UFR de Mathématiques
Université Lille 1

Master 1 Mention Mathématiques
Analyse 2016-2017

M402, Analyse : Feuille No. 1

Rappels–Espaces de fonctions continues–Séparabilité.

Exercice 0 Donner un exemple d'un espace métrique où l'adhérence d'une certaine boule ouverte $B(x,r)$ n'est pas la boule fermée de centre x et de rayon r.

Exercice 1 Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite dans E.
(1) Montrer que si $(x_n)_n$ est de Cauchy alors il existe une sous-suite $(y_k)_k = (x_{n_k})_k$ telle que $\sum_k d(y_{k+1}, y_k) < \infty$.
(2) Montrer que si $(x_n)_n$ est de Cauchy alors elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.
(3) En déduire que (E,d) est complet si et seulement si toute suite $(x_n)_n$ de E telle que $\sum_n d(x_{n+1}, x_n) < \infty$, converge.
(4) Montrer que si (E,d) un espace métrique compact alors il est complet.

Exercice 2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.
(1) Montrer que si $x \in E$, alors

$$\|x\| = \inf\{t > 0;\ x \in tB(0,1)\}.$$

(2) Notons $B = B(0,1)$. Montrer que B possède les propriétés suivantes:
(i) Si $x, y \in B$ et $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ alors $\lambda x + \mu y \in B$;
(ii) si $x \in B$ alors $\exists \epsilon > 0$ tel que $x + \epsilon B \subset B$;
(iii) pour $x \in E,\ \ x \neq 0\ \ \ \exists \lambda,\ \mu \neq 0$ tel que $\lambda x \in B$ et $\mu x \notin B$.

Exercice 3 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe $\alpha_n > 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout polynôme P de degré plus petit ou égal à n, on a

$$|P(t)| \leq \alpha_n \int_0^1 |P(x)|dx.$$

Exercice 4 (1) Montrer qu'un espace normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.
(2) Soit $E = C([-1,1])$, l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$, muni de la norme $\|.\|_1$ (i.e $\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)|dt,\ f \in E$). Soit

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-1,0] \\ nt & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

(i) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans E. Est-elle convergente dans E?
(ii) On considère la série de terme général $g_n = f_{n+1} - f_n$.
Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n\|_1 < \infty$, mais que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ ne converge pas dans E.

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace de E. Notons par E/M l'espace quotient et pour $\overline{x} \in E/M$, on définit $N(\overline{x}) = d(x, M) := \inf\{\|x-y\|;\ y \in M\}$.
(1) (a) Montrer que $N(\overline{x}) = \inf\{\|z\|;\ z \in \overline{x}\}$.
(b) Montrer que $N(.)$ est une semi-norme sur E/M et calculer son noyau.
(c) Montrer que $N(.)$ est une norme sur E/M si et seulement si M est fermé.
(2) On suppose que M est fermé. Montrer que si E est complet alors E/M est complet.
(3) Montrer que si M et E/M sont complets alors E est complet.

Exercice 6 Soit $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite de nombres strictement positifs et $1 \leq p < \infty$. On note

$$\ell^p_\alpha = \big\{x = (x_n)_n;\ x_n \in \mathbb{C} \text{ et telle que } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x_n|^p < \infty\big\},$$

$$\ell^\infty_\alpha = \big\{x = (x_n)_n;\ x_n \in \mathbb{C} \text{ et telle que } \sup_{n\geq 1}(\alpha_n |x_n|) < \infty\big\}.$$

ℓ^p_α et ℓ^∞_α sont munis des normes respectives, $\|x\|_{p,\alpha} = (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ et $\|x\|_{\infty,\alpha} = \sup_{n\geq 1}(\alpha_n|x_n|)$.
(1) Montrer que ℓ^p_α et ℓ^∞_α sont des espaces de Banach.
(2) On choisit $\alpha_n = 1, \forall n \geq 1$. Montrer que si $1 \leq p < q \leq \infty$ alors $\ell^p_1 \subset \ell^q_1$, avec inclusion stricte et $\|x\|_{q,1} \leq \|x\|_{p,1},\ \ \forall x \in \ell^p_1$.
(3) Soit $c_{0,\alpha} = \{x = (x_n)_n;\ x_n \in \mathbb{C} \text{ et telle que } \lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = 0\}$. Montrer que $c_{0,\alpha}$ muni de la norme $\|x\|_{\infty,\alpha}$ est un espace de Banach.

Exercice 7 (1) Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \{P(\varphi);\ P \text{ polynôme}\}$ est dense dans $C([0,1])$.
(on pourra utiliser le Théorème de Stone-Weierstrass).
(2) En déduire que l'ensemble $\mathcal{B} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin^k(x),\ a_k \in \mathbb{R}\}$ est dense dans $C([0,1])$.
(3) Soit $\mathcal{C}$ la sous-algèbre engendrée par $\{f_0, f_2\}$ où $f_0(x) = 1$ et $f_2(x) = x^2$.
(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est dense dans $C([0,1])$.
(b) Montrer que $\mathcal{C}$ n'est pas dense dans $C([-1,1])$.

Exercice 8 Soit $f, g \in C([0,1])$.
(1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^n f(x)dx = \int_0^1 x^n g(x)dx \iff f = g.$$

(2) Soit $f : [0, +\infty[$ une fonction continue bornée.
(a) Montrer qu'il existe une fonction $g \in C([0,1])$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\exp(-nx)dx = \int_0^1 t^{n-2} g(t)dt, \quad \forall n \geq 2.$$

(b) En déduire que si $\forall n \geq 2,\ \int_0^{+\infty} f(x)\exp(-nx)dx = 0$ alors $f = 0$.

Exercice 9 Soit f une fonction continue sur un intervale I non borné de $\mathbb{R}$. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes sur I si et seulement si f est un polynôme.

Exercice 10 Soit $f\ :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est une limite uniforme de polynôme sur $]0,1[$ si et seulement si f admet une extension continue sur $[0,1]$.

Exercice 11 (Polynômes de Bernstein)
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0,1,\dots,n\}$, on pose

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial.
(a) Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x), \quad \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x).$$

(b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 B_{n,k}(x) = nx(1-x).$$

(c) Soit $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$. On pose

$$A = \{k \in [\![0,n]\!] : \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha\}.$$

Montrer que

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

(d) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On pose

$$P_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
(e) Retrouver le théorème de Weierstrass : si $-\infty < a < b < +\infty$ et si $f \in C([a,b)]$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Exercice 12 Soit (K,d) un espace métrique compact et A l'ensemble des fonctions lipschitziennes de X à valeurs dans $\mathbb{R}$.
(a) Montrer en utilisant le théorème de Stone–Weierstrass que A est dense dans $C(K,\mathbb{R})$.
(b) Pour $f \in C(K,\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$, notons

$$f_\lambda(x) = \inf_{y\in K} \{f(y) + \lambda d(x,y)\}.$$

Montrer que f_λ est λ–lipschitzienne sur K.

(c) Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|f_\lambda - f\|_\infty = 0,$$

et retrouver le résultat du (a).

Exercice 13 On note $\mathbb{T}$ le cercle unit du plan complexe.

(a) Montrer que $\mathcal{L}\text{in}(z^n : n \in \mathbb{Z})$ est dense dans $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$.

(b) Montrer que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et 2π–périodique, alors f est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Exercice 14 Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.

Exercice 15 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(x_n)_n$ un suite de vecteurs de E et notons F le sous-espace vectoriel engendré par $(x_n)_n$. Supposons que F est dense dans E. Montrons alors que E est séparable.

Exercice 16 Montrer que si (E, d) est un espace métrique séparable et si $F \subset E$, alors (F, d) est aussi séparable.

Exercice 17 (Fonctions Höldériennes)

Pour $\alpha > 0$, notons par E_α l'ensemble des fonctions Höldériennes.

$$E_\alpha = \Big\{ f : [0,1] \to \mathbb{C};\ \text{telles que il existe} \quad C \geq 0;\ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \quad \forall x, y \in [0,1] \Big\}.$$

la constante C dépend de f.

(1) Pour $f \in E_\alpha$ notons par $C_\alpha(f)$ la borne inférieure de l'ensemble des nombres C.

(a) Montrer que

$$\forall x, y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| \leq C_\alpha(f)|x - y|^\alpha.$$

(b) Montrer que l'application $f \mapsto C_\alpha(f)$ est une semi-norme sur E_α. Calculer son noyau.

(c) Montrer que E_α est un sous-espace vectoriel de $C[0,1]$.

(2) Décrire E_α pour $\alpha > 1$.

Dans la suite on suppose que $\alpha \in]0,1]$.

(3) Soit $0 < \beta < \alpha \leq 1$. Montrer que $C^1([0,1]) \subset E_\alpha \subset E_\beta \subset C([0,1])$.
Montrer que ce sont des inclusions strictes.

(4) Pour $f \in E_\alpha$, posons $N_\alpha(f) = |f(0)| + C_\alpha(f)$.
Montrer que $N_\alpha(.)$ est une norme sur E_α, vérifiant $\|f\|_\infty \leq N_\alpha(f)$ pour tout $f \in E_\alpha$.
Montrer que E_α est complet pour cette norme.

(5) Montrer que la boule unité de E_α est relativement compacte dans $C[0,1]$.
(On pourra utiliser le Théorème d'Ascoli).

Exercice 18 Soit $f \in C([0,+\infty[)$ et $f_n(x) = f(x^n)$, $n \geq 1$ et $x \in [0,+\infty[$. Montrer que l'ensemble $H = \{f_1, f_2 ...\}$ est équicontinu en $x = 1$ si et seulement si f est constante.

UFR DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ LILLE 1

Master 1 Mention Mathématiques
Analyse 2015/2016

M402, Analyse : Feuille No. 2.

Théorème de Baire et continuité d'applications linéaires.

Exercice 1 Montrer que $\mathbb{Q}$ ne peut pas s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.

(**Indication :** on pourra raisonner par l'absurde et considérer $\omega_n = \mathbb{R}\backslash\{q_n\}$ si $\mathbb{Q} = \{q_1, \ldots, q_n, \ldots\}$).

Exercice 2 a) Soit E est un espace normé et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si l'intérieur de F est non-vide alors $F = E$.

b) Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie ne possède pas de *base algébrique* dénombrable. En déduire que l'espace des polynômes $K[X]$ n'est complet pour aucune norme.

c) Soit $T : E \mapsto E$ une application linéaire et continue sur l'espace de Banach E. On suppose que pour tout $x \in E$ il existe $n = n(x) \geq 1$ tel que $T^n x = 0$. Montrer l'existence d'un nombre entier positif k tel que $T^k = 0$.

Exercice 3 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

$$E_n = \{x \in \mathbb{R};\ \text{tel que } f^{(n)}(x) = 0\};\ \ \Omega = \cup_{n\geq 0} \mathring{E}_n \ \text{ et } \ F = \mathbb{R} \setminus \Omega.$$

1) Montrer que sur toute composante connexe de Ω f est un polynôme.
2) Montrer que f n'a aucun point isolé.
3) Montrer que $F = \emptyset$.
(Supposer que $F \neq \emptyset$, appliquer le Théorème de Baire et obtenir une contradiction).
4) En déduire que f est un polynôme.

Exercice 4 Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, qui ne sont dérivables nulle part, est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. En particulier, il existe des fonctions continues sur $[0, 1]$ nulle part dérivables.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathcal{U}_n = \left\{ f \in C([0,1]) : \forall x \in [0,1],\ \sup_{y\neq x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| > n \right\},$$

et $\mathcal{F}_n = C([0, 1]) \setminus \mathcal{U}_n$. Montrer que $\mathcal{F}_n$ est fermé dans $C([0, 1])$.

(b) Le but de cette question est de montrer que chaque $\mathcal{U}_n$ est dense dans $C([0,1])$.

(i) Justifier que l'ensemble des fonctions lipschitziennes est dense dans $C([0,1])$.

(ii) Fixons maintenant $\varepsilon > 0$, g une fonction lipschtizienne sur $[0,1]$ et notons

$$C = \sup_{x \neq y} \left| \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \right|.$$

Soit Θ une fonction continue affine par morceaux, de pente partout supérieure à M et vérifiant $\|\Theta\|_\infty \leq \varepsilon$, où $M > n + C$. Posons enfin $f = g + \Theta$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, il existe $y \in [0,1]$, $y \neq x$ tel que

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| > n.$$

(iii) En déduire que $\mathcal{U}_n$ est dense dans $C([0,1])$.

(c) Montrer que si $f \in \cap_{n \geq 1} \mathcal{U}_n$, alors f n'est dérivable en aucun point de $[0,1]$.

(d) En déduire que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $C([0,1])$.

Remarque : ce résultat est un peu mystérieux car il affirme qu'il existe "beaucoup" de fonctions continues nulle part dérivables mais n'en exhibe aucune. Voici un exemple explicite : la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dfinie par

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sin(4^n x)$$

est continue sur $[0,1]$ (par convergence normale de la série). Elle est également nulle part dérivable mais cela n'a rien d'évident! En admettant le fait que φ est nulle part dérivable et en utilisant le théorème de Weierstrass, retrouver le résultat de l'exercice.

Exercice 5 Soit E, F, G des espaces normés. Soit $U : E \times F \to G$ une application bilinéaire.
(1) On suppose que U est séparément continue i.e.
$\forall x \in E$, l'application linéaire $y \mapsto U(x,y)$ est continue de F dans G; et
$\forall y \in F$, l'application linéaire $x \mapsto U(x,y)$ est continue de E dans G.
Montrer que si E ou F est complet alors U est continue.
(2) Soit $E = F = \ell^1(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $G = \mathbb{C}$.
Soit $U : \ell^1(\mathbb{N}) \times \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ définie par

$$U(x,y) = \sum_{n \geq 0} x_n y_n; \quad \text{où} \quad x = (x_n)_n,\ y = (y_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}).$$

(a) Montrer que l'application bilinéaire U est bien définie et séparément continue .
(b) Montrer que U n'est pas continue. Expliquer.

Exercice 6 (Opérateur de Volterra.) Soit $1 \leq p \leq \infty$ et q son exposant conjugué. Pour $f \in L^p([0,1]) = L^p([0,1], dt)$, on pose

$$V_p f(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

(a) Montrer que $V_p \in \mathcal{L}(L^q([0,1]), L^p([0,1]))$ et $\|V_p\| \leq 2^{-1/p}$.

Indication : considérer le noyau $K(x,y) = 1_{[0,x]}(y)$.

(b) Montrer que si $f \in L^q([0,1])$, alors $V_p f \in C([0,1])$.

Exercice 7 (Matrice de Hilbert.) Pour $x \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$, on pose

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i+j} x_j.$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}^*))$ et $\|T\| \leq \pi$.

Indication : on pourra utiliser le test de Schur avec la fonction $\omega_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$, $i \geq 1$ et le noyau $K(i,j) = \frac{1}{i+j}$.

UFR de Mathématiques — Master 1 Mention Mathématiques
Université Lille 1 — Analyse 2015/2016

M402, Analyse : Feuille No. 3

Banach–Steinhauss, graphe fermé et application ouverte.

Exercice 1 Soit $x = (x_n)_n$ une suite de complexes telle que la série $\sum x_n y_n$ converge pour tout $y = (y_n)_n \in \ell^p$, $(1 \leq p \leq \infty)$. Il s'agit d'en déduire que $x \in \ell^q$ où q est l'exposant conjugué de p.

1. Pour tout entier N on définit une forme linéaire U_N sur ℓ^p par
$$U_N(y) = \sum_{n=0}^{N} x_n y_n.$$
Calculer la norme de U_N.
Indication: on pourra d'abord établir l'estimation
$$\|U_N\| \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
puis montrer que l'on a en fait égalité dans cette inegalité en considérant la suite
$$y = \left(\overline{x}_0|x_0|^{q-2}, ..., \overline{x}_N|x_N|^{q-2}, 0, 0, ...\right).$$
2. Conclure en déduisant du théorème de Banach-Steinhaus que $x \in \ell^q$.

Exercice 2 Le but de cet exercice est d'établir l'existence de fonctions continues qui ne coïncident pas avec leur série de Fourier en un point donné.

Dans la suite on considère f une fonction continue $2\pi-$périodique, on note $\hat{f}(n)$ son n-ième coefficient de Fourier, $n \in \mathbb{Z}$, et $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx}$ la N-ième série partielle de Fourier.

1. Rappeler que $S_N f = f * D_N$ où D_N est le noyau de Dirichlet et que
$$D_N(y) = \sum_{k=-N}^{N} e^{iny} = \frac{sin(N + \frac{1}{2})y}{sin\frac{y}{2}}.$$

2. On considère la forme linéaire $L_N(f) = S_N f(0)$ sur l'espace des fonctions continues muni de la norme $\|.\|_\infty$. Montrer que

$$\|L_N\| \leq \|D_N\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|\, dy$$

puis que cette estimation est optimale en remarquant que D_N est de signe constant par morceaux.

3. Montrer que $\|D_N\|_1 \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|sin\, u|}{u}\, du$.

4. En déduire qu'il existe f continue 2π–périodique telle que

$$\sup_{N \geq 1} |S_N f(0)| = \infty.$$

Exercice 3 On considère $E = L^1(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions 2π-périodiques et intégrables sur $[-\pi, \pi]$. On note $\hat{f}(n)$ le n-ième coefficient de Fourier de $f \in E$ ($n \in \mathbb{Z}$).

1. Montrer que l'application linéaire

$$T : E \ni f \mapsto (\hat{f}(n))_n \in c_0(\mathbb{Z})$$

est continue et calculer $\|T\|$;

2. Montrer que T est injective ;

3. Montrer que T n'est pas surjective. (**Indication :** Supposer le contraire, appliquer une variante du théorème de l'application ouverte, penser au noyau de Dirichlet)

Exercice 4 Soient E et F deux espaces de Banach, et $G = \ell_\infty(F)$ l'espace vectoriel des suites bornées

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n \in F,$$

muni de la norme sup $\|x\|_\infty$.

(1) Montrer que G est un espace de Banach.

(2) Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F,telles que

$$\sup_n (\|T_n x\|_F) < \infty$$

pour tout $x \in E$. On note $U : E \mapsto G$, définie par $U(x) = (T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que le graphe de U est fermé.

(3) En déduire que le théorème de Banach-Steinhaus, dans le cas où les deux espaces E et F sont des espaces de Banach, peut être établi comme une conséquence du théorème du graphe fermé.

Exercice 5 (a) Soit X un espace de Banach. On suppose qu'il y a deux sous-espaces linéaires fermés Y et Z dans X tels que tout $x \in X$ possède une unique représentation $x = y + z$, avec $y \in Y$ et $z \in Z$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que si $x = y + z \in X$, avec $y \in Y$ et $z \in Z$, alors $\|y\| \leq C\|x\|$ et $\|z\| \leq C\|x\|$.

(b) Soit X un espace de Banach et $P : X \to X$ une application linéaire telle que $P^2 = P$. On suppose que l'image de P et le noyau de P sont des sous-espaces fermés. Montrer que P est continue.

Exercice 6 Soit $E = C([0,1])$, et $||.||$ une norme sur E pour laquelle E est un Banach. Supposons que, pour $f_n, f \in E$, $||f_n - f|| \to 0$ implique $f_n(t) \to f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Montrer que les normes $||.||$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 7 (Universalité de $\ell^1(\mathbb{N})$.) Soit X un espace de Banach séparable. Montrer qu'il existe une surjection linéaire continue de $\ell^1(\mathbb{N})$ sur X.

Indication : remarquer que B_X, la boule unité fermée de X, est séparable et considérer une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dense dans B_X. Pour $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0} \in \ell^1(\mathbb{N})$, on définit alors

$$T(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

Vérifier que $T : \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow X$ est linéaire et continue; montrer que $B_X \subset \overline{T(B_{\ell^1(\mathbb{N})})}$ et conclure.

Exercice 8 (Théorème d'extension de Tietze.) Si F est un espace métrique, on notera $C_b(F)$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur F, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On rappelle que c'est un espace de Banach. Soit (E, d) un espace métrique et C un fermé de E. Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant, connu sous le nom de *théorème d'extension de Tietze* :

pour toute fonction $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, il existe une fonction $\widetilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée telle que $\widetilde{f}_{|C} = f$

Considérons pour cela $T : C_b(E) \longrightarrow C_b(C)$ l'opérateur de restriction défini par $T(\varphi) = \varphi_{|C}$.

(a) Vérifier que T est linéaire, continue et $\|T\| \leq 1$.

(b) Soit $f : C \longrightarrow [-1,1]$ continue.

(i) Construire une fonction continue $f^+ : E \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \text{ et } f(x) \leq 1/3 \\ 1 & \text{si } x \in C \text{ et } f(x) \geq 2/3. \end{cases}$$

Indication : on pourra considérer $C_0 = \{x \in C : f(x) \leq 1/3\}$ et $C_1 = \{x \in C : f(x) \geq 2/3\}$, puis poser

$$f^+(x) = \frac{d(x, C_0)}{d(x, C_0) + d(x, C_1)}.$$

(ii) De même, construire une fonction continue $f^- : E \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \text{ et } f(x) \geq -1/3 \\ 1 & \text{si } x \in C \text{ et } f(x) \leq -2/3. \end{cases}$$

(iii) En posant $g = f^+ - f^-$, vérifier que $g : E \longrightarrow [-1,1]$ est continue et vérifie

$$|g(x) - f(x)| \leq 2/3, \qquad \forall x \in C.$$

(c) Conclure que T est surjectif, en utilisant le critère de surjectivité des applications linéaires continues vu en cours.

UFR de Mathématiques
Université Lille 1

Master 1 Mention Mathématiques
Analyse 2015/2016

M402, Analyse : Feuille No. 4

Théorème de Hahn-Banach et applications. Dualité

Exercice 1 (a) Soit E un espace de Banach et M un sous-espace fermé. Montrer que E/M est un espace de Banach.

(b) Soit M un sous-espace fermé de l'espace normé E. On suppose que M et E/M sont complets. Montrer que E est complet.

Exercice 2 (Base de Hamel et forme linéaire discontinue).

Un sous-ensemble $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E est appelé *base algébrique* (ou *base de Hamel*) si tout vecteur $x \in E$ peut être exprimé de façon unique comme une combinaison linéaire finie de certains éléments de $\mathcal{B}$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

pour certains scalaires non nuls $a_k \in \mathbb{K}$ et vecteurs $x_k \in \mathcal{B}$. On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de E est *linéairement indépendant* si tout sous-ensemble fini de $\mathcal{B}$ est linéairement indépendant dans le sens habituel. Enfin $\mathcal{B}$ *engendre* E si $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$, où

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \left\{ x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k : a_k \in \mathbb{K}, x_k \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de Hamel si et seulement si $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble linéairement indépendant maximal (au sens de l'inclusion).

(b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de Hamel si et seulement si $\mathcal{B}$ est un un sous-ensemble linéairement indépendant qui engendre E.

(c) Montrer que si $\mathcal{B}'$ est un système linéairement indépendant, alors il existe une base de Hamel $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

Indication : utiliser le lemme de Zorn.

(d) En déduire que tout espace vectoriel E admet une base de Hamel.

(e) Montrer que toute base de Hamel d'un espace de Banach de dimension infinie est nécessairement non dénombrable.

Indication : utiliser le théorème de Baire.

(f) Montrer que sur tout espace vectoriel E de dimension infinie, il existe une forme linéaire discontinue.

(g) Montrer que tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E admet un supplémentaire algébrique G, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel G tel que

$$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad F + G = E.$$

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$, $f : E \mapsto \mathbb{C}$ une fonctionnelle linéaire, et $p_1, \cdots, p_n : E \mapsto \mathbb{R}_+$ des seminormes telles que $|f(x)| \leq \sum_{k=1}^n p_k(x)$ pour chaque $x \in E$. Démontrer qu'il existent $f_1, \cdots, f_n : E \mapsto \mathbb{C}$ linéaires telles que $f = \sum_{k=1}^n f_k$ et $|f_k(x)| \leq p_k(x)$ pour tous k et x.

Exercice 4 (Système biorthogonal) Soit $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset E$ un ensemble linéairement indépendant dans un espace vectoriel normé E. Alors il existe $f_1, \cdots, f_n \in E^*$ telles que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. Montrer que chaque $x \in \mathrm{lin}\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i$.

Exercice 5 Soit $T : E \mapsto F$ linéaire, où E et F sont des Banach. Montrer que T est continue si et seulement si pour tout $y^* \in F^*$ on ait $y^* \circ T \in E^*$.

Exercice 6 (Limite de Banach). Soit S l'opérateur de translation sur l'espace $E = \ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbb{R})$, défini par $Sx(n) = x(n+1)$ si $x = (x(1), x(2), ...) \in E$. On considère

$$M = \left\{ x \in E : \lim_n \frac{x(1) + ... + x(n)}{n} \text{ existe} \right\}$$

et on note $L_0(x)$ cette limite si $x \in M$.

a) Montrer que L_0 se prolonge en une forme linéaire L sur E telle que $\|L\| = 1$.

b) Montrer que $L(Sx) = L(x)$ pour tout $x \in E$ (commencer par remarquer que $y = x - Sx \in M$).

c) Montrer que si $x \in E$ vérifie $x_n \geq 0$ pour tout n, alors $L(x) \geq 0$.

d) Montrer alors que $\liminf_{n\to\infty} x(n) \leq L(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x(n)$. En déduire que L est une extension de la limite classique d'une suite convergente.

e) Calculer $L(a)$ pour la suite $a = (0, 1, 0, 1, \cdots)$. Calculer $L(b)$ si b est une suite périodique.

(f) Montrer qu'il n'existe pas une application $f : E \mapsto \mathbb{R}$ qui est additive, multiplicative, invariante par translation et qui est une extension de la limite classique d'une suite convergente.

Exercice 7 Montrer que $c_0^* \simeq \ell_1$, $\ell_1^* \simeq \ell_\infty$ et $\ell_p^* \simeq \ell_q$ pour $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exercice 8 Soit $E = \ell^\infty$ et c le sous-espace constitué des suites complexes convergentes, munis de la norme $||.||_\infty$.

a) Montrer que f définie sur c par $f(x) = \lim x_n$ est une forme linéaire continue sur c et calculer sa norme.

b) En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer alors que ℓ_1 n'est pas réflexif, c'est-à-dire, $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$.

Exercice 9 (a) Montrer que chaque forme linéaire et continue sur c_0 admet une extension unique à ℓ_∞.

(b) Soit $G \subset \ell_1$, $G = \{x \in \ell_1 : x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = 0\}$. Montrer que chaque forme linéaire et continue non nulle sur g a une infinité d'extensions Hahn-Banach.

(c) Soit E un espace vectoriel normé et soit M un sous-espace vectoriel de E. On suppose que $f : M \to \mathbb{C}$ admet deux extensions Hahn-Banach distinctes $g, h : E \to \mathbb{C}$. Montrer que f admet une infinité d'extensions Hahn-Banach. (Indication: Montrer que l'ensemble d'extensions Hahn-Banach de f est convexe dans X^*.)

Exercice 10 Soit $f, f_1, \cdots, f_n$ des formes linéaires sur un espace vectoriel E, $f \not\equiv 0$.

(a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$;
2. il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C \max_k |f_k(x)|$ pour tout $x \in E$;
3. $\cap_{k=1}^n \ker(f_k) \subset \ker(f)$.

(b) On pose $\phi(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$. On suppose (3). Montrer que l'on peut définir une forme linéaire sur $F = \phi(E)$ par $g(\phi(x)) = f(x)$. Retrouver l'implication (3) implique (1) en utilisant un prolongement de g.

(c) Soit $g_1, \cdots g_m$ fonctionnelles linéaires sur un evn X tel que $\cap_{k=1}^m \ker(g_k) = \{0\}$. Montrer que $X^* = \mathrm{lin}\{g_1, \cdots, g_m\}$ (sans utiliser (a)).

(d) Avec les notations précédentes, soit $M = \cap_{k=1}^n \ker(f_k)$. On suppose de nouveau que $M \subset \ker(f)$. Montrer que les fonctionnelles linéaires h et h_j, $1 \leq j \leq n$, $h([x]) = f(x)$ et $h_j([x]) = f_j(x)$, $[x] \in E/M$, sont bien définies sur E/M. Retrouver l'implication (3) implique (1).

Exercice 11 Soit $1 < p < \infty$.

(a) Soit $F = \{x = (x_n) \in \ell_p : \sum_{n=0}^\infty x_n = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace dense dans ℓ_p.

(b) (Question bonus) Soit (a_n) une suite de scalaires telle que $\sum_{n=0}^\infty |a_n| \neq 0$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le sous-espace $G = \{x = (x_n) \in \ell_p : \sum_{n=0}^\infty a_n x_n = 0\}$ soit dense dans ℓ_p.

Exercice 12 ($L^1(\mathbb{R}^+)$ n'est pas le dual de $L^\infty(\mathbb{R}^+)$).

(a) Vérifier que si $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et si

$$\Phi_g(f) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt, \qquad f \in L^\infty(\mathbb{R}^+),$$

alors $\Phi_g \in (L^\infty(\mathbb{R}^+))^*$ et $\|\Phi_g\| = \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}$.

Ainsi,

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & L^1(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{R}^+) \\ & g & \longmapsto & \Phi_g \end{array}$$

est linéaire et isométrique. Nous voudrions montrer dans la suite que Φ n'est pas surjective.

(b) Soit V le sous-espace vectoriel de $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ défini par

$$V = \{f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue et telle que } f \text{ admet une limite en } +\infty\}.$$

(i) Montrer qu'il existe $\widetilde{\Phi} \in (L^\infty(\mathbb{R}^+))^*$ telle que

$$\widetilde{\Phi}(f) = \lim_{x \to +\infty} f(x), \qquad f \in V.$$

(ii) Supposons qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que $\widetilde{\Phi} = \Phi_g$. Montrer que pour toute fonction f continue à support compact, on a

$$\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt = 0.$$

(iii) En déduire que $g = 0$ presque partout, puis conclure.

Exercice 13 (Supplémentaire topologique). Soit E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E. On dit que F admet un *supplémentaire topologique* s'il existe un sous-espace vectoriel fermé G tel que $E = F \oplus G$ (c'est-à-dire $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$).

(a) Montrer que F admet un supplémentaire topologique si et seulement s'il existe une projection continue p (c'est-à-dire $p \in \mathcal{L}(E)$, $p^2 = p$) telle que $\mathrm{Im} p = F$.

(b) Soit E un espace de Banach. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors F admet un supplémentaire topologique.

(c) Soit E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $\dim(E/F) < \infty$. Montrer que F admet un supplémentaire topologique.

UFR DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ LILLE 1

Master 1 Mention Mathématiques
Analyse 2016/2017

M402, Analyse : Feuille No. 5

Espaces L^p et convolution.

Le triplet (X, τ, μ) désignera un espace mesuré, avec X un ensemble non vide, τ une tribu sur X et μ une mesure (positive) sur l'espace mesurable (X, τ). Pour $1 \le p \le +\infty$, on note $L^p(\mu) = L^p(X, \tau, \mu)$.

Exercice 1 (a) Soit $f \in L^1(\mu)$. Supposons que, pour tout $A \in \tau$, on a

$$\int_A f \, d\mu = 0.$$

Montrer que $f = 0$ p.p.

(b) Soit $1 \le p < +\infty$ et $A \in \tau$. On pose

$$F = \{f \in L^p(\mu) : f = 0 \text{ p.p. sur } A\}.$$

Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de F qui converge vers f dans $L^p(\mu)$.

(i) Soit q l'exposant conjugué de p. Montrer que pour tout $g \in L^q(\mu)$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n g \, d\mu = \int_X f g \, d\mu.$$

(ii) En déduire que $f = 0$ p.p. sur A.
Indication : on considère $\Omega_+ = \{x \in X : f(x) > 0 \text{ p.p.}\}$ et $\Omega_- = \{x \in X : f(x) < 0 \text{ p.p.}\}$ et si $p > 1$, on pose $g = |f|^{p-1}\chi_{A\cap\Omega_+} - |f|^{p-1}\chi_{A\cap\Omega_-}$.

(iii) Conclure.

Exercice 2 Dans cet exercice, on considère $X = \mathbb{R}$, $\tau = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne et $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $1 \le p \le +\infty$ et

$$C = \{f \in L^p(\lambda) : f \ge 0 \text{ p.p.}\}.$$

On veut montrer que C est d'intérieur vide pour $p < \infty$ et d'intérieur non vide pour $p = \infty$.

(a) On suppose dans cette question que $p < \infty$ et soit $f \in C$ et $\varepsilon > 0$. Pour $n \ge 0$, posons $A_n = \{t \in \mathbb{R} : 0 \le f(t) \le n\}$.

(i) Montrer qu'il existe $n \ge 0$ tel que $\lambda(A_n) > 0$. Posons alors $A = A_n$. Fixons $m > (\frac{n+1}{\varepsilon})^p$.

(ii) Montrer qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda(A \cap [\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}[) > 0$. On pose alors $B = A \cap [\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}[$.

(iii) Soit $g(x) = f(x)$ si $x \in B^c$ et $g(x) = -1$ si $x \in B$. Vérifier que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$ et $g \notin C$.

(iv) Conclure.

(b) On suppose dans cette question que $p = \infty$. Montrer que $f = \chi_{\mathbb{R}}$ est dans l'intérieur de C.

Exercice 3 On suppose dans cet exercice que μ est une mesure finie sur un espace mesurable (X, τ) et on considère $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\} \quad \text{et} \quad B_n = \{x \in X : n \leq |f(x)| < n+1\}.$$

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est intégrable ;

(ii) la série $\sum_n n\mu(B_n)$ converge ;

(iii) la série $\sum_n \mu(A_n)$ converge.

Exercice 4 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^x - 1}\, dx.$$

Indication : on pourra commencer par les cas $n = 0$ et $n = 1$.

Exercice 5 [Inégalité de Jensen]

(a) Soit μ une mesure positive sur (X, τ) telle que $\mu(X) = 1$. Soit $f \in L^1(\mu)$ une fonction à valeurs réelles et supposons que pour tout $x \in X$, on a $a < f(x) < b$. Soit φ une fonction convexe sur $]a, b[$. Montrer que

$$\varphi\left(\int_X f\, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f\, d\mu.$$

(b) En déduire que, pour tous nombres réels positifs $y_1, y_2, \ldots, y_n$, on a

$$\left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i.$$

Exercice 6 Soit $f \in L^1(\mu)$ et pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$g_n(t) = \begin{cases} |f(t)| & \text{si } |f(t)| \leq n \\ n & \text{si } |f(t)| > n. \end{cases}$$

(a) Montrer que la suite $(g_n)_n$ est croissante et converge ponctuellement vers $|f|$.

(b) Montrer pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(E \in \tau,\ \mu(E) < \delta) \Longrightarrow \int_E |f|\,d\mu < \varepsilon.$$

Exercice 7 Soit (X, τ, μ) un espace mesuré et soit $p_1, p_2 \in [1, \infty[$ avec $p_1 \leq p_2$.

(a) Montrer que pour tout $p \in [p_1, p_2]$, si $f \in L^{p_1}(\mu) \cap L^{p_2}(\mu)$, alors $f \in L^p(\mu)$ et on a

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_{p_1}^{tp_1} \|f\|_{p_2}^{(1-t)p_2},$$

où $t \in [0, 1]$ est tel que $p = tp_1 + (1-t)p_2$.

(b) Supposons $p_1 = 1$ et $p_2 = 2$ et $f \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$. Montrer que

$$\lim_{p \to 1^+} \|f\|_p = \|f\|_1.$$

Exercice 8 (a) Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$, alors $fg \in L^r(\mu)$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(b) Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose

$$\varphi(p) = \int_X |f|^p\,d\mu \quad \text{et} \quad D_f = \{p \in [1, +\infty[: 0 < \varphi(p) < +\infty\}.$$

Montrer que D_f est un intervalle (éventuellement vide).

(c) Montrer que l'application $\phi : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(p) = \ln(\varphi(p))$ est une fonction convexe.

(d) Montrer que pour tout $q \in [1, +\infty[$, on a

$$L^q(\mu) \cap L^\infty(\mu) \subset \bigcap_{q \leq p \leq +\infty} L^p(\mu),$$

et que pour toute fonction $f \in L^q(\mu) \cap L^\infty(\mu)$, on a

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Exercice 9 Soit $1 \leq p < +\infty$.

(a) Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$|\alpha - \beta|^p \leq 2^{p-1}(|\alpha|^p + |\beta|^p).$$

(b) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^p(\mu)$ et $f \in L^p(\mu)$ telles que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \mu-\text{p.p.} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Montrer que $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^p(\mu)$.

Indication : on pourra utiliser (a) et le lemme de Fatou.

(c) Montrer que le résultat de (b) est faux pour $p = +\infty$.

Exercice 10 Soit $1 < p < \infty$, $X =]0, +\infty[$ muni de la tribu des boréliens et $\mu = dt$ la mesure de Lebesgue sur X. Le but de l'exercice est l'étude de l'application linéaire T définie par

$$T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \qquad x > 0, f \in L^p(]0, +\infty[).$$

(a) Supposons dans cette question que $f \in C_c(]0, +\infty[)$ et est positive. Notons $F(x) = T(f)(x)$. Montrer que

$$(i)\ \lim_{x\to 0} xF^p(x) = 0; \quad (ii)\ \lim_{x\to+\infty} xF^p(x) = 0; \quad (iii)\ F(x) + xF'(x) = f(x).$$

(b) Montrer l'inégalité de Hardy : pour toute fonction $f \in L^p(]0, +\infty[)$, on a

$$\|Tf\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

(c) Montrer qu'il y a égalité dans (b) si et seulement si $f = 0$ p.p.

(d) Démontrer que dans (b), $p/(p-1)$ est la meilleure constante.

(e) Montrer que si $f > 0$ et $f \in L^1$, alors $T(f) \notin L^1$.

Exercice 11 Calculer $f * g$ pour les fonctions suivantes :

(a) $f = \chi_{[-1,1]}$ et $g = \chi_{[-a,a]}$ avec $a \le 1$.

(b) $f(x) = \exp(\alpha x)\chi_{[0,+\infty}(x)$ et $g(x) = \exp(\beta x)\chi_{[0,+\infty}(x)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 Soit $\alpha > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right).$$

(a) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xG_\alpha(x)\,dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2G_\alpha(x)\,dx = \alpha.$$

(b) Montrer que pour tout $\alpha, \beta > 0$, on a $G_\alpha * G_\beta = G_{\alpha+\beta}$.

Indication : on pourra utiliser l'identité $\frac{(x-y)^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\left(y - \frac{\beta}{\alpha+\beta}x\right)^2 + \frac{1}{\alpha+\beta}x^2$.

Exercice 13 Pour $n \ge 1$, on définit $\phi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\alpha_n}(1-t^2)^n, \text{ si } |t| \le 1 \quad \text{et } \phi_n(t) = 0, \text{ si } |t| > 1,$$

avec

$$\alpha_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt.$$

(a) Montrer que la suite $(\phi_n)_n$ est une approximation de l'identité.

(b) Soit $f \in C(\mathbb{R})$ vérifiant $f(x) = 0$ si $x \notin I$, où $I = [-1/2, 1/2]$. Montrer que $\phi_n * f$ est un polynôme sur I.

(c) En déduire le théorème de Weiestrass : toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

UFR de Mathématiques
Université Lille 1

Master 1 Mention Mathématiques
Analyse 2016-2017

M402, Analyse : Devoir Maison No. 1

Exercice 1 (**Complété d'un e.v.n.**) Soit X un espace vectoriel normé. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un espace de Banach $\widehat{X}$, appelé *complété* de X, avec la propriété suivante : il existe une application linéaire $i : X \longrightarrow \widehat{X}$ isométrique et d'image dense.

(a) On considère $\widetilde{X}$ l'ensemble de toutes les suites de Cauchy de X. On définit sur $\widetilde{X}$ la relation suivante

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \text{ si } \lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

  (i) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\widetilde{X}$.

  (ii) Justifier que si $(x_n)_n \in \widetilde{X}$, alors $\lim_{n\to+\infty}\|x_n\|$ existe, et que si $\widehat{X}$ désigne l'espace quotient $\widehat{X} := \widetilde{X}/\sim$, on peut poser

$$\|[(x_n)_n]\|_0 = \lim_{n\to+\infty}\|x_n\|,$$

  où $[(x_n)_n]$ désigne la classe d'équivalence de $(x_n)_n$ dans $\widehat{X}$.

  (iii) Vérifier que $\|\cdot\|_0$ est une norme sur $\widehat{X}$ et que $(\widehat{X}, \|\cdot\|_0)$ est complet.

(b) On définit

$$\begin{array}{rccc} i: & X & \longrightarrow & \widehat{X} \\ & x & \longmapsto & [x], \end{array}$$

où $[x]$ désigne la classe des suites qui convergent vers x.

  (i) Vérifier que i est linéaire et isométrique.

  (ii) Montrer que l'image de i est dense dans $\widehat{X}$.

(c) Montrer que $\widehat{X}$ est unique à un isomorphisme isométrique près, c'est-à-dire que si Y est un autre complété de X, alors il existe un isomorphisme isométrique $T : \widehat{X} \longrightarrow Y$.

Exercice 2 Soit (K, d) un espace métrique compact et a un point fixé de E. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $C(K, \mathbb{R})$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) pour tout $x_1, x_2 \in K$, $x_1 \neq x_2$, il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x_1) \neq f(x_2)$;

(ii) pour toute $f \in \mathcal{A}$, $f(a) = 0$.

Montrer que l'adhérence de $\mathcal{A}$ est égale à

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(K, \mathbb{R}) : f(a) = 0\}.$$

Exercice 3

1. On considère ℓ^1 l'espace des suites complexes $x = (x_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty,$$

et ℓ^∞ l'espace des suites complexes bornées que l'on munit de la norme sup. Pour chaque élément $u = (u_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, on définit l'application $\varphi_u : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\varphi_u(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n, \qquad v = (v_n)_{n\geq 0} \in \ell^1.$$

   (a) Montrer que φ_u est linéaire, continue et vérifier que $\|\varphi_u\| = \|u\|_\infty$.

   (b) Soit maintenant $T : \ell^\infty \longrightarrow (\ell^1)^*$ définie par $T(u) = \varphi_u$. Montrer que T est un isomorphisme isométrique de ℓ^∞ sur $(\ell^1)^*$. Dans la suite, on notera pour $u \in \ell^\infty$ et $v \in \ell^1$, $\langle v, u\rangle = \varphi_u(v)$.

2. Soient X un espace vectoriel normé et $(x_n)_n$ une suite de X. On dit que $(x_n)_n$ *converge faiblement* vers 0 si pour toute forme linéaire $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = 0.$$

Vérifier que si $(x_n)_n$ tend vers 0 dans X (au sens de la norme), alors $(x_n)_n$ *converge faiblement* vers 0. Le but de l'exercice est de montrer que la réciproque est vraie dans ℓ^1.

3. On note $\overline{B}$ la boule unité fermée de ℓ^∞ et pour $x, y \in \overline{B}$, on pose

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

   (a) Montrer que d est une distance sur $\overline{B}$.

   (b) Montrer que la convergence dans l'espace métrique $(\overline{B}, d)$ est équivalente à la convergence simple, c'est-à-dire que $y^{(k)} = (y_n^{(k)})_{n\geq 0}$ converge vers $y = (y_n)_{n\geq 0}$ dans $(\overline{B}, d)$ si et seulement si pour tout $n \geq 0$,

$$\lim_{k\to\infty} y_n^{(k)} = y_n.$$

   (c) Montrer que l'espace $(\overline{B}, d)$ est complet.

4. Soit $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de ℓ^1 qui converge faiblement vers 0.
   (a) Remarquer que pour tout entier n, on a
   $$\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = 0.$$
   (b) On fixe $\varepsilon > 0$ et on considère, pour $n \geq 0$, l'ensemble
   $$F_n = \{y \in \overline{B} : |\langle x^k, y\rangle| \leq \varepsilon,\ \forall k \geq n\}.$$
   Montrer que F_n est un fermé de $(\overline{B}, d)$ et que
   $$\overline{B} = \bigcup_{n\geq 0} F_n.$$
   (c) En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide.
   (d) En remarquant que F_{n_0} est convexe et symétrique par rapport à 0, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(0,\delta) \subset F_{n_0}$. En déduire qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout $b \in \overline{B}$ vérifiant $b_n = 0$ pour $n \leq N_0$, on a $b \in F_{n_0}$.
   (e) En déduire que pour tout $k \geq n_0$, on a
   $$\|x^{(k)}\| \leq \sum_{n=0}^{N_0} |x_n^{(k)}| + \varepsilon.$$
   (f) Conclure finalement que $(x^{(k)})_k$ converge fortement vers 0 dans ℓ^1.

Exercice 4 Soit $E = C([0,\pi], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,\pi]} |f(t)|.$$
On fixe $\varphi \in E$ et on considère $T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$T(f) = \int_0^\pi f(t)\varphi(t)\, dt, \qquad f \in E.$$
(a) Montrer que T est une application linéaire et continue.
(b) On suppose dans cette question que pour tout $t \in [0,\pi]$, $\varphi(t) \geq 0$. Calculer $\|T\|$.
(c) On suppose maintenant que $\varphi(t) = \cos(t)$, $t \in [0,\pi]$. Calculer $\|T\|$.

M402. Analyse : devoir maison n°1. Éléments de correction.

2016-2017.

Exercice 1 : (a)(i) La relation $\sim$ est réflexive : pour toute suite de Cauchy $(x_n)_n$, on a $(x_n) \sim (x_n)$ car $\lim_{n\to+\infty}(x_n - x_n) = 0$!

La relation $\sim$ est symétrique car si (x_n) et (y_n) sont deux suites de Cauchy telles que $(x_n)\sim(y_n)$, alors $\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$. D'où $(y_n)\sim(x_n)$.

La relation $\sim$ est transitive : si $(x_n), (y_n), (z_n)$ sont trois suites de Cauchy telles que $(x_n)\sim(y_n)$ et $(y_n)\sim(z_n)$ alors on a $\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}(y_n - z_n) = 0$.

En écrivant que $x_n - z_n = (x_n - y_n) + (y_n - z_n)$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(x_n - z_n) = 0$, d'où $(x_n)\sim(z_n)$.

La relation $\sim$ est donc réflexive, symétrique et transitive. C'est une relation d'équivalence.

(ii) Si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, l'inégalité triangulaire implique que $\big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| \leq \|x_n - x_m\|$, $\forall n, m$.

Comme $\lim_{n,m\to+\infty}\|x_n - x_m\| = 0$, on en déduit que $\lim_{n,m\to+\infty}\big(\|x_n\| - \|x_m\|\big) = 0$, ce qui prouve que la suite

$(\|x_n\|)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet.

Ainsi $(\|x_n\|)_n$ converge.

Montrons maintenant que $\|\cdot\|_0$ est bien définie. Autrement dit, il s'agit de montrer que si $[(x_n)] = [(y_n)]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n\| = \lim\limits_{n\to+\infty}\|y_n\|$. Or $[(x_n)] = [(y_n)]$ implique que $(x_n) \sim (y_n)$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.

En utilisant une nouvelle fois l'inégalité triangulaire, on a

$$\big|\|x_n\| - \|y_n\|\big| \leqslant \|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\|x_n\| - \|y_n\|) = 0$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n\|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\|y_n\|$ existent, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n\| = \lim\limits_{n\to+\infty}\|y_n\|$.

(iii) L'application $\|\cdot\|_0 : \hat{X} \longrightarrow [0,+\infty[$ est une norme car : * si $\|[(x_n)]\|_0 = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n\| = 0$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Ainsi $[(x_n)] \sim 0_{\hat{X}}$,

où $0_{\hat{X}}$ est la classe d'équivalence de la suite identiquement nulle.

* si $(\lambda, [(x_n)_n]) \in \mathbb{K} \times \hat{X}$, on a :

$$\| \lambda [(x_n)_n] \|_0 = \| [(\lambda x_n)_n] \|_0 = \lim_{n \to +\infty} \| \lambda x_n \| = |\lambda| \lim_{n \to +\infty} \| x_n \| =$$

$$= |\lambda| \, \| [(x_n)_n] \|_0$$

* si $([(x_n)_n], [(y_n)_n]) \in \hat{X} \times \hat{X}$, on a :

$$\| [(x_n)_n] + [(y_n)_n] \|_0 = \| [(x_n + y_n)_n] \|_0 = \lim_{n \to +\infty} \| x_n + y_n \|$$

Or comme $\|.\|$ est une norme sur X, on a :

$$\| x_n + y_n \| \leq \| x_n \| + \| y_n \|$$

et comme chacun des termes de cette inégalité possède une limite, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \| x_n + y_n \| \leq \lim_{n \to +\infty} \| x_n \| + \lim_{n \to +\infty} \| y_n \|$,

ce qui donne $\| [(x_n)_n] + [(y_n)_n] \|_0 \leq \| [(x_n)_n] \|_0 + \| [(y_n)_n] \|_0$.

Ceci achève de prouver que $\|.\|_0$ est une norme.

<u>Montrons que $(\hat{X}, \|.\|_0)$ est complet.</u>

Soit $(z^{(k)})_k$ une suite de Cauchy dans $\hat{X}$, $z^{(k)} = [(z^{(k)}_n)_n]$.

Pour $x \in X$, on notera dans la suite $[x]$ la classe des suites qui convergent vers x (qui contient en particulier <u>la suite constante égale à x</u> !).

On sait que pour tout $k \geq 1$, la suite $(z_n^{(k)})_n$ est une suite de Cauchy dans X.

Donc pour tout $k \geq 1$, il existe $N_0(k) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \geq p \geq N_0(k) \implies \| z_n^{(k)} - z_p^{(k)} \| \leq 2^{-k}.$$

D'où $\underline{\| z^{(k)} - [z_{N_0(k)}^{(k)}] \|_0 = \lim_{n \to +\infty} \| z_n^{(k)} - z_{N_0(k)}^{(k)} \| \leq 2^{-k}}$ (*)

Ainsi, on obtient, avec l'inégalité triangulaire, que :

$$\begin{aligned}\| z_{N_0(k)}^{(k)} - z_{N_0(p)}^{(p)} \| &= \| [z_{N_0(k)}^{(k)}] - [z_{N_0(p)}^{(p)}] \|_0 \\ &\leq \| [z_{N_0(k)}^{(k)}] - z^{(k)} \|_0 + \| z^{(k)} - z^{(p)} \|_0 + \| z^{(p)} - [z_{N_0(p)}^{(p)}] \|_0 \\ &\leq 2^{-k} + 2^{-p} + \| z^{(k)} - z^{(p)} \|_0 .\end{aligned}$$

On a $\lim_{k,p \to +\infty} \left(2^{-k} + 2^{-p} + \| z^{(k)} - z^{(p)} \|_0 \right) = 0$ et donc ceci prouve que la suite $(z_{N_0(k)}^{(k)})_k$ est une suite de Cauchy dans X. Notons $z := [(z_{N_0(k)}^{(k)})_k] \in \hat{X}$ et montrons que $(z^{(k)})_k$ converge vers z dans $\hat{X}$.

On a : $\| z^{(k)} - z \|_0 \leq \| z^{(k)} - [z_{N_0(k)}^{(k)}] \|_0 + \| [z_{N_0(k)}^{(k)}] - z \|_0$

$$\leq 2^{-k} + \| [z_{N_0(k)}^{(k)}] - z \|_0 ,$$

d'après (*).

On obtient donc

$$\| z^{(k)} - z \|_0 \leq 2^{-k} + \lim_{p \to +\infty} \| z_{N_0(k)}^{(k)} - z_{N_0(p)}^{(p)} \|$$

Comme $\left(z_{N_0(k)}^{(k)} \right)_k$ est une suite de Cauchy dans X,

on a que $\displaystyle \lim_{\substack{p \to +\infty \\ k \to +\infty}} \| z_{N_0(k)}^{(k)} - z_{N_0(p)}^{(p)} \| = 0$,

d'où $\displaystyle \lim_{k \to +\infty} \| z^{(k)} - z \|_0 = 0$, ce qui prouve la

convergence de $(z^{(k)})_k$ dans $(\hat{X}, \|\cdot\|_0)$.

Ainsi $(\hat{X}, \|\cdot\|_0)$ est complet.

(b)(i) Pour $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$i(\lambda x + y) = [x + \lambda y] = [x] + \lambda [y] = i(x) + \lambda i(y).$$

Donc i est linéaire.

D'autre part, on a par définition de la norme $\|\cdot\|_0$, on a:

$$\| i(x) \|_0 = \| [x] \|_0 = \| x \| \quad , \quad x \in X.$$

Ceci prouve que i est une isométrie

(b)(ii). Soit $x = [(x_n)_n] \in \hat{X}$.

On a $\|i(x_p) - x\|_0 = \|[(x_p - x_n)_n]\|_0$ ⑥

$$= \lim_{n\to+\infty} \|x_p - x_n\|$$

Comme par définition $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de X

on a $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ p\to+\infty}} \|x_p - x_n\| = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty} \|i(x_p) - x\|_0 = 0$, ce qui prouve que

$(i(x_p))_p$, suite de $\operatorname{Im} i$, converge vers x dans $\hat{X}$.

Ceci étant vrai pour tout élément $x \in \hat{X}$, on en

déduit que $\operatorname{Im} i$ est dense dans $\hat{X}$.

(c) Soit $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espace de Banach tel qu'il

existe une application $j : X \longrightarrow Y$ linéaire isométrique

et d'image dense.

Pour $x \in X$, posons

$$T(i(x)) = j(x).$$

Comme i est isométrique donc en particulier injective,

T est bien défini.

D'autre part, T est linéaire sur $\operatorname{Im} i$

Enfin, $\|T(i(x))\|_Y = \|j(x)\|_Y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } j \text{ isométrie}}}{=} \|x\|_X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } i \text{ isométrie.}}}{=} \|i(x)\|_0$

Ainsi T est une isométrie de $\mathrm{Im}\, i \subset \hat{X}$ dans Y.

Comme $\mathrm{Im}\, i$ est dense dans $\hat{X}$, T s'étend en une isométrie de $\hat{X}$ dans Y.

Il reste à montrer que T est surjectif.

Pour cela remarquons que $\mathrm{Im}\, j \subset \mathrm{Im}\, T \subset Y$.

Comme $\mathrm{Im}\, j$ est dense dans Y, on en déduit que

$\overline{\mathrm{Im}\, T} = Y$.

Mais T étant une isométrie entre deux espaces de Banach, son image est nécessairement fermée.

Ainsi $\mathrm{Im}\, T = \overline{\mathrm{Im}\, T} = Y$, ce qui achève de prouver que T est un isomorphisme isométrique.

$\boxed{\text{Exercice (2)}}$ On introduit $\mathcal{B} = c_0 \oplus \mathbb{R}\mathbb{1}$, où $\mathbb{1}$ est la fonction définie sur K identiquement égale à 1.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de $C(K,\mathbb{R})$ (notons que $\mathbb{1} \notin \mathcal{A}$). ⑧

On a $\mathbb{1} \in \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ sépare les points de K (car $\mathcal{A}$ sépare les points de K et $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$).

Le théorème de Stone-Weierstrass implique alors que $\mathcal{B}$ est dense dans $C(K,\mathbb{R})$: $\overline{\mathcal{B}} = C(K,\mathbb{R})$.

<u>Montrons maintenant</u> que $\overline{\mathcal{A}} = \{ f \in C(K,\mathbb{R}) : f(a) = 0 \}$

L'inclusion $\subset$ est immédiate car les fonctions de $\mathcal{A}$ s'annulent en a, donc si $f \in \overline{\mathcal{A}}$, il existe $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{A}$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

En particulier $|f(a)| = |f(a) - f_n(a)| \leq \|f_n - f\|_\infty$.

car $f_n(a) = 0$

Ainsi en faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient que $f(a) = 0$.

Pour l'inclusion réciproque $\supset$, remarquons que si $f \in C(K,\mathbb{R})$ et $f(a) = 0$ alors par densité de $\mathcal{B}$ dans $C(K,\mathbb{R})$, il existe $g_n = f_n + \lambda_n \mathbb{1} \in \mathcal{B}$, $f_n \in \mathcal{A}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, telle que $\|g_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$.

En particulier, on a $g_n(a) - f(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Or : $g_n(a) = f_n(a) + \lambda_n = \lambda_n$ car $f_n \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow f_n(a) = 0$

et $f(a) = 0$.

D'où on en déduit que $\lambda_n \longrightarrow 0$.

Ainsi $\|f_n - f\|_\infty = \|g_n - f - \lambda_n \mathbb{1}\|_\infty$

$\leq \|g_n - f\|_\infty + |\lambda_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ceci prouve que $f \in \overline{\mathcal{C}_0}$.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

$\boxed{(a)}$ Remarquons que pour tout $u = (u_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$ et $v = (v_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$, on a :

$$|u_n v_n| \leq \|u\|_\infty |v_n|.$$

Comme la série $\sum_n |v_n|$ converge, la série $\sum_n u_n v_n$ converge absolument donc converge et $\varphi_u(v)$ est bien défini. Il résulte immédiatement des propriétés sur les sommes de séries convergentes que si $v, w \in \ell^1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda v_n + w_n) u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} w_n u_n ,$$

ce qui donne $\varphi_u(\lambda v + w) = \lambda \varphi_u(v) + \varphi_u(w)$.

Ainsi φ_u est linéaire. Remarquons d'autre part que si $u \in l^\infty$ et $v \in l^1$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{n=0}^{N} u_n v_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n||v_n| \leqslant \|u\|_\infty \sum_{n=0}^{N} |v_n|$$

En passant à la limite quand $N \longrightarrow +\infty$, on obtient que

$$|\varphi_u(v)| \leqslant \|u\|_\infty \|v\|_1 .$$

Ceci prouve que φ_u est continue et $\|\varphi_u\| \leqslant \|u\|_\infty$.

Pour montrer l'égalité de la norme, remarquons que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq

$$\|u\|_\infty - \varepsilon \leqslant |u_N| \leqslant \|u\|_\infty .$$

Considérons $v := (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ N^{\text{ième}} \text{ position}}}{1}, 0, \dots)$.

On a $v \in l^1$ et $\|v\|_1 = 1$.

De plus, $\varphi_u(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = u_N v_N = u_N$.

Ainsi $|\varphi_u(v)| = |u_N| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon$.

Ceci permet d'en déduire que $\|\varphi_u\| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon$, et comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient que $\|\varphi_u\| \geq \|u\|_\infty$ et donc finalement $\|\varphi_u\| = \|u\|_\infty$.

$\boxed{(b)}$ On a vu au (a) que, pour $u \in \ell^\infty$, on a

$$T(u) \in (\ell^1)^* \text{ et } \|T(u)\|_{(\ell^1)^*} = \|\varphi_u\| = \|u\|_\infty$$

De plus, il est facile de vérifier que T est linéaire.

Ainsi, T est une isométrie linéaire de ℓ^∞ dans $(\ell^1)^*$.

La seule chose qu'il reste à démontrer est la surjectivité de T. Soit donc $\varphi \in (\ell^1)^*$. On cherche $u \in \ell^\infty$ tel que $\varphi_u = \varphi$. Si on applique cette égalité à

$$e^{(n)} := (0, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n^{\text{ième}} \text{ position}}}{1}, 0, 0, \text{———}) \in \ell^1,$$

on obtient que

$$\varphi_u(e^{(n)}) = \varphi(e^{(n)})$$
$$\|$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k e_k^{(n)}$$
$$\|$$
$$u_n$$

Posons donc $u_n = \varphi(e^{(n)})$, $n \geq 0$.

Remarquons que $\sup\limits_{n\geq 0} |\varphi(e^{n})| \leq \|\varphi\|_{(\ell^1)^*}$. (12)

Ainsi $u = (u_n)_{n\geq 0} \in \ell^{\infty}$.

De plus, par construction, pour tout $n \geq 0$, on a
$$\varphi(e^{(n)}) = \varphi_u(e^{(n)}).$$

Par linéarité, on obtient que pour toute suite $v \in \mathrm{Vect}(e^{(n)} : n\geq 0)$

on a : $\underline{\varphi(v) = \varphi_u(v)}$. $(*)$

Remarquons alors que $\mathrm{Vect}(e^{(n)} : n\geq 0)$ est dense dans ℓ^1 :

en effet, si $v = (v_\ell)_{\ell\geq 0} \in \ell^1$, on a
$$v - \sum_{k=0}^{n} v_k e^{(k)} = (0, 0, \dots, 0, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots)$$

et donc $\left\| v - \sum_{k=0}^{n} v_k e^{(k)} \right\|_1 = \sum_{k\geq n+1} |v_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k e^{(k)} = v$ et comme

$\sum_{k=0}^{n} v_k e^{(k)} \in \mathrm{Vect}(e^{(n)} : n\geq 0)$, cela prouve

la densité de $\mathrm{Vect}(e^{(n)} : n\geq 0)$

D'après $(*)$, φ et φ_u coïncident sur un sous espace dense

et comme elles sont continues, elles coïncident sur tout l'espace. Ainsi $\varphi = \varphi_u = T(u)$ et T est surjectif. Cela achève de prouver que T est un isomorphisme isométrique de l^∞ sur $(l^1)^*$.

2 Soit $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ linéaire continue.

On a $|\varphi(x_n)| \leq \|\varphi\| \|x_n\|$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = 0$, on en déduit que

$\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = 0$, ce qui prouve que $(x_n)_n$ converge faiblement vers 0.

(3(a)) Remarquons que $0 \leq 2^{-n} \dfrac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|} \leq 2^{-n}$

et la série $\sum\limits_n 2^{-n}$ converge. Ainsi la série $\sum\limits_n 2^{-n} \dfrac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$ converge et donc

$d : \overline{B} \times \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie.

D'autre part, on a :

* $\forall\, x,y \in \overline{B} \times \overline{B}$, $d(x,y) = d(y,x)$
* $d(x,y) = 0 \iff \forall n \geq 0$, $2^{-n} \dfrac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} = 0$

$\iff \forall n \geq 0$, $|x_n - y_n| = 0 \iff \forall n \geq 0$, $x_n = y_n$, d'où $d(x,y)=0 \iff x=y$.

* Remarquons que $t \longmapsto \varphi(t)=\dfrac{t}{1+t}$ est croissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi pour tous $a,b,c \geqslant 0$, $a \leq b+c$, on a

$$\frac{a}{1+a}=\varphi(a)\leq\varphi(b+c)=\frac{b+c}{1+b+c}=\frac{b}{1+b+c}+\frac{c}{1+b+c}$$

$$\frac{a}{1+a}\leq\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}.$$

Soit maintenant $x,y,z\in\overline{B}$. Comme

$$|x_n-y_n|\leq|x_n-z_n|+|z_n-y_n|,$$

on peut appliquer ce qui précède à $a=|x_n-y_n|$, $b=|x_n-z_n|$, $c=|z_n-y_n|$, ce qui donne :

$$\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\leq\frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}+\frac{|z_n-y_n|}{1+|z_n-y_n|}.$$

En multipliant par 2^{-n} et en sommant sur n, on obtient

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y).$$

Ainsi d est une distance.

$\boxed{3(b)}$ Supposons que $y^{(k)}=(y^{(k)}_n)_n$ converge vers $y=(y_n)_n$ dans $(\overline{B},d)$.

Fixons $p \geqslant 0$. On a :

$$2^{-p} \frac{|y_p^{(k)} - y_p|}{1+|y_p^{(k)}-y_p|} \leqslant d(y^{(k)}, y)$$

et donc $\quad |y_p^{(k)} - y_p| \leqslant \dfrac{2^p d(y^{(k)}, y)}{1 - 2^p d(y^{(k)}, y)}$,

pour k suffisamment grand pour que $1 - 2^p d(y^{(k)}, y) > 0$.

En faisant tendre $k \longrightarrow +\infty$, comme $d(y^{(k)}, y) \longrightarrow 0$,

on obtient que $\lim\limits_{k \to +\infty} |y_p^{(k)} - y_p| = 0$.

Ainsi pour tout $p \geqslant 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} y_p^{(k)} = y_p$

Réciproquement, supposons que $\forall p \geqslant 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} y_p^{(k)} = y_p$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et commençons par choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{p \geqslant N} 2^{-p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc

$$\sum_{p\geqslant N} 2^{-p} \cdot \frac{|y_p^{(k)} - y_p|}{1+|y_p^{(k)} - y_p|} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

Maintenant, comme pour tout $p \geq 0$, on a : $\lim_{\ell \to +\infty} y_p^{(\ell)} = y_p$,

il existe $K_p \in \mathbb{N}$ / $\ell \geq K_p \Rightarrow 2^{-p} \dfrac{|y_p^{(\ell)} - y_p|}{1 + |y_p^{(\ell)} - y_p|} \leq \dfrac{\varepsilon}{2N}$

D'où pour $k \geq \max(K_0, K_1, \dots, K_{N-1})$, on a

$$\forall p \in [\![0, N-1]\!], \quad 2^{-p} \frac{|y_p^{(k)} - y_p|}{1 + |y_p^{(k)} - y_p|} \leq \frac{\varepsilon}{2N}$$

et donc
$$\sum_{p=0}^{N-1} 2^{-p} \frac{|y_p^{(k)} - y_p|}{1 + |y_p^{(k)} - y_p|} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (**)$$

En rassemblant $(*)$ et $(**)$, on obtient que pour tout $k \geq \max(K_0, K_1, \dots, K_{N-1})$, on a :

$$d(y^{(k)}, y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi $(y^{(\ell)})_k$ converge vers y dans $(\mathcal{B}, d)$.

(c) Soit $(y^{(\ell)})_\ell$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{B}, d)$.

Pour tout $n \geq 0$, on a

$$|y_n^{(k)} - y_n^{(p)}| \leq 2^n \frac{d(y^{(\ell)}, y^{(p)})}{1 - 2^n d(y^{(\ell)}, y^{(p)})}$$

et donc $\lim_{\ell, p \to +\infty} |y_n^{(\ell)} - y_n^{(p)}| = 0$.

Ainsi $(y_n^{(k)})_k$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$

donc elle converge vers $y_n \in \mathbb{C}$.

Remarquons que comme $|y_n^{(k)}| \leq \|y^{(k)}\|_\infty \leq 1$, on

a par passage à la limite que $|y_n| \leq 1$.

Ainsi $y = (y_n)_n \in \overline{B}$.

Il reste à remarquer que comme $\forall n \geqslant 0$, on a :

$\lim\limits_{k \to +\infty} y_n^{(k)} = y_n$, la question 3(b) implique que

$(y^{(k)})_k$ converge vers y dans $(\overline{B}, d)$.

Ainsi $(\overline{B}, d)$ est complet.

$\boxed{4(a)}$ Par définition de la convergence faible, on a

$$\forall \varphi \in (\ell^1)^*, \quad \lim_{k \to +\infty} \varphi(x^{(k)}) = 0$$

Considérons $u^{(n)} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \in \ell^\infty$ et

$\varphi = \varphi_{u^{(n)}}$. Alors $\varphi_{u^{(n)}}(x^{(k)}) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} u_p^{(n)} x_p^{(k)}$

$$= x_n^{(k)}$$

D'où $\lim\limits_{k \to +\infty} x_n^{(k)} = 0$.

$\boxed{4(b)}$ Soit $(y^{(p)})_p$ une suite d'éléments de F_n qui converge vers y dans $(\overline{B}, d)$. On veut montrer que $y \in F_n$, autrement dit que pour tout $k \geq n$, on a : $|<x^{(k)}, y>| \leq \varepsilon$.

Fixons donc $k \geq n$ et écrivons

$$|<x^{(k)}, y>| = \left|\sum_{l=0}^{+\infty} x_l^{(k)} y_l\right| \leq \left|\sum_{l=0}^{+\infty} x_l^{(k)} y_l^{(p)}\right| + \left|\sum_{l=0}^{+\infty} x_l^{(k)} (y_l - y_l^{(p)})\right|$$

$$= |<x^{(k)}, y^{(p)}>| + \left|\sum_{l=0}^{+\infty} x_l^{(k)} (y_l - y_l^{(p)})\right|$$

$$\leq \varepsilon + \sum_{l=0}^{+\infty} |x_l^{(k)}| \, |y_l - y_l^{(p)}|, \quad (*)$$

la dernière inégalité provenant du fait que $y^{(p)} \in F_n$.

Comme $x^{(k)} \in l^1$, pour tout $h > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq

$$\sum_{l=N}^{+\infty} |x_l^{(k)}| \leq \frac{h}{2} .$$

On peut alors décomposer la deuxième somme qui apparaît dans $(*)$ de la façon suivante (en utilisant le fait que y et $y^{(p)} \in \overline{B}$ donc $\forall l$, $|y_l| \leq 1$ et $|y_l^{(p)}| \leq 1$) :

$$\sum_{l=0}^{+\infty} |x_l^{(k)}| \, |y_l - y_l^{(p)}| \leq \sum_{l=0}^{N-1} |x_l^{(k)}| \, |y_l - y_l^{(p)}| + 2 \sum_{l \geq N} |x_l^{(k)}|$$

$$\leq h + \sum_{l=0}^{N-1} |x_l^{(k)}| \, |y_l - y_l^{(p)}|$$

D'où avec $(*)$, on en déduit que :

$$|<x^{(k)}, y>| \leq \varepsilon + \eta + \sum_{l=0}^{N-1} |x_l^{(k)}| \, |y_l - y_l^{(p)}|$$ 19

D'après (3b), comme $(y^{(p)})_p$ converge vers y dans $(\overline{B}, d)$,

on a pour tout $l \in [\![0, N-1]\!]$, $\lim\limits_{p \to +\infty} |y_l - y_l^{(p)}| = 0$

En passant à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$, on en déduit

que $|<x^{(k)}, y>| \leq \varepsilon + \eta$.

Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$, on obtient finalement

que $|<x^{(k)}, y>| \leq \varepsilon$, $\forall k \geq n$

et donc $y \in F_n$. Ainsi F_n est un fermé de $(\overline{B}, d)$.

Montrons que $\overline{B} = \bigcup\limits_{n \geq 0} F_n$.

Soit $y \in \overline{B} \subset l^\infty$. Comme $(x^{(k)})_k$ tend faiblement vers 0,

on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \varphi_y(x^{(k)}) = 0$, i.e. que $\lim\limits_{k \to +\infty} <x^{(k)}, y> = 0$.

Ainsi, il existe n_0 tel que $\forall k \geq n_0$, on a $|<x^{(k)}, y>| \leq \varepsilon$.

Autrement dit, $y \in F_{n_0} \subset \bigcup\limits_{n \geq 0} F_n$.

Ceci prouve que $\overline{B} \subset \bigcup\limits_{n \geq 0} F_n$ et l'inclusion

réciproque est immédiate.

$\boxed{(c)}$ On a $\overline{B} = \bigcup\limits_{n \geq 0} F_n$

$(\overline{B}, d)$ est complet et F_n est fermé dans $(\overline{B}, d)$.

Ainsi d'après le théorème de Baire, il existe un entier n_0 tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$.

(d) Il est facile de voir que si $y \in F_n$ alors $-y \in F_n$: en effet, tout d'abord $y \in F_n \Rightarrow y \in \overline{B} \Rightarrow -y \in \overline{B}$ et d'autre part, $y \in F_n \Rightarrow \forall k \geq n$, $|< x^{(k)}, y >| \leq \varepsilon$, et comme $|< x^{(k)}, -y >| = |- < x^{(k)}, y >| = |< x^{(k)}, y >| \leq \varepsilon$ on en déduit que $-y \in F_n$.

On vérifie aussi que F_n est convexe car si $y_1, y_2 \in F_n$ et $\lambda \in [0, 1]$ alors $\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in \overline{B}$ et

$$< x^{(k)}, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 > = \lambda < x^{(k)}, y_1 > + (1-\lambda) < x^{(k)}, y_2 >,$$

d'où

$$|< x^{(k)}, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 >| \leq \lambda |< x^{(k)}, y_1 >| + (1-\lambda) |< x^{(k)}, y_2 >|$$
$$\leq \lambda \varepsilon + (1-\lambda) \varepsilon = \varepsilon,$$

pour tout $k \geq n$.

Ainsi $\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in F_n$ et donc F_n est convexe.

Maintenant d'après la question (c), on a $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$.

Autrement dit $\exists\, a \in F_{n_0}$ et $\delta > 0$ tels que

$$B(a, \delta) \subset F_{n_0}.$$

Si $x \in B(0, \delta)$, on a $x = \frac{1}{2}\left[(x+a) + (x-a)\right]$

Remarquons que $x + a \in B(a, \delta) \subset F_{n_0}$ et

$x - a = -(a-x)$ avec $a - x \in B(a,\delta) \subset F_{n_0}$

d'où comme F_{n_0} est symétrique par rapport à 0, on a aussi $x - a \in F_{n_0}$.

Ainsi $x+a$ et $x-a$ sont dans F_{n_0} et par convexité, on a aussi $x = \frac{1}{2}\left((x+a)+(x-a)\right) \in F_{n_0}$.

Par conséquent $B(0,\delta) \subset F_{n_0}$.

Il existe un entier N_0 tel que

$$\sum_{n \geq N_0+1} \frac{1}{2^n} < \delta .$$

Maintenant si $b \in \mathcal{B}$ et $b_n = 0$ pour $n \leq N_0$, on a :

$$d(0,b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|b_n|}{1+|b_n|}$$

$$= \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|b_n|}{1+|b_n|}$$

$$\leq \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \delta .$$

Ainsi $b \in B(0,\delta) \subset F_{n_0}$.

(e) Fixons $k \geq n_0$ et définissons

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq N_0 \\ x_n^{(k)}/|x_n^{(k)}| & \text{si } n \geq N_0+1 \text{ et } x_n^{(k)} \neq 0 \\ 1 & \text{si } n \geq N_0+1 \text{ et } x_n^{(k)} = 0. \end{cases}$$

On a $b := (b_n)_n \in \overline{B}$ et $b_n = 0$ pour $n \leq N_0$.

Ainsi d'après (d), on a $b \in F_{n_0}$.

De plus, comme pour $n \geq N_0+1$, on a $b_n x_n^{(k)} = |x_n^{(k)}|$,

on en déduit que

$$< x^{(k)}, b > = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^{(k)} b_n = \sum_{n=N_0+1} b_n x_n^{(k)} = \sum_{n=N_0+1} |x_n^{(k)}|$$

d'où

$$\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |x_n^{(k)}| = |< x^{(k)}, b >| \leq \varepsilon .$$

Ainsi, on obtient que

$$\|x^{(k)}\|_1 = \sum_{n=0}^{N_0} |x_n^{(k)}| + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |x_n^{(k)}|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N_0} |x_n^{(k)}| + \varepsilon .$$

(f) D'après 41(a), on a $\lim_{k \to +\infty} x_n^{(k)} = 0$ et donc

comme la somme est finie, on a aussi

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{N_0} |x_n^{(k)}| = 0 .$$

Par conséquent, $\exists\, n_1$ tel que si $k \geq n_1$ alors

$$\sum_{n=0}^{N_0} |x_n^{(k)}| \leq \varepsilon .$$

D'où si $k \geq \max(n_0, n_1)$, on obtient avec 41e) que

$\|x^{(k)}\|_1 \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve que $(x^{(k)})_k$

converge fortement vers 0.

Exercice 4.

(a) La linéarité de T provient de la linéarité de l'intégrale.

Montrons maintenant que T est continue.

On a $$|T(f)| \leq \int_0^\pi |f(t)||\varphi(t)|dt \leq \|f\|_\infty \int_0^\pi |\varphi(t)|dt$$

Ainsi T est continue et $\|T\| \leq \int_0^\pi |\varphi(t)|dt$.

(b) D'après (b), on a $$\|T\| \leq \int_0^\pi |\varphi(t)|dt$$
$$= \int_0^\pi \varphi(t)\, dt,$$

car $\varphi(t) \geq 0$, $t \in [0,\pi]$.

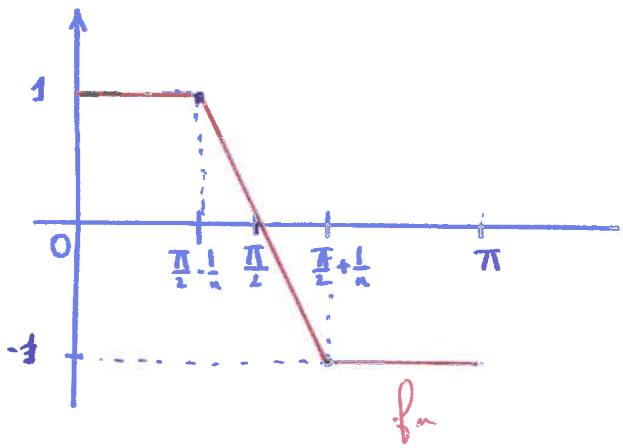
D'autre part, on a $T(\mathbb{1}) = \int_0^\pi \varphi(t)\, dt$.

D'où $$\int_0^\pi \varphi(t)\, dt \leq \|T\| \, \|\mathbb{1}\|_\infty = \|T\|$$

Ainsi $\|T\| = \int_0^\pi \varphi(t) dt$.

(c) D'après (a), on a
$$\|T\| \leq \int_0^\pi |\cos t| dt = \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt - \int_{\pi/2}^\pi \cos t\, dt.$$

Considérons $f_n \in E$ définie par :



On a $$T(f_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} f_n(t)\cos t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}} f_n(t)\cos t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}}^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \cos t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\pi} \cos t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}} f_n(t)\cos t\,dt$$

D'où $$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{m}} \cos t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\pi} \cos t\,dt = T(f_n) - \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}} f_n(t)\cos t\,dt.$$

On obtient donc

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \cos t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\pi} \cos t\,dt\right| \leq \|T\| + \frac{2}{n}$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ cela donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\,dt \leq \|T\|.$$

On obtient donc finalement que

$$\|T\| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \, dt$$

$$= \Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

i.e $\|T\| = 2$.

Université de Lille 1 Sciences et Technologies

Master 1 mathématiques

Analyse

Devoir surveillé du 4 novembre 2016

Durée : 2 heures

Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet comporte 4 exercices indépendants qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

Exercice 1 On rappelle que c_0 est l'espace des suites complexes qui convergent vers 0 et c_0 muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|, \qquad x = (x_n)_{n\geq 1} \in c_0,$$

est un espace de Banach. Soit $a = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On suppose que a vérifie la propriété suivante : pour toute suite $x = (x_n)_{n\geq 1} \in c_0$, la série $\sum_n a_n x_n$ est convergente.

(1) Pour tout $N \geq 1$, on définit une forme linéaire $\Phi_N : c_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\Phi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n.$$

Montrer que Φ_N est continue et calculer $\|\Phi_N\|$.

(2) Montrer que $a \in \ell^1$.

Exercice 2 Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. On désigne par T une application linéaire de E dans F et par S une application linéaire **injective** de F dans G. On suppose que ST et S sont continues.

Dans les questions (1) et (2) ci-dessous (qui sont indépendantes) on ajoute des hypothèses supplémentaires qui suffisent à assurer, dans les deux cas, la continuité de T.

(1) On suppose que les espaces E et F sont complets. Montrer que T est continue.

(2) On suppose que F et G sont complets et que $S(F)$ est un fermé de G. Montrer que T est continue.

Exercice 3 Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Montrer qu'il n'existe pas sur $\mathbb{R}[X]$ de norme pour laquelle cet espace est un espace de Banach.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire les sous-espaces F_n des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 4 Soient $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles et F l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ admettant une limite finie en $+\infty$. On munit ces deux espaces de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_E = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad (f \in E) \quad \text{et} \quad \|g\|_F = \sup_{x\in[0,\infty[} |g(x)|, \quad (g \in F).$$

On rappelle que E et F munis de ces normes sont des espaces de Banach.

(1) Montrer que l'application $\Theta : E \longrightarrow F$ définie par $\Theta(f)(x) = f(e^{-x})$ est un isomorphisme isométrique de E sur F (c'est-à-dire une application linéaire, isométrique et bijective).

(2) Montrer que si E_0 est un sous-espace fermé de E, alors $\Theta(E_0)$ est fermée dans F.

(3) En déduire que pour tout sous-espace E_1 de E (non nécessairement fermé), on a $\overline{\Theta(E_1)} = \Theta(\overline{E_1})$.

(4) Soit $e_n(x) = e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$ et A le sous-espace vectoriel de F engendré par les e_n, $n \geq 0$. Montrer que A est dense dans F.

Exercice 1.

(1) Pour $x = (x_n)_{n\geq 1} \in c_0$, on a :

$$\left|\phi_N(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n||x_n| \leq \|x\|_\infty \sum_{n=1}^{N} |a_n|$$

Comme ϕ_N est linéaire, on en déduit que ϕ_N est continue

et $\|\phi_N\| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n|$.

Montrons que $\|\phi_N\| = \sum_{n=1}^{N} |a_n|$.

Considérons $x = (x_n)_{n\geq 1}$, où

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{\overline{a_n}}{|a_n|} & \text{si } a_n \neq 0,\ n \leq N \\ 0 & \text{si } a_n = 0,\ n \leq N \text{ ou } n > N \end{cases}$$

On a $\|x\|_\infty \leq 1$ et $x \in c_0$. De plus,

$$\phi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n = \sum_{n=1}^{N} |a_n|$$

D'où $$\sum_{n=1}^{N} |a_n| = |\phi_N(x)| \leq \|\phi_N\|,$$

et finalement $$\|\phi_N\| = \sum_{n=1}^{N} |a_n|.$$

(2) Par hypothèse, pour toute suite $x = (x_n)_{n \geq 1} \in c_0$ la série $\sum_n a_n x_n$ converge. Ainsi, pour toute suite $x = (x_n)_n \in c_0$, $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n x_n = \lim_{N \to +\infty} \phi_N(x)$ existe.

En particulier, $\forall x = (x_n)_{n \geq 1} \in c_0$,

$$\sup_{N \geq 1} |\phi_N(x)| < +\infty .$$

Le théorème de Banach Steinhaus implique alors que

$$\sup_{N \geq 1} \|\phi_N\| < +\infty .$$

Autrement dit, $\sup_{N \geq 1} \sum_{n=1}^{N} |a_n| < +\infty$ (*)

Comme $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ est une série à terme positifs, les sommes partielles sont croissantes et la propriété (*) implique que $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ et donc $a \in \ell^1$.

Exercice 2.

(1) $T : E \longrightarrow F$ est linéaire et E et F sont des espaces de Banach. On peut donc essayer d'appliquer le théorème du graphe fermé pour montrer que T est continue. Autrement dit, soit

$(x_n)_n$ une suite de E telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ dans E et $Tx_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$ dans F. Il s'agit de montrer que $y = Tx$. Comme ST est continue de E dans G, on a : $STx_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} STx$ dans G.

De même, comme S est continue de F dans G, on a

$$STx_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Sy \text{ dans } G.$$

Par unicité de la limite, on obtient que $STx = Sy$ et l'injectivité de S implique que $Tx = y$.

Ainsi le graphe de T est fermé et T est continue.

(2) L'application $\tilde{S} : F \longrightarrow S(F) \subset G$

$$x \longmapsto Sx$$

est injective et surjective donc bijective.

Comme $S(F)$ est supposé fermé dans G qui est complet, on en déduit que $S(F)$ est aussi complet.

Ainsi $\tilde{S}$ est une application linéaire, continue, bijective entre espace de Banach. Le théorème d'isomorphisme de Banach implique alors que $\tilde{S}^{-1}$ est aussi continue.

En écrivant que $T = \tilde{S}^{-1}(ST)$, on en déduit que T est continue comme composée d'application continue.

Exercice 3. Supposons qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ tel que $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

On a
$$\mathbb{R}[X] = \bigcup_{n \geq 0} F_n,$$
où
$$F_n = \{ p \in \mathbb{R}[X] : \deg p \leq n \}.$$
Comme $\dim F_n < +\infty$, les F_n sont des fermés de $\mathbb{R}[X]$. Le théorème de Baire permet alors d'affirmer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide. Autrement dit, $\exists\, p_0 \in F_{n_0}$,
$$\exists\, r > 0 \text{ tq } \quad \|p - p_0\| < r \implies p \in F_{n_0}.$$
Remarquons maintenant que cela implique que
$$\|p\| < r \implies p \in F_{n_0}.$$
En effet si $\|p\| < r$, écrivons
$$p = (p + p_0) - p_0.$$
Comme $\|p + p_0 - p_0\| = \|p\| < 1$ alors $p + p_0 \in F_{n_0}$

et comme F_{n_0} est un s.e.v., on en déduit que

$$p = (p+p_0) - p_0 \in F_{n_0}$$

Maintenant si $p \in \mathbb{R}[X]$, $p \neq 0$, alors $q := \frac{r}{2\|p\|} p \in \mathbb{R}[X]$

et vérifie $\|q\| = \frac{r}{2\|p\|}\|p\| = \frac{r}{2} < r$.

Ainsi $q \in F_{n_0}$. En utilisant une nouvelle fois que F_{n_0}

est un s.e.v, on en déduit que $p = \frac{2\|p\|}{r} q \in F_{n_0}$.

Ainsi $\mathbb{R}[X] = F_{n_0}$, ce qui est bien évidemment absurde.

Exercice 4.

(1) L'application $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow]0,1]$
$$x \longmapsto e^{-x}$$

est continue et bijective et $\varphi^{-1}(y) = -\ln y$, $y \in]0,1]$.

Si $f \in E$, l'application $\Theta(f) = f \circ \varphi$ est continue

sur $[0, +\infty[$ et
$$\lim_{x \to +\infty} \Theta(f)(x) = \lim_{x \to +\infty} f(e^{-x}) = f(0)$$

Donc $\Theta(f) \in F$ et Θ envoie E dans F.

D'autre part, on a

$$\|\Theta(f)\|_\infty = \sup_{x \in [0,+\infty[} |\Theta(f(x))| = \sup_{x \in [0,+\infty[} |f(\varphi(x))|$$

Comme $\varphi([0,+\infty[) =]0,1]$, on en déduit que

$$\|\Theta(f)\|_\infty = \sup_{y\in]0,1]} |f(y)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f \text{ est continue}}}{=} \sup_{y\in[0,1]} |f(y)| = \|f\|_\infty$$

Ainsi Θ est une isométrie, donc en particulier injective.

Il reste à montrer que $\Theta(E) = F$.

Soit $g \in F$, i.e g est continue sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ existe et $l \in \mathbb{R}$.

Posons alors
$$f(x) = \begin{cases} g(\varphi^{-1}(x)), & \text{si } x \in]0,1] \\ l & , \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} g(-\ln x), & x \in]0,1] \\ l & , x = 0 \end{cases}$$

Il est clair que f est continue sur $]0,1]$ et de plus

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(-\ln x) = \lim_{y\to+\infty} g(y) = l = f(0)$$

Donc f est continue sur $[0,1]$ et $f \in E$.

Il reste à remarquer que

$$\Theta(f)(x) = f(e^{-x}) = g(-\ln(e^{-x})) = g(x),\ \forall x \in [0,+\infty[$$

D'où $g = \Theta(f) \in \Theta(E)$ et donc $\Theta(E) = F$.

(2) Soit $g_n = \Theta(f_n)$, $f_n \in E_0$ telle que $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ dans F.

On a :
$$\|f_n - f_l\|_\infty = \|\Theta(f_n) - \Theta(f_l)\|_\infty = \|g_n - g_l\|_\infty \xrightarrow[n,l\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E complet

donc elle converge vers f. Comme $f_n \in E_0$ et

que E_0 est fermé, on en déduit que $f \in E_0$.

Par continuité de Θ, on a alors
$$g_n = \Theta(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Theta(f)$$ et par unicité

de la limite $g = \Theta(f) \in \Theta(E_0)$.

Ceci prouve donc que $\Theta(E_0)$ est fermé dans F.

(3) On a $E_1 \subset \overline{E_1}$ d'où

$$\Theta(E_1) \subset \Theta(\overline{E_1})$$

et comme d'après (2), $\Theta(\overline{E_1})$ est fermée, on en

déduit que $\overline{\Theta(E_1)} \subset \Theta(\overline{E_1})$.

D'autre part si $g \in \Theta(\overline{E_1})$ alors $g = \Theta(f)$, $f \in \overline{E_1}$. Il existe alors $f_n \in E_1$ tq $f_n \longrightarrow f$

Par continuité de Θ, on en déduit alors que

$$\Theta(f_n) \longrightarrow \Theta(f) = g$$ et comme $\Theta(f_n) \in \Theta(E_1)$,

on obtient que $g \in \overline{\Theta(E_1)}$.

Ainsi $\Theta(\overline{E_1}) \subset \overline{\Theta(E_1)} \subset \Theta(\overline{E_1})$, d'où

l'égalité $\Theta(\overline{E_1}) = \overline{\Theta(E_1)}$.

(4) Notons $\varepsilon_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$, $n \geq 0$.

On a $$\Theta(\varepsilon_n)(x) = \varepsilon_n(e^{-x}) = e^{-nx} = e_n(x), \ x \in [0,+\infty[$$

Ainsi

$$\Theta(\mathcal{L}in(\varepsilon_n : n \geq 0)) = \mathcal{L}in(e_n : n \geq 0) = A$$

D'où

$$\overline{A} = \overline{\Theta(\mathcal{L}in(\varepsilon_n : n \geq 0))}$$

$$= \Theta\left(\overline{\mathcal{L}in(\varepsilon_n : n \geq 0)}\right) \text{ d'après (3)}$$

Or le théorème de Weierstrass assure que

$$\overline{\mathcal{L}in(\varepsilon_n : n \geq 0)} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = E.$$

D'où

$$\overline{A} = \Theta(E) = F \quad \text{car } \Theta \text{ est surjective.}$$

Ainsi A est dense dans F.