ANALYSE FONCTIONELLE ET THEORIE DES OPERATEURS

EXAMEN

–Durée 3h.–

Le sujet comporte 4 exercices indépendants qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Les notes de cours et de TD sont autorisées. Les notations utilisées sont celles du cours.

Exercice 1

Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit qu'un nombre complexe λ est une *valeur propre approchée* de T s'il existe une suite $(x_n) \subset H$ telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout n et

$$\lim_{n \to +\infty} \|(T - \lambda Id)x_n\| = 0.$$

On note par $\sigma_{ap}(T)$ l'ensemble des valeurs propres approchées de T et par $\sigma_p(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T.

(1) Montrer que $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$.

Indication : pour la deuxième inclusion, on pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \sigma(T)$.

(2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$.

(ii) Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|(T - \lambda Id)x\| \geq c\|x\|,$$

pour tout $x \in H$.

(iii) L'opérateur $T - \lambda Id$ est injectif et à image fermée.

Indication : on pourra montrer que (i) $\Longrightarrow$ (ii) par l'absurde, puis (ii) $\Longrightarrow$ (iii), et enfin (iii) $\Longrightarrow$ (i) par l'absurde et en utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach.

(3) En déduire que

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*)\}.$$

(4) Soient $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu - \lambda| < \|R_\lambda(T)\|^{-1}$. Montrer que $\mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, on a

$$\|R_\lambda(T)\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}.$$

(5) Soit $\lambda \in \partial\sigma(T)$-le bord du spectre de T.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}\backslash\sigma(T)$ telle que $\lambda_n \to \lambda$ et $\|R_{\lambda_n}(T)\| \to +\infty$, lorsque $n \to +\infty$.

(b) En déduire qu'il existe une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ dans H, $\|y_n\| = 1$, telle que $\|R_{\lambda_n}(T)y_n\| \to +\infty$, lorsque $n \to +\infty$.

(c) Soit
$$x_n = \frac{R_{\lambda_n}(T)y_n}{\|R_{\lambda_n}(T)y_n\|}, \qquad n \geq 1.$$
Vérifier que $\|x_n\| = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|(T - \lambda Id)x_n\| = 0$.

(d) Que peut-on en déduire ?

(6) On suppose dans cette question que T est compact. Montrer que $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.
Indication : on pourra utiliser les questions (1) et (5).

(7) On suppose dans cette question que T est normal.

(a) Montrer que si $T^*x = \lambda x$, alors $Tx = \bar{\lambda}x$.
Indication : on pourra montrer que $\|(T^* - \lambda Id)x\|^2 = \|(T - \bar{\lambda}Id)x\|^2$.

(b) En déduire que $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.
Indication : on pourra utiliser la question (3).

Exercice 2

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre formée des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1. Pour $f \in \mathcal{A}$, on pose
$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$
On désigne par α la fonction définie par $\alpha(t) = t$, $t \in [0,1]$.

(1) Montrer que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach unitaire et commutative.

(2) Déterminer l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}$.

(3) En déduire que si $f \in \mathcal{A}$, alors
$$\sigma(f) = f([0,1]).$$

(4) Montrer que la sous-algèbre $\{p(\alpha) : p \in \mathbb{C}[X]\}$ est dense dans $\mathcal{A}$.
Indication : étant donnée $f \in \mathcal{A}$, on pourra utiliser le théorème de Weierstrass pour approcher f' par des polynômes.

(5) Montrer que $\hat{\alpha}$ réalise une bijection de $\mathrm{Car}(\mathcal{A})$ sur $[0,1]$.

(6) En déduire que les caractères de $\mathcal{A}$ sont les évaluations $E_t : f \longmapsto f(t)$, $t \in [0,1]$.

(7) En déduire que $\mathcal{A}$ est semi-simple.

Exercice 3

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire et commutative, $x \in \mathcal{A}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, contenant $\sigma(x)$.

(1) Justifier que si $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ et $\psi \in \mathrm{Car}(\mathcal{A})$, alors $f(\psi(x))$ est bien défini. Montrer alors que

$$\psi(f(x)) = f(\psi(x)).$$

(2) Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et on considère $\mathcal{A} = C(K)$ l'algèbre des fonctions continues sur K, munie de la norme infinie. Enfin α désigne la fonction définie sur K par $\alpha(z) = z$, $z \in K$.

(a) Déterminer $\sigma(\alpha)$.

(b) En utilisant la question (1) et la forme des caractères de $C(K)$, montrer que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant K, alors

$$f(\alpha) = f_{|K},$$

où $f_{|K}$ désigne la restriction de f à K.

(c) Retrouver ainsi la formule $\sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha))$.

Exercice 4

Soient H un espace de Hilbert complexe, N un opérateur normal sur H. On suppose qu'il existe $h \in H$ tel que l'ensemble

$$\{p(N, N^*)h : p \in \mathbb{C}[X, Y]\}$$

est dense dans H. On note E la mesure spectrale associée à N, $\mu = E_{h,h}$ et $B(\sigma(N))$ l'algèbre des fonctions bornées sur $\sigma(N)$.

(1) Soient $H_0 = \{\Phi(N)h : \Phi \in B(\sigma(N))\}$. Vérifier que H_0 est dense dans H.

(2) Vérifier que μ est une mesure positive et finie sur $\sigma(N)$. Dans la suite, on note par $L^2(\sigma(N), \mu)$ l'espace des fonctions $f : \sigma(N) \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurables et telles que

$$\|f\|_2^2 := \int_{\sigma(N)} |f|^2 \, d\mu < +\infty.$$

(3) On définit

$$\begin{array}{rccc} U_0 : & H_0 & \longrightarrow & L^2(\sigma(N), \mu) \\ & \Phi(N)h & \longmapsto & \Phi. \end{array}$$

Montrer que U_0 est une application linéaire isométrique. En déduire que U_0 se prolonge en une isométrie $U : H \longrightarrow L^2(\sigma(N), \mu)$.

(4) Montrer que U est unitaire.

(5) Pour $\Phi \in B(\sigma(N))$, on note M_Φ l'opérateur de multiplication par Φ sur $L^2(\sigma(N), \mu)$,

$$M_\Phi f = \Phi f, \qquad f \in L^2(\sigma(N), \mu).$$

Montrer que $\Phi(N) = U^{-1} M_\Phi U$.

(6) En déduire que

(a) N est autoadjoint si et seulement si $\sigma(N) \subset \mathbb{R}$.

(b) N est unitaire si et seulement si $\sigma(N) \subset \mathbb{T}$.

Indication : si $\Phi_0(z) = z$, $z \in \sigma(N)$, on utilisera que $N = U^* M_{\Phi_0} U$ et $N^* = U^* M_{\bar{\Phi}_0} U$.