partial \vartheta}(r_0\cos(\vartheta_0), r_0\sin(\vartheta_0)) = -r_0\dfrac{\partial Q}{\partial r}(r_0\cos(\vartheta_0), r_0\sin(\vartheta_0))$

Les équations (ii) et (iii) sont appelées les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires.

b) **Application :** *On note Ω le plan complexe privé de la demi-droite $\{z : \Re\mathrm{e}(z) \le 0\,, \Im\mathrm{m}(z) = 0\}$. Pour $z \in \Omega$, on choisit l'argument ϑ de z dans $]-\pi, \pi[$ et on définit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ par*

$$f(z) = \sqrt{\rho}e^{i\vartheta/2}\,.$$

Montrer que f est holomorphe sur Ω. Calculer $f(z)^2$.

Exercice 2 (Fonctions holomorphes et harmoniques) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite harmonique dans Ω si elle est de classe C^2 et si elle satisfait ‡ l'Èquation suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

a) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que si une fonction complexe sur Ω est holomorphe, alors ses parties rÈelle et imaginaire sont harmoniques. En dÈduire que la fonction elle-mÍme est harmonique.*

Inversement, on se demande si une fonction rÈelle harmonique sur Ω est la partie rÈelle d'une fonction holomorphe. C'est parfois possible (voir Exercice **??**, *c)) mais en gÈnÈral la rÈponse est difficile et dÈpend de l'ouvert Ω.*

b) *Soit $\Omega = \mathbb{C}^*$ et $P(x+iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$. VÈrifier que P est harmonique sur Ω. Par l'absurde, montrer que P ne peut pas Ítre la partie rÈelle d'une fonction holomorphe sur Ω. En dÈduire qu'il n'existe pas de dÈtermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}^*$*

c) *Soit $P : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique, soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ un rÈel tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ telle que $P = \Re\mathrm{e}(f)$. (On pourra appliquer le lemme de PoincarÈ, voir Exercice 3 ‡ $(-\partial P/\partial y, \partial P/\partial x)$.) La fonction f est-elle unique ?*
On rÈsume ceci en disant que "toute fonction harmonique est localement la partie rÈelle d'une fonction holomorphe".

d) *Lorsque $\Omega = \mathbb{C}$, montrer que toute fonction rÈelle harmonique est la partie rÈelle d'une fonction holomorphe.*

Exercice 3 (ApartÈ : lemme de PoincarÈ) *Soit $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ et (R, S) un couple de fonctions de classe C^1 du disque ouvert $D = D(z_0, r)$ ‡ valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $z = x + iy \in D$ on pose :*

$$Q(x,y) = \int_0^1 \Big((x - x_0)\ R(t(z - z_0) + z_0) + (y - y_0)\ S(t(z - z_0) + z_0) \Big)\ \mathrm{d}t.$$

a) *Rappeler l'expression de la dÈrivÈe de la fonction* $\begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & R(t(x - x_0) + x_0, t(y - y_0) + y_0)\,. \end{array}$

b) *On suppose que $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial S}{\partial x}$. Montrer alors que les dÈrivÈes partielles de Q existent et que pour tout $(x, y) \in D(z_0, r)$, on a :*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = R(x,y) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = S(x,y)\,.$$

Université Lille 1 **Master 1 mathématiques**
Analyse Complexe Approfondie **Année 2014-15**

Devoir Maison 2 :
Fonctions univalentes et théorème de Bieberbach

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On rappelle qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est univalente si elle est holomorphe et injective sur Ω. On rappelle aussi le théorème de Green–Riemann qui dit que si Γ est un lacet simple (c'est-à-dire sans point double), positivement orienté et qui entoure un domaine $\mathcal{D}$ borné et si P et Q sont deux applications C^1 au voisinage de $\overline{\mathcal{D}}$, alors on a

$$\int_\Gamma P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Rappelons que si $\Gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t)$, $t \in [0,1]$, alors l'intégrale curviligne à gauche est définie par

$$\int_\Gamma P dx + Q dy = \int_0^1 \left(P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) \right) dt.$$

Enfin on notera $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

(a) Soit Ω un ouvert **convexe**. Soit $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega)$ telle que pour tout $z \in \Omega$, on a $\Re\mathrm{e}(f'(z)) > 0$. Montrer que f est univalente.
Indication : on pourra considérer $f(z_1) - f(z_2)$ et l'écrire comme une intégrale.

(b) Soit g une fonction univalente sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

(i) Justifier l'existence de deux suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ telles que

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n, \qquad |z| > 1.$$

(ii) On suppose dans la suite que $a_1 = 1$ et $a_n = 0$, $n \geq 2$. Pour $r > 1$, on note γ_r le lacet défini par $\gamma_r(t) = r \exp(2i\pi t)$, $t \in [0,1]$. Montrer que

$$\frac{1}{2i} \int_{g \circ \gamma_r} \bar{z}\, dz = \pi \left(r^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} n |b_n|^2 r^{-2n} \right).$$

(iii) Justifier que si Γ est un lacet simple, positivement orienté, alors la quantité

$$\frac{1}{2i} \int_\Gamma \bar{z}\, dz$$

représente un réel positif ou nul.
Indication : on pourra utiliser le théorème de Green–Riemann pour interpréter cette intégrale curviligne comme une aire.

(iv) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n |b_n|^2 \leq 1,$$

et finalement que $|b_1| \leq 1$.

(c) Dans la suite, on notera $\mathcal{S}$ la classe des fonctions f univalentes sur $\mathbb{D}$ et qui vérifient que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1.$$

(i) Montrer que $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ est un élément de $\mathcal{S}$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{S}$ et notons

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{D},$$

la série de Taylor de f à l'origine. Montrer qu'il existe $f_1 \in \mathcal{S}$ telle que $f_1^2(z) = f(z^2)$, $z \in \mathbb{D}$. Justifier que f_1 est impaire.

(iii) Justifier qu'on peut écrire f_1 sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

avec $c_{2n+1} \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$ et $c_1^2 = 1$ et $2c_1c_3 = a_2$.

(iv) Soit $g : z \longmapsto c_1 f_1(z^{-1})^{-1}$. Montrer que g est une fonction univalente sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ dont le développement en série de Laurent est de la forme

$$g(z) = z - \frac{c_3}{c_1} z^{-1} + \ldots$$

(v) En déduire, en utilisant (b), que $|c_3| \leq |c_1|$, puis que $|a_2| \leq 2.$ [1]

(d) Soit $f \in \mathcal{S}$. Notons r le plus grand rayon d'une boule ouverte centré en 0 et contenue dans $f(\mathcal{D})$.

(i) Justifier que $r > 0$.

(ii) Vérifier que $\varphi : z \longmapsto f^{-1}(rz)$ envoie 0 sur 0 et $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$.

(iii) En déduire en calculant $\varphi'(0)$ que $r \leq 1$.

(iv) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$. Vérifier que l'application

$$z \longmapsto \frac{w^2}{w - f(z)}$$

est univalente sur $\mathbb{D}$ et que son développement de Taylor en 0 s'écrit

$$w + z + \left(\frac{1}{w} + a_2\right) z^2 + \ldots.$$

(v) En déduire que $\left|\frac{1}{w} + a_2\right| \leq 2$ et que $|w| \geq 1/4$.

(vi) En déduire finalement que $r \geq 1/4$. Autrement dit, on a montré que si $f \in \mathcal{S}$, alors $D(0, 1/4) \subset f(\mathbb{D})$.

1. En 1916, Bieberbach a conjecturé qu'en fait pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, on a $|a_n| \leq n$, $n \geq 1$. Il a prouvé le cas $n = 2$ mais en dépit de nombreux efforts, il a fallu attendre 1984 pour que L. de Branges fournisse une preuve de cette conjecture.

Université Lille 1 **Master 1 mathématiques)**
Variable Complexe Approfondie **Année 2013-14**

Partiel du 11 mars 2014
Durée : 2h

Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet comporte 3 exercices indépendants qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

Exercice 1.

Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. On veut construire une fonction f holomorphe sur Ω telle que :

(1) $cos(f(z)) = z$ pour tout $z \in \Omega$;

(2) $f(x) = \arccos(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

(a) Représentez graphiquement Ω.

(b) Montrer que f vérifie (1) si et seulement si f vérifie

$$(e^{if(z)} - z)^2 = z^2 - 1, \qquad z \in \Omega.$$

(c) (i) Vérifier que si $z \in \Omega$, alors $1 - z^2 \notin \mathbb{R}_-$.

(ii) Construire une fonction g holomorphe sur Ω tel que $g(z)^2 = 1 - z^2$ pour tout $z \in \Omega$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in]-1,1[$.

(d) Soit $h(z) = z + ig(z)$, $z \in \Omega$.

(i) Vérifier que $h(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(ii) Vérifier que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$|h(x)| = 1 \quad \text{et} \quad \arg_{]-\pi,\pi[}(h(x)) \in]0,\pi[.$$

(iii) Construire une fonction f holomorphe sur Ω et qui vérifie (1) et (2).

(e) La fonction f vérifiant (1) et (2) est-elle unique ? On justifiera la réponse.

Exercice 2.

(a) Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La fonction f'/f a une primitive dans Ω.

(ii) Il existe dans Ω une détermination holomorphe du logarithme de f.

(b) Soit $g(z) = 1 - 1/z^2$, $z \in \mathbb{C}^*$. Existe-t-il une détermination holomorphe du logarithme de g dans $\mathbb{C} \setminus A$, avec

(i) $A = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$?

(ii) $A =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$?

Exercice 3.

Soit f une fonction holomorphe sur $D(0, R)$, $R > 1$ et notons γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens positif.

(a) Calculer l'intégrale curviligne suivante

$$I = \int_\gamma \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz$$

en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.

(b) En déduire la valeur de

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\, cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\, dt.$$

Correction du partiel du 11 mars 2014

Exercice 1.

(a) La représentation graphique est immédiate : il s'agit du plan complexe privé des demi-droites $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$.

(b) Posons $w = e^{if(z)}$. On a alors $\cos(f(z)) = (w + w^{-1})/2$. Donc f vérifie (1) si et seulement si
$$w + w^{-1} = 2z,$$
ce qui équivaut à
$$w^2 - 2wz + 1 = 0.$$
Cette équation est alors clairement équivalente à
$$(w - z)^2 - z^2 + 1 = 0.$$
Ainsi f vérifie (1) si et seulement si
$$(e^{if(z))} - z)^2 = z^2 - 1, \qquad (z \in \Omega).$$

(c) (i) Supposons que $1 - z^2 = t$ pour $t \in \mathbb{R}_-$. Alors, $z^2 = 1 - t$. Posons $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. On voit alors que $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Ainsi,
$$z^2 = 1 - t \Longrightarrow (x^2 - y^2 = 1 - t \quad \text{et} \quad xy = 0).$$
Si $x = 0$ alors $-y^2 = 1 - t > 0$ ce qui est absurde. Donc nécessairement $x \neq 0$. Ceci implique que $y = 0$ et $x^2 = 1 - t$. Ainsi $x^2 \geq 1$, soit $|x| \geq 1$. On a donc prouvé que
$$1 - z^2 \in \mathbb{R}_- \Longrightarrow z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$
Par contraposé, cela donne le résultat.

(ii) Considérons Log la détermination principale du logarithme, c'est à dire, celle définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par
$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}|z| + i \arg_{]-\pi,\pi[}(z), \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-).$$
D'après le cours, on sait que Log est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Considérons alors la fonction g définie sur Ω par
$$g(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(1 - z^2)\right), \qquad (z \in \Omega).$$

D'après la question (c)(i), et le théorème de composition des fonctions holomorphes, il est clair que g est holomorphe sur Ω. De plus, on a

$$g(z)^2 = \exp\big(\mathrm{Log}(1-z^2)\big) = 1 - z^2, \qquad (z \in \Omega).$$

Enfin, si $x \in]-1,1[$, remarquons que $0 < 1 - x^2 < 1$ et donc

$$\arg_{]-\pi,\pi[}(1-x^2) = 0.$$

Ainsi on a $\mathrm{Log}(1-x^2) = \mathrm{Log}|1-x^2|$, ce qui donne

$$g(x) = \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}|1-x^2|\right) > 0.$$

(d) (i) Soit $z \in \Omega$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $t \geq 0$ tel que $h(z) = -t$. Alors cela donne

$$g(z) - iz = it. \tag{1}$$

D'autre part, comme $g(z)^2 = 1 - z^2$, on a aussi

$$(g(z) - iz)(g(z) + iz) = 1.$$

D'où (remarquons que cette équation exclut le cas $t = 0$)

$$g(z) + iz = \frac{1}{g(z) - iz} = \frac{1}{it}. \tag{2}$$

Finalement, avec (1) et (2), on en déduit que

$$iz + it = -iz - \frac{i}{t},$$

ce qui donne $z = -1/2(t + 1/t)$. On vérifie alors facilement avec une étude de fonctions (par exemple) que si $t > 0$ alors $z = -1/2(t+1/t) \in]-\infty, -1]$, ce qui est absurde car $z \in \Omega$.

(ii) Pour $x \in]-1,1[$, on sait d'après la question (c)(ii) que $g(x)$ est réel (positif) et comme $h(x) = x + ig(x)$, on a la décomposition de $h(x)$ en partie réelle et partie imaginaire et donc

$$|h(x)|^2 = x^2 + g(x)^2.$$

Le fait que $g(z)^2 = 1 - z^2$ donne alors que $|h(x)| = 1$. D'autre part, notons $\theta = \arg_{]-\pi,\pi[}(h(x))$. On a

$$\sin(\theta) = \frac{\Im\mathrm{m}(h(x))}{|h(x)|} = g(x) > 0.$$

Ainsi, on en déduit que $\theta \in]0, \pi[$.

(iii) Avec la première question, on est conduit à poser

$$f(z) = \frac{1}{i}\mathrm{Log}(h(z)) = \frac{1}{i}\mathrm{Log}(z + ig(z)), \qquad (z \in \Omega).$$

Ce qui précède montre que f est holomorphe sur Ω (composé de fonctions holomorphes et le fait que $h(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$). On a $e^{if(z)} = h(z)$, donc

$$(e^{if(z)} - z)^2 = (h(z) - z)^2 = -g(z)^2 = z^2 - 1,$$

et donc d'après (b), f vérifie (1). Enfin, pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$f(x) = \frac{1}{i}\mathrm{Log}(h(x)) = \arg_{]-\pi,\pi[}(h(x)).$$

Avec le (d) (ii), on en déduit que $f(x) \in]0, \pi[$. Comme d'autre part, $\cos(f(x)) = x$, on obtient que $f(x) = \arccos(x)$, $x \in]-1, 1[$.

(e) La fonction f est unique d'après le principe du prolongement analytique : si f_1 est une autre fonction holomorphe sur Ω satisfaisant (1) et (2), on en déduit que les deux fonctions f et f_1 coïncident sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$. Cet ensemble ayant un point d'accumulation, on en déduit par le principe du prolongement analytique que f et f_1 coïncident finalement sur tout l'ouvert connexe Ω.

Exercice 2.

(a) $(i) \Longrightarrow (ii)$: supposons que f'/f a une primitive dans Ω. Cela signifie qu'il existe une fonction g holomorphe dans Ω telle que $g'(z) = f'(z)/f(z)$, $z \in \Omega$. Considérons la fonction h définie par

$$h(z) = f(z)e^{-g(z)}, \qquad z \in \Omega.$$

Elle est clairement holomorphe et pour tout $z \in \Omega$, on a

$$h'(z) = f'(z)e^{-g(z)} - g'(z)f(z)e^{-g(z)} = e^{-g(z)}(f'(z) - g'(z)f(z)) = 0.$$

Ainsi, Ω étant connexe, on en déduit que h est constante. Notons k cette constante. Comme f ne s'annule pas, k est nécessairement non nulle et on peut toujours l'écrire alors sous la forme $k = e^c$, pour un certain $c \in \mathbb{C}$. On a alors

$$f(z) = ke^{g(z)} = e^{g(z)+c}, \qquad (z \in \Omega).$$

Ainsi $g + c$ est une détermination holomorphe du logarithme de f sur Ω.
$(i) \Longrightarrow (ii)$: réciproquement, supposons qu'il existe une fonction g holomorphe sur Ω telle que $e^{g(z)} = f(z)$, $z \in \Omega$. On a en dérivant

$$g'(z)e^{g(z)} = f'(z),$$

soit $g' = f'/f$. Ainsi, g est une primitive de f'/f.

(b) D'après la question (a), il existe une détermination holomorphe du logarithme de g dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus A$ si et seulement g'/g possède une primitive. Or

$$g'(z) = \frac{2}{z^3},$$

et donc

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{2}{z^2(z-1)}.$$

Un calcul simple montre que

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = -\frac{2}{z^2} - \frac{2}{z} + \frac{2}{z-1}.$$

Remarquons que $z \longmapsto 2/z^2$ possède une primitive sur $\mathbb{C}^*$. Ainsi, il existe une détermination holomorphe du logarithme de g dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus A$ si et seulement si la fonction

$$z \longmapsto -\frac{2}{z} + \frac{2}{z-1}$$

possède une primitive (remarquons que dans les deux cas $0 \notin \Omega$).

(i) Dans cette question $\Omega = \mathbb{C} \setminus ([-1, 0] \cup [1, +\infty])$. Supposons qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme de g dans Ω. Alors d'après ce qui précède, on aurait

$$\int_\gamma \left(-\frac{2}{z} + \frac{2}{z-1}\right) = 0,$$

pour tout lacet γ tracé dans Ω. Considérons alors pour γ le cercle de centre -1 et de rayon $3/2$, parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Il est clair que γ est un lacet tracé dans Ω. De plus, on a

$$\int_\gamma \left(-\frac{2}{z} + \frac{2}{z-1}\right) = -4i\pi \mathrm{Ind}_\gamma(0) + 4i\pi \mathrm{Ind}_\gamma(1).$$

Or $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 1$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(1) = 0$, ce qui contredit le fait que l'intégrale doit être nulle. Ainsi, on en conclut qu'il n'existe pas de détermination holomorphe du logarithme de g dans Ω.

(ii) Pour le deuxième exemple, on a $\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup [1, +\infty])$. On remarque alors que Ω est un domaine étoilé (par rapport au point $1/2$ par exemple). Donc toute fonction holomorphe dans Ω admet une primitive. Ceci permet d'en déduire qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme de g dans Ω.

Exercice 3.

(a) On peut appliquer la formule de Cauchy à f sur l'ouvert étoilé $D(0,R)$, ce qui donne

$$f(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz$$

et

$$f'(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,dz.$$

De plus, comme $D(0,R)$ est étoilé et la fonction f holomorphe, elle admet une primitive sur $D(0,R)$ et donc nécessairement

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Finalement, on déduit de tout cela que

$$I = 4i\pi f(0) + 2i\pi f'(0).$$

(b) Le paramétrage de γ est $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. On a alors

$$I = \int_0^{2\pi} \left(2 + \gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\right) \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt.$$

Or

$$2+\gamma(t)+\frac{1}{\gamma(t)} = 2+e^{it}+e^{-it} = 2+2\cos(t) = 2(1+\cos(t)) = 4\cos^2(t/2),$$

et

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = i.$$

D'où

$$I = 4i\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2(t/2)\,dt.$$

Finalement, on obtient que

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2(t/2)\,dt = \frac{I}{4i} = \pi f(0) + \frac{\pi}{2}f'(0).$$

Master 1 mathématiques

Variable Complexe Approfondie

Devoir surveillé du 10 mars 2015

Durée : 2 heures

Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet comporte 4 exercices indépendants qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

Exercice 1 (4 points)

Déterminer toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est la fonction

$$u(x,y) = 2xy, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2 (6 points)

On considère les deux ouverts suivants U_1 et U_2 (parties grisées) :

On pose alors $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$. Sur chacun des ouverts U_1 et U_2, étudier s'il existe des déterminations holomorphes :

(a) du logarithme de f.

(b) de la racine carrée de f.

Indication : pour étudier la situation sur l'ouvert U_1, on montrera qu'une condition nécessaire de l'existence d'une racine carrée de f est que, pour tout lacet γ tracé *dans* U_1*, on ait :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \in 2\mathbb{Z}.$$

Exercice 3 (6 points)

Soit $H = \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m}(z) > 0\}$ et soit f une application continue et bornée sur l'adhérence $\overline{H}$ de H et holomorphe sur H. On suppose que

$$|f(t)| \leq 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

On veut montrer que la même inégalité est vraie sur le demi-plan H.

(a) On fixe $\varepsilon > 0$ et pour $z \in \overline{H}$, on pose $g(z) = \frac{f(z)}{i+\varepsilon z}$. Montrer que g est continue sur $\overline{H}$ et holomorphe sur H.

(b) Montrer que $|g(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\overline{H}}} |g(z)| = 0.$$

(c) Montrer que $|g(z)| \leq 1$, pour tout $z \in H$. En déduire que $|f(z)| \leq 1$, pour tout $z \in H$.

(d) L'hypothèse que f est bornée sur $\overline{H}$ est-elle vraiment nécessaire ?

Exercice 4 (4 points)

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant l'intervalle $[0,1]$.

(a) Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que, pour $n \geq 1$, on a

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}.$$

Montrer que nécessairement, on a $f(z) = z^2$ pour tout $z \in \Omega$.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n\frac{1}{n^2}, \qquad n \geq 1.$$

Université de Lille 1 Sciences et Technologies

Master 1 mathématiques

Variable Complexe Approfondie

Devoir surveillé du 16 mai 2015

Durée : 3 heures

Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet comporte 2 exercices indépendants qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

Exercice 1 (points)

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ telle que

$$\sum_{n\geq 0}(1 - |a_n|) < +\infty.$$

Pour $n \geq 0$ et $z \neq 1/\overline{a_n}$, on pose

$$b_n(z) = \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z}.$$

(a) Montrer que le produit infini

$$B(z) = \prod_{n\geq 0} b_n(z), \qquad z \in \mathbb{D},$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.

(b) Vérifier que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $|B(z)| \leq 1$.

(c) Pour $N \geq 0$, on pose

$$B_N = \prod_{n=0}^{N} b_n.$$

(i) Montrer que

$$1 - |b_n(z)|^2 = \frac{(1 - |a_n|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{a_n}z|^2}.$$

(ii) Montrer que $|B_N(r\zeta)|$ tend vers 1 uniformément sur $\mathbb{T}$ quand $r \to 1$.
Indication : on pourra utiliser que, pour $0 < a, b < 1$, on a $1 - ab \leq (1 - a) + (1 - b)$ pour montrer

$$1 - |B_N(r\zeta)|^2 \leq \sum_{n=0}^{N}(1 - |b_n(r\zeta)|^2),$$

puis utiliser (i).

(iii) En déduire l'inégalité
$$\left|\frac{B}{B_N}(0)\right| \leq \|B\|_\infty,$$
où $\|B\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |B(z)|$.
Indication : on pourra utiliser la formule de Cauchy.

(iv) Conclure que $\|B\|_\infty = 1$.

Exercice 2 (points)

Soient $\omega : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction continue et H_ω l'espace des fonctions mesurables $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ telles que
$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\omega(x)\,dx < +\infty$$
(qui identifie les fonctions qui coïncident sur un ensemble E de $\omega(x)dx$-mesure nulle). On suppose que pour tout $n \geq 0$, la fonction $\chi_n(x) = x^n$ appartient à H_ω et on admet que H_ω est un espace de Hilbert.

(a) Soit $0 < \mu < \frac{1}{2}$. On suppose dans cette question que $\omega(x) = \exp(-x^\mu)$.

(i) Justifier qu'on peut trouver une détermination holomorphe du logarithme telle que la fonction $F(z) = z^n \exp(-z^\mu/\cos(\pi\mu))$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.

(ii) Soient $0 < \varepsilon < R$, $\alpha \in]\pi/2,\pi[$ et γ le contour représenté ci-dessous :

On note I l'intégrale curviligne définie par
$$I = \int_\gamma F(z)\,dz.$$
En calculant I, montrer que
$$\int_0^{+\infty} e^{-i(n+1)\alpha} t^n \exp\left(\frac{-t^\mu e^{-i\mu\alpha}}{\cos(\mu\pi)}\right)dt = \int_0^{+\infty} e^{i(n+1)\alpha} t^n \exp\left(\frac{-t^\mu e^{-i\mu\alpha}}{\cos(\mu\pi)}\right)dt.$$

(iii) En faisant tendre α vers π, en déduire que
$$\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t^\mu)\exp(-it^\mu\tan(\mu\pi))\,dt = \int_0^{+\infty} t^n \exp(-t^\mu)\exp(it^\mu\tan(\mu\pi))\,dt,$$
puis
$$\int_0^{\infty} t^n \exp(-t\mu)\sin(t^\mu\tan(\mu\pi))\,dt = 0.$$

(iv) Conclure que les polynômes ne sont pas denses dans H_ω.

(b) On suppose maintenant que $\omega : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ est une fonction continue telle qu'il existe $\varepsilon > 0$ satisfaisant

$$\int_0^{+\infty} e^{\varepsilon\sqrt{x}}\omega(x)\,dx < +\infty.$$

Le but de la question est de montrer qu'alors les polynômes sont denses dans H_ω.

Soit $f \in H_\omega$ telle que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^n\omega(x)\,dx = 0.$$

(i) On pose

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{z\sqrt{x}} f(x)\omega(x)\,dx.$$

Montrer que F est holomorphe sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e(z)} < \frac{\varepsilon}{2}\}$.

(ii) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $F^{(2n)}(0) = 0$.

(iii) En déduire que F est impaire dans un voisinage de 0.

(iv) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $-\varepsilon/2 < \Re\mathrm{e(z)} < \varepsilon/2$, $F(z) = -F(-z)$.

(v) En déduire qu'on peut prolonger F en une fonction $\tilde{F}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ et impaire.

(vi) Montrer que $\tilde{F}$ est bornée sur $\mathbb{C}$ puis en déduire que $F \equiv 0$.

(vii) En déduire que $f = 0$ et conclure.

Indication : on rappelle que si $\mathcal{F}h$ désigne la transformée de Fourier d'une fonction $h \in L^1(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}h)(y) = \int_0^{+\infty} e^{iyt}h(t)\,dt,$$

alors

$$((\mathcal{F}h)(y) = 0,\ y \in \mathbb{R}) \Longrightarrow h = 0 \text{ presque partout.}$$

Master 1 mathématiques

Variable Complexe Approfondie

Devoir surveillé du 22 juin 2015

Durée : 3 heures

Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet comporte 4 exercices indépendants qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

Exercice 1

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω, non constante. On suppose que $|f|$ admet un minimum local dans Ω. Montrer que f s'annule au moins une fois.

Exercice 2

(a) Montrer que le produit infini

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+z^{2^n})$$

définit une fonction holomorphe f sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ du plan complexe.

(b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $(1+z)f(z^2) = f(z)$.

(c) En déduire que $f(z) = 1/(1-z)$, pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Exercice 3

(a) Calculer $\min_{|z|=1} |ze^{-z}|$.

(b) Montrer que pour tout $w \in D(0, e^{-1})$, il existe une et une seule solution z de l'équation $ze^{-z} = w$ dans le disque $D(0,1)$. On la note $h(w)$.

Indication : on pourra utiliser le théorème de Rouché.

(c) Pour $w \in D(0, e^{-1})$, calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,1)} \frac{z(1-z)e^{-z}}{ze^{-z} - w} \, dz.$$

(d) Pour $n \geq 1$, on note

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,1)} (1-z) z^{-n} e^{nz} \, dz.$$

Montrer que $a_n = n^{n-1}/n!$.

(e) En déduire que pour $w \in D(0, e^{-1})$, on a

$$h(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} w^n$$

Exercice 4

Soit Ω un ouvert du plan complexe, $a \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$.

(a) Soit g une fonction holomorphe sur Ω.

(i) Montrer que

$$g'(a) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} g(a + Re^{i\theta}) \, d\theta,$$

et

$$0 = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} g(a + Re^{i\theta}) \, d\theta.$$

(ii) En déduire que

$$\Re\mathrm{e}(g'(a)) = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \, \Re\mathrm{e}(g(a + Re^{i\theta})) \, d\theta.$$

(b) Soit f une fonction holomorphe sur Ω telle que, pour tout $z \in \overline{D(a, R)}$, on a $f(z) \neq 0$.

(i) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $z \in D(a, R + \varepsilon)$, on a $f(z) \neq 0$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

(ii) En utilisant la question (a), montrer que

$$\Re\mathrm{e}\left(\frac{f'(a)}{f(a)}\right) = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \log |f(a + Re^{i\theta})| \, d\theta.$$

(c) Soit h une fonction holomorphe sur Ω telle que, pour tout $z \in \partial D(a, R)$, on a $h(z) \neq 0$.

(i) Montrer que h n'a qu'un nombre fini de zéros dans $D(a, R)$. Dans la suite, on notera ces zéros $z_k = a + r_k e^{i\theta_k}$, $1 \leq k \leq N$, répétés avec multiplicité.

(ii) Notons

$$B(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{R(z - z_k)}{R^2 - r_k e^{-i\theta_k}(z - a)}.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que B est holomorphe sur $D(a, R + \varepsilon_0)$.

(iii) Vérifier que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|B(a + Re^{i\theta})| = 1$.

(iv) En déduire que

$$\Re\mathrm{e}\left(\frac{h'(a)}{h(a)}\right) = \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi} \cos(\theta) \log|f(a+Re^{i\theta})| \, d\theta + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R}\left(\frac{r_k}{R} - \frac{R}{r_k}\right)\cos(\theta_k).$$

Indication : on pourra appliquer la question (b) à la fonction $f = h/B$.

Université Lille 1 **Master 1 mathématiques)**
Variable Complexe Approfondie **Année 2012-13**

Examen du 22 mai 2013
Durée : 3h

Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet comporte 3 exercices indépendants qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

Exercice 1.

(a) Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$, g une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, l'adhérence de Ω. Montrer que si $|g|$ est constante sur $\partial\Omega$, alors g s'annule sur Ω ou g est constante.

(b) Soit f une fonction entière qui envoie le cercle unité $\mathbb{T}$ dans lui même, c'est-à-dire que $|f(z)| = 1$ pour tout $|z| = 1$.

(i) Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans le disque unité $\mathbb{D}$. Notons ses zéros $a_1, a_2, \ldots, a_N$, pris avec leur ordre de multiplicité.

(ii) On pose
$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^{N} \frac{1 - \overline{a_i} z}{z - a_i}.$$
Montrer que g est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$.

(iii) En utilisant la question (a), en déduire que g est constante.

(iv) En utilisant le fait que f est une fonction entière, montrer que pour tout $i = 1, \ldots, N$, $a_i = 0$.

(v) Conclure qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(z) = cz^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.

On note Δ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, $R > 1$ et on considère une fonction f holomorphe sur Δ.

(a) Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que $|a|^2 + |b|^2 = |a + ib|^2 + i(a\bar{b} - \bar{a}b)$.

(b) On suppose dans cette question que $f(z)$ est réel si z est réel. En considérant dans $\mathbb{C}$ les circuits suivants, montrer l'inégalité

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta.$$

(c) On revient maintenant au cas d'une fonction quelconque f holomorphe sur Δ. Pour $z \in \Delta$, on pose

$$\varphi(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad g(z) = \frac{f(z) + \varphi(z)}{2}, \quad h(z) = \frac{f(z) - \varphi(z)}{2i}.$$

(i) Montrer que les fonctions φ, g et h sont holomorphes sur Δ.

(ii) Montrer que l'on a :

$$g(\bar{z}) = \overline{g(z)} \quad \text{et} \quad h(\bar{z}) = \overline{h(z)},$$

et que $g(z)$ et $h(z)$ sont réels si z est réel.

(iii) En déduire que l'on a encore :

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta.$$

Indication : on pourra utiliser les questions (a) et (b).

(d) Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes. En considérant $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, montrer que :

$$\sum_{\substack{0 \leq k,j \leq n \\ k+j \equiv 0 \pmod 2}} \frac{a_k \overline{a_j}}{k+j+1} \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

Exercice 3.

Soient $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert du plan complexe et $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité. On définit une suite $(f_n)_n$ de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ par :

$$f_0(z) = z, \quad f(z) = f_1(z) = \frac{z(1-2z)}{2-z}, \quad f_{n+1} = f_1 \circ f_n.$$

(a) Prouver que $f(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$ et que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(b) En utilisant le théorème de Rouché, montrer que si $w \in \mathbb{D}$, l'équation $f(z) = w$ a deux racines appartenant à $\mathbb{D}$. Prouver que, sauf pour une valeur de w que l'on précisera, ces deux racines sont distinctes.

(c) Pour $0 < r \leq 1$, posons

$$\varphi(r) = \sup \left\{ \left| \frac{f(z)}{z} \right| : |z| = r \right\}.$$

Montrer que $\varphi(r) = (2r+1)/(r+2)$ et que φ est croissante sur $(0, 1]$.

(d) En déduire que

$$|f(z)| \leq |z| \frac{1 + 2|z|}{2 + |z|}, \qquad z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

(e) Montrer que, pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, on a

$$|f_n(z)| \leq |z| \left(\frac{1+2|z|}{2+|z|} \right)^n.$$

Indication : on pourra raisonner par récurrence.

(f) Montrer que pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, on a

$$\left|1 - 2\frac{f(z)}{z}\right| \leq 3|z|.$$

(g) En déduire que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2f_n(z)}{f_{n-1}(z)}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.

(h) Montrer que la suite $(2^n f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$. Soit g sa limite. Prouver que $2g \circ f = g$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Université Lille 1 **Master 1 mathématiques**
Variable Complexe Approfondie **Année 2012-13**

Examen du 26 juin 2013–Session 2
Durée : 3h

Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet comporte 4 exercices indépendants qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

Exercice 1.

(1) Enoncez les équations de Cauchy–Riemann.

(2) Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, non vide, et f, g deux fonctions holomorphes sur Ω.

(i) On suppose dans cette question que $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$. Montrer alors que f est constante.

(ii) On suppose maintenant que g ne s'annule pas dans Ω et que $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = cg(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 2.

(1) Enoncez le lemme de Schwarz.

(2) Soit φ une fonction holomorphe sur $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ et supposons que $\varphi(0) = 0$ et $|\varphi(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D(0,R)$. Montrer que, pour $0 < r < R$, on a

$$\sup_{|z|\leq r} |\varphi(z)| \leq \frac{r}{R}.$$

(3) On considère maintenant une fonction holomorphe sur un ouvert Ω qui contient le disque fermé $\overline{D(0,R)}$ et on note

$$A(r) = \sup_{|z|\leq r} \Re f(z), \quad M(r) = \sup_{|z|\leq r} |f(z)|, \qquad 0 < r \leq R.$$

On suppose tout d'abord que $f(0) = 0$ et soit $c > A(R)$.

(i) Montrer que $c > 0$.

(ii) Considérons $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{2c - f(z)}$, $|z| < R$. En utilisant la question (2), montrer que

$$\sup_{|z|\leq r} |f(z)| \leq \frac{2cr}{R-r}.$$

(iii) En déduire que

$$\sup_{|z|\leq r} |f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} A(R).$$

On ne suppose plus maintenant que nécessairement $f(0) = 0$.

(iv) Montrer alors que

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

(v) Si $A(R) \geq 0$, montrer que, pour tout entier $n \geq 0$ et tout $0 < r < R$, on a

$$\sup_{|z| \leq r} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{2^{n+2} n! R}{(R-r)^{n+1}} (A(R) + |f(0)|).$$

Indication : pour $|z| \leq r$, on pourra utiliser la formule de Cauchy sur le cercle de centre z et de rayon $\delta = (R-r)/2$.

Exercice 3.

Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,R)$ telle que $f(0) \neq 0$. On fixe $0 < r < R$.

(1) Justifier que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\overline{D(0,r)}$, qu'on notera dans la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, en convenant qu'ils sont comptés avec leurs multiplicités et numérotés de telle façon que

$$|\alpha_i| < r, \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{et} \quad |\alpha_j| = r, \quad m+1 \leq j \leq N.$$

(Bien entendu, on peut avoir $m = 0$ ou $m = N$). Définissons alors

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^{m} \frac{r^2 - \overline{\alpha_i} z}{r(\alpha_i - z)} \prod_{j=m+1}^{N} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - z}.$$

(2) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que g est holomorphe sur le disque ouvert $D_1 = D(0, r+\varepsilon)$.

(3) Montrer qu'il existe h holomorphe sur D_1 telle que

$$e^{h(z)} = g(z), \qquad z \in D_1.$$

(4) En appliquant la formule de Cauchy à h, montrer que

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

(5) En déduire [1] que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \sum_{n=1}^{N} \log \left(\frac{r}{|\alpha_n|} \right).$$

(6) Soit f une fonction homorphe et bornée dans le disque unité, non identiquement nulle. On note $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ la suite des zéros de f comptés avec multiplicité. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} (1 - |\alpha_n|)$$

converge.

Exercice 4.

Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $C = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. Notons Z l'ensemble des zéros du polynôme

$$P(X) = X^7 - 5X^3 + 12.$$

Déterminer

$$\mathrm{card}(\mathbb{D} \cap Z) \quad \text{et} \quad \mathrm{card}(C \cap Z).$$

1. On pourra utiliser <u>sans démonstration</u> que $\int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| \, d\theta = 0$