TD1 - Tribus et applications mesurables

Rappels

Exercice 1 (Fonction non Riemann intégrable)

a) Soit h la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} .$$

Vérifier que h est Riemann intégrable.

b) Considérons $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)$. Montrer que f n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$.

c) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ avec pgcd}(p,q) = 1, 0 < p \leqslant q, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est Riemann intégrable et que $f = h \circ g$. Que peut-on en déduire ?

d) On rappelle que $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ est dénombrable et on note $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une numérotation de cet ensemble. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \mathbf{1}_{\{r_1,\ldots,r_n\}}(x)$.
Montrer que f_n est Riemann intégrable sur $[0,1]$.

e) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers f. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 (Limites supérieures et inférieures d'ensemble)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω.

a) Rappeler la définition de $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$.

b) Justifier que $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments de Ω appartenant à une infinité de A_n et $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments de Ω appartenant à tous les A_n sauf à un nombre fini.

c) Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

d) Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

e) Calculer $\mathbf{1}_{\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, $\mathbf{1}_{\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, $\mathbf{1}_{\limsup A_n}$ et $\mathbf{1}_{\liminf A_n}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_n}$.

f) Montrer que

(i) $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$.

(ii) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

(iii) $\limsup A_n = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n} = +\infty\}$.

(iv) $\liminf A_n = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n^c} < +\infty\}$.

(v) $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$.

(vi) $\limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n$.

g) Calculer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ dans les cas suivants :

(i) $A_n =]-\infty, a_n]$ avec $a_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ et $a_{2p+1} = -1 - \frac{1}{2p+1}$.

(ii) $A_{2p} =]0, 3 + \frac{1}{3p}[$ et $A_{2p+1} =]-1 - \frac{1}{3p}, 2]$.

(iii) $A_k = p_k\mathbb{N}$ où $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite des nombres premiers.

Exercice 3 (Limites supérieures et inférieures de suites)

Préambule : rappel Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite à valeurs dans** $\overline{\mathbb{R}}$**. On considère** $U_n = \{u_m : m \geqslant n\}$**. On définit alors les suites** $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **par** $\underline{u}_n = \inf\{u_m;\ m \geqslant n\} \quad \overline{u}_n = \sup\{u_m;\ m \geqslant n\}$. **Des inclusions** $U_{n+1} \subset U_n$, **on déduit facilement que la suite** $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est croissante et que la suite** $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante. Ces deux suites admettent donc des limites dans** $\overline{\mathbb{R}}$. **On pose alors**

$$\liminf u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u}_n \qquad \limsup u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n.$$

On a donc $\liminf u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} u_k$ **et** $\limsup u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} u_k$.

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et majorée et soit $L \in \mathbb{R}$. Montrer que $L = \limsup_{n\to+\infty} u_n$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant L + \varepsilon$ et l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : L - \varepsilon \leqslant u_n\}$ est infini.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et majorée et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\ell = \liminf_{n\to+\infty} u_n$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Longrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant u_n$ et l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : u_n \leqslant \ell + \varepsilon\}$ est infini.

c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $L = \limsup_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell = \liminf_{n\to+\infty} u_n$. Montrer que L et ℓ sont des valeurs d'adhérences et que si d est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\ell \leqslant d \leqslant L$.

d) Montrer qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup_{n\to+\infty} u_n = \liminf_{n\to+\infty} u_n$ et dans ce cas, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n$. ‘

e) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Montrer que

(i) $\limsup_{n\to+\infty}(-u_n) = -\liminf_{n\to+\infty} u_n$.

(ii) $\liminf_{n\to+\infty}(-u_n) = -\limsup_{n\to+\infty} u_n$.

(iii) $\liminf_{n\to+\infty}(u_n) + \liminf_{n\to+\infty}(v_n) \leqslant \liminf_{n\to+\infty}(u_n + v_n)$.

(iv) $\limsup_{n\to+\infty}(u_n + v_n) \leqslant \limsup_{n\to+\infty}(u_n) + \limsup_{n\to+\infty}(v_n)$.

(v) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. Montrer alors que :
$\liminf_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \liminf_{n\to+\infty} v_n$ et $\limsup_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \limsup_{n\to+\infty} v_n$.

f) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω. Montrer que pour tout $x \in \Omega$

$$\mathbf{1}_{\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n}(x) = \limsup_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x)$$

$$\mathbf{1}_{\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n}(x) = \liminf_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x)$$

Tribus

Exercice 4 (Quizz) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement ou donner un contre-exemple.

a) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur Ω. Alors $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une tribu sur Ω.

b) Si A est un ensemble inclus dans un ensemble B mesurable, alors A est mesurable.

Exercice 5 (Tribu engendrée par une partition) Soit X un ensemble et $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ une partition de X, c'est-à-dire

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i, \qquad X_i \cap X_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

Montrer que

$$\sigma(\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}) = \left\{ \bigcup_{i\in I} X_i :\ I \subset \{1, 2, \ldots, n\} \right\}.$$

Exercice 6 (Ensemble engendrant la tribu borélienne sur un intervalle)

Soit $\mathcal{B}(]0,1[)$ la tribu Borélienne sur $]0,1[$.

a) Montrer que tout ouvert de $]0,1[$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles de $]0,1[$ de la forme $[r-\delta, r+\delta]$ où r et δ sont des rationnels de $]0,1[$.

b) Montrer que $\mathcal{B}(]0,1[)$ est engendrée par chacune des familles suivantes :

(i) $\mathcal{C}_1 = \{[a,b],\ a \leqslant b,\ a,b \in]0,1[\}$.

(ii) $\mathcal{C}_2 = \{[a,b],\ a \leqslant b,\ a,b \in]0,1[\cap\mathbb{Q}\}$.

(iii) $\mathcal{C}_3 = \{]0,t],\ t \in]0,1[\}$.

(iv) $\mathcal{C}_4 = \left\{ \left]0, \frac{1}{2^n}\right[,\ \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \{1, \ldots 2^n - 1\} \right\}$.

c) Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille suivante d'ensembles de $]0,1[$:

$$\mathcal{B}_n = \sigma\Big(\Big]0, \frac{1}{2^n}\Big[,\ \Big[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\Big[,\ k \in \{1, \ldots 2^n - 1\} \Big).$$

Montrer que la suite des $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion mais que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ n'est pas une tribu.

Indication : on pourra vérifier que

$$\{1/2\} = \bigcap_{n\geqslant 1} \left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n} \right[,$$

pour une certaine suite d'entiers $k_n \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$ et raisonner par l'absurde en montrant que si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ est une tribu, alors $\{1/2\} \in \mathcal{B}_n$, pour un certain n. On conclura à une absurdité en utilisant l'exercice 5.

Exercice 7 (Tribu produit) Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On note, pour toutes familles $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} := \sigma\big(\{A \times B,\ A \in \mathcal{C},\ B \in \mathcal{D}\}\big)$. En particulier, pour $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ et $\mathcal{D} = \mathcal{B}$, on appelle $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la tribu produit sur $X \times Y$.

Supposons que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{D})$ et $X \times Y \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

a) Vérifier que $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

b) Soit $B \in \mathcal{D}$ et notons

$$\Lambda_B = \{A \in \mathcal{A} : A \times B \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}\}.$$

Montrer que Λ_B est une tribu sur X qui contient $\mathcal{A}$.

c) Soit $A \in \mathcal{A}$ et notons

$$\Lambda_A = \{B \in \mathcal{B} : A \times B \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}\}.$$

Montrer que Λ_A est une tribu sur Y qui contient $\mathcal{B}$.

d) Conclure.

Exercice 8 (Tribu engendrée par les singletons) Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) :$ A dénombrable ou $\Omega \backslash A$ dénombrable$\}$.

a) Vérifier que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.

b) Montrer que la tribu engendrée par les singletons de Ω est $\mathcal{A}$.

c) Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties finies de Ω ?

Exercice 9 (Une autre tribu sur $\mathbb{R}$). On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On définit l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ tel que } A = -A\},$$

où $-A = \{-x; x \in A\}$ désigne l'ensemble des opposés des éléments de A.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu.

b) Décrire les intervalles $[a, b]$ qui appartiennent à $\mathcal{C}$.

c) Décrire les ensembles $\{a, b\}$ qui appartiennent à $\mathcal{C}$.

Exercice 10 (Ensemble des points de convergence d'une suite d'applications) Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n(x))_n$ converge vers l si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $l \geqslant k$, $|f_l(x) - l| < \frac{1}{n}$.

b) Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0\}$. Montrer que $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{l \geqslant k} f_l^{-1}\,]-1/n, 1/n[$. En déduire que A est un borélien de $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $B = \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_n$ admet 0 com- me valeur d'adhérence$\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

d) Soit $C = \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_{n \geqslant 1}$ converge simplement$\}$ En procédant comme dans les questions (a) et (b) avec le critère de Cauchy, montrer que C est un borélien de $\mathbb{R}$.

Exercice 11 (Les boréliens de $\mathbb{Q}$) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{Q}) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Applications mesurables

Exercice 12 (Applications mesurables pour la tribu grossière, triviale) Quelles sont les applications mesurables h de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lorsque $\mathcal{A}$ est la tribu grossière ? lorsque $\mathcal{A}$ est la tribu triviale ?

Exercice 13 (Quizz) Soient f et g des applications d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement ou donner un contre-exemple.

a) Si f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, alors $|f|$ est aussi $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

b) Si f et g sont $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables, alors les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont aussi $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables.

c) Si $|f|$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, alors f est aussi $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Exercice 14 (Partitions et fonctions mesurables) Soit $(A_n)_{n\in I}$ une **partition** d'un ensemble X où $I \subset \mathbb{N}$.

a) Caractériser les éléments de la tribu $\mathcal{A} := \sigma(\{A_n : n \in I\})$ lorsque $I = \{0\}$, $I = \{0, 1\}$, $I = \{0, 1, 2\}$, $I = \mathbb{N}$.

b) Soit f une fonction mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que f est constante sur chaque A_n. En déduire la forme générale des applications mesurables pour I comme dans la question a).

Exercice 15 (Résultats essentiels à retenir !) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne. Montrer que l'on a les propriétés suivantes :

a) En considérant les images réciproques de $]-\infty, a]$ pour $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\sup_n(f_n)$ est mesurable.

b) Montrer que $\inf_n(f_n)$ est mesurable.

c) Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f, montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]-\infty, a]) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geqslant n} f_k^{-1}\left(\left]-\infty, a + \frac{1}{p}\right]\right).$$

En déduire que f est mesurable.

d) $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ sont mesurables.

e) Reprendre l'exercice avec $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la tribu borélienne.

Exercice 16 (Une fonction mesurable non continue) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f est mesurable mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 17 (Une dérivée est toujours mesurable !) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f' est mesurable.

Exercice 18 (Une fonction monotone est mesurable) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

a) Montrer que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c[)$ est convexe.

b) En déduire que f est mesurable.

Exercice 19 (Retour sur l'exercice 9) On reprend la tribu $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}$ défini dans l'exercice 9.

a) Les fonctions suivantes sont-elles mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ dans lui même ?

$$f_1 : x \mapsto e^x, \quad f_2 : x \mapsto x^5, \quad f_3 : x \mapsto \cos(x)$$

$$f_4 : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 3x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Même question avec la $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurabilité.

Exercice 20 (Ensemble où deux fonctions mesurables coincident) Soient f, g deux applications mesurables d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (muni de la tribu borélienne). Montrer que $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{A}$.

Indication : on prendra garde au fait que les fonctions f et g peuvent prendre des valeurs infinies....

Exercice 21 (Une fonction en escalier est étagée) Montrer qu'une fonction en escalier est étagée.

Exercice 22 (Une généralisation sur la mesurabilité d'une limite simple de fonctions mesurables) Soit (E, d) un espace métrique et $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E qui sont $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$-mesurables.

a) Supposons dans cette question que $(f_n)_n$ converge simplement vers une application f. Montrer que f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$-mesurable.

b) Supposons que E soit complet. Montrer que

$$\{x \in X : (f_n(x))_n \text{ converge simplement}\} \in \mathcal{A}.$$

TD2 - Mesures positives sur un espace mesurable

Exemples et propriétés des mesures

Exercice 1 (La mesure de comptage) Soit X un ensemble non vide. Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, on pose

$$c(A) = \text{card}(A).$$

Montrer que c est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$. Cette mesure s'appelle la mesure de comptage sur X.

Exercice 2 (Non continuité à droite) Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante d'éléments d'une tribu $\mathcal{A}$ sur X et soit μ une mesure (positive) sur $(X, \mathcal{A})$. Supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$. Alors une propriété du cours affirme que

$$\mu(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

En considérant la mesure de comptage c sur $\mathbb{N}$ et les ensembles $A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geqslant n\}$, $n \geqslant 1$, montrer que l'hypothèse "il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$" est essentielle.

Exercice 3 (La mesure image) Soient $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espace mesuré et $(X_2, \mathcal{A}_2)$ un espace mesurable. On considère $f : X_1 \longrightarrow X_2$ une application $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$-mesurable. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \mu_2 : & \mathcal{A}_2 & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & A & \longmapsto & \mu_2(A) = \mu_1(f^{-1}(A)) \end{array}$$

est une mesure sur $(X_2, \mathcal{A}_2)$. Cette mesure s'appelle la mesure image de μ_1 par f.

Exercice 4 (Montrer qu'une application est une mesure) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application donnée est une mesure et décrire les ensembles de mesure nulle.

a) pour $a \in X$ fixé, δ_a est l'application définie par $\forall A \in \mathcal{A}$, $\delta_a(A) = \mathbf{1}_A(a)$.

b) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$ et $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable, $\mu(A) = 1$ sinon.

c) $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, et μ est définie pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par $\mu(A) = \sum_{n\in A} u_n$.

Exercice 5 (Lemme de Borel Cantelli) Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de $\mathcal{A}$. On se donne une mesure μ sur $(X, \mathcal{A})$ et on suppose que

$$\sum_n \mu(A_n) < +\infty.$$

Montrer que $\mu(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$.

Exercice 6 (Propriétés valables sur des ensembles de mesure positive) Soit $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

a) Montrer que si $\mu(X) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) \neq 0$ tel que f soit bornée sur A.

b) Justifier que $\{f \neq 0\} \in \mathcal{A}$.

c) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) \neq 0$ tel que $|f|$ est minorée sur A par une constante strictement positive.

Autour de la mesure de Lebesgue

Exercice 7 (Un ensemble topologiquement gros mais petit pour la mesure de Lebesgue)

Soit $\varepsilon > 0$. Construire un ensemble ouvert et dense dans $\mathbb{R}$ dont la mesure de Lebesgue est inférieure à ε.

Exercice 8 (Un calcul avec la mesure de Lebesgue) On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. Pour $n \geqslant 0$, on pose $A_n =]n, n + 2^{-n}[$.

a) Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, on a $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

b) Soit $A = \bigcup_{n\geqslant 0} A_n$. Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Calculer $\lambda(A)$.

c) Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) finie est-il nécessairement borné ?

Exercice 9 (Un deuxième calcul avec la mesure de Lebesgue) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombre réels. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}^*, |x - a_n| \leqslant 2^{-n}\}.$$

a) Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $1 \leqslant \lambda(A) \leqslant 2$ (ici comme d'habitude λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).

c) Calculer $\lambda(A^c)$ où A^c désigne le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$.

d) Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

e) Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 10 (Un ensemble non borélien : l'ensemble de Vitali) Nous allons exhiber dans cet exercice une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas dans la tribu des boréliens.

a) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on définit la relation suivante : $x\mathcal{R}y$ si $x-y \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) En déduire qu'il existe $E \subset [0,1]$ tel que pour tout réel x, on peut trouver un réel unique $y \in E$ avec $x - y \in \mathbb{Q}$.

c) On pose

$$G = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (E + r).$$

Montrer que $[0,1] \subset G \subset [-1,2]$ et montrer que si $r, s \in \mathbb{Q}$, alors $r \neq s \Longleftrightarrow (E+r) \cap (E+s) = \varnothing$.

d) En utilisant la mesure de Lebesgue, en déduire que $E \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on raisonnera par l'absurde).

Exercice 11 (Lebesgue nulle et intérieur) Montrer que tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue nulle est d'intérieur vide.

Ensembles négligeables

Exercice 12 (Continuité et notion de presque partout) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ (i.e. la restriction à $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue). Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que f est nulle presque partout sur $[0,1]$ par rapport à λ. Montrer alors que f est identiquement nulle. Le résultat subsiste-t-il si on remplace continue par mesurable ?

Exercice 13 (Fonction monotone et continuité) Montrer que toute fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Exercice 14 (Complété d'une tribu et d'une mesure.) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties μ-négligeables et

$$\mathcal{A}_\mu = \{A \cup N : (A, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{N}\}.$$

a) Montrer que $C \in \mathcal{A}_\mu$ si et seulement si il existe $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \subset C \subset B$ et $\mu(B \backslash A) = 0$.

b) Montrer que $\mathcal{A}_\mu$ est une tribu, qui contient $\mathcal{A}$.

c) On pose pour $C \in \mathcal{A}_\mu$, $\overline{\mu}(C) = \mu(A)$ si $A \subset C \subset B$ et $\mu(B \backslash A) = 0$. Montrer que $\overline{\mu}$ définit bien une application.

d) Montrer que $\overline{\mu}$ une mesure sur $\mathcal{A}_\mu$ qui coincide avec μ sur $\mathcal{A}$.

e) Montrer que la mesure $\overline{\mu}$ est complète, i.e. $\mathcal{A}_\mu$ contient toutes les parties $\overline{\mu}$-négligeables.

La tribu $\mathcal{A}_\mu$ s'appelle la *tribu complétée* de $\mathcal{A}$ par rapport à la mesure μ et $\overline{\mu}$ s'appelle la *mesure complétée* de μ.

Autour de la caractérisation des mesures

Exercice 15 (Mesures de Stieltjes) Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère une mesure (positive) finie μ et on définit la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ par $F(x) = \mu([x, +\infty[)$.

a) Montrer que μ est uniquement déterminée par la donnée de F.

b) Montrer que F est décroissante, continue à gauche sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites en $\pm\infty$.

c) Calculer $\mu\{x\}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu\{x\} = 0$. Que peut-on en déduire sur $D = \{x \in \mathbb{R},\ \mu\{x\} \neq 0\}$?

Exercice 16 (Caractérisation des mesures sur $\mathbb{R}$) Soient μ et ν deux mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant pour tout $x \geqslant 0$:

$$\mu([0,x]) = \nu([0,x]) < +\infty$$

et pour tout $x < 0$:

$$\mu([x,0]) = \nu([x,0]) < +\infty$$

Montrer alors que $\mu = \nu$.

Pour aller plus loin.....

Mesures extérieures

Exercice 17 (Mesure de Hausdorff) Soit (X,d) un espace métrique séparable (c'est-à-dire qu'il existe une partie dénombrable et dense dans X) et α, $\varepsilon > 0$. Pour toute partie A de X, on désigne par $\mathcal{R}_\varepsilon(A)$ l'ensemble des recouvrements dénombrables $(B_k)_{k\geqslant 1}$ de A par des boules B_k de diamètres $\leqslant \varepsilon$.

a) Montrer que $\mathcal{R}_\varepsilon(A) \neq \varnothing$.

On pose alors :

$$\mu_\alpha^\varepsilon(A) := \inf_{\mathcal{R}_\varepsilon(A)} \Big(\sum_{k\geqslant 1} \big(\text{diam } B_k\big)^\alpha \Big).$$

b) Montrer que la fonction $\varepsilon \mapsto \mu_\alpha^\varepsilon(A)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que μ_α^ε est une mesure extérieure.

d) En déduire que l'application $\mu_\alpha := \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\alpha^\varepsilon$ est une mesure extérieure appelée *mesure de Hausdorff de dimension α*.

e) Montrer que pour toute partie A de X, $\alpha \mapsto \mu_\alpha(A)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que la fonction $\alpha \mapsto \varepsilon^{-\alpha}\mu_\alpha^\varepsilon(A)$.

f) Soit $A \subset X$ et $0 \leqslant s < t < +\infty$. Montrer que

$$\mu_s(A) < +\infty \implies \mu_t(A) = 0.$$

On définit alors *la dimension de Hausdorff* de A comme

$$\begin{aligned}\dim_H(A) &= \sup\{t > 0 : \mu_t(A) > 0\}\\ &= \inf\{t > 0 : \mu_t(A) = 0\}.\end{aligned}$$

Exercice 18 (Le Cantor tri-adique) Dans cet exercice, on souhaiterait notamment calculer la dimension de Hausdorff du Cantor triadique. On rappelle que cet ensemble est définit de la façon suivante : On pose $F_0 = [0,1]$, $F_1 = [0,1/3] \cup [2/3;1]$, $F_2 = [0;1/9] \cup [2/9;1/3] \cup [2/3;7/9] \cup [8/9,1]$, et ainsi de suite. Autrement dit, si on a construit F_n, pour construire F_{n+1}, on découpe chaque intervalle de F_n en trois intervalles de longueur égale et on enlève le milieu. On pose alors

$$K = \bigcap_{n\geqslant 0} F_n.$$

Cet ensemble K ainsi construit s'appelle l'ensemble triadique de Cantor.

a) Montrer que K est un compact non vide.

b) Montrer que $\lambda(K) = 0$, où λ est la mesure de Lebesgue sur K.

c) Montrer que pour tout $s \geqslant 0$, on a

$$\mu_s(K) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \mu_s(K),$$

où μ_s est la mesure de Hausdorff de dimension s.

Indication : considérer $K_1 = K \cap [0;1/3]$ et $K_2 = K \cap [2/3;1]$ et remarquer que $\mu_s(K) = \mu_s(K_1) + \mu_s(K_2)$ et $K = 3K_1 = 3(K_2 - \frac{2}{3})$.

d) Soit $s = \dim_H(K)$ et supposons que $0 < \mu_s(K) < +\infty$. En déduire alors que $s = \ln(2)/\ln(3)$.

e) On suppose maintenant que $s = \ln(2)/\ln(3)$. On va montrer que $\frac{1}{2} \leqslant \mu_s(K) \leqslant 1$.

(i) Soit (I_k^ℓ) les intervalles de longueur 3^{-k} qui forment F_k. Montrer que

$$\mu_s^{3^{-k}}(K) \leqslant 2^k 3^{-ks}.$$

En déduire que $\mu_s(K) \leqslant 1$.

(ii) Soit $(U_i)_i$ un recouvrement de K par des intervalles. Comme K est compact, on peut supposer qu'il en existe un nombre fini, disons p. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, soit k tel que $3^{-(k+1)} \leqslant |U_i| < 3^{-k}$ (ici $|U_i|$ désigne la longueur de l'intervalle U_i). Justifier que U_i rencontre au plus un des intervalles (I_k^ℓ) qui forment F_k.

(iii) Si $j \geqslant k$, montrer que U_i rencontre au plus 2^{j-k} intervalles (I_j^ℓ) formant F_j.

(iv) En choisissant j suffisamment grand pour que $3^{-(j+1)} \leqslant |U_i|$, en déduire que

$$2^j \leqslant \sum_{i=1}^{p} 2^j 3^s |U_i|^s.$$

Indication : on pourra remarquer que $2^{j-k} \leqslant 2^j 3^s |U_i|^s$ et remarquer que $U_i : 1 \leqslant i \leqslant p$ intersecte tous les intervalles de F_j.

(v) En déduire que $\sum_{i=1}^p |U_i|^s \geqslant 3^{-s} = \frac{1}{2}$, puis que $\mu_s(K) \geqslant 1/2$.

(vi) En déduire la dimension de Hausdorff du Cantor K.

Exercice 19 (Régularité et mesure finie) Soit (X, d) un espace métrique et μ une mesure **finie** sur $(X, \mathcal{B}(X))$. L'objectif de l'exercice est de montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$, on a

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ fermé }, F \subset A\}$$

et

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \text{ ouvert }, A \subset O\}.$$

a) Montrer qu'il suffit de prouver que tout borélien A de X vérifie la propriété suivante :

(P) $\quad \forall \varepsilon > 0$ il existe un ouvert O et un fermé F de X tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \backslash F) \leqslant \varepsilon$.

b) Introduisons $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(X) : A \text{ vérifie (P)}\}$.

(i) Montrer que $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{O}(X)$, l'ensemble des ouverts de X.

Indication : soit $A \in \mathcal{O}(X)$; on pourra considérer $F_p = \{x \in X : d(x, A^c) \geqslant 1/p\}$, $p \geqslant 1$, et remarquer que $A = \bigcup_{p \geqslant 1} F_p$.

(ii) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

Indication : soit $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geqslant 1$, et $\varepsilon > 0$. Considérer alors F_n fermé de X et O_n ouvert de X tels que $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $\mu(O_n \backslash F_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Remarquer qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $\mu(\bigcup_{k \geqslant 1} F_n) \leqslant \mu(\bigcup_{k=1}^{n} F_k) + \frac{\varepsilon}{2}$.

(iii) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire.

(iv) Conclure.

c) Supposons en plus que (X, d) soit σ-compact, c'est-à-dire qu'il existe une suite de compacts $(K_n)_n$ telle que $K_n \subset K_{n+1}$ et $X = \bigcup_{n \geqslant 1} K_n$. Montrer que μ est régulière.

Indication : remarquer que si F est un fermé de X, alors les ensembles $F \cap K_n$ sont compacts et $\mu(F) = \lim_{n \to +\infty} \mu(F \cap K_n)$.

TD3 - Intégrales de Lebesgue

Questions d'intégrabilité

Exercice 1

Les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont-elles intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue ?

(a) $x \longmapsto f(x) = \chi_{]0,1]}(x) \sin(1/x)$.

(b) $x \longmapsto g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(c) $x \longmapsto h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \chi_{]0,1]}(x)$.

Exercice 2

Soit μ une mesure finie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que la fonction $\frac{f}{1+|f|}$ est intégrable sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Exercice 3

Montrer que les fonctions suivantes sont Lebesgue-intégrables et calculer leur intégrale :

(a) $x \longmapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \chi_{]0,1]}(x)$.

(b) $x \longmapsto g(x) = 2xe^{x^2} \chi_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap]0,1]}(x)$.

Exercice 4 Soit f une fonction mesurable positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = +\infty$. Peut-on affirmer que $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = +\infty$? Dans cette feuille, conformément au cours, on note par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que μ est finie et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour $n \geqslant 1$, on pose $A_n = \{x \in X : |f(x)| \geqslant n\}$ et $B_n = \{x \in X : n \leqslant |f(x)| < n+1\}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est intégrable ;

(ii) la série $\sum_n n\mu(B_n)$ est convergente ;

(iii) la série $\sum_n \mu(A_n)$ est convergente.

Exercice 6 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) = 1$ (μ est une mesure de probabilité sur Ω). Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. Soit θ une fonction convexe sur I et soit f une fonction μ-intégrable et à valeurs dans I.

a) Montrer que $\int_\Omega f d\mu$ appartient à I.

b) Lorsque θ est dérivable, montrer que

$$\theta\Big(\int f d\mu\Big) \leqslant \int (\theta \circ f) d\mu.$$

Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Jensen.

c) Montrer que l'inégalité de Jensen est encore vraie si θ n'est plus supposée dérivable. On rappelle que comme toute fonction convexe, θ satisfait l'inégalité des trois pentes : pour tout $x < y < z$ dans I

$$\frac{\theta(x)-\theta(y)}{x-y} \leqslant \frac{\theta(x)-\theta(z)}{x-z} \leqslant \frac{\theta(y)-\theta(z)}{y-z}$$

et θ est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur de I.

d) Dans quel cas y a-t-il égalité pour tout f ?

e) Soit θ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour toute fonction mesurable bornée f de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on ait :

$$\theta\Big(\int_0^1 f d\lambda\Big) \leqslant \int_0^1 (\theta \circ f) d\lambda,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que θ est convexe.

Calcul d'intégrales

Exercice 7 Soient λ la mesure de Lebesgue et $\mu = \sum_{n\geqslant 1} \delta_n$. On pose $\beta = \lambda + \mu$. Calculer, si c'est possible les quantités suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2} \, d\mu(x), \quad \int_{\mathbb{R}} \chi_{[1,+\infty[}(x) \frac{1}{x} \, d\mu(x),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[1,+\infty[}(x) 2^{-x} \, d\beta(x).$$

Théorèmes de convergence

Exercice 8

Soit h une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de boréliens telle que $\lambda(A_n) \to 0$, lorsque $n \to +\infty$.

a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier n, on a
$$\int_{A_n} |h(x)|\, d\lambda(x) \leqslant N\lambda(A_n) + \int_{B_N} |h(x)|\, d\lambda(x),$$
où $B_N := \{x \in \mathbb{R} : |h(x)| > N\}$.

b) Montrer que $\int_{B_N} |h(x)|\, d\lambda(x) \to 0$, lorsque $N \to +\infty$.

c) En déduire alors que $\int_{A_n} |h(x)|\, d\lambda(x) \to 0$, lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable et positive. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \frac{1}{1+f^n(x)}\, d\lambda(x),$$
en fonction des quantités $\lambda(A)$, $\lambda(B)$ et $\lambda(C)$, où $A = \{x \in [0,1] : 0 \leqslant f(x) < 1\}$, $B = \{x \in [0,1] : f(x) = 1\}$ et $C = \{x \in [0,1] : f(x) > 1\}$.

Exercice 10

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\exp(x)-1} dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{\exp(x)-1} dx$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (on fera attention au cas $n = 0$).

Exercice 11

Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^n(x) dx, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/n^2}\cos(x/n)}{1+x^2} dx$$
et
$$\sum_{n\geqslant 3} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice 12

Montrer les inégalités suivantes :

$\ln(t) \leqslant t - 1$ pour $t > 0$ et $\sin(t) \geqslant \dfrac{2}{\pi} t$ pour $t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Calculer alors
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \cos\left(\frac{x}{n}\right)^{n^2} dx.$$

Exercice 13

a) Donner un exemple de fonction positive, continue et intégrable qur $\mathbb{R}$ qui ne tend pas vers zéro en $+\infty$.

b) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs positives continue et intégrable. Soit aussi (λ_n) une suite de réels strictement positifs tels que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\lambda_n}$ converge. Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que pour presque tout réel x on a

$\lim_{n\to+\infty} f(\lambda_n x) = 0$.

Exercice 14

a) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions mesurables positives de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Redémontrer que
$$\int_X \sum_{n\geqslant 0} f_n \, d\mu = \sum_{n\geqslant 0} \int_X f_n \, d\mu.$$
En application, montrer que pour toute famille de réels positifs $(a_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$,
$$\sum_{p\geqslant 0} \sum_{q\geqslant 0} a_{p,q} = \sum_{q\geqslant 0} \sum_{p\geqslant 0} a_{p,q}$$

b) Montrer que, pour tout a et b dans $\mathbb{R}_+^*$,
$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

c) Montrer que pour p et q deux entiers $\geqslant 1$,
$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}.$$
En déduire une expression de $\ln(2)$ et de $\pi/4$.

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application mesurable et positive.

a) Montrer que
$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) \Big) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

b) En déduire que si f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$ est convergente pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 16

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \ln(x)\big(1-\frac{x}{n}\big)^n dx$

et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2(x)} f(x)dx, \qquad$ avec $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \big(1-\frac{x}{n}\big)^n e^{x/2} dx.$

TD4 - Intégrales à paramètres

Exercice 1

Pour $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$, on définit la *transformée de Fourier* de f par :

$$\widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) d\lambda(x).$$

a) Montrer que $\widehat{f}$ est bien définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si $x \longmapsto xf(x)$ est intégrable, alors $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-x^2}$.
Indication : on pourra montrer que dans ce cas $\widehat{f}$ est dérivable, montrer que $\widehat{f}$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre qu'on résolvera pour en déduire $\widehat{f}$.

Exercice 2

Pour $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ et φ une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit la convolée de f et φ par

$$(f \star \varphi)(u) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u-x) f(x) d\lambda(x),$$

.

a) Montrer que $f \star \varphi$ est bien définie, continue et bornée.

b) Si de plus, φ est de classe $\mathcal{C}^1$, bornée et à dérivée bornée, montrer alors que $f \star \varphi$ est dérivable et que $\forall u \in \mathbb{R}$, $(f \star \varphi)'(u) = (f \star \varphi')(u)$.

Exercice 3

En considérant une intégrale à paramètre, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et $y > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y^2)^n} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \cdot \frac{1}{y^{2n-1}}.$$

Exercice 4

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, dt.$$

a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est de classe C^1 et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculer simplement $F'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire une expression simple pour $F(x)$.

Exercice 5

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) > 0$. Pour $\alpha \geqslant 0$, on pose

$$F(\alpha) = \int_0^1 f^{\alpha}(t)\, dt.$$

a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $F'(0)$.

b) En déduire la valeur de

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(\int_0^1 f^{\alpha}(t)\, dt \right)^{1/\alpha}.$$

Indication : on pourra effectuer un DL à l'ordre 1 en 0 de $\ln(F(\alpha))$.

Exercice 6

Soit φ une fonction intégrable sur $[0,1]$ (par rapport à la mesure de Lebesgue) et à valeurs réelles. On pose pour $t \geqslant 0$,

$$F(t) = \int_0^1 \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\, dx.$$

a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

c) Montrer que F est dérivable (à droite) en 0 si et seulement si la fonction $1/\varphi$ est intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 7

La fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \qquad t > 0.$$

a) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$

c) Montrer que pour tout $t > 0$,

$$\Gamma(t+1) = \sqrt{t}\, t^t\, e^{-t} \int_{-\sqrt{t}}^{+\infty} \Big(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\Big)^t e^{-\sqrt{t} y}\, dy.$$

d) Montrer que pour tout $t \geqslant 1$ et tout $y \in]-\sqrt{t}, 0]$, $t\ln(1+y/\sqrt{t}) - y\sqrt{t} \leqslant -y^2/2$.

e) Montrer que pour tout $t \geqslant 1$ et tout $y \geqslant 0$, $t\ln(1+y/\sqrt{t}) - y\sqrt{t} \leqslant \ln(y+1)+y$.

f) Déduire des questions précédentes et de l'égalité

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

la formule de Stirling :

$$\Gamma(t+1) \sim_{t\to+\infty} \sqrt{2\pi t}t^t e^{-t},$$

qui donne pour $t = n$ entier, $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

Exercice 8

On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-xt)\frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et en déduire $f(x)$ pour $x > 0$.

c) Soit $\varphi : t \mapsto \int_0^t \frac{\sin t}{t}dt$. Montrer que

$$f(x) - f(0) = x\int_0^{+\infty} e^{-xt}(\varphi(t) - f(0))dt.$$

En déduire que f est continue en 0.

d) En déduire la valeur de l'intégrale de

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

e) Variante : on considère l'intégrale double

$$\int_0^a \int_0^a \exp(-xy)\sin(x)\,dx\,dy.$$

En utilisant le théorème de Fubini, calculer cette intégrale de deux manières et en déduire la valeur de I.

TD5 - Intégration sur un espace produit

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \qquad f(0,0) = 0.$$

a) Justifier la mesurabilité de f.

b) Calculer

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]^2} f(x,y)\; d\lambda_2(x,y).$$

Exercice 2 Soit $f : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \qquad f(0,0) = 0.$$

a) Calculer

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx \quad \text{et} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy.$$

b) En déduire que $f \notin \mathcal{L}^1([0,1]^2, d\lambda_2)$.

Exercice 3

a) Calculer de deux manières différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\, d\lambda_2(x,y)$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, dx.$$

b) Déduire du a) et d'un développement en série entière l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 4 Soit $\Delta = \{(x,x) : \; x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que Δ est un ensemble mesurable.

b) Montrer que si μ est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$, alors $D = \{x, \; \mu\{x\} \neq 0\}$ est dénombrable.

c) Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$(\mu \otimes \nu)(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu\{x\}\nu\{x\}.$$

Exercice 5 Soit $X = Y = \mathbb{R}$. On munit X de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ et Y de la tribu $\mathcal{P}(Y)$ et de la mesure de comptage ν (rappelons que $\nu(B) = \text{card }(B)$, $B \in \mathcal{P}(Y)$). Soit $\Delta = \{(x,x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.

a) Justifier que $\Delta \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{P}(Y)$.

b) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, calculer Δ_x et Δ^y.

c) Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} \nu(\Delta_x)\, d\lambda(x) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \lambda(\Delta^y)\, d\nu(y).$$

d) Comparer avec le théorème sur la mesure produit. Pourquoi ne s'applique t'il pas ?

Exercice 6 On considère λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, et $0 < a < b$.

a) Montrer que l'application f définie par $f(x,y) = \exp(-xy)\chi_{]0,+\infty[\times]a,b[}(x,y)$ est dans $\mathcal{L}^1(\lambda_2)$.

b) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx.$$

Exercice 7 Soit μ une mesure σ-finie sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A})$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive.

a) Soit $D_f = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+ : \ f(x) > t\}$. Montrer que $D_f \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

b) En considérant la mesure produit $\mu \otimes \lambda$ (où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$), et en calculant $\mu \otimes \lambda(D_f)$ de deux manières, montrer que

$$\int_X f\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X : f(x) > t\})\, dt.$$

c) Soit $p \in]0, +\infty[$. En déduire que

$$\int_X f^p\, d\mu = \int_0^{+\infty} pt^{p-1} \mu(\{x \in X : f(x) > t\})\, dt.$$

Exercice 8 Pour $n \geqslant 0$, on note λ_{n+1} la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. On note G_f le graphe de f, c'est-à-dire

$$G_f = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : f(x) = t\}.$$

Justifier que $G_f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ et montrer que $\lambda_{n+1}(G_f) = 0$.

Indication : on pourra considérer $D'_f = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+ : \ f(x) \geqslant t\}$, montrer que $\lambda_{n+1}(D'_f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda_n$ et utiliser l'exercice 7.

TD6 - Formule de changement de variable

Exercice 1

a) Montrer que

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\, d\lambda_2(x,y) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}.$$

b) En faisant le changement de variables $x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$, montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $b_n = \lambda_n(B_n)$ le volume de la boule unité euclidienne $B_n = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\}$ de $\mathbb{R}^n$ mesuré avec la mesure de Lebesgue λ_n dans $\mathbb{R}^n$.

a) Calculer b_2 et b_3.

b) Etablir une relation de récurrence entre b_n et b_{n-2} pour tout $n \geqslant 3$.

c) En déduire l'expression de b_n pour $n \geqslant 2$.

Exercice 3 Calculer

$$I = \int_{[0,+\infty[} e^{-x^2}\, d\lambda(x).$$

Indication : après avoir justifié que $0 \leqslant I < +\infty$, on calculera I^2 avec un changement de variable.

Exercice 4 Soient λ_3 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$ et Ω_1, Ω_2 les deux domaines de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\Omega_1 = \{(u,v,w) \in]0,+\infty[^3 \colon uv, uw, vw < 1\} \quad \text{et} \quad \Omega_1 = \{(u,v,w) \in]0,+\infty[^3 \colon uv + uw + vw < 1\}.$$

a) Justifier que Ω_1, Ω_2 sont des boréliens de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer $\lambda_3(\Omega_1)$ et $\lambda_3(\Omega_2)$.

Indication : on pourra effectuer le changement de variable : $x = \sqrt{vw}$, $y = \sqrt{uw}$ et $z = \sqrt{uv}$.

Exercice 5 Soient $A \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive et $t > 0$. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-t\langle Ax, x\rangle)\, d\lambda_n(x)$$

Indication : on effectuera le changement de variable $x = Py$ où P est une matrice de passage par rapport à une base orthogonale de vecteurs propres de A.

Exercice 6 Soient $\Delta =]0,1[^2 \times]-\pi,\pi[$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\varphi(u,v,w) = (u, uv\cos(w), v\sin(w)).$$

a) Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Δ sur son image.

b) Calculer $\lambda_3(\varphi(\Delta))$.

Exercice 7

a) Déterminer les ouverts connexes maximaux Δ et D de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(u,v) = (u^2+v^2, 2uv)$ définisse un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Δ sur D.

b) En déduire la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |u^4 - v^4| e^{-(u+v)^2} \, d\lambda_2(u,v).$$

Exercice 8 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, convexe (c'est-à-dire que $f'' \geqslant 0$) et I la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, pour $d \geqslant 3$, par

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f''(\|x-y\|)}{\|x-y\| \|x\|^{d-2}} \, d\lambda_d(x), \qquad y \in \mathbb{R}^d,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

a) Montrer, en justifiant l'existence des limites, que $\ell = \lim_{t\to 0^+} f(t) > -\infty$ et $\ell' = \lim_{t\to+\infty} f'(t) > -\infty$.

b) Soit $\rho \geqslant 0$. Calculer

$$\int_0^{+\infty} f'(r+\rho) - f'(|r-\rho|) \, dr$$

à l'aide de ℓ, ℓ' et $f(\rho)$.

c) Montrer que $I(y)$ ne dépend que de $|y|$.

Indication : on pourra effectuer un changement de variables linéaire orthogonal.

d) En déduire la valeur de $I(y)$.

Indication : on pourra effectuer le changement de variables en coordonnées sphériques

$$x_1 = r\sin(\theta_1),\ x_2 = r\cos(\theta_1)\sin(\theta_2), \dots, x_{d-1} = r\cos(\theta_1)\dots\cos(\theta_{d-2})\sin(\theta_{d-1}),\ x_d = r\cos(\theta_1)\dots\cos(\theta_{d-2})\cos(\theta_{d-1})$$

dans l'intégrale $I(z)$, où $z = (0,\dots,0,\|y\|,0,0)$, et montrer par récurrence sur d, que son Jacobien vérifie $|J_d| = r^{d-1}(\cos(\theta_1))^{d-2}\dots(\cos(\theta_{d-3}))^2\cos(\theta_{d-2})$.

Exercice 9 On définit, pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $B_\alpha = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 \colon\ x^\alpha + y^\alpha < 1\}$.

a) Calculer la limite quand $\alpha \to +\infty$ de $\lambda_2(B_\alpha)$.

Indication : Montrer que $\lim_{\alpha\to+\infty}(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} = \max(x,y)$ et en déduire que χ_{B_α} converge simplement vers $\chi_{]0,1[^2}$.

b) Ecrire $\lambda_2(B_\alpha)$ sous la forme d'une intégrale simple.

Indication : Effectuer le changement de variable $(r,\theta) \longmapsto (r(\cos(\theta))^{2/\alpha}, r(\sin(\theta))^{2/\alpha})$.

c) En déduire la valeur de

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\pi} (\sin(\theta))^{\frac{2}{\alpha}-1} \, d\theta.$$

Mesure et Intégration - DS1 - 14 mars 2019

Viet Chi Tran, `chi.tran@math.univ-lille1.fr`

14h-16h, calculatrices autorisées, formulaire manuscrit autorisé (copie double).

Exercice 1 (Sommes doubles)
On considère $\mathbb{N}^2$, l'ensemble des couples d'entiers naturels, que l'on munit de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.

1. Pour un entier $i \in \mathbb{N}^*$, on note q_i l'entier tel que

$$\sum_{j=1}^{q_i} j \leq i < \sum_{j=1}^{q_i+1} j,$$

et on pose $q_0 = 0$. Soit l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^2 \\ & & i & \mapsto & (n_i, m_i) = \big(i - \sum_{j=1}^{q_i} j, \sum_{j=1}^{q_i} j - n_i\big). \end{array}$$

Montrer que cette fonction est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$ et en déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

2. On considère sur $\mathbb{N}^2$ la mesure suivante : $\mu(dx) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \delta_{(n,m)}(dx)$. Quelle est la valeur de $\mu(A)$ pour une partie A de $\mathbb{N}^2$?

3. Soit f une fonction positive de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{N}^2} f \, d\mu = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} f(n,m).$$

Rque : on n'est pas obligé d'utiliser ici le théorème de Beppo-Lévi qui n'est pas au programme de ce DS. On pourra utiliser des résultats sur les séries sommables de nombres positifs.

Exercice 2 (Théorème de Borel-Cantelli)
On considère un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables de Ω. On rappelle :

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m, \qquad \text{et} \qquad \liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} A_m.$$

1. Ecrire les définitions de $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ à l'aide de quantificateurs, puis expliquer avec une courte phrase ce que représentent ces ensembles.

2. Justifier que $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ sont des ensembles mesurables.

3. Dans le cas où $A_n =]-\infty, a_n]$ avec $a_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ et $a_{2p+1} = -1 - \frac{1}{2p+1}$, écrire ce que valent $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$.

4. On revient au cas d'ensembles (A_n) génériques. Que dire de la suite d'ensembles

$$B_n = \bigcup_{m\geq n} A_m ?$$

5. On se donne une mesure de probabilité μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (ce qui signifie que μ est une mesure telle que $\mu(\Omega) = 1$). Déduire de la question **4.** que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$, alors

$$\mu(\limsup A_n) = 0.$$

Exercice 3 (Principe de transport de masse)
On considère $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ muni de sa tribu Borélienne $\mathcal{B}(R^{2d})$. On dit qu'une mesure μ est *diagonalement invariante* si pour tous ensembles A et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mu(A \times B) = \mu\big(T_x A \times T_x B\big), \tag{1}$$

où $T_x A = \{x + a \ , \ a \in A\}$ est le translaté de A par $x \in \mathbb{R}^d$. Le but de cet exercice est de prouver que pour toute mesure diagonalement invariante μ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et pour tout ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ d'intérieur non vide, on a

$$\mu(A \times \mathbb{R}^d) = \mu(\mathbb{R}^d \times A), \tag{2}$$

où les deux termes de l'égalité peuvent être infinis.

Rque : pour donner une intuition, on pourra penser à $\mu(A \times B)$ comme mesurant un flux de A vers B. Ainsi, l'interprétation de (2) est que si μ est diagonalement invariante, le flux entrant dans A doit être égal au flux sortant de A.

Pour la suite, on a également besoin de la translation $\widetilde{T}_s$ suivante sur $\mathbb{R}^{2d}$ définie pour $s \in \mathbb{R}^d$ par : $\forall x, \ y \in \mathbb{R}^d, \ \widetilde{T}_s(x, y) = (x + s, y + s)$.

Hypothèse : Pour simplifier, nous supposons dans toute cet exercice que μ est une mesure finie.

1. Montrer que

$$\mathcal{E} = \big\{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) : \ \mu(E) = \mu\big(\widetilde{T}_s(E)\big)\big\}$$

est une classe monotone.

2. Montrer que

$$\mathcal{C} = \big\{A \times B \ : \ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big\}$$

est une famille stable pour les intersections finies, qui contient $\mathbb{R}^{2d}$ et qui est incluse dans $\mathcal{E}$.

3. En utilisant le théorème des classes monotones, montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire que pour tout $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et pour tout $s \in \mathbb{R}^d$, $\mu(E) = \mu\big(\widetilde{T}_s(E)\big)$.

4. On introduit pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\nu_1(A) = \mu(A \times \mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad \nu_2(A) = \mu(\mathbb{R}^d \times A).$$

Montrer que ν_1 et ν_2 sont invariantes dans le sens où pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\nu_1(T_x A) = \nu_1(A)$ et $\nu_2(T_x A) = \nu_2(A)$.

5. En déduire que $\nu_1(dx) = \mu([0, 1]^d \times \mathbb{R}^d)\lambda(dx)$ et $\nu_2(dx) = \mu(\mathbb{R}^d \times [0, 1]^d)\lambda(dx)$ où $\lambda(dx)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

6. Soit A un ensemble d'intérieur non vide. En admettant le théorème de Fubini d'inversion des intégrales (vrai lorsque l'intégrant est mesurable positif), montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu(T_x A \times A)\lambda(dx) = \lambda(A)\nu_1(A).$$

De même montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu(A \times T_{-x} A)\lambda(dx) = \lambda(A)\nu_2(A).$$

7. En déduire (2).

Licence 3e année 2018-2019
parcours Mathématiques M63, Intégration

---

26 juin 2019
[durée : 3 heures]

Deux formulaires sur copie double sont autorisés. Le sujet comporte 3 exercices qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $[0,1]$. On considère la fonction f définie pour $x \in [0,1]$ par

$$f(x) = \sum_{n\in I(x)} \frac{1}{2^n},$$

où $I(x)$ est l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_n < x$. On pose $f(x) = 0$ lorsque $I(x) = \varnothing$.

a) Montrer que f est une fonction à valeurs dans $[0,1]$.

b) Montrer que f est une fonction mesurable de $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ dans $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ où $\mathcal{B}([0,1])$ est la tribu Borélienne sur $[0,1]$.

c) Montrer que

$$\int_{[0,1]} f\, d\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-x_n}{2^n},$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

Exercice 2 On pose

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

a) Justifier que la fonction $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue).

b) Calculer I^2 en utilisant le théorème de Fubini puis un changement de variable en coordonnées polaires, et en déduire que $I = \sqrt{\pi/2}$.

c) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad \text{et} \qquad a_n = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx.$$

Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, et tout $\alpha \in [1, +\infty[$, $(1+u)^\alpha \geqslant 1 + \alpha u$, puis en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_n(x) \leqslant \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2}}.$$

d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

T.S.V.P.

e) Montrer qu'il existe une fonction intégrable f, qu'on déterminera, telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f_n(x)}{a_n}-f(x)\right| dx = 0.$$

Exercice 3

a) Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, $I=[c,d]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et supposons que $\mu(X)=1$. Soient $g : X \longrightarrow I$ une fonction intégrable à valeurs dans I et φ une fonction convexe de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que $m := \int_X g\, d\mu \in I$ et

$$\varphi\left(\int_X g\, d\mu\right) \leqslant \int_X \varphi\circ g\, d\mu.$$

Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Jensen.

Indication: On pourra montrer d'abord l'inégalité pour les fonctions affines puis utiliser (sans le démontrer) le fait que φ étant convexe, on a

$$\varphi(x) = \sup_{h\in E}\psi(x), \qquad x\in I,$$

où E est l'ensemble des fonctions affines ψ sur I telles que $\psi(t)\leqslant\varphi(t)$, $\forall t\in I$.

b) Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Supposons que $\mu(X)<\infty$. Soit $\alpha\in]0,1[$ et $1\leqslant p<+\infty$.

(i) Montrer que si $h : X\longrightarrow\mathbb{R}$ est mesurable, alors

$$\int_X |h|^\alpha d\mu \leqslant \|h\|_p^\alpha(\mu(X))^{1-\frac{\alpha}{p}}.$$

Indication: On pourra utiliser l'inégalité de Hölder.

(ii) En déduire que si $h\in L^p$ alors $|h|^\alpha\in L^1$.

c) Dans la suite, on considère $X=[a,b]$, $a<b$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}(X)$ la tribu des boréliens sur $[a,b]$ et $\mu=\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$. Soit $\alpha\in]0,1[$ et $f\in L^1$ telle que pour tout $t\in[a,b]$, $f(t)\neq 0$.

(i) Montrer que $\forall t>0$, on a $\ln(t)\leqslant t-1$ et $t^\alpha-1\leqslant\alpha t$.

(ii) Justifier que $|f|^\alpha\in L^1([a,b])$, et montrer qu'on a

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]}|f|^\alpha d\lambda\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]}(|f|^\alpha-1)\,d\lambda.$$

(iii) Montrer que

$$\frac{\alpha}{b-a}\int_{[a,b]}\ln|f|d\lambda\leqslant\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]}|f|^\alpha d\lambda\right).$$

Indication: On pourra utiliser l'inégalité de Jensen.

(iv) En déduire que

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]}\ln|f|d\lambda\leqslant\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]}|f|^\alpha d\lambda\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]}\left(\frac{|f|^\alpha-1}{\alpha}\right)d\lambda.$$

(v) Pour $t\in[a,b]$ fixé, calculer

$$\lim_{\alpha\to0^+}\frac{|f(t)|^\alpha-1}{\alpha}$$

(vi) Montrer que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} |f|^\alpha d\lambda\right) = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} \ln|f| d\lambda$$

Indication: on pourra utiliser (i) et (iv).

(vii) En déduire

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \left(\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} |f|^\alpha d\lambda\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} \ln|f| d\lambda\right).$$

19 mars 2020
[durée : 2 heures]

Aucun document n'est autorisé. Le sujet comporte 4 exercices qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et D un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}\backslash D$. Montrer que f est mesurable (relativement à la tribu borélienne).

Indication: On pourra considérer F la restriction de f à $\mathbb{R}\backslash D$ et exprimer $f^{-1}(V)$ au moyen de $F^{-1}(V)$ où V est un borélien de $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Dans cet exercice, $(X, \mathcal{A})$ désigne un espace mesurable tel que pour tout $x \in X$, on a $\{x\} \in \mathcal{A}$. Si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$, on dira que

(i) la mesure μ est *diffuse* si pour tout $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$.

(ii) la mesure μ est *purement atomique* s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(X\backslash A) = 0$ et pour tout $x \in A$, $\mu(\{x\}) > 0$.

a) Montrer que si μ est diffuse et purement atomique, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, $\mu(B) = 0$.

b) Donner un exemple de mesure diffuse sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

c) Donner un exemple de mesure purement atomique sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

d) Soit ν une mesure diffuse sur $(X, \mathcal{A})$ et D un ensemble fini ou dénombrable. Justifier que $D \in \mathcal{A}$ et calculer $\nu(D)$.

e) Soit μ une mesure σ–finie sur $(X, \mathcal{A})$ et soit $(E_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{A}$ tel que $X = \bigcup_{n\geqslant 1} E_n$, $E_n \subset E_{n+1}$ et $\mu(E_n) < +\infty$, $n \geqslant 1$.

(i) Pour $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose $A_{n,k} = \{x \in E_n : \mu(\{x\}) > \frac{1}{k}\}$. Montrer que si $A_{n,k}$ est non vide et contient (au moins) p éléments distincts, alors $p \leqslant k\mu(E_n)$.

(ii) En déduire que $A = \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.

(iii) Montrer qu'il existe une mesure diffuse μ_d et une mesure purement atomique μ_a sur $(X, \mathcal{A})$ telle que $\mu = \mu_a + \mu_d$.

Indication: On pourra considérer $A = \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\}$ et poser pour $B \in \mathcal{A}$, $\mu_a(B) = \mu(B \cap A)$ et $\mu_d(B) = \mu(B \cap (X\backslash A))$.

T.S.V.P.

Exercice 3

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on définit

$$A_n = \{x \in X : \frac{1}{n} \leqslant |f(x)| \leqslant n\}.$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A_n \in \mathcal{A}$ et $\mu(A_n) < +\infty$.

b) Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on pose $f_n = f\chi_{A_n}$. Justifier que f_n est mesurable.

c) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n| \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu.$$

d) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(B_\varepsilon) < +\infty$ et

$$\int_{X \setminus B_\varepsilon} |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n \geqslant 2}$ définie par

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1 + x^n} dx.$$

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.

9 juillet 2020

La durée de l'épreuve est de 2h et vous avez 30 minutes en plus pour scanner et déposer votre sujet. Aucune copie ne sera acceptée au delà de 11h30.

Le sujet comporte 3 exercices qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty,$$

et on note

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k \right).$$

a) Justifier que $F \in \mathcal{A}$.

b) Montrer que $\mu(F) = 0$.

c) *Application :* soit $(f_n)_n$ et f des fonctions définies sur X à valeurs réelles et $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables. On suppose que pour tout $a > 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > a\}\right) < +\infty.$$

(i) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit

$$F_p = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geqslant n} \{x \in X \ : \ |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{p}\} \right).$$

Montrer que $\mu(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} F_p) = 0$.

(ii) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur X privé de la réunion des F_p.

(iii) En déduire que $(f_n)_n$ converge μ presque partout sur X vers f.

Exercice 2 Calculer les limites suivantes lorsque $n \to +\infty$

a) $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) e^{-n\sin^2 x}\, dx$, où f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b) $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\, dx.$

Exercice 3 Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que pour tout $t > 0$, $0 \leqslant f(t) < +\infty$. On pose

$$F(x) = \int_{]0,+\infty]} \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}\, d\lambda(t), \qquad x \in \mathbb{R},$$

où on rappelle que λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Exprimer la limite de F en $+\infty$ sous la forme d'une intégrale. Quelle est la valeur de cette limite lorsqu'on suppose en plus que pour presque tout $t > 0$, on a $f(t) > 0$?

c) Vérifier que pour tous $a, u \geqslant 0$, on a

$$\frac{2au}{1+a^2u^2} \leqslant 1.$$

d) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et exprimer $F'(x)$ pour $x > 0$.

e) On suppose dans cette question que la conditions suivante est satisfaite

$$(C) \qquad \int_{]0,+\infty[} \frac{f(t)}{1+t^2}\, dt < +\infty.$$

Montrer alors que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

f) On suppose maintenant que F admet au point $x = 0$ une dérivée à droite finie.

(i) Calculer pour $t > 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(xf(t))}{x}.$$

(ii) Montrer que la condition (C) est satisfaite.

Indication : on pourra considérer $n(F(1/n) - F(0))$ et utiliser le lemme de Fatou.

14 mai 2019

[durée : 3 heures]

⚠ *Deux formulaires sur copie double sont autorisés. Le sujet comporte 3 exercices qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Un barème (susceptible d'être modifié légérement à la correction) est donné à la fin du sujet.*

Exercice 1

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $(\mu_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de mesures sur $(X, \mathcal{A})$ telles que

$$(H) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \text{la suite } (\mu_k(A))_{k \geqslant 1} \text{ est croissante.}$$

Pour $A \in \mathcal{A}$, on note $\mu(A) := \lim_{k \to +\infty} \mu_k(A)$.

a) Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

b) Montrer que pour toute fonction $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable positive, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_X f \, d\mu_k \leqslant \int_X f \, d\mu_{k+1} \leqslant \int_X f \, d\mu.$$

Indication: on commencera par le cas où f est une fonction étagée positive, puis on utilisera le lemme d'approximation pour écrire une fonction mesurable positive f comme limite simple d'une suite de fonctions bien choisies, $(f_n)_{n \geqslant 1}$.

c) Montrer que pour toute fonction $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable, on a

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f \, d\mu_k = \int_X f \, d\mu.$$

d) En utilisant (b), vérifier que si $f \in L^1(\mu)$, alors pour tout $k \geqslant 1$, on a $f \in L^1(\mu_k)$ et en déduire que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f \, d\mu_k = \int_X f \, d\mu.$$

Exercice 2

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ telle que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \cos(xt)$ est intégrable par rapport à μ sur $\mathbb{R}_+$.

On pose alors

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt) \, d\mu(t), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Soit G définie par $G(x) = \frac{1 - F(x)}{x^2}$, $x \neq 0$. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, on a

$$G(x) = \frac{1}{x^2} \int_{\mathbb{R}_+} \big(1 - \cos(xt)\big) d\mu(t).$$

T.S.V.P.

d) On suppose **dans cette question** que $\int_{\mathbb{R}_+} t^2 d\mu(t) < +\infty$. Montrer que la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-F(x)}{x^2} \tag{1}$$

existe et la calculer.

Indication: on pourra utiliser après l'avoir justifié l'inégalité $1-\cos(u) \leqslant \frac{u^2}{2}$.

e) On ne suppose plus que $t \longmapsto t^2$ est intégrable mais on suppose que la limite (1) existe et vaut $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que $t \longmapsto t^2$ est intégrable par rapport à μ sur $\mathbb{R}_+$.

Indication: on pourra utiliser le lemme de Fatou.

(ii) En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $A > 0$, on a $\mu([A, +\infty[) \leqslant \frac{C}{A^2}$.

Exercice 3

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et supposons que $\mu(X) < +\infty$. Soit $\varphi \in L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\varphi \not\equiv 0$. On définit, pour $f \in L^1 = L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$,

$$T_\varphi(f) = \int_X f\varphi \, d\mu.$$

On supposera ici que toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles et que les espaces L^p considérés sont vus comme des espaces vectoriels réels.

a) Montrer que T_φ définit une forme linéaire et continue sur L^1 et vérifier que $\|T_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$. On rappelle ici que $\|T_\varphi\|$ désigne la norme de T_φ en tant qu'application linéaire de L^1 dans $\mathbb{R}$, i.e.

$$\|T_\varphi\| = \sup_{\substack{f \in L^1 \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \frac{|T_\varphi(f)|}{\|f\|_1}.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \|\varphi\|_\infty$ et définissons $A = \{x \in X : |\varphi(x)| \geqslant \|\varphi\|_\infty - \varepsilon\}$.

(i) Justifier que $\mu(A) > 0$.

(ii) Soit $f = \frac{\varphi}{|\varphi|}\mathbf{1}_A$. Vérifier que $f \in L^1$ en calculant $\|f\|_1$ et montrer que

$$|T_\varphi(f)| \geqslant (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)\mu(A).$$

(iii) On note $(L^1)^*$ l'espace des formes linéaires et continues sur L^1. En déduire que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & L^\infty & \longrightarrow & (L^1)^* \\ & \varphi & \mapsto & T_\varphi \end{array}$$

est une application linéaire et isométrique (donc en particulier injective).

c) Soit $T \in (L^1)^*$. Supposons que T est positive dans le sens suivant : si $f \in L^1$ et $f \geqslant 0$ presque partout, alors $T(f) \geqslant 0$. Le but de cette question est de montrer qu'il existe $\varphi \in L^\infty$ telle que $T = T_\varphi$.

(i) Pour $A \in \mathcal{A}$, posons $\nu(A) = T(\mathbf{1}_A)$. En utilisant la linéarité *et* la continuité de T, montrer que ν est une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$.

(ii) Montrer qu'il existe une fonction g mesurable positive telle, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$T(\mathbf{1}_A) = \int_X g\mathbf{1}_A \, d\mu.$$

Indication: on pourra utiliser (sans le démontrer) le théorème de Radon-Nikodym vu en TD dont on rappelle l'énoncé : si μ et ν sont deux mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que si, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$, alors il existe une fonction g mesurable positive telle, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\nu(A) = \int_X g\mathbf{1}_A \, d\mu$.

(iii) Montrer que nécessairement, $g \in L^\infty$ avec $\|g\|_\infty \leqslant \|T\|$.

(iv) Conclure finalement que $T = T_g$, *i.e.* pour tout $f \in L^1$, $T(f) = \int_X fg \, d\mu$.

Barème indicatif :

Exercice 1 (6 pts) : (a) 2 pt (b) 2 pts (c) 1 pt (d) 1 pt.

Exercice 2 (8 pts) : (a) 1 pt (b) 1 pt (c) 0,5 pt d) 2,5 pts (e) (i) 2 pts (ii) 1 pt.

Exercice 3 (9 pts) : (a) 1 pt (b) (i) 1 pt (ii) 1 pt (iii) 1,5 pts (c) (i) 1,5 pts (ii) 1 pt (iii) 1 pt (iv) 1 pt.

14 mai 2019
[durée : 3 heures]

Deux formulaires sur copie double sont autorisés. Le sujet comporte 3 exercices qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Un barème (susceptible d'être modifié légérement à la correction) est donné à la fin du sujet.

Exercice 1

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $(\mu_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de mesures sur $(X, \mathcal{A})$ telles que

$$(H) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \text{la suite } (\mu_k(A))_{k\geqslant 1} \text{ est croissante.}$$

Pour $A \in \mathcal{A}$, on note $\mu(A) := \lim_{k\to+\infty} \mu_k(A)$.

a) *Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.*

Remarquons que d'après (H), pour tout élément $A \in \mathcal{A}$, la suite $(\mu_k(A))_k$ est croissante, ainsi $\lim_{k\to+\infty} \mu_k(A)$ existe dans $[0, +\infty]$ et donc $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ est bien définie. De plus, on a les propriétés suivantes : tout d'abord, comme les μ_k sont des mesures, on a $\mu_k(\varnothing) = 0$, pour tout $k \geqslant 1$ et donc $\mu(\varnothing) = 0$. D'autre part, si $(A_n)_n$ est une suite d'ensembles mesurables, deux à deux disjoints, et si $A = \bigcup_{n\geqslant 0} A_n$, on a, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mu_k(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_k(A_n).$$

D'où

$$\mu(A) = \lim_{k\to+\infty} \mu_k(A) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_k(A_n).$$

Pour permuter, limite et somme, nous allons utiliser le théorème de Beppo-Levi. Considérons ν la mesure de dénombrement (de comptage) sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, i.e. $\nu(C) = \mathrm{card}(C)$, $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On a vu en cours que si $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$, alors f est automatiquement mesurable et on a

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\nu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

Définissons alors pour $k \geqslant 1$, $f_k : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ par $f_k(n) = \mu_k(A_n)$ et $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ par $f(n) = \mu(A_n)$. Alors $(f_k)_k$ est une suite croissante (d'après (H)) de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f. Le théorème de Beppo–Levi s'applique et entraine que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} f_k \, d\nu = \int_{\mathbb{N}} f \, d\nu,$$

ce qui se traduit par

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n),$$

T.S.V.P.

soit encore

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\mu_k(A_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mu(A_n).$$

Finalement, on en déduit que

$$\mu(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mu(A_n).$$

Tout ceci prouve que μ est une mesure sur $(X,\mathcal{A})$.

b) *Montrer que pour toute fonction $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ mesurable positive, et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,*

$$\int_X f\,d\mu_k \leqslant \int_X f\,d\mu_{k+1} \leqslant \int_X f\,d\mu.$$

Indication: on commencera par le cas où f est une fonction étagée positive, puis on utilisera le lemme d'approximation pour écrire une fonction mesurable positive f comme limite simple d'une suite de fonctions bien choisies, $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Supposons d'abord que $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ est une fonction étagée positive. Autrement dit, f est de la forme $f=\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, où $\alpha_i \geqslant 0$ et $A_i\in\mathcal{A}$. Alors, on a

$$\int_X f\,d\mu_k=\sum_{i=1}^N \alpha_i\mu_k(A_i) \qquad \text{et} \qquad \int_X f\,d\mu=\sum_{i=1}^N \alpha_i\mu(A_i).$$

D'après (H), pour tout $1\leqslant i\leqslant N$, la suite $(\mu_k(A_i))_k$ est croissante et converge vers $\mu(A_i)$. Ainsi, pour tout $k\geqslant 1$ et pour tout $1\leqslant i\leqslant N$, on a $\mu_k(A_i)\leqslant\mu_{k+1}(A_i)\leqslant\mu(A_i)$, et comme $\alpha_i\geqslant 0$, on en déduit que $\alpha_i\mu_k(A_i)\leqslant\alpha_i\mu_{k+1}(A_i)\leqslant\alpha_i\mu(A_i)$. En sommant ces inégalités sur $1\leqslant i\leqslant N$, on en déduit que

$$\int_X f\,d\mu_k \leqslant \int_X f\,d\mu_{k+1} \leqslant \int_X f\,d\mu. \tag{1}$$

Soit $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ une fonction mesurable positive quelconque. D'après un lemme d'approximation du cours, on sait qu'il existe une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions étagées positives telles que $(f_n)_n$ converge simplement vers f. D'après le théorème de Beppo–Levi, on sait alors que pour toute mesure λ sur $(X,\mathcal{A})$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\lambda=\int_X f\,d\lambda. \tag{2}$$

D'après (1), pour tout $n,k\geqslant 1$, on a

$$\int_X f_n\,d\mu_k \leqslant \int_X f_n\,d\mu_{k+1} \leqslant \int_X f_n\,d\mu.$$

En faisant tendre $n\to+\infty$ et en utilisant (2) appliquée (trois fois) avec $\lambda=\mu_k$, $\lambda=\mu_{k+1}$ et $\lambda=\mu$, on en déduit que

$$\int_X f\,d\mu_k \leqslant \int_X f\,d\mu_{k+1} \leqslant \int_X f\,d\mu.$$

c) *Montrer que pour toute fonction $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ mesurable, on a*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_X f\,d\mu_k=\int_X f\,d\mu.$$

On raisonne comme dans la question précédente. On suppose d'abord que $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ est une fonction étagée positive. Autrement dit, f est de la forme $f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, où $\alpha_i \geqslant 0$ et $A_i \in \mathcal{A}$. Alors, on a

$$\int_X f\, d\mu_k = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_k(A_i).$$

D'où, par définition de μ, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f\, d\mu_k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_k(A_i) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i) = \int_X f\, d\mu. \tag{3}$$

Soit maintenant $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive quelconque. En utilisant une nouvelle fois le lemme d'approximation vu en cours, on considère une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f. On a donc nécessairement, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n \leqslant f$ et d'après le théorème de Beppo–Levi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe un entier N tel que

$$\left| \int_X f_N\, d\mu - \int_X f\, d\mu \right| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

En utilisant b), pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_X f\, d\mu - \int_X f\, d\mu_k \\ &= \left(\int_X f\, d\mu - \int_X f_N\, d\mu \right) + \left(\int_X f_N\, d\mu - \int_X f_N\, d\mu_k \right) + \left(\int_X f_N\, d\mu_k - \int_X f\, d\mu_k \right). \end{aligned}$$

D'après (4), le premier terme est inférieur ou égal à ε et comme $f_N \leqslant f$, le troisième terme est négatif ou nul. Ainsi, on en déduit que

$$0 \leqslant \int_X f\, d\mu - \int_X f\, d\mu_k \leqslant \varepsilon + \int_X f_N\, d\mu - \int_X f_N\, d\mu_k.$$

En utilisant (3), il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geqslant k_0$, on a

$$\int_X f_N\, d\mu - \int_X f_N\, d\mu_k \leqslant \varepsilon,$$

ce qui implique que

$$0 \leqslant \int_X f\, d\mu - \int_X f\, d\mu_k \leqslant 2\varepsilon.$$

Ceci donne le résultat.

d) *En utilisant (b), vérifier que si $f \in L^1(\mu)$, alors pour tout $k \geqslant 1$, on a $f \in L^1(\mu_k)$ et en déduire que*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f\, d\mu_k = \int_X f\, d\mu.$$

Soit $f \in L^1(\mu)$. Alors bien évidemment f est mesurable et on a $\int_X |f|\, d\mu < +\infty$. La question b) implique alors que, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\int_X |f|\, d\mu_k \leqslant \int_X |f|\, d\mu < +\infty.$$

Ceci prouve que $f \in L^1(\mu_k)$. Considérons maintenant $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$. Alors on sait que f_+, f_- sont dans $L^1(\mu)$ et dans $L^1(\mu_k)$. De plus, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\int_X f\, d\mu_k = \int_X f_+\, d\mu_k - \int_X f_-\, d\mu_k.$$

D'après la question précédente (appliquée à $f_+, f_- : X \longrightarrow [0, +\infty]$), on en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f\, d\mu_k = \int_X f_+\, d\mu - \int_X f_-\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Exercice 2

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ telle que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$.

a) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \cos(xt)$ est intégrable par rapport à μ sur $\mathbb{R}_+$.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \cos(xt)$ est continue, donc mesurable (par rapport à la tribu borélienne). D'autre part, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\cos(xt)|\, d\mu(t) \leqslant \int_{\mathbb{R}_+} d\mu(t) = \mu(\mathbb{R}_+) = 1.$$

Ainsi, la fonction $t \longmapsto \cos(xt)$ est intégrable par rapport à μ sur $\mathbb{R}_+$.

On pose alors

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt)\, d\mu(t), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b) *Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.* Remarquons que

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \longmapsto \cos(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \cos(xt)$ est continue donc mesurable sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|\cos(xt)| \leqslant 1,$$

et la fonction $t \longmapsto 1$ est dans $L^1(\mu)$ car $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres, vu en cours, s'applique et donne que F est continue sur $\mathbb{R}$.

c) *Soit G définie par $G(x) = \frac{1-F(x)}{x^2}$, $x \neq 0$. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, on a*

$$G(x) = \frac{1}{x^2} \int_{\mathbb{R}_+} \big(1 - \cos(xt)\big) d\mu(t).$$

En utilisant que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$, on a, pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{\mu(\mathbb{R}_+) - F(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\int_{\mathbb{R}_+} d\mu(t) - \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt)\, d\mu(t) \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \int_{\mathbb{R}_+} \big(1 - \cos(xt)\big) d\mu(t). \end{aligned}$$

d) *On suppose* **dans cette question** *que $\int_{\mathbb{R}_+} t^2 d\mu(t) < +\infty$. Montrer que la limite suivante*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - F(x)}{x^2} \tag{1}$$

existe et la calculer.

Indication: on pourra utiliser après l'avoir justifié l'inégalité $1-\cos(u) \leqslant \frac{u^2}{2}$.

Montrons d'abord l'inégalité $1-\cos(u) \leqslant \frac{u^2}{2}$. Par parité, on peut supposer que $u > 0$. Remarquons que la fonction $t \longmapsto \cos(t)$ est de classe C^2 sur $[0, u]$. Ainsi d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0, u[$ tel que

$$\cos(u) = \cos(0) + \cos'(0)u + \frac{u^2}{2}\cos''(c).$$

Or $\cos(0) = 1$, $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$ et $|\cos''(c)| = |\cos(c)| \leqslant 1$. Ainsi, on obtient que

$$0 \leqslant 1-\cos(u) = |1-\cos(u)| = \frac{u^2}{2}|\cos''(c)| \leqslant \frac{u^2}{2},$$

ce qui prouve l'inégalité désirée. Maintenant, d'après (c) on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-F(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1-\cos(xt)}{x^2}\, d\mu(t).$$

On va appliquer le théorème de convergence dominée. Remarquons que pour $t > 0$ fixé, on a

$$\cos(xt) = 1 - \frac{x^2t^2}{2} + o(x^2), \qquad x \to 0,$$

ainsi

$$\frac{1-\cos(xt)}{x^2} = \frac{t^2}{2} + o(1).$$

On en déduit que pour tout $t > 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(xt)}{x^2} = \frac{t^2}{2}.$$

C'est aussi trivialement vrai pour $t = 0$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(xt)}{x^2} = \frac{t^2}{2}. \tag{2}$$

D'autre part d'après l'inégalité $1-\cos(u) \leqslant u^2/2$, on a, pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \neq 0$,

$$0 \leqslant \frac{1-\cos(xt)}{x^2} \leqslant \frac{x^2t^2}{2x^2} = \frac{t^2}{2},$$

et la fonction $t \longmapsto \frac{t^2}{2}$ est dans $L^1(\mu)$ par hypothèse. Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique et donne que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-F(x)}{x^2} = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(xt)}{x^2}\, d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{t^2}{2}\, d\mu(t).$$

e) *On ne suppose plus que* $t \longmapsto t^2$ *est intégrable mais on suppose que la limite* (1) *existe et vaut* $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) *Montrer que* $t \longmapsto t^2$ *est intégrable par rapport à* μ *sur* $\mathbb{R}_+$.

Indication: on pourra utiliser le lemme de Fatou.

Pour tout $x \neq 0$, les fonctions $t \longmapsto \frac{1-\cos(xt)}{x^2}$ sont des fonctions mesurables (car continues) et positives sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, d'après (2), on a

$$\liminf_{x\to 0} \frac{1-\cos(xt)}{x^2} = \lim x \to 0 \frac{1-\cos(xt)}{x^2} = \frac{t^2}{2}$$

Ainsi, le lemme de Fatou et la question b) impliquent que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} t^2\,d\mu(t) \leqslant \liminf_{x\to 0}\int_{\mathbb{R}_+}\frac{1-\cos(xt)}{x^2}\,d\mu(t) = \liminf_{x\to 0}\frac{1-F(x)}{x^2}.$$

Mais par hypothèse, on a

$$\liminf_{x\to 0}\frac{1-F(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-F(x)}{x^2} = \ell,$$

ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^2\,d\mu(t) \leqslant 2\ell < +\infty.$$

Ainsi $t \longmapsto t^2$ est intégrable par rapport à μ.

(ii) *En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $A > 0$, on a $\mu([A,+\infty[) \leqslant \frac{C}{A^2}$.*

Notons $C = \|f\|_{L^1(\mu)}$, où $f : t \longmapsto t^2$. Remarquons, d'après la question précédente, que $C < \infty$. De plus, pour tout $t \in [A,\infty[$, on a $A^2 \leqslant t^2$ et donc $A^2\mathbf{1}_{[A,+\infty[} \leqslant f$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$A^2\mu([A,+\infty[) = \int_{\mathbb{R}_+} A^2\mathbf{1}_{[A,+\infty[}\,d\mu \leqslant \int_{\mathbb{R}_+} f\,d\mu = C.$$

On obtient alors l'inégalité demandée en multipliant par A^2.

Exercice 3

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et supposons que $\mu(X) < +\infty$. Soit $\varphi \in L^\infty = L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$, $\varphi \not\equiv 0$. On définit, pour $f \in L^1 = L^1(X,\mathcal{A},\mu)$,

$$T_\varphi(f) = \int_X f\varphi\,d\mu.$$

On supposera ici que toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles et que les espaces L^p considérés sont vus comme des espaces vectoriels réels.

a) *Montrer que T_φ définit une forme linéaire et continue sur L^1 et vérifier que $\|T_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$. On rappelle ici que $\|T_\varphi\|$ désigne la norme de T_φ en tant qu'application linéaire de L^1 dans $\mathbb{R}$, i.e.*

$$\|T_\varphi\| = \sup_{\substack{f\in L^1\\ \|f\|_1\leqslant 1}}\frac{|T_\varphi(f)|}{\|f\|_1}.$$

Soit $\varphi \in L^\infty$. Alors

$$|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty, \qquad \text{pour presque tout } x \in X.$$

Si $f \in L^1$, on a alors

$$|\varphi(x)f(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty|f(x)|, \qquad \text{pour presque tout } x \in X,$$

et donc en intégrant par rapport à μ, on en déduit que

$$\int_X |\varphi(x)f(x)|\,d\mu(x) \leqslant \|\varphi\|_\infty\int_X |f(x)|\,d\mu(x) = \|\varphi\|_\infty\|f\|_1 < \infty.$$

Ainsi, la fonction $\varphi f \in L^1$ et donc $T_\varphi(f) \in \mathbb{R}$. On vérifie par linéarité de l'intégrale que T_φ est linéaire. Enfin, si $f \in L^1$, le calcul précédent montre que

$$|T_\varphi(f)| = \left|\int_X \varphi f\right| d\mu \leqslant \int_X |f\varphi|\, d\mu \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_1.$$

Ceci prouve que T_φ est continue et que $\|T_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$.

b) *Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \|\varphi\|_\infty$ et définissons $A = \{x \in X : |\varphi(x)| \geqslant \|\varphi\|_\infty - \varepsilon\}$.*

(i) *Justifier que $\mu(A) > 0$.*

Supposons par l'absurde que $\mu(A) = 0$. Alors, pour presque tout $x \in X$, on a $|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$. On en déduit alors par définition de $\|\cdot\|_\infty$ que $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|\varepsilon\|_\infty - \varepsilon$, ce qui est absurde. Ainsi, on obtient que $\mu(A) > 0$.

(ii) *Soit $f = \frac{\varphi}{|\varphi|}\mathbf{1}_A$. Vérifier que $f \in L^1$ en calculant $\|f\|_1$ et montrer que*

$$|T_\varphi(f)| \geqslant (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)\mu(A).$$

La fonction φ étant mesurable, l'ensemble $A \in \mathcal{A}$, et donc $\mathbf{1}_A$ est mesurable. Ainsi on en déduit que la fonction f est mesurable (remarquons que si $x \in A$, alors $|\varphi(x)| \geqslant \|\varphi\|_\infty - \varepsilon > 0$). De plus, on a

$$\int_X |f|\, d\mu = \int_X \mathbf{1}_A\, d\mu = \mu(A) \leqslant \mu(X) < \infty,$$

ce qui prouve que $f \in L^1$ et $\|f\|_1 = \mu(A)$. D'autre part, on a

$$|T_\varphi(f)| = \left|\int_X \frac{\varphi^2}{|\varphi|}\mathbf{1}_A\, d\mu\right| = \int_X |\varphi|\mathbf{1}_A\, d\mu.$$

Or, par définition de A, on a $|\varphi|\mathbf{1}_A \geqslant (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)\mathbf{1}_A$. D'où, par croissance de l'intégrale, on a

$$|T_\varphi(f)| \geqslant \int_X (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)\mathbf{1}_A\, d\mu = (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)\mu(A).$$

(iii) *On note $(L^1)^*$ l'espace des formes linéaires et continues sur L^1. En déduire que l'application*

$$\begin{array}{cccc} \Theta : & L^\infty & \longrightarrow & (L^1)^* \\ & \varphi & \mapsto & T_\varphi \end{array}$$

est une application linéaire et isométrique (donc en particulier injective).

D'après la question a), l'application $\Theta : L^\infty \longrightarrow (L^1)^*$ est bien définie et $\|\Theta(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$. Il est clair que Θ est linéaire car si $\varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour toute fonction $f \in L^1$, on a

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda\varphi_1 + \varphi_2)(f) &= \int_X (\lambda\varphi_1 + \varphi_2) f\, d\mu \\ &= \int_X (\lambda\varphi_1 f + \varphi_2 f)\, d\mu \\ &= \lambda \int_X \varphi_1 f\, d\mu + \int_X \varphi_2 f\, d\mu \\ &= \lambda\Theta(\varphi_1)(f) + \Theta(\varphi_2)(f) \\ &= (\lambda\Theta(\varphi_1) + \Theta(\varphi_2))(f). \end{aligned}$$

Les égalités étant vraies pour toute fonction $f \in L^1$, on en déduit que $\Theta(\lambda\varphi 1_+\varphi_2) = \lambda\Theta(\varphi_1) + \Theta(\varphi_2)$, ce qui prouve la linéarité de Θ. Comme on a déjà vu que $\|\Theta(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$, pour montrer que Θ est une isométrie, il reste à montrer que $\|\Theta(\varphi)\| \geqslant \|\varphi\|_\infty$. Pour cela, on utilise la question précédente b)(ii) qui montre que

$$(\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)\mu(A) \leqslant |\Theta(\varphi)(f)| \leqslant \|\Theta(\varphi)\|\|f\|_1.$$

Or $\|f\|_1 = \mu(A)$ et $\mu(A) > 0$ d'après la question b)(i). D'où en simplifiant l'inégalité précédente par $\mu(A)$, on obtient que

$$\|\varphi\|_\infty - \varepsilon \leqslant \|\Theta(\varphi)\|.$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient, en faisant tendre ε vers 0, que $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|\Theta(\varphi)\|$. On peut donc conclure que $\|\Theta(\varphi)\| = \|\varphi\|_\infty$ et donc Θ est une isométrie.

c) *Soit $T \in (L^1)^*$. Supposons que T est positive dans le sens suivant : si $f \in L^1$ et $f \geqslant 0$ presque partout, alors $T(f) \geqslant 0$. Le but de cette question est de montrer qu'il existe $\varphi \in L^\infty$ telle que $T = T_\varphi$.*

(i) *Pour $A \in \mathcal{A}$, posons $\nu(A) = T(\mathbf{1}_A)$. En utilisant la linéarité et la continuité de T, montrer que ν est une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$.*

Remarquons que si $A \in \mathcal{A}$, alors $\mathbf{1}_A \in L^1$ (car $\mu(A) < \infty$) et $\mathbf{1}_A \geqslant 0$. Ainsi, par hypothèse, on en déduit que $\nu(A) = T(\mathbf{1}_A) \geqslant 0$. Ainsi l'application $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty[$ est bien définie. De plus, avec la continuité de T, on a $\nu(X) = T(\mathbf{1}_X) \leqslant \|T\|\|\mathbf{1}_X\|_1 = \|T\|\mu(X) < \infty$. Remarquons d'autre part que $\mathbf{1}_\varnothing(x) = 0$, pour tout $x \in X$, et donc $\nu(\varnothing) = T(0) = 0$ (car T est linéaire). Enfin, si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, deux à deux disjoints, et si on pose $A = \bigcup_{n\geqslant 0} A_n$, remarquons que

$$\lim_{N\to+\infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} \mathbf{1}_{A_n} - \mathbf{1}_A \right\|_1 = 0. \tag{1}$$

En effet, pour tout $x \notin A$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \mathbf{1}_{A_n}(x) - \mathbf{1}_A(x) = 0$$

et si $x \in A$, alors il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que $x \in A_{n_0}$ et donc pour tout $N \geqslant n_0$, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{N} \mathbf{1}_{A_n}(x) - \mathbf{1}_A(x) = 1 - 1 = 0.$$

Donc finalement, on a pour tout $x \in X$,

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \mathbf{1}_{A_n}(x) - \mathbf{1}_A(x) \right) = 0.$$

De plus, en utilisant que les ensembles (A_n) sont deux à deux disjoints, on a pour tout $x \in X$,

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \mathbf{1}_{A_n}(x) - \mathbf{1}_A(x) \right| \leqslant 1$$

et $1 \in L^1(\mu)$ car $\mu(X) < +\infty$. Le théorème de convergence dominée implique alors (1). D'où par continuité de T, on a

$$\nu(A) = T(\mathbf{1}_A) = T\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\mathbf{1}_{A_n}\right) = \lim_{N\to+\infty} T\left(\sum_{n=0}^{N}\mathbf{1}_{A_n}\right).$$

Puis on utilise la linéarité de T pour en déduire que

$$\nu(A) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} T(\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{n=0}^{\infty}\nu(A_n).$$

Ceci prouve que ν est une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$.

(ii) *Montrer qu'il existe une fonction g mesurable positive telle, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a*

$$T(\mathbf{1}_A) = \int_X g\mathbf{1}_A \, d\mu.$$

Indication: on pourra utiliser (sans le démontrer) le théorème de Radon-Nikodym vu en TD dont on rappelle l'énoncé : si μ et ν sont deux mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que si, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$, alors il existe une fonction g mesurable positive telle, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\nu(A) = \int_X g\mathbf{1}_A \, d\mu$.

Soit $A \in \mathcal{A}$ et supposons que $\mu(A) = 0$. Alors $\mathbf{1}_A = 0$ μ-presque partout et donc $T(\mathbf{1}_A) = 0$. D'où, on en déduit que $\nu(A) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Radon–Nikodym qui implique qu'il existe une fonction g mesurable positive sur X telle que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$T(\mathbf{1}_A) = \nu(A) = \int_X g\mathbf{1}_A \, d\mu.$$

(iii) *Montrer que nécessairement, $g \in L^\infty$ avec $\|g\|_\infty \leqslant \|T\|$.*

Soit $\varepsilon > 0$ et $A = \{x \in X : g(x) \geqslant \|T\| + \varepsilon\}$. La fonction g étant mesurable, on a $A \in \mathcal{A}$. D'où

$$(\|T\| + \varepsilon)\mu(A) \leqslant \int_X g\mathbf{1}_A \, d\mu = T(\mathbf{1}_A).$$

Par continuité de T, on en déduit donc que

$$(\|T\| + \varepsilon)\mu(A) \leqslant \|T\|\|\mathbf{1}_A\|_1 = \|T\|\mu(A).$$

Si $\mu(A) > 0$, l'inégalité précédente donne une contradiction. Ainsi, on en déduit que $\mu(A) = 0$. Ainsi, pour tout $M > \|T\|$, on a $\mu(\{x \in X : |g(x)| \geqslant M\}) = 0$. Ceci implique que $g \in L^\infty$ et que $\|g\|_\infty \leqslant \|T\|$.

(iv) *Conclure finalement que $T = T_g$, i.e. pour tout $f \in L^1$, $T(f) = \int_X fg \; d\mu$.* D'après c)(iii), comme $g \in L^\infty$, on a $T_g = \Theta(g) \in (L^1)^*$ et d'après c)(ii), on a

$$T(\mathbf{1}_A) = \int_X g\mathbf{1}_A \, d\mu = T_g(\mathbf{1}_A).$$

Par linéarité, on en déduit donc que pour toute fonction f étagée positive, on a $T(f) = T_g(f)$. Maintenant si $f \in L^1$, $f \geqslant 0$, alors d'après le lemme d'approximation, il existe une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f. En utilisant le théorème de Beppo-Levi, on remarque que $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Donc par continuité de T et T_g, on en déduit que $T(f) = T_g(f)$. Finalement il reste à utiliser que si $f \in L^1$, alors on peut écrire $f = f_+ - f_-$ avec $f_+, f_- \in L^1$ et f_+, f_- positive. D'où

$$T(f) = T(f_+ - f_-) = T(f_+) - T(f_-) = T_g(f_+) - T_g(f_-) = T_g(f_+ - f_-) = T_g(f).$$

Barème indicatif :

Exercice 1 (6 pts) : (a) 2 pt (b) 2 pts (c) 1 pt (d) 1 pt.

Exercice 2 (8 pts) : (a) 1 pt (b) 1 pt (c) 0,5 pt d) 2,5 pts (e) (i) 2 pts (ii) 1 pt.

Exercice 3 (9 pts) : (a) 1 pt (b) (i) 1 pt (ii) 1 pt (iii) 1,5 pts (c) (i) 1,5 pts (ii) 1 pt (iii) 1 pt (iv) 1 pt.