Inégalités, bornes supérieures et inférieures.

1 Quelques inégalités classiques

Exercice 1 (Inégalités de Cauchy–Schwarz et de Minkowski) On se donne un entier $n \geq 2$ et on désigne par φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

et on associe à cette fonction φ la fonction q définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \varphi(x,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

(a) Exprimer, pour tout réel t et tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^n$, la quantité $q(x+ty)$ en fonction de t, $\varphi(x,y)$, $q(x)$ et $q(y)$.

(b) Rappeler à quelle condition portant sur les réels a, b, c, le réel a étant non nul, le polynôme de degré 2, $P(t) = at^2 + 2bt + c$ est à valeurs positives ou nulles.

(c) En remarquant que pour x, y fixés dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction $P : t \mapsto q(x+ty)$ est polynômiale de degré 2, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Préciser dans quels cas, l'égalité est réalisée.

(d) En déduire l'inégalité de Minkowski suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Préciser dans quels cas, l'égalité est réalisée.

Exercice 2 (Inégalités de Hölder et de Minkowski) Soit $n \geq 2$ et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels strictement positifs. Pour $1 < p < \infty$, on note q son exposant conjugué, c'est-à-dire l'unique réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Notons
$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$
Supposons que $A \neq 0$, $B \neq 0$ et, pour chaque $1 \leq i \leq n$, notons $\tilde{a}_i = a_i/A$ et $\tilde{b}_i = b_i/B$. Montrer que
$$\tilde{a}_i\tilde{b}_i \leq \frac{1}{p}\tilde{a}_i^p + \frac{1}{q}\tilde{b}_i^q.$$
Indication : *on pourra considérer les deux réels s, t tels que $\tilde{a}_i = \exp(s/p)$ et $\tilde{b}_i = \exp(t/q)$ et utiliser la convexité de la fonction exponentielle.*

(b) En déduire l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$
Pour $p = q = 2$, quelle inégalité retrouve-t-on ?

(c) En déduire l'inégalité de Minkowski :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$
Indication : *on pourra écrire $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$ et appliquer l'inégalité de Hölder.*

Exercice 3 On se donne un entier $n \geq 1$ et des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tous non nuls.

(a) Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}\right) \geq n^2.$$
Indication : *on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

(b) En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 4 (Inégalité de Bernouilli) (a) Pour $n \geq 2$, on note P_n la fonction polynômiale définie par
$$P_n(x) = x^n - 1 - n(x - 1).$$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $P_n(x) \geq 0$.
Indication : *on pourra soit raisonner par récurrence, soit faire une étude de fonctions.*

(b) En déduire que pour tout réel $a > -1$ et tout entier naturel n, on a

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

(c) Dans le cas où $a \geq 0$, retrouver cette inégalité, en utilisant la formule du binôme de Newton.

Exercice 5 (Moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques.) Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on note respectivement

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad G_n(x) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}, \quad H_n(x) = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}},$$

les moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(a) Etablir une relation entre $H_n(x)$ et $A_n(y)$ où $y = (1/x_k)_{1 \leq k \leq n}$.

(b) En utilisant la stricte concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que $G_n(x) \leq A_n(x)$. Dans quels cas, a-t-on égalité ?

(c) En déduire finalement que

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Montrer que l'une des deux inégalités est réalisée si et seulement si tous les x_i sont égaux.

2 Bornes supérieures et inférieures

Exercice 6 (a) Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Rappeler les définitions suivantes :

(i) majorants/minorants de X.

(ii) borne supérieure/borne inférieure de X.

(iii) plus grand/plus petit élément (ou maximum/minimum) de X.

(b) Déterminer s'ils existent la borne supérieure et le maximum de X dans les cas suivants :

(i) $X = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $X = [0, 1[\cap \mathbb{Q}$.

(iii) $X = \{(-1)^n + 1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

(c) Même question avec la borne inférieure et le minimum.

Exercice 7 Montrer que pour tous réels a et b, on a

$$\max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|b-a|}{2} \quad \text{et} \quad \min(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|b-a|}{2}.$$

En déduire que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont aussi continues sur I.

Exercice 8 Soient A, B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que

(i) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

(ii) $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)$.

(iii) Si $A \subset B$, alors $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 9 Soient A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

Montrer que $A + B$ est majorée et

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Exercice 10 Montrer que si A est une partie fermée, non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors $\sup(A) \in A$.

Exercice 11 (Existence de la racine carrée) En n'utilisant que le théorème de la borne supérieure et inférieure, montrer l'existence et l'unicité d'une racine carrée dans $\mathbb{R}_+$.

Indication : *poser* $A := \{y \in \mathbb{R}_+ : y^2 \leq x\}$ *et* $B := \{y \in \mathbb{R}_+ : y^2 \geq x\}$. *En justifiant leur existence, on considérera alors* $M = \sup A$ *et* $m = \inf B$ *et on montrera que* $M^2 = m^2 = x$.

Exercice 12 (Une utilisation de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) On désigne par f une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; f(x+y) = f(x) + f(y).$$

(a) Montrer que f est impaire.

(b) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a $f(na) = nf(a)$.

(c) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(ra) = rf(a)$.

(d) Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$, pour tout réel x.
Indication : *étant donné un réel x, on considéra deux suites de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers x avec $r_n < x < s_n$, pour tout n.*

(e) Montrer que l'identité est l'unique fonction non identiquement nulle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$, pour tous réels x, y.
Indication : *on montrera que $f(1) = 1$, que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et que f est croissante.*

Suites numériques.

---

1 Suites de Cauchy

Exercice 1 (Une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ non convergente) (a) Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $|r_{n+1} - r_n| \le \lambda^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où λ est un réel strictement compris entre 0 et 1. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Indication : *on pourra écrire, pour $m > n$, $r_m - r_n = \sum_{k=n}^{m-1}(r_{k+1} - r_k)$.*

(b) Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $r_0 = 2$ et $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$, $n \ge 0$. Montrer que $(r_n)_{n\ge 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Conclusion ?

Exercice 2 (Irrationalité de e) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(a) Montrer que, pour tout $m > n > 2$, on a

$$|r_m - r_n| \le \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right).$$

(b) En déduire que, pour tout $m > n > 2$, on a

$$0 < r_m - r_n \le \frac{1}{2n!}.$$

Indication : *on pourra utiliser que, pour $n \ge 2$, on a $\frac{n+2}{(n+1)^2} \le \frac{1}{2}$.*

(c) En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc qu'elle converge dans $\mathbb{R}$. On notera e sa limite.

(d) Supposons que $e \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe p, q deux entiers premiers entre eux (strictement positifs) tels que $e = p/q$.

  (i) Montrer que pour tout $n > q$, le nombre $p_n = n!(e - r_n)$ est un entier strictement positif.

  (ii) Montrer que $0 < p_n < 1$.
  Indication : *on pourra écrire que $p_n = \lim_{m\to+\infty}(n!(r_m - r_n))$.*

(e) Conclure que e est irrationnel.

Exercice 3 Pour tout nombre complexe z et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$u_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \quad \text{et} \quad v_n(z) := \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}.$$

(i) Montrer que, pour tout nombre complexe z, la suite $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. La limite de cette suite est (par définition) l'exponentielle complexe de z, notée $\exp(z)$.

(ii) Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, la suite $(v_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2 Valeurs d'adhérence

On rappelle qu'un réel ℓ est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ. Rappelons le

Théorème 2.1 (Bolzano–Weierstrass) *De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente. Autrement dit, toute suite bornée de nombres réels possède (au moins) une valeur d'adhérence.*

Exercice 4 Montrer que si

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell_2,$$

alors les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont ℓ_1 et ℓ_2.

Exercice 5 Calculer les valeurs d'adhérence de

$$u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 6 Soit $u_n := n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) En considérant u_{2n+1}, montrer que 0 est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Soit ℓ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\ell = 0$.
Indication : *on pourra raisonner par l'absurde et considérer* $\ln(u_{\varphi(n)})$.

(iii) En déduire que 0 est l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iv) Peut-on conclure à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Indication : *considérer* u_{2n}.

Exercice 7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe telles que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. A quelle condition la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 8 Montrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe telle que les trois suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, alors u est convergente.

Exercice 9 Le but de l'exercice est de montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(ii) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.

(a) Montrer que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

(b) On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et admet ℓ pour seule valeur d'adhérence. On suppose de plus que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ.

(b1) Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$|u_{\varphi(n)} - \ell| \geq \varepsilon, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(b2) En utilisant le théorème de Bolzano–Weierstrass, conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une deuxième valeur d'adhérence, distincte de ℓ.

(b3) En déduire que $(ii) \Longrightarrow (i)$.

3 Suites monotones

Exercice 10 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n), \qquad n \geq 1.$$

(i) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
Indication : *on pourra calculer l'intégrale*

$$\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt,$$

et l'exprimer en fonction de $u_{n+1} - u_n$.

(ii) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0.
Indication : *on montrera d'abord que, pour tout* $k \geq 1$, *on a*

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k},$$

puis que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log(n+1).$$

(iii) En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On note γ sa limite qui s'appelle *la constante d'Euler*.

Exercice 11 On désigne par $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites respectivement définies par

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n) \quad \text{et} \quad v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

(i) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $v_{2n}=u_{2n}-u_n+\log(2)$.

(ii) En utilisant l'exercice 10, montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_{2n}=\log(2)$, et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\log(2).$$

4 Suites adjacentes

Exercice 12 Soient

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n=u_n+\frac{1}{n!}.$$

(i) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(ii) Conclure que les deux suites sont adjacentes.

(iii) Soit e la limite commune de ces deux suites. En calculant u_{10} et v_{10}, donner une valeur approchée de e, en précisant l'erreur d'approximation.

Exercice 13 Montrer que les suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n), \quad \text{et} \quad v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n+1),$$

convergent vers la même limite γ.

Indication : *on pourra utiliser et s'inspirer de l'exercice 10.*

Exercice 14 Soient $0<a<b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0=a$, $v_0=b$ et

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}} & \text{(moyenne harmonique)}\\ v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} & \text{(moyenne arithmétique).}\end{cases}$$

Le but de l'exercice est de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, de limite $\sqrt{ab}$.

(i) Montrer, par récurrence que $u_n>0$ et $v_n>0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(ii) Montrer que $u_n - v_n \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(iii) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(iv) Vérifier, par récurrence que

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{b-a}{2^n},$$

et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes.

(v) Montrer qu'elles convergent vers $\sqrt{ab}$.

(vi) Donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

Exercice 15 Le but de l'exercice est de donner une démonstration de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$. On raisonne par l'absurde, en supposant que $[0,1]$ est dénombrable. Autrement dit, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$.

(i) Construire, par récurrence une suite de segments emboîtés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n ne contient pas $\varphi(n)$ et I_n est de longueur $3^{-(n+1)}$.

(ii) En déduire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\},$$

et $x \neq \varphi(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Conclure que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

5 Le théorème de Césaro

Exercice 16 (Le théorème de Césaro) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (ou complexe) qui converge vers un nombre réel (ou complexe) ℓ. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k, \qquad n \geq 1.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\geq 1}$ converge aussi vers ℓ (on dit dans ce cas que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers ℓ). Que pensez-vous de la réciproque ?
Indication : *pour la réciproque, on pourra étudier la suite* $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$.

Exercice 17 Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe telle que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$

Indication : *on pourra calculer* $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$ *et appliquer le théorème de Césaro.*

Exercice 18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique convergente au sens de Césaro vers ℓ. Supposons de plus que $\lim_{n\to+\infty}(n(u_n - u_{n-1})) = 0$. Montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Indication : *on montrera que*

$$\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = nu_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k,$$

et on appliquera le théorème de Césaro à la suite $(n(u_n - u_{n-1}))_{n\geq 1}$.

6 Développements asymptotiques.

Exercice 19 (La constante d'Euler) On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad w_n = u_n - \ln n.$$

On rappelle que dans l'exercice 10, on a montré que $(w_n)_{n\geq 1}$ converge vers une constante notée γ et qui s'appelle la constante d'Euler. Le but de cet exercice est de retrouver ce résultat en utilisant les développements limités puis de donner un développement asymptotique de u_n, permettant par la même d'en déduire une approximation de γ.

(a) Trouver un équivalent de $w_{n+1} - w_n$ et montrer que la série $\sum_n (w_{n+1} - w_n)$ converge. En déduire que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ converge.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose
$$z_n = w_n - \gamma - \frac{\alpha}{n}.$$
Trouver un équivalent de $z_{n+1} - z_n$, puis déterminer α de manière que
$$z_{n+1} - z_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(c) Supposons que $\varepsilon = O\left(\frac{1}{n^d}\right)$, avec $d \geq 2$. Montrer que l'on a
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_k = O\left(\frac{1}{n^{d-1}}\right).$$

(d) Vérifier que $-z_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(z_{k+1} - z_k)$. Appliquer la question précédente avec $\varepsilon_n = z_{n+1} - z_n$ et $d = 3$ afin d'en déduire que $z_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(e) Soit $\beta \in \mathbb{R}$, on pose

$$t_n = z_n + \frac{\beta}{n^2}.$$

Déterminer β de manière que $t_{n+1} - t_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 20 (a) Montrer que $\tan x = x$ a une unique solution x_n dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$.

(b) Vérifier que $x_n \sim n\pi$.

(c) Vérifier que $x_n = n\pi + \arctan x_n$ et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n - n\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

(d) On pose $y_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Injecter dans $\sin x_n = x_n \cos x_n$ et en déduire un équivalent de y_n de la forme $\frac{\alpha}{n}$.

(e) On pose $z_n = y_n - \frac{\alpha}{n}$. Injecter dans l'égalité et en déduire un équivalent de z_n. Donner un développement asymptotique de x_n.

Université Claude Bernard Lyon 1 **Master 1 EADM**
Préparation Epreuve d'analyse **Année 2011-12**

Théorème de Rolle et formules de Taylor.

Exercice 1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes [1] :

(i) la fonction f est injective ;

(ii) la fonction f est strictement monotone.

Indication : *on pourra considérer l'ensemble*

$$K = \left\{(x, y) \in I^2 : x < y\right\}$$

et $g : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $g(x, y) = (x - y)(f(x) - f(y))$.

Exercice 2 (Théorème de Darboux) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Le but de l'exercice [2] est de montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

(a) Montrer $f'(I)$ est un intervalle si et seulement si pour tous éléments a et b de I et pour tout réel λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe un réel $c \in I$ tel que $f'(c) = \lambda$.

(b) On fixe maintenant a et b deux éléments de I tels que $a < b$ et soit λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On veut montrer qu'il existe un réel $c \in I$ tel que $f'(c) = \lambda$.

  (i) Montrer qu'on peut supposer que $f'(a) \neq f'(b)$.

  (ii) On définit alors $g(x) = f(x) - \lambda x$. Montrer que g n'est pas monotone sur $[a, b]$ et en déduire que g n'est pas injective.

  (iii) En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

  (iv) Conclure.

Exercice 3 (Inégalités de Kolmogorov) Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, positive, telle que f'' soit majorée par $M \geq 0$. Avec la formule de Taylor–Lagrange, montrer que pour tout $x, \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) + \lambda f'(x) + M\frac{\lambda^2}{2} \geq 0.$$

En déduire que

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2f(x)M}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

---

1. On trouvera d'autres démonstrations dans J.E. Rombaldi, page 61
2. On trouvera deux autres méthodes dans X. Gourdon, page 47 et 78.

Exercice 4 (Théorème de Bernstein) Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur $]-a, a[$. On suppose que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in]-a, a[$, on a

$$f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est développable en série entière sur $]-a, a[$.

(a) Montrer qu'il suffit de prouver que, pour tout $b \in]0, a[$, la fonction f est développable en série entière sur $]-b, b[$. Fixons maintenant $b \in]0, a[$.

(b) Soit $F(x) := f(x) + f(-x)$, $x \in [0, b]$, et

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)\, dt.$$

(i) Montrer que $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} F(b)$ pour tout $x \in [0, b]$.

(ii) En déduire que, pour tout $x \in]-b, b[$, on a

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}.$$

(iii) Soit

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t)\, dt.$$

Montrer que $|r_n(x)| \leq R_n(|x|)$.

(iv) Soit $p \in \mathbb{N}$ et

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p.$$

Montrer que, pour tout $x \in]-b, b[$, on a $\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1}(x) = f(x)$.

(v) Montrer que pour tout $x \in]-b, b[$, on a $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = f(x)$ et en déduire que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad (x \in]-b, b[).$$

Exercice 5 (La méthode du col) Soit $b > 0$ et $\varphi : [0, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0,\ \varphi''(0) > 0 \quad \text{et pour tout } t \in]0, b],\ \varphi(t) > 0.$$

Le but de l'exercice est d'obtenir un équivalent de

$$\int_0^b e^{-x\varphi(t)}\, dt$$

lorsque $x \to +\infty$. On fixe $\varepsilon \in]0, 1[$.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\sqrt{1-\varepsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \leq \sqrt{1+\varepsilon}.$$

On choisit désormais α vérifiant cette relation.

(b) Montrer qu'il existe $\beta \in]0,b[$ tel que

$$\forall t \in [0,\beta[, \quad \frac{1-\alpha^2}{2}\varphi''(0)t^2 \leq \varphi(t) \leq \frac{1+\alpha^2}{2}\varphi''(0)t^2.$$

(c) On pose

$$H(c) = \sqrt{c}\int_0^\beta e^{-t^2 c}\,dt.$$

Calculer $\lim_{c\to+\infty} H(c)$.

(d) Montrer que l'on a

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}\varphi''(0)}} H\left(\frac{1+\alpha}{2}\varphi''(0)x\right) \leq \sqrt{x}\int_0^\beta e^{-x\varphi(t)}\,dt \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}\varphi''(0)}} H\left(\frac{1-\alpha}{2}\varphi''(0)x\right).$$

(e) Montrer qu'il existe $X > 0$ tel que pour tout $x \geq X$, on a

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(0)}}\,(1-\varepsilon) \leq \sqrt{x}\int_0^\beta e^{-x\varphi(t)}\,dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(0)}}\,(1+\varepsilon).$$

(f) Montrer enfin que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\int_0^\beta e^{-x\varphi(t)}\,dt = 0.$$

(g) Conclure que

$$\int_0^b e^{-x\varphi(t)}\,dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(0)}}\frac{1}{\sqrt{x}},\ x \to +\infty.$$

Séries numériques.

Exercice 1 Prouver la convergence et calculer les sommes des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-n}{n(n+1)(n+3)}, \ \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \ \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right).$$

Exercice 2 En utilisant l'identité $\dfrac{1}{3n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{3n}\, dt$ montrez que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

est convergente et calculer sa somme.

Exercice 3

1. Expliciter la dérivée d'ordre n de la fonction logarithme. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à cette fonction, montrez que la série harmonique alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \cdots$$

est convergente de somme $\ln 2$.

2. Retrouvez ce résultat en écrivant $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\, dt$.

Exercice 4 En utilisant l'identité $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, et en admettant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$, montrez que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$$

est convergente, et calculez sa somme.

Indication : on pourra décomposer $\dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}$ en éléments simples.

Exercice 5 Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives telles que, pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que

1. Si $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge.
2. Si $\sum_n u_n$ diverge, alors $\sum_n v_n$ diverge.

Application : on considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \cdots \times (2n)} \qquad (u_0 = 1).$$

Le critère de d'Alembert permet-il de déterminer la nature de cette série ? Quel est le développement limité à l'ordre 2 selon les puissances de $1/n$ du rapport u_{n+1}/u_n lorsque n tend vers l'infini ? En considérant $v_n = n^{-\alpha}$ pour une valeur de α bien choisie, en déduire la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 6 En utilisant les divers critères de convergence préciser la nature des séries dont le terme général u_n est donné par l'une des expressions suivantes :

$\dfrac{1}{\ln n}$	$\dfrac{1}{(\ln n)^{(\ln n)}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
$\dfrac{(\ln n)^n}{n!}$	$\dfrac{1}{n^{2-\cos\frac{1}{n}}}$	$\dfrac{\sqrt{n(n-1)}}{n^2 - 2\sqrt{n} + 3\ln n}$
$\dfrac{\sin(n)}{n(n+1)}$	$\displaystyle\int_0^1 (1-\sqrt{t})^n \delta t$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+\sqrt{t}} \delta t$
$u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$	$\dfrac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln n + 5^n}$	$e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
$\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-1}$	$\dfrac{(n+1)!}{1.4.\ldots(3n+1)} a^n$	$\dfrac{n!}{n^n}$
$\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2}\right) a^n$	$\left(\dfrac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$	$\mathrm{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{n}\right)$
$\mathrm{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{n}\right)$	$\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{2n\ln n}$	$u_n = n \log n e^{-\sqrt{n}}$
$\dfrac{2.4.6\ldots 2n}{n^n}$	$\dfrac{\ln 2 + \ln 3 + \cdots \ln n}{n^\alpha}$	$\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1/2}}$

Exercice 7 Soit $S_n = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} + \cdots + \dfrac{\ln n}{n}$.

1. Donner un équivalent de S_n lorsque $n \to +\infty$.

2. Montrer que la suite de terme général : $T_n = S_n - \dfrac{\ln^2 n}{2}$ est convergente.
3. Soit $\ell = \lim T_n$. Donner un équivalent de $T_n - \ell$.

Exercice 8 On donne une suite de réels strictement positifs (a_n), décroissante et de limite nulle. On se propose de montrer que la série de terme général $\dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ diverge.

1. Démontrer le résultat lorsque $a_{n+1} \not\sim a_n$ lorsque $n \to \infty$.
2. On suppose que $a_{n+1} \sim a_n$ lorsque $n \to \infty$. Montrer qu'il suffit de prouver la divergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})/a_{n+1}$.
3. Conclure en comparant la somme $\sum_{n=0}^{N} (a_n - a_{n+1})/a_{n+1}$ à une intégrale.

Exercice 9 Etudiez la convergence de la série

$$\sum_n \frac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n}.$$

Déduisez en que deux séries de termes généraux équivalents ne sont pas nécessairement de même nature.

Exercice 10 Discuter selon les valeurs de $\alpha > 0$ la convergence absolue et la convergence de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

Exercice 11 Etudier la convergence simple et absolue des séries

$\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n^3+1}}$

$\sum_n \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n}$

$\sum_n \dfrac{1}{(-1)^n n^2 + n + 1}$

$\sum_n \dfrac{n^2}{(1+i)^n}$

$\sum_{n=1} (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\sum_n \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

$\sum_n (-1)^n \left(\sqrt{1+n} - \sqrt{n}\right)$

$\sum_n n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \cos \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\sum_n \left(\dfrac{2n(1+i)+3}{3n-i}\right)^n$

$\sum_n (-1)^n \int_0^1 t^n f(t)\, dt \quad (f \in C^0([0,1]), \mathbb{R}).$

Exercice 12 Etudier la nature des séries

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos n}{n + \cos n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^{1/2} + \cos n}.$$

Université Claude Bernard Lyon 1 — **Master 1 EADM**
Préparation Epreuve d'analyse — **Année 2011-12**

Suites et séries de fonctions. Séries entières.

---

1 Suites de fonctions.

Exercice 1 Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) dans chacun des cas suivants :

1. $f_n(x) = e^x + \dfrac{\sin nx}{n + e^x}$
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \quad (n \geq 1)$.

Dans le deuxième cas étudier aussi la convergence uniforme sur un segment borné $[a\,,b]$.

Exercice 2 Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$

1. Sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$.
2. Sur l'intervalle $[a\,,+\infty[. \quad (a > 0)$

Exercice 3 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout segment borné $[a\,,b]$.
3. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[a\,,+\infty[$.
4. Calculer la limite, lorsque $n \to \infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Exercice 4 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^2 \sin\frac{1}{nx} \;\text{ si } x \neq 0 \quad \textit{et } f_n(0) = 0.$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Montrer qu'elle converge uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'elle n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = (x^3+1)\frac{ne^x + x^{-x}}{n+x}.$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Montrer que cette suite est uniformément convergente.
3. En déduire $\lim_{n\to\infty} I_n$ avec

$$I_n = \int_0^1 (x^3+1)\frac{ne^x + x^{-x}}{n+x}\,dx.$$

2 Séries de fonctions.

Exercice 6 Etudier la convergence simple, la convergence normale, et enfin la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$, sur $]1, +\infty[$ et sur $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.
2. $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$, sur $[0, +\infty[$ et sur $[0, a]$.
3. $u_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{n^2+x^2}$, sur $[0, +\infty[$.

Exercice 7

1. Soit $x \geq 0$. Démontrez que la série numérique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

est convergente si et seulement si $x > 1$.

2. Soit f la fonction définie sur $I =]1, +\infty[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$. Prouvez que f est de classe C^1 sur I.
3. Tracez la courbe représentative de f sur I.

Exercice 8 Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où

$$u_n(x) = \log\frac{n}{1+n} + \frac{1}{x+n}$$

converge sur $[0, +\infty[$ vers une fonction de classe C^1 dont la dérivée est < 0.

Exercice 9 Soit
$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in]n, n+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
Montrer que la série de fonctions $\sum_n u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais ne converge pas normalement.

Exercice 10 On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ pour $x \in [0\,, +\infty[$.

1. Etudier la convergence simple de cette série.
2. Montrer qu'elle n'est pas normalement convergente.
3. Donner un majorant du reste d'ordre n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$ et en déduire qu'elle est uniformément convergente.

Exercice 11 Soit (λ_n) une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim(\lambda_n) = +\infty$. On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$.

1. Etudier la convergence simple de cette série.
2. Pour tout $x > 0$ on note $S(x)$ la somme de cette série. Monter que $0 \leq S(x) \leq e^{-\lambda_0 x}$.
3. Soit $R_n(x) = \sum_{k>n} u_k(x)$ le reste d'ordre n de cette série. Montrer que pour $x > 0$ on a $|R_n(x)| \leq e^{-\lambda_{n+1} x}$. Quel est le signe de $R_n(x)$?
4. En déduire que pour tout $a > 0$ la série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ et que sa somme est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 12 Soit $\alpha > 0$ et (u_n) la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $u_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$.

1. Démontrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge simplement et calculer sa somme.
2. Démontrer que cette série converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
3. Etudier selon les valeurs de α la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 13 Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction que l'on notera f.
2. Majorer convenablement le reste de la série, et montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
3. Y a-t-il convergence normale ?

Exercice 14 On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+x^2}{n^2}.$$

1. Montrer qu'elle est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, quel que soit le réel x, la série numérique
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+x^2}{n^2}$$
n'est pas absolument convergente.
3. Montrer que la série de fonctions
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+x^2}{n^2}$$
converge uniformément sur tout compact.
4. Montrer que cette série n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 Soit $u_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{x^n}{1+x}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est simplement convergente.
2. Majorer le reste d'ordre $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$ par le théorème des séries alternées.
3. En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est uniformément convergente.

Exercice 16 Soit pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \cos nx}{n+1}$.

1. Prouver que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est simplement convergente.
2. Prouver que la convergence est uniforme sur tout compact contenu dans $]-\pi,\pi[$.

3 Séries entières.

Exercice 17 Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}z^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1.3\ldots(2n+1)}z^{2n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$$

Exercice 18 Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n} e^{-nx}$ converge pour tout réel x positif et calculer sa somme.

Exercice 19 On pose $a_n = 1 + 1/2 + 1/3 \ldots + 1/n$.

1. Rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$?
2. Soit $f(x)$ la somme de cette série. En utilisant la relation $a_n = a_{n-1} + 1/n$, montrer que $xf(x) - f(x)$ est la somme d'une série entière simple.
3. En déduire $f(x)$.

Exercice 20 (Vrai ou faux) Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence, autrement dit, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n$ est convergente.
3. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R, $0 < R < \infty$, qui ne converge en aucun des points de la frontière du disque de convergence.
5. Il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R, $0 < R < \infty$, qui converge en tous les points de la frontière du disque de convergence.
6. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients positifs ou nuls, qui n'est pas un ponynôme et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors pour tout $\alpha > 0$, $x^\alpha = o(f(x))$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 21 Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3n+2}$?

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3n+2}$ converge pour tout z satisfaisant $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$.
2. Montrer que, pour tout r satisfaisant $0 < r < 1$, la convergence est uniforme sur $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ |1 - z| \geq r\}$.

Exercice 22

1. Montrer que la fonction $\dfrac{\sin t}{t}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter ce développement.
2. Prouver que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}.$$

3. En déduire la valeur approchée

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1.8519\dots$$

Exercice 23 On considère l'équation différentielle

$$3xy' + (2-5x)y = x.$$

1. Montrer qu'elle admet une unique solution développable en série entière au voisinage de 0, $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, et que cette série entière est de rayon de convergence infini.
2. Expliciter les a_n.
3. On note $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$ les reste d'ordre n de la série entière de somme $y(x)$. Montrer que, lorsque $3n+8 > 5|x|$ on a

$$|R_n(x)| \leq a_{n+1}|x|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{5|x|}{3n+8}\right)^{k-n-1} \leq a_{n+1}|x|^{n+1} \frac{3n+8}{3n+8-5|x|}$$

4. **Application** : Calculer $y(1)$ à 2.10^{-5} près.

Exercice 24 Déterminer (a_n) de sorte que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit définie au voisinage de 0 et solution de l'équation différentielle

$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries obtenues. Remarquer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? Est-ce en contradiction avec les théorèmes généraux sur les équations différentielles linéaires ?

Exercice 25 Développement en série entière au voisinage de 0 de :

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} \qquad f(x) = \operatorname{ch}(x)\cos(x)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x} \qquad f(x) = \arctan(x+a) \quad (a>0)$$

$$f(x) = \log\left(1 - 2x\cos a + x^2\right) \qquad f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^p$$

Pour le (4) on posera $a + i = re^{i\alpha}$, $r > 0$. Pour le (6) on cherchera, au moyen de deux dérivations successives, une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par f.

Université Claude Bernard Lyon 1 — **Master 1 EADM**
Préparation Epreuve d'analyse — **Année 2011-12**

Séries de Fourier.

Exercice 1 On considère les fonctions 2π-périodiques $f\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, définies par

1. $f(x) = x$ si $x \in]-\pi, \pi[$ et $f(\pi) = 0$.
2. $f(x) = |\sin(x)|$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.
3. $f(x) = e^x$ si $x \in]-\pi, \pi]$.
4. $f(x) = \operatorname{ch} x$ si $x \in]-\pi, \pi]$.

Pour chacune d'entre elles, expliciter la série de Fourier, étudier la convergence simple et uniforme de cette série, et écrire l'identité de Parseval.

Exercice 2 Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ satisfaisant $f(0) = f(1)$ et $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. Soit g l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 1 qui prolonge f.

1. Quelle relation simple relie les coefficients de Fourier $c_n(g)$ et $c_n(g')$?
2. En déduire que
$$\int_0^1 (f'(t))^2\,dt \geq 4\,\pi^2 \int_0^1 (f(t))^2\,dt.$$
3. Que peut on dire de f lorsque cette inégalité est une égalité ?

Exercice 3

1. Montrer que la série trigonométrique
$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \sin nx$$
converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, 2π–périodique et continue, dont elle est la série de Fourier.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur chaque intervalle $](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4 1. (a) Montrer que la série trigonométrique
$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{int}$$
converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction 2π–périodique complexe f.

(b) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t)e^{it} = 0. \qquad (E)$$

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une solution 2π–périodique de classe C^2 de l'équation (E). On désigne par $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{int}$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g'')e^{int}$ les séries de Fourier respectives de g et g''.
   (a) Exprimer le coefficient de Fourier $c_n(g'')$ en fonction du coefficient de Fourier $c_n(g)$.
   (b) En utilisant l'équation (E), exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_{n-1}(g)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
   (c) En déduire que l'ensemble des solutions 2π–périodiques de (E) est l'espace vectoriel réel de dimension 1 engendré par la fonction f.

Exercice 5 (Décomposition de $\sin(x)$ **en produit infini.)** 1. Soit α un réel **non entier**. Montrer que la série de Fourier de la fonction f $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par $f(t) = \cos(\alpha t)$, pour $t \in [-\pi, \pi]$ est la série :

$$\frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}\left[1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nt.\right]$$

Etudier sa convergence simple, et uniforme.

2. Démontrer les égalités :

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$

$$\pi \cot \alpha\pi = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$$

3. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$ on a

$$\cot t = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$$

et que la série figurant au second membre est uniformément convergente sur tout intervalle $[-a, a]$ pour $0 < a < \pi$.

4. Démontrer que la fonction h définie sur $]-\pi, +\pi[$ par

$$h(t) = \ln \frac{\sin t}{t}$$

pour $t \neq 0$ et $h(0) = 0$ est développable en série entière de rayon de convergence π. Montrer que h est de classe C^1 avec $h'(0) = 0$ et $h'(t) = \mathrm{cotan}(t) - 1/t$ pour $t \neq 0$.

5. En déduire que, pour $x \in]-\pi, \pi[$, on a

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

Université Claude Bernard Lyon 1 **Master EADM (1ère année)**
Préparation Epreuve d'analyse **Année 2011-12**

Partiel du 18 avril 2012
Durée : 2h

Les documents ne sont pas autorisés. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

Soit $I =]\alpha, \beta[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, où $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur I. On suppose que $f(I) \subset I$ et on suppose qu'il existe un point $r \in I$ tel que $f(r) = r$ et $|f'(r)| < 1$. Un tel point est appelé un *point fixe attractif*. Le but de ce problème est de préciser le comportement des suites récurrentes associées à f.

I. Vitesse de convergence en un point attractif.

(a) Montrer qu'il existe une constante $0 < k < 1$ et un réel $\eta > 0$ tels que $V_\eta = [r - \eta, r + \eta] \subset I$ et pour tout $x \in V_\eta$, on a

$$|f(x) - r| \leq k|x - r|.$$

Dans toute la suite, on se donne une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 \in V_\eta \quad \text{et} \quad x_{n+1} = f(x_n),\ n \geq 0,$$

et on suppose que pour tout $n \geq 0$, $x_n \neq r$.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $x_n \in V_\eta$.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$|x_n - r| \leq k^n |x_0 - r|$$

et en déduire que la suite $(x_n)_n$ converge vers r.

(d) On suppose dans cette question que f est de classe C^2 et que $f'(r) \neq 0$.

(i) Montrer que pour tout $j \geq 0$, on a

$$x_{j+1} - r = f'(r)(x_j - r)(1 + R_j),$$

avec $R_j = O(k^j)$.

(ii) En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$x_n - r = (f'(r))^n (x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-1} (1 + R_j).$$

(iii) Montrer que la série $\sum_j \ln|1 + R_j|$ est convergente et en déduire que la suite de terme général $\prod_{j=0}^{n} (1 + R_j)$ est convergente et que sa limite est non nulle.

(iv) Conclure qu'il existe une constante $\omega(x_0)$, dépendant de la valeur initiale x_0 de la suite, telle que

$$x_n = r + \omega(x_0)(f'(r))^n + o((f'(r)^n)), \qquad n \to +\infty.$$

(e) On suppose dans cette question que f est de classe C^2, que $f'(r) = 0$ et que $f''(r) \neq 0$.

(i) Montrer que, pour tout $j \geq 0$, on a

$$x_{j+1} - r = \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2(1 + S_j),$$

avec $\lim\limits_{j\to+\infty} S_j = 0$.

(ii) En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^n} (1 + S_{n-1}).$$

(iii) Montrer que la suite de terme général $\prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$ est convergente et que sa limite est non nulle.

(iv) On pose $\pi_n = \lim\limits_{m\to+\infty} \prod\limits_{j=n-1}^{m} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$. Montrer que $2^n \ln(\pi_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En déduire qu'il existe une constante $\lambda(x_0) \in]0, 1[$, dépendant de la valeur initiale x_0 de la suite, telle que

$$x_n = r + \frac{2}{f''(r)}\lambda(x_0)^{2^n} + o(\lambda(x_0)^{2^n}), \qquad n \to +\infty.$$

II. Un exemple : les suites de Héron.

Un nombre réel $a > 0$ étant fixé, on associe à tout entier naturel $p \geq 2$, la fonction f_p définie sur $I =]0, +\infty[$ par

$$f_p(x) = \frac{1}{p}\left((p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}\right).$$

(a) Vérifier que la fonction f_p a un unique point fixe r que l'on déterminera et montrer que f_p satisfait aux hypothèses de la partie I, question (e).

(b) Montrer que, quelle que soit la valeur initiale $x_0 > 0$, la suite récurrente définie par

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \geq 0,$$

vérifie $x_n \geq a^{1/p}$, pour tout $n \geq 1$, et qu'elle converge vers $a^{1/p}$.

D'après la question I. (e) (iv), étant donnée une suite récurrente $(x_n)_{n\geq 0}$, non stationnaire, associée à f_p, on sait qu'il existe une constante $\lambda_p(x_0)$, dépendant de la valeur initiale de x_0 et de p, telle que $x_n - a^{1/p} \sim \frac{2}{f_p''(a^{1/p})}(\lambda_p(x_0))^{2^n}$, $n \to +\infty$.

(c) On suppose dans la suite que $p = 2$.

(i) Montrer qu'on peut écrire x_n sous la forme $\dfrac{u_n}{v_n}$, où u_n et v_n sont définis par $u_0 = x_0$, $v_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + av_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n. \end{cases}$$

(ii) Exprimer $u_n + \sqrt{a}\,v_n$ puis x_n en fonction de x_0, $\sqrt{a}$ et n.

(iii) En déduire la valeur de $\lambda_2(x_0)$.

Correction du partiel du 18 avril 2012.

I. Vitesse de convergence en un point attractif.

(a) Soit $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(r)| + \varepsilon < 1$. Comme f est dérivable sur I, il existe $\eta > 0$ tel que $V_\eta = [r - \eta, r + \eta] \subset I$ et pour $x \in V_\eta$, on a

$$\left| \frac{f(x) - f(r)}{x - r} - f'(r) \right| < \varepsilon.$$

D'où par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \frac{f(x) - f(r)}{x - r} \right| < \varepsilon + |f'(r)|.$$

Ainsi, le réel $k = \varepsilon + |f'(r)|$ répond à la question.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $x_n \in V_\eta$. Le cas $n = 0$ découle de l'hypothèse. Supposons que $x_n \in V_\eta$ pour un certain $n \geq 0$. Alors

$$|f(x_n) - r| \leq k|x_n - r| \leq k\eta \leq \eta,$$

car $0 < k < 1$. D'où $x_{n+1} = f(x_n) \in V_\eta$.

(c) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a

$$|x_n - r| \leq k^n |x_0 - r|. \qquad (1)$$

Le cas $n = 0$ est immédiat. Supposons que l'inégalité (1) soit vérifiée pour un certain $n \geq 0$. En utilisant (a) et (b), on a

$$|f(x_n) - f(r)| \leq k|x_n - r|.$$

D'où

$$|x_{n+1} - r| \leq kk^n |x_0 - r| = k^{n+1}|x_0 - r|,$$

ce qui prouve que l'inégalité (1) est vérifiée au rang $n+1$. Ainsi, par récurrence, on en déduit que

$$|x_n - r| \leq k^n |x_0 - r|, \qquad n \geq 0.$$

Comme $0 < k < 1$, on a $k^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc l'inégalité précédente implique que $x_n \to r$ lorsque $n \to +\infty$.

(d) (i) Soit $j \geq 0$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe un réel c_j strictement compris entre x_j et r tel que

$$f(x_j) = f(r) + f'(r)(x_j - r) + \frac{(x_j - r)^2}{2} f''(c_j).$$

D'où

$$\begin{aligned} x_{j+1} - r &= f'(r)(x_j - r) + \frac{(x_j - r)^2}{2} f''(c_j) \\ &= f'(r)(x_j - r) \left(1 + \frac{(x_j - r)}{2f'(r)} f''(c_j)\right) \\ &= f'(r)(x_j - r)(1 + R_j), \end{aligned}$$

où $R_j = \dfrac{(x_j - r)}{2f'(r)} f''(c_j)$. Pour conclure, il reste à remarquer que

$$|R_j| = \frac{|x_j - r|}{2|f'(r)|}|f''(c_j)| \le \frac{|x_j - r|}{2|f'(r)|} \max_{t \in V_\eta} |f''(t)|,$$

et en utilisant la question (c), on en déduit que

$$|R_j| \le \frac{\max_{t \in V_\eta} |f''(t)|}{2|f'(r)|}|x_0 - r|k^j,$$

c'est-à-dire que $R_j = O(k^j)$.

(ii) Montrons par récurrence que, pour tout $n \ge 1$,

$$x_n - r = (f'(r))^n (x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-1} (1 + R_j). \tag{2}$$

D'après (di), on a

$$x_1 - r = f'(r)(x_0 - r)(1 + R_0),$$

ce qui prouve l'égalité (2) au rang $n = 1$. Supposons maintenant que (2) soit vérifiée pour un certain $n \ge 1$. On a alors, en utilisant une nouvelle fois (di),

$$\begin{aligned} x_{n+1} - r &= f'(r)(x_n - r)(1 + R_n) = (f'(r))^{n+1}(x_0 - r)(1 + R_n) \prod_{j=0}^{n-1}(1 + R_j) \\ &= (f'(r))^{n+1}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n}(1 + R_j), \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité (2) au rang $n + 1$.

(iii) On a $|R_j| = O(k^j)$, $j \ge 1$, d'où $R_j \to 0$ lorsque $j \to +\infty$. Donc

$$|\ln|1 + R_j|| \sim |R_j| = O(k^j).$$

Comme la série $\sum_j k^k$ converge (car $0 < k < 1$), on en déduit que la série $\sum_j \ln|1 + R_j|$ converge absolument donc converge.
Posons

$$u_n = \prod_{j=0}^{n}(1 + R_j).$$

Comme $R_j \to 0$ lorsque $j \to +\infty$, il existe un entier N tel que

$$j \ge N \Longrightarrow R_j + 1 > 0.$$

D'où, pour tout $n > N$, on a

$$u_n = \prod_{j=0}^{N-1}(1 + R_j) \prod_{j=N}^{n}(1 + R_j) = K \prod_{j=N}^{n} |1 + R_j|,$$

avec $K = \prod_{j=0}^{N-1}(1 + R_j)$. Posons $\ell = \sum_{j=N}^{+\infty} \ln|1 + R_j|$. On a

$$\ln\left(\prod_{j=N}^{n} |1 + R_j|\right) = \sum_{j=N}^{n} \ln|1 + R_j| \to \ell \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

La continuité de l'exponentielle implique alors que

$$\prod_{j=N}^{n} |1 + R_j| \to e^{\ell} \text{ lorsque } n \to +\infty,$$

ce qui donne $u_n \to Ke^{\ell}$ lorsque $n \to +\infty$. Il reste à montrer que $K \neq 0$. Mais $K = 0$ si et seulement s'il existe $j \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $R_j = -1$. Cela implique avec (di) que $x_{j+1} = r$, ce qui est contraire à l'hypothèse. D'où $K \neq 0$ et la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite non nulle.

(iv) Posons $\omega(x_0) = Ke^{\ell}(x_0 - r)$. Alors la question précédente implique que

$$\frac{x_n - r}{\omega(x_0)(f'(r))^n} = \frac{u_{n-1}}{Ke^{\ell}} \to 1 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

D'où $x_n - r \sim \omega(x_0)(f'(r))^n$, $n \to +\infty$, ce qui donne

$$x_n = r + \omega(x_0)(f'(r))^n + o((f'(r))^n), \quad n \to +\infty.$$

(e) (i) La formule de Taylor-Young donne

$$f(x_j) = f(r) + f'(r)(x_j - r) + \frac{f''(r)(x_j - r)^2}{2} + (x_j - r)^2\varepsilon(j),$$

où $\varepsilon(j) \to 0$ lorsque $j \to +\infty$. D'où, en tenant compte du fait que $f(r) = r$ et $f'(r) = 0$, on obtient

$$x_{j+1} - r = \frac{f''(r)(x_j - r)^2}{2}\left(1 + S_j\right),$$

où $S_j = \frac{2\varepsilon(j)}{f''(r)} \to 0$ lorsque $j \to +\infty$.

(ii) Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)}\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2}|1 + S_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^n}(1 + S_{n-1}). \qquad (3)$$

Remarquons tout d'abord que pour $n = 2$, le membre de droite de l'égalité (3) est égal à

$$\frac{2}{f''(r)}\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)|1 + S_0|^{2^{-1}}\right)^{2^2}(1+S_1) = \frac{(f''(r))^3}{8}(x_0-r)^4(1+S_0)^2(1+S_1).$$

D'autre part, d'après (ei), on a

$$x_2 - r = \frac{f''(r)}{2}(x_1 - r)^2(1 + S_1)$$

et

$$x_1 - r = \frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)^2(1 + S_0),$$

d'où

$$x_2 - r = \frac{(f''(r))^3}{8}(x_0 - r)^4(1 + S_0)^2(1 + S_1),$$

ce qui prouve que la relation (3) est vérifiée pour $n = 2$. Supposons maintenant que (3) est satisfaite pour un certain entier $n \geq 2$. On a alors d'après (ei)

$$x_{n+1} - r = \frac{f''(r)}{2}(x_n - r)^2(1 + S_n)$$

et l'hypothèse de récurrence implique que

$$x_{n+1}-r = \frac{2}{f''(r)}\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^{n+1}} (1+S_{n-1})^2(1+S_n).$$

Or

$$\left(|1+S_{n-1}|^{2^{-(n-1)-1}}\right)^{2^{n+1}} = |1+S_{n-1}|^2,$$

d'où

$$x_{n+1}-r = \frac{2}{f''(r)}\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-1}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^{n+1}} (1+S_n),$$

ce qui donne la relation (3) au rang $n+1$.

(iii) Posons $v_n = \prod_{j=0}^{n-2}|1+S_j|^{2^{-j-1}}$. On a

$$\ln v_n = \sum_{j=0}^{n-2} 2^{-j-1}\ln|1+S_j|$$

Or $\ln|1+S_j| \to 0$ lorsque $j \to +\infty$ et la série $\sum_j 2^{-j-1}$ converge. Donc la série $\sum_j 2^{-j-1}\ln|1+S_j|$ converge aussi. Par conséquent, la suite $\ln v_n$ converge vers disons $\ell \in \mathbb{R}$. D'où par continuité de l'exponentielle, on en déduit que $v_n \to e^\ell$ lorsque $n \to +\infty$. Ainsi la suite $(v_n)_n$ converge vers $L := e^\ell \neq 0$.

(iv) On a

$$\ln\prod_{j=n-1}^{m}|1+S_j|^{2^{-j-1}} = \sum_{j=n-1}^{m}\ln|1+S_j|^{2^{-j-1}} = \sum_{j=n-1}^{m}\frac{\ln|1+S_j|}{2^{j+1}}.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on en déduit que

$$\ln\pi_n = \sum_{j=n-1}^{+\infty}\frac{\ln|1+S_j|}{2^{j+1}},$$

d'où

$$2^n\ln\pi_n = \sum_{j=n-1}^{+\infty}\frac{\ln|1+S_j|}{2^{j-n+1}}.$$

Remarquons que $\ln|1+S_j| \to 0$, $j \to +\infty$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier j_0 tel que

$$j \geq j_0 \Longrightarrow |\ln|1+S_j|| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $n > j_0$, on obtient donc

$$\begin{aligned} |2^n\ln\pi_n| &\leq \sum_{j=n-1}^{+\infty}\frac{|\ln|1+S_j||}{2^{j-n+1}} \\ &\leq \varepsilon\sum_{j=n-1}\frac{1}{2^{j-n+1}} = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $2^n\ln\pi_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On a

$$\prod_{j=n-1}^{m} |1+S_j|^{2^{-j-1}} = \frac{v_{m+2}}{v_n}.$$

D'où, en faisant tendre $m \to +\infty$, on obtient $\pi_n = L/v_n$, soit $v_n = L/\pi_n$.
La question (eii) permet alors d'écrire que

$$\begin{aligned} x_n - r &= \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\frac{L}{\pi_n} \right)^{2^n} (1 + S_{n-1}) \\ &\sim \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)L \right)^{2^n} \frac{1}{\pi_n^{2^n}}. \end{aligned}$$

Or $\ln\left(\frac{1}{\pi_n^{2^n}}\right) = -2^n \ln \pi_n \to 0$ et donc $\frac{1}{\pi_n^{2^n}} \to 1$, $n \to +\infty$. D'où

$$x_n - r \sim \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)L \right)^{2^n}.$$

En posant $\lambda(x_0) = \left| \frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)L \right| > 0$, on a

$$x_n - r \sim \frac{2}{f''(r)} \lambda(x_0)^{2^n}.$$

D'autre part, comme $x_n - r \to 0$, nécessairement $\lambda(x_0)^{2^n} \to 0$, ce qui implique que $\lambda(x_0) < 1$. D'où $\lambda(x_0) \in]0, 1[$ et

$$x_n = r + \frac{2}{f''(r)} \lambda(x_0)^{2^n} + o(\lambda(x_0)^{2^n}).$$

II. Un exemple : les suites de Héron.

(a) Il s'agit de résoudre l'équation $f_p(x) = x$. On a

$$\begin{aligned} f_p(x) = x &\iff \frac{p-1}{p}x + \frac{a}{px^{p-1}} = x \\ &\iff -\frac{1}{p}x + \frac{a}{px^{p-1}} = 0 \\ &\iff -\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p}a = 0 \\ &\iff x^p = a \iff x = a^{1/p}. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f_p a un unique point fixe $r = a^{1/p}$.
D'autre part, la fonction f_p est clairement de classe C^2 sur I et pour tout $x \in I$, on a

$$f_p'(x) = \frac{1}{p}\left((p-1) - (p-1)\frac{a}{x^p} \right) = \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{a}{x^p}\right).$$

D'où, comme $p \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} f_p'(x) \geq 0 &\iff 1 - \frac{a}{x^p} \geq 0 \\ &\iff x^p \geq a \\ &\iff x \geq a^{1/p}. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation :

Ainsi, on a $f_p(I) = [a^{1/p}, +\infty[\subset I$. De plus, $f_p'(a^{1/p}) = 0$ et comme

$$f''(x) = \frac{(p-1)a}{x^{p+1}},$$

on obtient

$$f_p''(a^{1/p}) = \frac{(p-1)a}{a^{(p+1)/p}} = \frac{p-1}{a^{1/p}} \neq 0.$$

(b) D'après le tableau de variation, on a

$$\forall x \geq 0,\ \ f_p(x) \geq a^{1/p}.$$

Donc par récurrence, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, $x_n \geq a^{1/p}$. De plus, la suite $(x_n)_n$ est décroissante ; en effet, on a

$$x_{n+1} - x_n = f_p(x_n) - x_n = -\frac{1}{p}x_n + \frac{a}{px_n^{p-1}} = -\frac{1}{px_n^{p-1}}\left(x_n^p - a\right),$$

et comme $x_n \geq a^{1/p}$, on en déduit que $x_{n+1} - x_n \leq 0$. Ainsi la suite $(x_n)_n$ est décroissante, minorée, donc elle converge vers un réel $\ell \geq a^{1/p}$. Comme $x_{n+1} = f(x_n)$, on en déduit par continuité de f_p que $f_p(\ell) = \ell$. Or $a^{1/p}$ est l'unique point fixe de f_p, d'où $\ell = a^{1/p}$.

(c) (i) On a $x_0 = \frac{x_0}{1} = \frac{u_0}{v_0}$. Supposons que $x_n = \frac{u_n}{v_n}$. Alors

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_2(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n}{v_n} + \frac{av_n}{u_n}\right) \\ &= \frac{u_n^2 + av_n^2}{2u_nv_n} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \end{aligned}$$

Par conséquent, par récurrence, on obtient que, pour tout $n \geq 0$, on a $x_n = \frac{u_n}{v_n}$.

(ii) On a

$$u_{n+1} + \sqrt{a}v_{n+1} = u_n^2 + av_n^2 + 2\sqrt{a}u_nv_n = (u_n + \sqrt{a}v_n)^2.$$

Par récurrence, on en déduit donc que pour tout $n \geq 0$, on a

$$u_n + \sqrt{a}v_n = (u_0 + \sqrt{a}v_0)^{2^n} = (x_0 + \sqrt{a})^{2^n}.$$

De même, on a
$$u_{n+1} - \sqrt{a}v_{n+1} = (u_n - \sqrt{a}v_n)^2.$$
D'où
$$u_n - \sqrt{a}v_n = (u_0 - \sqrt{a}v_0)^{2^n} = (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}.$$
Ainsi $2u_n = (x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}$, c'est-à-dire
$$u_n = \frac{1}{2}\left((x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}\right).$$
De plus, $2\sqrt{a}v_n = (x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}$, soit
$$v_n = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left((x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}\right).$$
D'où
$$x_n = \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{a}\,\frac{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} + (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}$$

(iii) On a
$$x_n - \sqrt{a} = \sqrt{a}\frac{2(x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}.$$
Or $f_2''(\sqrt{a}) = \frac{1}{\sqrt{a}}$, d'où
$$x_n - \sqrt{a} = \frac{2}{f_2''(\sqrt{a})}\frac{(x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(x_0 + \sqrt{a})^{2^n} - (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}}$$
Or $x_0 + \sqrt{a} > |x_0 - \sqrt{a}|$, d'où $(x_0 - \sqrt{a})^{2^n} = o((x_0 + \sqrt{a})^{2^n})$, ce qui donne
$$x_n - \sqrt{a} \sim \frac{2}{f_2''(\sqrt{a})}\left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$
Par conséquent $\lambda_2(x_0) = \frac{|x_0 - \sqrt{a}|}{x_0 + \sqrt{a}}$.

Université Claude Bernard Lyon 1 **Master EADM (1ère année)**
Préparation Epreuve d'analyse **Année 2011-12**

Ecrit du 24 mai 2012
Durée : 4h

Les documents ne sont pas autorisés. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

Notations.

Soit ζ la fonction de Riemann définie par la relation

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

L'objet du problème est d'étudier, sur l'intervalle $I =]-1, 1]$, la fonction

$$F(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) x^k.$$

Dans la première partie un calcul explicite donne la valeur de $F(1)$ en fonction de la constante d'Euler γ. L'objet de la deuxième partie est d'exprimer la somme $F(x)$ lorsque le réel x appartient à l'intervalle I en fonction de la constante d'Euler et d'une fonction G dont une propriété fonctionnelle est établie à la troisième partie.

Dans tout le texte, nous utilisons les notations suivantes :

- pour tout entier naturel k, φ_k désigne la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par la relation
$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{[x]}{x^{k+1}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$
où $[x]$ désigne la partie entière du réel positif x ;
- pour tout entier $k \geq 2$, S_k et T_k désignent les intégrales impropres suivantes :
$$S_k = \int_1^{+\infty} \varphi_k(x)\,dx \quad \text{et} \quad T_k = \int_2^{+\infty} \varphi_k(x)\,dx.$$

I. Première partie.

(1) Montrer que la fonction ζ est définie, continue et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
Indication : pour la régularité de ζ, on pourra fixer $a > 1$ et travailler sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

(2) L'objet de cette question est la convergence et le calcul de S_k.
(a) Etudier l'existence des intégrales impropres S_k et T_k.
(b) Définissons
$$f_n(k) = \int_n^{n+1} \varphi_k(x)\,dx \qquad (n \geq 1, k \geq 2).$$

(i) Montrer que

$$f_n(k) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{(n+1)^{k-1}} + \frac{1}{(n+1)^k}\right).$$

(ii) En déduire une expression de S_k à l'aide de $\zeta(k)$.

(3) L'objet de cette question est la convergence des séries de termes généraux $(-1)^k S_k$ et $(-1)^k T_k$, $k \geq 2$.

(a) Démontrer que la série de terme général T_k est absolument convergente.

(b) Démontrer que la série de terme général $(-1)^k S_k$ est convergente.
Indication : on pourra exprimer $(-1)^k S_k$ en fonction de $(-1)^k T_k$ et utiliser la question précédente.

(c) Soient S et T les sommes de ces séries :

$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k S_k \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k T_k.$$

Déterminer la relation [1] qui relie S et T.

(4) Soit φ la fonction définie sur la demi-droite $[2, +\infty[$ par la relation :

$$\varphi(x) = \frac{[x]}{x^2(1+x)}.$$

(a) Démontrer que la fonction φ est intégrable sur $[2, +\infty[$.

(b) Montrer que la série $\sum_k (-1)^k \varphi_k(x)$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.

(c) En déduire une expression de T en fonction de l'intégrable de φ sur $[2, +\infty[$.

(5) L'objet de cette question est le calcul de S. Soit $(h_n)_{n\geq 1}$ la suite de réels définis par la relation :

$$h_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad n \geq 1.$$

(a) Etablir la convergence de la série de terme général h_n, $n \geq 1$. Notons par H la somme de cette série,

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} h_n.$$

(b) Déduire des questions $(3c)$ et $(4c)$ partie I, la relation entre H et S.
Indication : on pourra montrer que

$$T = \sum_{n=2}^{+\infty} n(h_n - h_{n+1}),$$

en découpant l'intervalle $[2, +\infty[$ en intervalles $[n, n+1]$, puis montrer que

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} n(h_n - h_{n+1}).$$

1. On admettra sans démonstration la relation $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ pour tout $x \in]-1, 1]$.

(c) Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ la suite de réels définis par la relation

$$c_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n).$$

Il est admis que cette suite est convergente et que sa limite est la constante d'Euler γ. En exprimant par exemple h_n à l'aide de l'expression $c_{n+1} - c_n$, calculer H à l'aide de la constante γ. En déduire la valeur de $F(1)$, où on rappelle que F est la fonction définie dans les notations.

II. Deuxième partie.

(1) Considérons pour un entier naturel $n \geq 1$ donné, la série entière définie par

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} x^k.$$

(a) Calculer le rayon de convergence R_n de cette série entière. Préciser la convergence de la série aux extrémités $-R_n$ et R_n de l'intervalle de convergence. On notera $U_n(x)$ la somme de cette série entière et $J_n =]-R_n, R_n]$.

(b) Exprimer $U_n(x)$ au moyen de fonctions élémentaires.

(c) Soit x un réel donné. Vérifier qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $x \in J_n$. Déterminer deux réels $C(x)$ et α tels que

$$U_n(x) \sim \frac{C(x)}{n^\alpha}, \quad n \to +\infty.$$

(2) Le but de cette question est l'étude de la fonction F.

(a) Démontrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$1 < \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

(b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définie par

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) x^k.$$

Etudier la convergence de la série aux extrémités de l'intervalle de convergence. En déduire l'ensemble de définition de la somme $F(x)$ de cette série entière.

(3) Dans cette question, on étudie la convergence de la série de fonctions $\sum_n U_n$.

(a) Soit A un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ converge uniformément sur l'intervalle $[-A, 1]$, où U_n a été définie dans la question $(1a)$ partie II.

(b) Démontrer que pour tout réel $x \in I =]-1, 1]$, on a

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x),$$

En déduire que F est continue sur I.

(4) Pour tout entier $n > 0$, on note G_n la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$G_n(x) = \frac{n!n^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

En utilisant les résultats des questions (5) partie I et ($3b$) partie II, démontrer que, pour tout $x \in I$, la suite de fonctions $x \longmapsto \ln(G_n(x))$, $n \geq 1$, est convergente et que sa limite est la fonction $x \longmapsto F(x) - \gamma x$. En déduire que la limite de la suite des restrictions des fonctions G_n à l'intervalle I est une fonction G continue.

III. Troisième partie.

Soit x un réel différent d'un entier relatif ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$). Soit f la fonction périodique, de période 2π, définie par

$$f(t) = \cos(xt), \qquad t \in [-\pi, \pi[.$$

(1) Soit la série de fonctions de terme général

$$v_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}, \qquad n \geq 1.$$

Démontrer que cette série converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On admettra que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

(2) (a) Démontrer que la série de fonctions de terme général v_n est uniformément convergente sur tout intervalle fermé $K_a = [-a, a]$, où $0 < a < 1$. En déduire la relation :

$$\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \qquad 0 < x < 1.$$

(b) Démontrer que la fonction, définie sur $[0, 1]$ par $x \longmapsto G(x)G(1-x)\sin(\pi x)$, s'exprime de manière simple à l'aide de la fonction $x \longmapsto x(1-x)$. Rappelons que G désigne la fonction introduite à la question (3) partie II.

(c) Déduire du résultat la valeur de $F(1/2)$.