TD1 - Rappels

Uniforme continuité

Exercice 1

a) Montrer que si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction k-lipschitzienne sur un intervalle I (c'est-à-dire $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$), alors f est uniformément continue sur I.

b) En déduire que $x \longmapsto \sin(x)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $x \longmapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas lipschtzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2

Montrer que $x \longmapsto x^2$ est uniformément continue sur tout compact de $\mathbb{R}$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant ax + b$ (autrement dit, une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ est majorée par une fonction affine).

a) Justifier l'existence de $\eta_1 > 0$ tel que

$$|x - y| < \eta_1 \implies |f(x) - f(y)| \leqslant 1.$$

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $n_0 = \left[\frac{x_0}{\eta_1}\right] + 1$ (où $[\cdot]$ désigne la partie entière).

(i) Montrer que

$$|f(x_0) - f(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|.$$

(ii) En déduire le résultat.

c) Application :

(i) Montrer que $f : x \longmapsto e^x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que P est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

Intégrales de Riemann

Exercice 4

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur un intervalle (quelconque) I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$. On définit alors pour $x \in I$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Montrer que F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, on a $F'(x) = f(x)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

a) Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $e^{-2x}\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}\ln(2)$. Etablir une inégalité analogue sur $\mathbb{R}_-^*$.

c) En déduire que f peut se prolonger par continuité en 0.

d) Etudier les limites de f à l'infini.

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Indication: soit $\varepsilon > 0$. On pourra découper l'intégrale sur $[0, \pi/2 - \varepsilon]$ et $[\pi/2 - \varepsilon, \pi/2]$.

Exercice 7

Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant connu sous le nom de *deuxième formule de la moyenne :* soient f, g deux fonctions définies et continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que g est positive et décroissante. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Pour cela, considérons $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots x_n)$ une subdivision de $[a,b]$, c'est-à-dire $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, et notons $\delta(\mathcal{S}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1})$ le pas de la subdivision. On notera aussi $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ et $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$.

a) Montrer que $\left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i}(g(x) - g(x_{i-1}))f(x)\,dx\right| \leqslant \|f\|_\infty\left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})g(x_{i-1}) - \int_a^b g(x)\,dx\right)$.

b) En déduire que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{\delta(\mathcal{S})\to 0}\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx.$$

c) Justifier que F admet un minimum m et un maximum M sur $[a,b]$.

d) En utilisant une transformation d'Abel, montrer que

$$mg(a) \leqslant \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leqslant Mg(a).$$

e) En déduire le résultat.

Application : Soit f une application continue décroissante de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers zéro à l'infini. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n^2} f(t)e^{it}\,dt.$$

Intégrales généralisées

Exercice 8

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ **3.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x(\sin x)e^{-x}dx$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)e^{-t}dt$ **5.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$.

Exercice 9

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{e^t - 1}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$ **3.** $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)dt$.

Exercice 10

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}dt$ **2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}dx$ **3.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}dt$.

Exercice 11

Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt$ **3.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^\alpha}dt$.

Exercice 12

a) Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}}dx$.

b) Démontrer la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}}dx$.

c) Etudier la nature de $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}}dx$.

Exercice 13

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}dx$ **2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)dx$, $\alpha > 0$.

Exercice 14

Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt$ **3.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-at}dt$, $a > 0$.

Exercice 15

a) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, et soit (x_n) et (y_n) deux suites tendant vers $+\infty$. Démontrer que $\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$ tend vers 0.

b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t\sin t}dt$ diverge.

Exercice 16 Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$

Exercice 17

a) Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a, +\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) il existe un réel M tel que pour tout $x \geqslant a$, on a

$$\left| \int_a^x f(t)\, dt \right| \leqslant M;$$

(ii) la fonction g est décroissante et $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$.

Montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\, dt$ est convergente.

Indication : on pourra utiliser la deuxième formule de la moyenne.

b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

c) Donner une autre preuve de la convergence de l'intégrale précédente en utilisant une intégration par partie.

TD2 - Intégrales définies dépendant d'un paramètre

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \cos(tx)\,dt$.

a) Montrer que F est bien définie, continue et paire sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2

Soit $F(x) = \int_0^1 t^3 e^{xt}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$.

Exercice 3

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$.

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Par une décomposition en éléments simples, calculer $F(x)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

Exercice 4

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

Montrer que F est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x^2+t^2}.$$

a) Montrer que F est bien définie, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et pour $x > 0$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale (qu'on ne cherchera pas à calculer).

b) Calculer $F(x)$ directement par un calcul de primitive.

c) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Exercice 6

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,dt.$$

a) Montrer que F est bien définie sur $]-1,1[$ et que pour $x \in]-1,1[$, on a

$$F(x) = 2\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,dt.$$

b) Montrer que F est dérivable sur $]-1,1[$.

c) En posant $u = \tan(t/2)$, montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $F'(x) = 0$.

d) En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

Exercice 7

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.$$

a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.

d) Montrer que F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et convexe.

e) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.

f) Donner l'allure du graphe de F.

Exercice 8

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2(t))\,dt$, $x > -1$.

a) Montrer que F est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$. Calculer $F'(0)$.

b) A l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$, montrer que pour tout $x > -1$, on a

$$F'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}.$$

c) En déduire finalement la valeur de $F(x)$.

Exercice 9

Pour $x > 0$, on définit

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x} dt.$$

a) Justifier que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et étudier les variations de f.

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) En utilisant $1 - \frac{t^2}{2} \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, démontrer que $f(x) \sim_{x\to 0^+} -\ln x$.

d) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$. *Indication: on pourra calculer $xf(x) - 1$.*

Exercice 10

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit

$$F(x) = \int_0^1 \frac{xf(t)}{x^2+t^2} dt, \qquad x > 0.$$

a) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

c) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \left(F(x) - f(0) \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2} dt \right) = 0.$$

Indication: on pourra écrire que

$$F(x) - f(0) \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2} dt = \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2} (f(t) - f(0)) \, dt$$

et découper l'intégrale en deux sur $[0, \delta]$ puis $[\delta, 1]$. Pour la première intégrale, on pourra alors utiliser la continuité de f en 0.

d) En déduire que $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \dfrac{\pi}{2} f(0)$.

e) Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres pour répondre à la question précédente ?

Exercice 11

a) Soit φ une fonction définie sur un voisinage de 0, à valeurs strictement positive et dérivable en 0. Supposons en plus que $\varphi(0) = 1$. Déterminer $\lim_{x\to 0} (\varphi(x))^{1/x}$.

b) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et supposons que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) > 0$. Posons

$$I(x) = \int_0^1 f(t)^x \, dt.$$

Montrer que I est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que

$$\lim_{x\to 0} \left(\int_0^1 f(t)^x \, dt \right)^{1/x} = \exp \left(\int_0^1 \log(f(t)) \, dt \right).$$

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞.

a) On suppose que $f(0) = 0$ et on pose $g(x) = f(x)/x$, $x \neq 0$. Justifier que pour $x \neq 0$, on a

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx) \, dt.$$

En déduire que g se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) On suppose maintenant que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. On pose maintenant $g(x) = f(x)/x^n$, $x \neq 0$. Justifier que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. *Indication: on pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.*

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons

$$F(x) = \int_0^x \sin(x-t) \, f(t) \, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) En utilisant le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, montrer que F est de classe C^2 et satisfait $F''(x) + F(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Comment peut-on retrouver ce résultat ?

Exercice 14

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

a) Montrer que F et G sont bien définies et dérivables sur $]0, \infty[$ et vérifier que $F'(x) = G'(x)$, $x > 0$.

b) En déduire que pour tout $x > 0$, on a

$$\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

Exercice 15

Pour $x \in I = [0, +\infty[$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\, dt \quad \text{et} \quad G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2.$$

a) Montrer que F est définie, continue et dérivable sur I. Exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale (qu'on ne cherchera pas à calculer).

b) Justifier que G est définie, continue et dérivable sur I et montrer que

$$F'(x) + G'(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

c) En déduire que, $\forall x \in I$, $F(x) + G(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

d) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
Indication: on pourra remarquer que $|F(x)| \leqslant e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

e) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 16

Soit $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1 - x\cos(t)}\, dt$.

a) Montrer que F est continue et dérivable sur $[0, 1[$. Exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale (qu'on ne cherchera pas à calculer).

b) Montrer que

$$xF'(x) = -F(x) + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(t)}{1 - x\cos(t)}\, dt.$$

Indication: on effectuera une intégration par partie dans l'intégrale donnant $xF'(x)$.

c) Montrer que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(t)}{1 - x\cos(t)}\, dt = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}},$$

et en déduire que F est solution sur $]0, 1[$ de l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad xy' + y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

d) Calculer une primitive sur $]0, 1[$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.
Indication: on pourra effectuer le changement de variable $x = \sin(t)$, $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

e) Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et montrer qu'il existe une et seule solution qui se prolonge par continuité sur $[0, 1]$.

f) Montrer que l'intégrale (généralisée) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1 - \cos(t)}\, dt$ converge. On notera I sa valeur.

g) Montrer que $\lim_{x\to1^-} F(x) = \dfrac{I}{\pi}$. *Indication: On pourra découper l'intégrale en deux, sur* $[0, \varepsilon]$ *puis* $[\varepsilon, \pi]$.

h) En déduire la valeur de I.

TD3 - Intégrales impropres dépendant d'un paramètre

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculer $F'(x)$.

d) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

a) Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour tout $x > 0$.

d) En déduire un équivalent de f en 0.

e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

d) En déduire le calcul de $f(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Exercice 4

Soit l'application $f : x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} dt$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

d) En déduire le calcul de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. *Indication: on pourra calculer $f(0)$ en faisant le changement de variable $u = 1/t$.*

Exercice 5

Étudier la continuité au point 0 de F définie par $F(0) = 0$ et
$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt^2)}{t^2} dt \text{ si } x > 0.$$

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n} dt$.

a) Montrer que I_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $I_n'(x)$ en fonction de $I_{n+1}(x)$, pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$.

b) Calculer $I_1(x)$, $x > 0$.

c) En déduire la valeur de $I_2(x)$, puis $I_3(x)$, $x > 0$.

Exercice 7

a) Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente. Nous allons calculer la valeur de I.

Pour tout $x \geqslant 0$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt.$$

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

c) Calculer $F'(x)$ puis $F(x)$ pour $x > 0$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, soit
$$F_n(x) = \int_0^n \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt.$$

(i) Montrer que $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur $[0, +\infty[$.

Indication : on pourra utiliser la seconde formule de la moyenne.

(ii) Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction F_n est continue sur $[0, +\infty[$.

(iii) En déduire que $\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$.

e) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 8

Soit Γ la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Cette fonction s'appelle la fonction Gamma d'Euler.

a) Montrer que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^n t^{x-1} dt.$$

b) Montrer que $\Gamma(1) = 1$, que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c) En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \geqslant 1$.

d) Montrer que $\ln(\Gamma)$ est bien définie et convexe.

Exercice 9

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t^2} dt$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une fonction F continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer F' sous a forme d'une intégrale.

c) Trouver une relation simple entre $F'(x)$ et $F(x)$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $G(x) = e^{\frac{x^2}{4}} F(x)$. Montrer que la fonction G est constante sur $\mathbb{R}$. En admettant l'égalité $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire une expression explicite de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt.$$

a) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x \geqslant 0$.

c) En déduire une expression de $F(x)$ pour $x \geqslant 0$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

d) Déduire de ce qui précède la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt.$$

Exercice 11

On pose, pour tout $x > 0$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt.$$

a) Montrer que F est bien définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer F' puis en déduire une expression de F.

c) En déduire pour tous $a, b > 0$ la valeur de l'intégrale

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Exercice 12

Calculer $\hat{f}$, la transformée de Fourier de f, dans les cas suivants, après avoir vérifié son existence :

a) $f(t) = 1$ si $t \in [-1, 1]$ et $f(t) = 0$ sinon.

b) $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$.

Exercice 13

Soit $f(t) = e^{-t^2}$.

a) Justifier que $\hat{f}$ existe et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\hat{f}$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on résoudra.

c) En déduire une expression de $\hat{f}$.

Exercice 14

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La **transformée de Laplace** de f est la fonction $\mathcal{L}f$ définie par

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t^n} = 0.$$

a) Montrer que $\mathcal{L}f$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que $\lim_{s \to +\infty} (\mathcal{L}f)(s) = 0$.

c) Montrer que $\mathcal{L}f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $s > 0$, on a

$$(\mathcal{L}f)'(s) = -\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-st} dt.$$

d) Calculer $\mathcal{L}f$ dans les cas suivants :

(a) $f(t) = 1,\ t \geqslant 0$ $\qquad$ $b)$ $f(t) = t,\ t \geqslant 0.$

Exercice 15

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

a) En utilisant le critère de Cauchy et la seconde formule de la moyenne, montrer que $\mathcal{L}f$ est bien définie sur $[0, +\infty[$.

b) Pour $X \geqslant 0$, on définit

$$I_X(a) = \int_0^X f(t)e^{-at}\, dt, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Justifier que I_X est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que I_X converge uniformément vers $\mathcal{L}f$ sur $[0, +\infty[$ lorsque $X \to +\infty$.

d) En déduire que $\mathcal{L}f$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 16

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt$ converge. Le produit de convolution de f par g est la fonction notée $f * g$ et définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que $f*g$ est bien définie, continue et borné sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que $f * g = g * f$.

c) On suppose de plus que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que f' est bornée. Montrer alors que $f * g$ est dérivable et que $(f * g)' = f' * g$.

TD4 - Séries de Fourier

Exercice 1

Soit f la fonction paire, 2π-périodique et définie par $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$.

a) Déterminer la série de Fourier de f.

b) Etudier la convergence de cette série de Fourier.

c) En déduire les valeurs des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 2

On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi \\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

a) Déterminer la série de Fourier de f.

b) Etudier la convergence de cette série de Fourier.

c) Ecrire l'identité de Parseval pour cette série de Fourier.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent avec les fonctions 2π-périodiques définies par :

a) $g(x) = \frac{x}{2}$ si $x \in]-\pi, \pi[$ et $g(\pi) = 0$.

b) $h(x) = |\sin(x)|$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

c) $k(x) = |x|(\pi - |x|)$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

Exercice 4

On considère la fonction f de période 2π, définie par $f(x) = \mathrm{ch}(x)$, $x \in [-\pi, \pi[$.

a) Déterminer pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f)$, puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

c) En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 5

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi[$.

a) Calculer les. coefficients de Fourier de f.

b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 6

Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(1 - x^2)$.

a) Montrer qu'il existe une suite de réels $(b_n)_{n \geqslant 1}$ telle que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x).$$

b) Calculer les coefficients $(b_n)_{n \geqslant 1}$.

c) En déduire les valeurs de

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Exercice 7

Soit g la fonction 2π-périodique, paire, égale à $g(x) = \pi$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $g(x) = 0$ si $1 < x \leqslant \pi$.

a) Déterminer la série de Fourier de g et discuter sa convergence.

b) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2.$$

Exercice 8 (Le développement eulérien du sinus)

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. On désigne par f_α la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in]-\pi, \pi], \qquad f_\alpha(t) = \cos(\alpha t).$$

a) Calculer la série de Fourier de f_α. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}, \qquad \mathrm{cotan}(t) = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

b) Fixons $x \in]0, \pi[$ et soit $f : [0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \cot\text{an}(t) - \frac{1}{t} & \text{si } 0 < t \leqslant x \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Vérifier que f est continue sur $[0, x]$ et montrer que

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

c) En déduire que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \qquad \sin(t) = t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right),$$

où l'égalité ci-dessus signifie que la suite $t \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$ converge vers $\sin(t)$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{e^{it}}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Justifier que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{k!}.$$

c) En déduire les coefficients de Fourier c_n de f, pour $n \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos(t)}\,dt = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$$

Exercice 10 (Inégalité de Wirtinger)

a) Soient $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(t) = Ae^{it} + Be^{-it}$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2\,dt = \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2\,dt.$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1, 2π-périodique et telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt.$$

c) Dans quel cas y-a-t-il égalité ?

Exercice 11

a) Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

b) Existe-t-il une suite réelle $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi[$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$?

c) Existe-t-il une suite réelle $(c_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(nx)$?

Exercice 12

a) La série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux 2π-périodique ?

b) La série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction C^1 par morceaux 2π-périodique ?

Exercice 13 (Equations différentielles et séries de Fourier)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad\qquad y''(t) - y(t)e^{it} = 0.$$

a) (i) Montrer que la série trigonométrique

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{int}$$

converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que sa somme f est 2π-périodique.

(ii) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f est solution de l'équation différentielle (E).

b) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une solution 2π-périodique de classe C^2 de l'équation (E).

(i) Pour $n \in \mathbb{Z}$, en utilisant que g est solution de (E), exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_{n-1}(g)$.

(ii) En utilisant que g est de classe C^2, exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_n(g)$, pour $n \in \mathbb{Z}$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ une relation entre $c_n(g)$ et $c_{n-1}(g)$.

(iii) Calculer, pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g)$ en fonction de $c_0(g)$.

(iv) En déduire l'espace vectoriel des solutions complexes 2π-périodiques de l'équation différentielle (E).

Exercice 14 (Equations différentielles et séries de Fourier) On considère l'équation différentielle

$$(E_{a,b}) \qquad y''(t) + (a + be^{2it})y(t) = 0,$$

avec a, b deux nombres complexes.

a) On suppose dans cette question que a est réel et $b = 0$. Résoudre $(E_{a,0})$. L'équation $(E_{a,0})$ admet-elle des solutions non nulles 2π-périodiques ?

b) Soit f une fonction indéfiniment dérivable et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout entier k strictement positif, on a lorsque n tend vers $+\infty$:

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

c) (i) Montrer que toute solution de $(E_{a,b})$, 2π-périodique, est indéfiniment dérivable, développable en série de Fourier ainsi que ses dérivées.

(ii) Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $g(t) = (a + be^{2it})f(t)$. Pour tout entier n, calculer $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$.

d) Montrer que les coefficients de Fourier $c_n(f)$ d'une solution 2π-périodique de l'équation $(E_{a,b})$ vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad (n^2 - a)c_n(f) = bc_{n-2}(f).$$

e) Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} \gamma_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma_n = \frac{b\gamma_{n-1}}{4n^2}, \end{cases}$$

et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n e^{2int}$. Montrer que la fonction φ est une solution 2π-périodique de l'équation $(E_{0,b})$.

Exercice 15

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues, 2π-périodiques. On note $f * g$ la fonction définie par

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que $f * g$ est une fonction 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\widehat{f * g}(n) := c_n(f * g)$ en fonction de $\hat{f}(n)$ et $\hat{g}(n)$.

c) Démontrer que la série de Fourier de $f * g$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et calculer sa somme.

Exercice 16

Soit f une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Notons $S_n(f)$ la n-ème somme partielle de la série de Fourier de f, c'est-à-dire $S_n(f)(t) = \sum_{|k|\leqslant n} c_k(f)e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|S_n(f)\|_\infty \leqslant 1$. Montrer alors que $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

Exercice 17

Soit f une fonction 2π-périodique et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $c_n(f) = o(n^{-k})$, $|n| \to +\infty$.

Exercice 18

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et supposons qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha.$$

a) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, exprimer

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt$$

en fonction du coefficient de Fourier $c_n(f)$ de f.

c) Soit $g_a(t) = f(t+a) - f(t-a)$, $t \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, exprimer le coefficient de Fourier $c_n(g_a)$ en fonction de $c_n(f)$.

d) En déduire que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(na)|^2 |c_n(f)|^2 \leqslant C^2 4^{\alpha-1} a^{2\alpha}.$$

e) On suppose maintenant que $\alpha > 1/2$.

(i) Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{2^{p-1}\leqslant|n|<2^p} \left|\sin\left(n\frac{\pi}{2^{p+1}}\right)\right|^2 |c_n(f)|^2 \leqslant C^2 \frac{\pi^{2\alpha}}{4^{\alpha p+1}}.$$

(ii) En déduire que

$$\sum_{2^{p-1}\leqslant|n|<2^p} |c_n(f)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{\pi^\alpha}{2^{p(\alpha-1/2)}}.$$

(iii) Conclure que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19

a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Supposons que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers ℓ. Montrer alors que si

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad n \geqslant 1,$$

alors la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ tend aussi vers ℓ.

b) Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite monotone, alors la réciproque est aussi vraie.

c) En déduire que si f est une fonction continue et 2π périodique sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) \geqslant 0$, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Indication : On pourra considérer les sommes de Féjer en 0.

Devoir surveillé 1

Mardi 8 novembre 2022

Durée : 2 heures

Les deux exercices sont indépendants et pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction qui entrera en ligne de compte dans la notation.

Exercice 1. Pour $x > 1$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2 - \cos^2(t))\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie, de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et pour $x > 1$, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

b) Montrer que pour tout $x > 1$, on a

$$F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Indication : dans la formule donnant $F'(x)$ sous forme d'une intégrale, on pourra poser le changement de variable $u = \tan(t)$.

c) Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x > 1$, on a

$$F(x) = \pi \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C.$$

d) Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{\cos^2(t)}{x^2}\right) dt = \pi \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) + C. \tag{1}$$

e) En déduire la valeur de C.

Indication : on pourra faire tendre x vers $+\infty$ dans l'équation (1) et pour le terme à gauche dans (1) utiliser un encadrement.

f) Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt.$$

converge et, en supposant que F est continue à droite en $x = 1$, calculer la valeur de I.

T.S.V.P.

Exercice 2. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

b) Soit $a > 0$. Montrer que F est de classe C^1 sur $]a, +\infty[$.

c) En déduire que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

d) Montrer que F vérifie l'équation :

$$\forall x > 0, \qquad xF'(x) = xF(x) - 1.$$

e) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x},$$

et en déduire que F a une limite en $+\infty$ qu'on précisera.

f) Soit $A > 0$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$F(x) \geq e^{-Ax} \ln(1 + A).$$

g) En déduire que $\lim_{x \to 0^+} F(x) = +\infty$.

LICENCE DE MATHÉMATIQUES- SEMESTRE 5 2022-2023
M53 - INTÉGRALES À PARAMÈTRES ET SÉRIES DE FOURIER

DEVOIR SURVEILLÉ 1

Mardi 8 novembre 2022

Correction

Exercice 1. Pour $x > 1$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2 - \cos^2(t))\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie, de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et pour $x > 1$, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

On introduit la fonction $f :]1, +\infty[\times[0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x, t) = \ln(x^2 - \cos^2(t)), \qquad (x, t) \in]1, +\infty[\times[0, \pi/2].$$

Remarquons que $\forall x > 1$ *et* $\forall 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, *on a* $x^2 - \cos^2(t) \geq x^2 - 1 > 0$. *Ainsi, la fonction* f *est continue sur* $]1, +\infty[\times[0, \pi/2]$ *comme composée de fonctions continues. De plus, pour tout* $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, *la fonction* $x \longmapsto f(x, t) = \ln(x^2 - \cos^2(t))$ *est dérivable sur* $]1, +\infty[$ *et on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{2x}{x^2 - \cos^2(t)}, \qquad \forall (x, t) \in]1, +\infty[\times[0, \pi/2].$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ *existe et est continue sur* $]1, +\infty[\times[0, \pi/2]$. *Le théorème de dérivabilité des intégrales définies à paramètres implique que* F *est bien définie et de classe* C^1 *sur* $]1, +\infty[$. *De plus, pour* $x > 1$, *on a*

$$F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{x^2 - \cos^2(t)}\, dt.$$

b) Montrer que pour tout $x > 1$, on a

$$F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Effectuons le changement de variable $u = \tan(t)$ *dans l'intégrale donnant* $F'(x)$. *Rappelons que* $\cos^2(t) = \frac{1}{1+\tan^2(t)} = \frac{1}{1+u^2}$ *et* $dt = \frac{du}{1+u^2}$. *D'où*

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \frac{1}{1+u^2}} \frac{1}{1 + u^2}\, du.$$

T.S.V.P.

Ainsi, pour $x > 1$, on a

$$\begin{aligned}F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2(1+u^2)-1}\,du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2u^2+x^2-1}\,du \\ &= \frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{x^2}{x^2-1}u^2}\,du.\end{aligned}$$

Effectuons alors le deuxième changement de variable $v = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}u$. On obtient alors que pour $x > 1$, on a

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dv \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}[\arctan(v)]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}.\end{aligned}$$

c) Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x > 1$, on a

$$F(x) = \pi\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C.$$

Considérons $G :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x > 1$ par $G(x) = \pi\ln(x+\sqrt{x^2-1})$. Il est clair que G est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a

$$\begin{aligned}G'(x) &= \pi\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \pi\frac{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= F'(x).\end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante réelle C telle que, pour tout $x > 1$, on a $F(x) = G(x) + C$, c'est-à-dire

$$F(x) = \pi\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C, \qquad x > 1.$$

d) Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2}\right)dt = \pi\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + C. \tag{1}$$

D'après la question précédente, pour tout $x > 1$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2-\cos^2(t))\,dt = \pi\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C. \tag{2}$$

Écrivons que $\ln(x^2-\cos^2(t)) = \ln(x^2(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})) = 2\ln(x)+\ln(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})$. *D'où*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2-\cos^2(t))\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ln(x)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})\,dt \\ &= \pi\ln(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})\,dt.\end{aligned}$$

En utilisant (2), *on obtient alors que*

$$\pi\ln(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})\,dt = \pi\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C,$$

soit

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})\,dt &= \pi\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \pi\ln(x) + C \\ &= \pi\ln\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) + C \\ &= \pi\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + C.\end{aligned}$$

e) En déduire la valeur de C.

Remarquons que le terme à droite dans (1) *tend vers* $\pi\ln(2)+C$ *quand* $x\to+\infty$. *D'autre part, pour tout* $0\le t\le\pi/2$ *et* $x>1$, *on a*

$$1-\frac{1}{x^2} \le 1-\frac{\cos^2(t)}{x^2} \le 1,$$

et par croissance de la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$, *on obtient*

$$\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \le \ln\left(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2}\right) \le 0.$$

Ainsi en intégrant par rapport à $t\in[0,\pi/2]$, *on en déduit que :*

$$\frac{\pi}{2}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2}\right)\,dt \le 0.$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que, lorsque $x\to+\infty$, *le terme à gauche dans* (1) *tend vers* 0. *Ainsi* $\pi\ln(2)+C=0$, *soit* $C=-\ln(2)$.

f) Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt.$$

converge et, en supposant que F est continue à droite en $x=1$, calculer la valeur de I.

D'une part, la fonction $t \longmapsto \ln(\sin(t))$ *est continue sur* $]0, \pi/2]$, *donc localement intégrable sur* $]0, \pi/2]$. *De plus, pour tout* $t \in]0, \pi/2]$, $t \neq 1$, *écrivons que*

$$\ln(\sin(t)) = \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \ln(t) = \ln(t)\left(1 + \frac{\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)}{\ln(t)}\right).$$

Ceci montre que $\ln(\sin(t)) \sim \ln(t)$ *lorsque* $t \to 0^+$. *Comme pour* $0 < t < 1$, *on a* $\ln(t) < 0$, *on peut utiliser la règle des équivalents et on obtient que* $\int_0^1 \ln(\sin(t))\, dt$ *converge si et seulement si* $\int_0^1 \ln(t)\, dt$ *converge. La convergence de* $\int_0^1 \ln(t)\, dt$ *peut alors se prouver de plusieurs manières. Par exemple, on peut remarquer que la fonction* $t \longmapsto \ln(t)$ *est continue sur* $]0, \pi/2]$, *donc localement intégrable sur* $]0, \pi/2]$. *De plus, on a* $\ln(t) = o(t^{-1/2})$, $t \to 0^+$. *Or l'intégrale*

$$\int_0^{\pi/2} t^{-1/2}\, dt$$

converge car $1/2 < 1$ *et donc par les théorèmes de comparaison l'intégrale*

$$\int_0^{\pi/2} \ln(t)\, dt$$

converge absolument donc converge. Finalement, on en déduit que I *converge. D'après les questions c) et e), on a*

$$F(x) = \pi \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \pi \ln(2).$$

Comme F *est supposée continue à droite en* 1, *on a*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \cos^2(t))\, dt = F(1) &= \lim_{x \to 1^+} F(x) \\ &= \lim_{x \to 1^+} \pi \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \pi \ln(2) \\ &= -\pi \ln(2).\end{aligned}$$

En utilisant que $1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$, *on a, pour* $t \in]0, \pi/2]$, $\ln(1 - \cos^2(t)) = 2\ln(\sin(t))$ *et on en déduit que*

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\, dt = -\frac{\pi \ln(2)}{2}.$$

Exercice 2. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, *la fonction* $t \longmapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ *est positive et continue sur* $[0, +\infty[$. *Donc elle est localement intégrable sur* $[0, +\infty[$. *De plus, pour tout* $t > 0$, *on*

$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t} \leq e^{-xt}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ converge (car par exemple $\int_0^A e^{-xt}\,dt = -\frac{1}{x}[e^{-xt}]_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{x}(1-e^{-xA}) \to \frac{1}{x}$ lorsque $A \to +\infty$). Finalement, le théorème de comparaison (pour les fonctions positives) permet de conclure que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$$

converge pour tout $x > 0$. Ainsi F est bien définie sur $]0,+\infty[$.

b) Soit $a > 0$. Montrer que F est de classe C^1 sur $]a,+\infty[$.

Considérons la fonction $f :]a,+\infty[\times[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t} \qquad \forall (x,t) \in]a,+\infty[\times[0,+\infty[.$$

La fonction f est continue sur $]a,+\infty[\times[0,+\infty[$ et par la question a), l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$$

converge pour tout $x > a$. De plus, pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est dérivable sur $]a,+\infty[$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t}, \qquad \forall (x,t) \in]a,+\infty[\times[0,+\infty[.$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $]a,+\infty[\times[0,+\infty[$. Finalement, pour tout $(x,t) \in]a,+\infty[\times[0,+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{te^{-xt}}{1+t} \leq e^{-at}.$$

La dernière inégalité vient du fait que $t/(1+t) \leq 1$, du fait que $-xt \leq -at$ et de la croissance de l'exponentielle. On a déjà remarqué que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge.
Le théorème de dérivabilité des intégrales généralisées à paramètres permet alors d'affirmer que F est de classe C^1 sur $]a,+\infty[$ et pour tout $x > a$, on a

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t}\,dt.$$

c) En déduire que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et, pour $x > 0$, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

Soit $x_0 > 0$. On peut alors choisir $a > 0$ tel que $x_0 \in]a,+\infty[$ (on peut prendre par exemple $a = x_0/2$). La question b) permet d'affirmer que F est de classe C^1 sur $]a,+\infty[$ donc au voisinage de x_0 et on a

$$F'(x_0) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-x_0t}}{1+t}\,dt.$$

Ceci est valable pour tout $x_0 > 0$ et donc on en déduit que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t}\,dt.$$

d) Montrer que F vérifie l'équation :

$$\forall x > 0, \qquad xF'(x) = xF(x) - 1.$$

Pour tout $x > 0$, on déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t}\,dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{(t+1-1)e^{-xt}}{1+t}\,dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \left(e^{-xt} - \frac{e^{-xt}}{1+t}\right)dt \\
&= -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt.
\end{aligned}$$

Remarquons qu'on peut séparer en deux intégrales dans la dernière égalité car on sait que les deux intégrales convergent. On en déduit alors que

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt + F(x),$$

et d'après le calcul effectué à la question a), on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$. Ainsi, on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{x} + F(x),$$

et en multipliant par x, on en déduit le résultat.

e) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$0 \le F(x) \le \frac{1}{x},$$

et en déduire que F a une limite en $+\infty$ qu'on précisera.

Remarquons que pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$, on a

$$0 \le \frac{e^{-xt}}{1+t} \le e^{-xt}.$$

En intégrant par rapport à $t \in [0,+\infty$, on en déduit que

$$0 \le F(x) \le \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt,$$

et en utilisant une nouvelle fois que $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$, on obtient que

$$0 \le F(x) \le \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que F a une limite en $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

f) Soit $A > 0$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$F(x) \ge e^{-Ax} \ln(1 + A).$$

Pour tout $x > 0$ et tout $A > 0$, on a

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt \ge \int_0^{A} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt.$$

De plus, pour tout $t \in [0, A]$ et $x > 0$, on a $-Ax \le -xt$ et par croissance de l'exponentielle, on a $e^{-Ax} \le e^{-xt}$. Donc

$$e^{-Ax}\frac{1}{1+t} \le \frac{e^{-xt}}{1+t}.$$

En intégrant par rapport à $t \in [0, A]$, on en déduit que

$$e^{-Ax}\int_0^{A} \frac{1}{1+t}\,dt \le \int_0^{A} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt \le F(x).$$

Par un calcul immédiat, on obtient finalement que

$$e^{-Ax} \ln(1 + A) \le F(x), \qquad x > 0,\ A > 0.$$

g) En déduire que $\lim_{x\to0^+} F(x) = +\infty$.

On déduit de la question précédente que pour tout $A > 0$, on a

$$\liminf_{x\to0^+} F(x) \ge \ln(1 + A).$$

On fait alors tendre $A \to +\infty$, ce qui permet d'en déduire que

$$\liminf_{x\to0^+} F(x) = +\infty,$$

et donc comme $\limsup_{x\to0^+} F(x) \ge \liminf_{x\to0^+} F(x)$, on obtient que $\liminf_{x\to0^+} F(x) = \limsup_{x\to0^+} F(x) = +\infty$. Ceci permet finalement de conclure que F a une limite à droite en 0 qui vaut

$$\lim_{x\to0^+} F(x) = +\infty.$$

Remarquez qu'on est obligé a priori de passer par les limites sup et inf car on ne sait pas si la limite existe...

Licence de Mathématiques- Semestre 5 2021-2022

M53 - Intégrales à paramètres et séries de Fourier

Rattrapage

7 juin 2022

Durée : 3 heures

Exercice 1. On se donne $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ et pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 t^{1/x} f(t)\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b) (i) Calculer $\int_0^1 t^{1/x}\, dt$ pour $x > 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x > 0$, on a

$$|F(x)| \leq \frac{Mx}{x+1}.$$

(iii) En déduire que F se prolonge par continuité à droite en 0.

c) Soit $\varepsilon > 0$.

(i) Justifier qu'il existe $0 < \delta < 1$ tel que pour tout $x > 0$, on a

$$\left| \int_\delta^1 t^{1/x}(f(t) - f(1))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon\, x}{2(x+1)}$$

(ii) Justifier qu'il existe une constante $K > 0$ (indépendante de δ) tel que pour tout $x > 0$, on a

$$\left| \int_0^\delta t^{1/x}(f(t) - f(1))\, dt \right| \leq K \frac{x}{x+1}\, \delta^{1+1/x}.$$

(iii) En déduire que pour tout $x > 0$, on a

$$\left| \frac{x+1}{x} \int_0^1 t^{1/x} f(t)\, dt - f(1) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + K\delta^{1+1/x},$$

puis que $\frac{x+1}{x} F(x) - f(1)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+.

(iv) Montrer que $F(x) = xf(1) + o(x)$, $x \to 0^+$.

d) On suppose dans cette question que f satisfait en plus l'hypothèse que l'intégrale

$$\int_0^1 |\ln(t) f(t)|\, dt$$

converge.

T.S.V.P.

(i) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer pour $x>0$, $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

(ii) En utilisant la question c)(iv), montrer que F est dérivable à droite en 0 et donner sa dérivée à droite en 0.

Exercice 2. a) Justifier que pour tout $x \in [0,\pi]$, on a

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}.$$

On précisera bien les hypothèses du théorème employé et on dessinera le graphe de la fonction étudiée sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

c) Justifier que pour tout $x \in [0,\pi]$, on a

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.$$

On précisera bien les hypothèses du théorème employé et on dessinera le graphe de la fonction étudiée sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

d) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Licence de Mathématiques- Semestre 5 2021-2022
M53 - Intégrales à paramètres et séries de Fourier

Devoir surveillé 1

Samedi 13 novembre
Durée : 2 heures

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,dt.$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

c) En déduire que F est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

d) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(u) \leq 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}.$$

Indication : on pourra soit utiliser une formule de Taylor soit étudier la fonction $\varphi(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \cos(u)$ *en étudiant ses variations sur* $[0, +\infty[$.

e) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(x) \leq \pi\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}\right).$$

Indication : on utilisera sans démonstration les formules suivantes :

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(2t)) \quad \textit{et} \quad \sin^4(t) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos(2t) + \cos(4t)).$$

f) En utilisant c) et e), en déduire que l'équation

$$\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,dt = 0$$

a une unique solution $x \in [0, \pi]$.
Indication : on pourra montrer que $F(2\sqrt{2}) \leq 0$ *et remarquer que* $2\sqrt{2} \leq \pi$.

Exercice 2. Pour $0 < x < 1$, on pose

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-t}\right) t^{x-2}\,dt.$$

a) Montrer que H est bien définie sur $]0, 1[$.

T.S.V.P.

b) Montrer que H est de classe C^1 sur $]0,1[$ et pour $0<x<1$, exprimer $H'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Indication : on pourra utiliser (sans les démontrer) les résultats de convergence suivants sur les intégrales de Bertrand :

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}\, dt \textit{ converge } \iff (\alpha > 1) \textit{ ou } (\alpha = 1 \textit{ et } \beta > 1);$$

$$\int_0^{1/e} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}\, dt \textit{ converge } \iff (\alpha < 1) \textit{ ou } (\alpha = 1 \textit{ et } \beta > 1);$$

c) Fixons $\alpha > 0$.

(i) Montrer que pour tout $0<x<1$, on a

$$0 \leq \int_0^\alpha \left(1-e^{-t}\right) t^{x-2}\, dt \leq \frac{\alpha^x}{x}.$$

Indication : on pourra utiliser (sans la démontrer) l'inégalité suivante : pour tout $u \in \mathbb{R}$, $1-e^{-u} \leq u$.

(ii) Montrer que pour tout $0<x<1$, on a

$$\left(1-e^{-\alpha}\right) \frac{\alpha^{x-1}}{1-x} \leq \int_\alpha^{+\infty} \left(1-e^{-t}\right) t^{x-2}\, dt \leq \frac{\alpha^{x-1}}{1-x}.$$

d) En déduire que pour tout $\alpha > 0$ et tout $0<x<1$, on a

$$\left(1-e^{-\alpha}\right) \alpha^{x-1} \leq (1-x)H(x) \leq \frac{\alpha^x}{x}(1-x) + \alpha^{x-1}. \tag{1}$$

e) Conclure que lorsque $x \to 1^-$, $H(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{1-x}$.

Indication : on pourra utiliser :

- *l'inégalité de gauche dans* (1) *pour minorer* $\liminf_{x\to 1^-}(1-x)H(x)$
- *et l'inégalité de droite dans* (1) *pour majorer* $\limsup_{x\to 1^-}(1-x)H(x)$.

M53. Intégrales à paramètres et séries de Fourier 2021-2022

Devoir surveillé 1 - Samedi 13 novembre 2021

Exercice 1.

a) Soit $f : \mathbb{R}\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \cos(x\sin(t))$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ (comme composée de fonctions continues). Comme $[0,\pi]$ est un compact de $\mathbb{R}$, on en déduit d'après le théorème du cours que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Rappelons que $f : \mathbb{R}\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \cos(x\sin(t))$

est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$.

De plus, $\forall t\in[0,\pi]$, la fonction $x \longmapsto f(x,t) = \cos(x\sin(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\pi]$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)).$$

En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$.

Un théorème du cours affirme alors que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$F'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

soit

$$\boxed{F'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,dt.}$$

c) Rappelons que $\forall t \in [0, \pi]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$

et donc si $x \in [0, \pi]$, on a : $0 \leq x \sin(t) \leq x \leq \pi$

d'où $0 \leq \sin(x \sin(t))$.

Ainsi $\forall (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$, $\sin(t) \sin(x \sin(t)) \geqslant 0$.

On en déduit donc que

$$\forall x \in [0, \pi], \quad F'(x) = -\int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt \leq 0.$$

Montrons que l'inégalité est stricte si $x \in]0, \pi]$.

Pour cela, on rappelle le résultat suivant :

Soit $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive

Si $\int_a^b g(t) dt = 0$. Alors $\forall t \in [a, b]$, $g(t) = 0$.

Supposons donc qu'il existe $x_0 \in]0, \pi]$ tel que $F'(x_0) = 0$.

Alors $\int_0^\pi \sin(t) \sin(x_0 \sin(t)) dt = 0$.

Comme $t \longmapsto \sin(t) \sin(x_0 \sin(t))$ est continue et positive,

le rappel ci-dessus implique que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \sin(t) \sin(x_0 \sin(t)) = 0.$$

Comme $\forall t \in]0, \pi[$, $\sin(t) \neq 0$, on en

déduit que $\forall t \in]0, \pi[$, $\sin(x_0 \sin(t)) = 0$.

Appliquons cette identité par exemple avec $t = \frac{\pi}{6}$.

Comme $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, on en déduit que

$$\sin\left(\frac{x_0}{2}\right) = 0 .$$

Mais remarquons que $0 < x_0 \leq \pi \implies 0 < \frac{x_0}{2} \leq \frac{\pi}{2}$

et donc $\sin\left(\frac{x_0}{2}\right) > 0$ ce qui est absurde.

Ainsi $\forall x \in]0, \pi]$, $F'(x) < 0$ et donc F est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

d) Rappelons la formule de Taylor Lagrange

Soit h une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tout $a, b \in I$, il existe un réel c compris entre a et b tel que:

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} h^{(n+1)}(c)$$

Appliquons cette formule avec $h(t) = \cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $n = 3$, $a = 0$ et $b = u \in \mathbb{R}$.

La fonction h est de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

on a : $h'(t) = -\sin(t)$, $h''(t) = -\cos(t)$, $h^{(3)}(t) = \sin(t)$, $h^{(4)}(t) = \cos(t)$.

En particulier, $h(0) = 1$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = -1$, $h^{(3)}(0) = 0$

La formule de Taylor Lagrange implique qu'il existe c compris entre 0 et u tel que:

$$h(u) = \sum_{k=0}^{3} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} u^k + \frac{h^{(4)}(c)}{4!} u^4$$ ④

soit

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{h^{(4)}(c)}{24} u^4.$$

Or $h^{(4)}(c) = \cos(c) \leq 1$.

D'où $\forall u \in \mathbb{R}$, $\cos(u) \leq 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}$

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t))\, dt.$$

D'après d), $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$,

$$\cos(x \sin(t)) \leq 1 - \frac{x^2}{2} \sin^2(t) + \frac{x^4}{24} \sin^4(t).$$

D'où

$$F(x) \leq \int_0^\pi \left(1 - \frac{x^2}{2} \sin^2(t) + \frac{x^4}{24} \sin^4(t)\right) dt$$

$$= \pi - \frac{x^2}{2}\int_0^\pi \sin^2(t)\, dt + \frac{x^4}{24} \int_0^\pi \sin^4(t)\, dt.$$

Avec les formules rappelées dans l'indication, on a :

$$\int_0^\pi \sin^2(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos(2t))\, dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2}\pi \quad \text{car } \sin(2\pi) = \sin(0) = 0 !$$

et

$$\int_0^\pi \sin^4(t)\, dt = \frac{1}{8}\int_0^\pi (3 - 4\cos(2t) + \cos(4t))\, dt$$

c'est à dire

$$\int_0^{\pi} \sin^4(t)\,dt = \frac{1}{8}\left[3t - 2\sin(2t) + \frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3\pi}{8}$$

Ainsi

$$F(x) \leq \pi - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{3\pi}{8 \times \cancel{24}8} x^4$$

soit $$F(x) \leq \pi\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}\right)$$

f) On a : $F(0) = \int_0^{\pi} 1\,dt = \pi \geq 0$.

De plus, par (e), on a :

$$F(2\sqrt{2}) \leq \pi\left(1 - \frac{8}{4} + \frac{64}{64}\right)$$

$$= \pi(2-2) = 0.$$

La fonction F est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Ainsi elle réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[F(\pi), F(0)]$.

Or $F(0) \geq 0$ et $F(\pi) \leq F(2\sqrt{2}) = 0$.

Donc $0 \in [F(\pi), F(0)]$ et il existe un unique $x \in [0,\pi]$ tel que $0 = F(x) = \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\,dt$.

Exercice 2. a) Pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \longmapsto (1-e^{-t})\,t^{x-2}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc localement intégrable sur $]0;+\infty[$.

De plus, remarquons que $e^{-t} = 1 - t + o(t)$, $t \longrightarrow 0$

D'où $1 - e^{-t} = t + o(t)$, $t \longrightarrow 0$

ce qui implique que $(1-e^{-t})\,t^{x-2} \underset{t \to 0}{\sim} t \cdot t^{x-2} = t^{x-1}$.

Or $\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ converge si et seulement si $1-x<1$,

c'est à dire si et seulement si $0 < x$.

De +, comme $(1-e^{-t})\,t^{x-2} \geqslant 0$ si $t>0$,

on peut utiliser le théorème sur les équivalents pour les intégrales généralisées et on en déduit que, si $x>0$.

$$\int_0^1 (1-e^{-t})\,t^{x-2}\,dt \text{ converge.}$$

Remarquons enfin que $\lim\limits_{t \to +\infty} (1-e^{-t}) = 1$, ainsi :

$$(1-e^{-t})\,t^{x-2} \underset{t \to +\infty}{\sim} t^{x-2}$$

Or $\int_1^{+\infty} t^{x-2}\,dt$ converge $\iff 2-x>1$

$\iff 1 > x$.

Ainsi si $x < 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}(1-e^{-t})t^{x-2}\,dt$ converge. (7)

Finalement, on en déduit que si $x \in]0,1[$,

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-e^{-t})t^{x-2}\,dt$ converge.

Donc H est bien définie sur $]0,1[$.

b) Soit $f :]0,1[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = (1-e^{-t})\,t^{x-2}$$

(*) La fonction f est continue sur $]0,1[\times]0,+\infty[$

et pour tout $x \in]0,1[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ converge (voir a))

(**) Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \longmapsto f(x,t) = (1-e^{-t})\,t^{x-2}$

est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall (x,t) \in]0,1[\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (1-e^{-t})\ln(t)\,t^{x-2}$$

En particulier, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $]0,1[\times]0,+\infty[$.

(***) Fixons a, b tels que $0 < a < b < 1$.

Pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$a-2 \leq x-2 \leq b-2$$

et pour $t \in]0,1]$ (comme $\ln(t) \leq 0$), on obtient que $$(x-2)\ln(t) \leq (a-2)\ln(t)$$

soit $$t^{x-2} \leq t^{a-2}$$

Ainsi $\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,1]$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-e^{-t})|\ln(t)|\,t^{a-2}$

De même pour $x \in [a,b]$ et $t \geq 1$ (comme $\ln(t) \geq 0$),

on obtient : $$(x-2)\ln(t) \leq (b-2)\ln(t)$$

soit $$t^{x-2} \leq t^{b-2}$$

Ainsi $\forall (x,t) \in [a,b] \times [1,+\infty[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-e^{-t})|\ln(t)|\,t^{b-2}$

On en déduit donc que

$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-e^{-t})|\ln(t)|\left(t^{a-2}+t^{b-2}\right).$$

Si $\varphi(t) := (1-e^{-t})|\ln(t)|\left(t^{a-2}+t^{b-2}\right)$, $t \in]0,+\infty[$.

montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge.

Pour cela, il suffit de montrer que

$$\forall c \in]0,1[, \quad \int_0^{+\infty} (1-e^{-t})|\ln(t)|\,t^{c-2}\,dt \text{ converge.}$$

Or la fonction $t \longmapsto (1-e^{-t})|\ln(t)|\,t^{c-2}$ est

continue et positive sur $]0;+\infty[$ donc en particulier localement intégrable sur $]0,+\infty[$.

De plus, $(1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{c-2} \underset{t\to 0}{\sim} |\ln(t)|\, t^{c-1}$

(voir a)). Comme $c>0$, $1-c<1$ et d'après le rappel, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} |\ln(t)|\, t^{c-1}\, dt$ converge

(remarquons que pour $t\in]0,\frac{1}{e}[$, $\ln(t)<0$ et donc
$$|\ln(t)|\, t^{c-1} = -\frac{\ln(t)}{t^{1-c}} = -\frac{1}{(\ln(t))^{-1} t^{1-c}})$$.

Ainsi $\int_0^{\frac{1}{e}} (1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{c-2}\, dt$ converge.

D'autre part, $(1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{c-2} \underset{t\to +\infty}{\sim} |\ln(t)|\, t^{c-2}$

Comme $c<1$, $2-c>2-1=1$ et d'après le rappel $\int_e^{+\infty} |\ln(t)|\, t^{c-2}\, dt$ converge

Ainsi $\int_e^{+\infty} |\ln(t)|(1-e^{-t})\, t^{c-2}\, dt$ converge.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{c-2}\, dt$ converge

pour tout $c\in]0,1[$.

On en déduit donc que

$$\int_0^{+\infty} (1-e^{-t})\,|\ln(t)|\,(t^{a-2}+t^{b-2})\,dt \text{ converge.}$$

On peut alors appliquer le théorème du cours qui affirme que H est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$,

$$H'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Comme ceci est vrai pour tout a, b, $0 < a < b < 1$, on en déduit que H est de classe C^1 sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[, \quad H'(x) = \int_0^{+\infty} (1-e^{-t})\ln(t)\,t^{x-2}\,dt.$$

c) Soit $\alpha > 0$. i) En utilisant l'inégalité rappelée $1-e^{-u} \leq u$, $\forall u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^{\alpha} (1-e^{-t})\,t^{x-2}\,dt \leq \int_0^{\alpha} t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}\left[t^x\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^x}{x},$$

car $\lim\limits_{t \to 0^+} t^x = \lim\limits_{t \to 0^+} e^{x\ln(t)} = 0$ car $x > 0$.

De plus, $\forall\, t \in [0, \alpha]$, $e^{-t} \leq 1$

et donc $(1 - e^{-t})\, t^{x-2} \geq 0$

Ainsi $$\int_0^{\alpha} (1 - e^{-t})\, t^{x-2}\, dt \geq 0.$$

Finalement, on a :

$$0 \leq \int_0^{\alpha} (1 - e^{-t})\, t^{x-2}\, dt \leq \frac{\alpha^2}{x}.$$

(ii) Pour tout $t \in [\alpha, +\infty[$, on a :

$$0 \leq e^{-t} \leq e^{-\alpha}$$

d'où $$1 - e^{-\alpha} \leq 1 - e^{-t} \leq 1$$

Ainsi $$(1 - e^{-\alpha}) \int_{\alpha}^{+\infty} t^{x-2}\, dt \leq \int_{\alpha}^{+\infty} (1 - e^{-t})\, t^{x-2}\, dt \leq \int_{\alpha}^{+\infty} t^{x-2}\, dt$$

Or $$\int_{\alpha}^{+\infty} t^{x-2}\, dt = \frac{1}{x-1} \left[t^{x-1} \right]_{\alpha}^{+\infty} = \frac{\alpha^{x-1}}{1-x},$$

car $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{x-1} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{(x-1)\ln(t)} = 0$ car $x < 1$.

Ainsi $$(1 - e^{-\alpha}) \frac{\alpha^{x-1}}{1-x} \leq \int_{\alpha}^{+\infty} (1 - e^{-t})\, t^{x-2}\, dt \leq \frac{\alpha^{x-1}}{1-x}.$$

d) On a :

$$H(x) = \int_0^{+\infty} (1-e^{-t})\, t^{x-2}\, dt$$

$$= \int_0^{\alpha} (1-e^{-t})\, t^{x-2}\, dt + \int_{\alpha}^{+\infty} (1-e^{-t})\, t^{x-2}\, dt$$

En utilisant c), on en déduit que

$$(1-e^{-\alpha}) \frac{\alpha^{x-1}}{1-x} \leq H(x) \leq \frac{\alpha^x}{x} + \frac{\alpha^{x-1}}{1-x}.$$

Multiplions par $1-x \geq 0$ cette inégalité ; on obtient alors

$$(1-e^{-\alpha})\,\alpha^{x-1} \leq (1-x) H(x) \leq \alpha^x \frac{1-x}{x} + \alpha^{x-1}.$$

e) D'après l'inégalité précédente, on a :

$$\liminf_{\substack{x \to 1 \\ <}} (1-x) H(x) \geq \liminf_{\substack{x \to 1 \\ <}} (1-e^{-\alpha})\,\alpha^{x-1} = 1 - e^{-\alpha}$$

De même, avec l'inégalité précédente, on a aussi

$$\limsup_{\substack{x \to 1 \\ <}} (1-x) H(x) \leq \limsup_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\alpha^x \frac{1-x}{x} + \alpha^{x-1}\right)$$

$$= 1.$$

Finalement, on obtient que $\forall \alpha > 0$, on a :

$$1 - e^{-\alpha} \leq \liminf_{\substack{x \to 1 \\ <}} (1-x) H(x) \leq \limsup_{\substack{x \to 1 \\ <}} (1-x) H(x) \leq 1.$$

Faisons tendre $\alpha \longrightarrow +\infty$, dans l'inégalité précédente

ce qui donne

$$1 \leq \liminf_{x \underset{<}{\to} 1} (1-x) H(x) \leq \limsup_{x \underset{<}{\to} 1} (1-x) H(x) \leq 1$$

Ainsi $\liminf_{x \underset{<}{\to} 1} (1-x) H(x) = \limsup_{x \underset{<}{\to} 1} (1-x) H(x) = 1$.

On en déduit que $(1-x) H(x) \xrightarrow[x \underset{<}{\to} 1]{} 1$.

Autrement dit $H(x) \underset{x \underset{<}{\to} 1}{\sim} \dfrac{1}{1-x}$.

DEVOIR SURVEILLÉ 2

Mercredi 12 janvier
Durée : 3 heures

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = (x-\pi)^2$, $x \in [0, 2\pi[$.

a) Dessiner le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$ et préciser le domaine de continuité de f.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f.

c) Etudier la convergence de la série de Fourier de f (on précisera bien le type de convergence et la valeur de la somme de la série de Fourier).

d) En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et supposons qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

a) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, exprimer

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+a) e^{-int}\, dt$$

en fonction du coefficient de Fourier $c_n(f)$ de f.
Indication : on rappelle que pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\, dt$.

c) Soit $g_a(t) = f(t+a) - f(t-a)$, $t \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, exprimer le coefficient de Fourier $c_n(g_a)$ en fonction de $c_n(f)$.

d) En déduire que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(na)|^2 |c_n(f)|^2 \leq C^2 4^{\alpha-1} a^{2\alpha}.$$

Remarque : on peut alors montrer (mais nous ne le ferons pas) que si $\alpha > 1/2$, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. a) Justifier que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$$

converge.

T.S.V.P.

b) Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2}\, dt.$$

(i) Montrer que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

(ii) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, donner une expression de $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

(iii) Montrer que F est décroissante sur $[0, +\infty[$.

(iv) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$$

et en déduire la limite de F en $+\infty$.

Le but des questions suivantes est d'étudier la dérivabilité à droite de F en 0.

(v) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{2t + x}{(t+x)^2}\, dt.$$

Indication : on pourra utiliser (sans la redémontrer) l'inégalité de convexité suivante : $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi} t$, $t \in [0, \pi/2]$.

(vi) En déduire que, pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{4}{\pi^2} \ln\left(1 + \frac{\pi}{2x}\right).$$

Indication : dans l'intégrale du (vi), on pourra utiliser que, pour tout $t \geq 0$, on a $2t + x \geq t + x$.

(vii) Conclure.

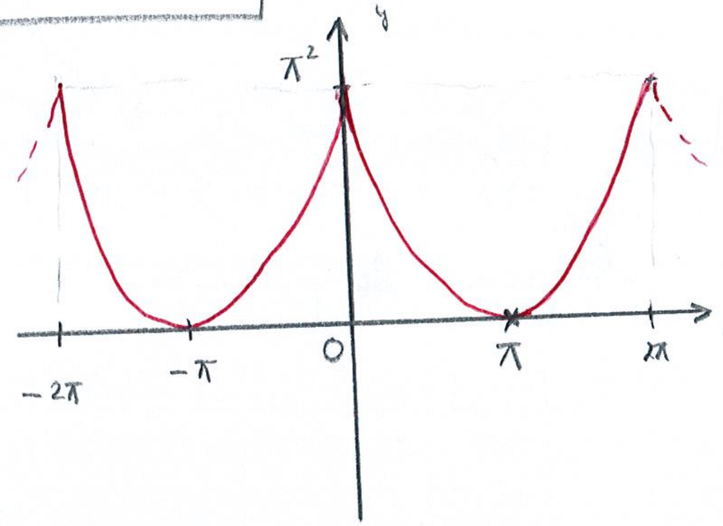
M53 Intégrale à paramètres

2021 - 2022

DS2. Corrections

Exercice 1

a



f est continue sur $\mathbb{R}$

b $\mathcal{C}_f$ est symétrique / (Oy) $\Longrightarrow$ f est paire

$\Longrightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi^3}{3}\right)$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{2}\times 3\times\cancel{\pi}} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$ ②

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cos(nx)\, dx$$

$u(x) = (x-\pi)^2 \qquad u'(x) = 2(x-\pi)$

$v(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \qquad v'(x) = \cos(nx)$

$$\text{IPP} \Longrightarrow a_n = \underbrace{\cancel{\frac{1}{n\pi}\Big[(x-\pi)^2 \sin(nx)\Big]_0^{2\pi}}}_{=0} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)\sin(nx)$$

$u(x) = x - \pi \qquad u'(x) = 1$

$v(x) = -\frac{1}{n} \cos(nx) \qquad v'(x) = \sin(nx)$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{2}{n^2\pi}\Big[(x-\pi)\cos(nx)\Big]_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx}_{= \frac{1}{n}\big[\sin(nx)\big]_0^{2\pi} = 0}$$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{2}{n^2\pi}\Big[\underbrace{\pi\cos(2n\pi) + \pi \cos 0}_{=2\pi}\Big]$$

$$\boxed{a_n = \frac{4}{n^2}, \quad n \geqslant 1}$$

(c) f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. (3)

$\Longrightarrow$ la série de Fourier de f

cous

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$$

<u>converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.</u>

(d) $\forall x \in [0, 2\pi[$, on a :

$$(*) \quad (x-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

(i) Pour $x = \pi$,

$$(*) \Longrightarrow 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\overset{(-1)^n}{\cos(n\pi)}}{n^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$$

(ii) Pour $x = 0$, on a d'après $(*)$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

4

D'où
$$\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right)\pi^2$$

$$= \frac{2\pi^2}{3\times 4}$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Exercice 2 a) Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\boxed{\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{1/\alpha}}$

Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tq $|x-y| \leq \delta$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \leq C\delta^\alpha = C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

$\Longrightarrow f$ est unif^t continue sur $\mathbb{R}$.

b) En effectuant le changem^t de variable $u = t+a$,

On a :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u)e^{-in(u-a)}du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u)e^{-inu}e^{ina}du$$

$$= e^{ina}\frac{1}{2\pi}\int f(u)e^{-inu}du$$

Or $u \longmapsto f(u)e^{-inu}$ est 2π-périodique.

D'où
$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u)e^{-inu}\,du = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}\,du.$$

Ainsi
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt = e^{ina}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}\,du$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt = e^{ina}c_n(f)}$$

c) $c_n(g_a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_a(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-a)e^{-int}\,dt$

$$\overset{(b)}{=} e^{ina}c_n(f) - e^{-ina}c_n(f)$$

$$= \left(e^{ina} - e^{-ina}\right)c_n(f)$$

$$\boxed{c_n(g_a) = 2i\sin(na)\,c_n(f)}$$

d) On a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(na)|^2 |c_n(f)|^2 = \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g_a)|^2$$

$$\underset{\text{Parseval}}{=} \frac{1}{4}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_a(t)|^2\,dt$$

On

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_a(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+a)-f(t-a)|^2\,dt$$ ⑥

Par hypothèse, on a : $|f(t+a)-f(t-a)| \leq C(2a)^\alpha$

D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_a(t)|^2\,dt \leq \frac{C^2 4^\alpha a^{2\alpha}}{\cancel{2\pi}} \times \cancel{2\pi}$$

D'où :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(na)|^2 |c_n(f)|^2 \leq \frac{C^2 4^\alpha a^{2\alpha}}{4}$$

$$= C^2 4^{\alpha-1} a^{2\alpha}.$$

Exercice 3

(a)

$t \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$

et de +, comme $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} = 1$, la fonct se

prolonge continûment en 0.

Ainsi $t \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est localement intégrable

sur $[0,+\infty[$.

De +, $\forall t \geq 1$, on a : $0 \leq \left|\dfrac{\sin^2(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$

et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ cv, le thm de

comparaison $\Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ cv aussi.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ cv.

(b) (i) D'après (a), F est bien définie en 0

et de +, si $f : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, t) \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{(t+x)^2}$

$\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[\times]0,+\infty[}$

(car $(t+x)^2 \geq t^2 > 0$)

et on a : $\boxed{|f(x,t)| \leq \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}}$

Comme $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt \text{ cv}}$, on peut appliquer le théorème de continuité qui affirme que F est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$

(ii) (•) f est continue sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt \text{ cv}, \quad \forall x \geq 0$$

(••) $\forall t > 0$, $x \longmapsto f(x,t) = \dfrac{\sin^2(t)}{(t+x)^2}$

est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2\sin^2(t)}{(x+t)^3}$$

De +, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

(...) $\forall x \geq x_0 > 0$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2\sin^2(t)}{(x_0+t)^3} = g(t)$$

→ g est continue sur $[0,+\infty[$ donc local. intégrable sur $[0,+\infty[$

→ $0 \leq g(t) \leq \frac{2}{t^3}$, $t \geq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt \text{ cv.}$$

D'où $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ cv.

Thm de dérivabilité $\Longrightarrow$ F est C^1 sur $[x_0,+\infty[$ et $\forall x \geq x_0$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Ceci étant vrai $\forall x_0 > 0$, on en déduit que F est C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x>0,\quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t)}{(x+t)^3}\,dt}$$

(iii) On voit que $\forall t \geq 0,\ \frac{2\sin^2(t)}{(x+t)^3} \geq 0$

D'où $F'(x) \leq 0,\ \forall x > 0$

Donc F est $\searrow$ sur $[0,+\infty[$.

(iv) Remarquons que $\forall x>0,\ \forall t \geq 0$, on a :

$$0 \leq \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2} \leq \frac{1}{(t+x)^2}$$

D'où

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2}\,dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2}\,dt$$

i.e

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2}\,dt$$

$$= -\left[\frac{1}{t+x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

et le Thm des gendarmes implique que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0.}$$

(v) On a,

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{1}{x}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \sin^2(t)\left(\frac{1}{(t+x)^2} - \frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)\left[t^2 - (t+x)^2\right]}{(t+x)^2 t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2}\left(\cancel{t^2} - \cancel{t^2} - x^2 - 2tx\right)dt$$

$$= -\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2}\left(x + 2t\right)dt$$

$$\leq -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2}\left(2t + x\right)dt$$

car $\forall t \geq 0, \forall x > 0, \ldots$

$$\frac{(2t+x)\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2} \geq 0$$

et donc $$\int_0^{\pi/2} \frac{(2t+x)\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{(2t+x)\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2} dt$$

De +, $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$

soit $$\frac{\sin^2(t)}{t^2} \geq \frac{4}{\pi^2}$$

ainsi $$\frac{(2t+x)\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2} \geq \frac{4}{\pi^2} \frac{2t+x}{(t+x)^2}$$

soit $$\int_0^{\pi/2} \frac{(2t+x)\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2} dt \geq \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t+x}{(t+x)^2} dt$$

D'où $$\boxed{\frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{2t+x}{(t+x)^2} dt}$$

(vi) On a :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2t+x}{(t+x)^2}\,dt \geq \int_0^{\pi/2} \frac{t+x}{(t+x)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x}\,dt$$

$$= \Big[\ln(t+x)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \ln(x)$$

$$= \ln\left(1+\frac{\pi}{2x}\right)$$

D'où

$$\frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t+x}{(t+x)^2}\,dt$$

$$\leq -\frac{4}{\pi^2}\ln\left(1+\frac{\pi}{2x}\right)$$

(vii) Faisons tendre $x \to 0$.

on a : $\ln\left(1+\frac{\pi}{2x}\right) \longrightarrow +\infty$

D'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\frac{4}{\pi^2} \ln\left(1+\frac{\pi}{2x}\right) = -\infty$ (14)

et (vi) $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{F(x)-F(0)}{x} = -\infty$

Ainsi $\boxed{\text{F n'est pas dérivable à droite en 0.}}$

Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies — Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques- Semestre 5 2020-2021

M53 - Intégrales à paramètres et séries de Fourier

Devoir surveillé 1

Vendredi 13 novembre

Durée : 2 heures

Exercice 1. Pour $x > 1$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi} \ln(x + \cos(t))\, dt.$$

a) Justifier que F est bien définie sur $]1, +\infty[$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et pour $x > 1$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

c) En utilisant le changement de variable $u = \tan(t/2)$, calculer $F'(x)$, $x > 1$.
Indication : on rappelle que $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ *où* $u = \tan(t/2)$.

d) Soit $G(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$, $x > 1$. Montrer qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 1$, on a $F(x) = \pi G(x) + k$.

e) Montrer que pour tout $v \in]-1, 1[$, on a

$$|\ln(1 + v)| \leq \frac{|v|}{1 - |v|}.$$

Indication : on pourra soit utiliser l'inégalité des accroissements finis, soit écrire que pour $v \in]-1, 1[$, *on a* $\ln(1 + v) = \int_0^v \frac{1}{1+t}\, dt$.

f) En déduire que pour $x \geq 2$, on a

$$|F(x) - \pi \ln(x)| \leq \frac{2\pi}{x},$$

et calculer la limite en $+\infty$ de $F(x) - \pi \ln(x)$.
Indication : pour l'inégalité, on pourra remarquer que $\pi \ln(x) = \int_0^{\pi} \ln(x)\, dt$ *et écrire* $F(x) - \pi \ln(x)$ *sous la forme d'une seule intégrale, puis utiliser la question e).*

g) En déduire la valeur de la constante k et finalement l'expression de $F(x)$ pour $x > 1$.
Indication : on remarquera que $F(x) - \pi \ln(x) = \pi \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) + k$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1 + t^2}\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

T.S.V.P.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

c) Calculer $F'(x)$ pour $x>0$, $x\neq 1$. En déduire la valeur de $F'(1)$.
Indication : pour le calcul de $F'(x)$, $x\neq 1$, on pourra utiliser (sans démonstration) la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+x^2t^2}\right).$$

d) Soit $a>0$. Montrer que pour tout $x>0$, on a

$$\arctan(ax)\int_a^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt \leq F(x) \leq \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

e) Montrer que F est croissante sur $]0,+\infty[$ et en déduire en utilisant la question précédente que F a une limite finie ℓ en $+\infty$.

f) Montrer que $\ell = \frac{\pi^2}{4}$.

Licence de Mathématiques- Semestre 5 2020-2021

M53 - Intégrales à paramètres et séries de Fourier

Devoir surveillé 1

19 janvier 2021

Durée : 3 heures

Exercice 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\, du,$$

et pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(t)}{x^2+t^2}\, dt.$$

a) Montrer que G est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

c) En utilisant le changement de variable $t = xu$, montrer que pour tout $x > 0$, on a $F(x) = G(x)$.

d) En déduire que F est bornée sur $]0, +\infty[$ et que F se prolonge par continuité en 0 en posant $F(0) = \pi$.

e) Montrer que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
Indication : on pourra remarquer que si $f(x,t) = \frac{x\cos(t)}{x^2+t^2}$, alors $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{x^2+t^2}$.

f) Vérifier que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right).$$

g) En déduire que F est sur $]0, +\infty[$ une solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y''(x) - y(x) = 0.$$

h) On **admettra** que les solutions de l'équation différentielle (E) sont données par $y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{-x}$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. En utilisant d) et g), en déduire l'expression de $F(x)$.

Exercice 2.

On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t), & \text{si } t \in [0, \pi[, \\ 0, & \text{si } t \in [-\pi, 0[. \end{cases}$$

a) Tracer l'allure de la courbe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$, et préciser le domaine de continuité de f.

T.S.V.P.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f. *Indication : on pourra utiliser (sans justification) les formules*

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b)) \quad \textit{et} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b)).$$

c) Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nt)}{1-4n^2}.$$

d) En déduire que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}.$$

e) Calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

Licence de Mathématiques- Semestre 5 2020-2021

M53 - Intégrales à paramètres et séries de Fourier

Rattrapage

8 juin 2021

Durée : 3 heures

Exercice 1. Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2(t))\, dt.$$

(a) Justifier que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

(b) Etudier la dérivabilité de F sur $[0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme d'une intégrale.

(c) (i) Vérifier que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\sin^2(t) = \frac{\tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}.$$

(ii) En utilisant le changement de variable $u = \tan(t)$, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$F'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}.$$

Indication : on pourra utiliser (sans justification) que pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{u^2}{(1 + (1+x)u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+(1+x)u^2}\right).$$

(iii) En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a

$$F(x) = \pi\left(\ln(1 + \sqrt{1+x}) - \ln(2)\right).$$

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{\cosh^2(t)}\, dt,$$

où on rappelle que $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que G est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G(x) = 1 - 4x \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{1 + e^{2t}}\, dt.$$

Indication : on pourra effectuer une intégration par partie.

T.S.V.P.

(d) En déduire la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2(t)}\, dt.$$

Exercice 3. Soit $f(x) = \max(0, \sin(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Préciser le domaine de continuité et de dérivabilité de f.

(c) Etudier la convergence simple et normale de la série de Fourier de f. On précisera bien les hypothèses des théorèmes utilisés.

(d) Calculer les coefficients de Fourier de f.
Indication : on pourra utiliser (sans justification) que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right) \quad \text{et} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right).$$

(e) En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}, \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{16n^2 - 1}.$$