2017-2018.

# Cours de topologie M52 - L3 -



## Chapitre 1. Espaces normés - espaces métriques.

### 1.1. Rappels sur les ensembles dénombrables.

Définition : Un ensemble $I$ est dit dénombrable s'il existe une bijection de $I$ sur une partie de $\mathbb{N}$.

Proposition 1 : Soit $I$ un ensemble. LASSE :

(i) $I$ est dénombrable ;

(ii) il existe une bijection de $I$ sur une partie de la forme $\{0, \dots, q-1\}$ ou sur $\mathbb{N}$ tout entier ;

(iii) il existe une suite croissante de parties finies $J_k \subset I$ telle que $I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k$.

preuve: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : toute partie $K$ finie de cardinal $q$ de $\mathbb{N}$ est en bijection avec l'ensemble $\{0, 1, \dots, q-1\}$ et toute partie $K$ infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ tout entier.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : comme (iii) est invariant par bijection, il suffit de montrer que (iii) est vérifiée pour les 2 cas : $I = \{0, \dots, q-1\}$ et pour $I = \mathbb{N}$.

- pour $I = \{0, \dots, q-1\}$ : $J_k = I$, $k \geq 0$, convient
- pour $I = \mathbb{N}$ : $J_k = \{0, \dots, k\}$, $k \geq 0$, convient

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : on numérote les éléments de $J_k$ :

$$J_0 = \{a_0, a_1, \dots, a_{q_0 - 1}\}$$
$$J_1 = \{a_0, a_1, \dots a_{q_1 - 1}\}$$
$$\vdots$$
$$J_\ell = \{a_0, \dots, a_{q_\ell - 1}\}$$

et comme la suite $J_k$ et croissante, on a $q_0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_\ell$

Il y a deux cas :

- ou bien la suite $J_k$ est stationnaire, i.e il existe un indice $k_0$ tel que $\forall k \geq k_0$, $J_k = J_{k_0}$.
Dans ce cas, $I = J_{k_0}$ et $I$ est en bijection avec $\{0, \dots, q_{k_0} - 1\}$
- ou bien la suite n'est pas stationnaire et on peut alors suppose qu'elle est strictement croissante.
Ainsi, $(q_\ell)_{\ell \geq 0}$ va être une suite d'entiers strictement croissante donc tendant vers $+\infty$.
Dans ce cas, l'application $n \longmapsto a_n$ est bien définie de $\mathbb{N}$ dans $I$, elle est injective par construction et surjective (car tout élément de $I$ est dans l'un des $J_k$).

Ainsi $I$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Nous allons voir que la propriété (iii) est très utile pour montrer qu'un ensemble est dénombrable.

<u>Exemples</u> : a) Un ensemble fini est dénombrable

b) Une partie de $\mathbb{N}$ est dénombrable

c) Un ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est lui même dénombrable.

<u>Proposition 2</u> : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[X]$ sont dénombrables.

<u>preuve</u> : on utilise le (iii) de la proposition 1.

Pour $\mathbb{Z}$, on pose : $J_k = \{ l \in \mathbb{Z} : -k \leq l \leq k \}$

$\mathbb{Q}$, on pose : $J_k' = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \begin{array}{l} |a| \leq k+1 \\ 0 < |b| \leq k+1 \end{array} \right\}$

$\mathbb{Q}[X]$, on pose $J_k''$ = l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré au plus $k$ et dont tous les coefficient sont dans $J_k'$.

<u>Proposition 3</u> : Un produit fini de dénombrables, une réunion dénombrable de dénombrables, une partie d'un dénombrable, l'image d'un dénombrable sont dénombrables.

preuve: $\boxed{(\bullet)}$ il suffit de mq le produit de <u>deux</u> dénombrables ④
est dénombrable ; si $I$ et $I'$ sont dénombrables alors
d'après la proposition 1, il existe deux suites croissantes
$J_k$ et $J'_k$ finies telles que $I = \bigcup_{k\geq 0} J_k$

et $I' = \bigcup_{k\geq 0} J'_k$.

Alors
$$I \times I' = \bigcup_{k\geq 0} (J_k \times J'_k)$$

⚠ ici on utilise que les suites sont ↗.

Les parties $J_k \times J'_k$ sont finies et la suite
$(J_k \times J'_k)_k$ est ↗ pour l'inclusion.

La prop 1 $\Longrightarrow$ $I \times I'$ est dénombrable.

$\boxed{(\bullet\bullet)}$ pour le point 2, remarquons d'abord que :
$$A \text{ dénombrable} \iff \exists\, \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A \text{ surjective}.$$

Soit alors $I = \bigcup_{l\in L} I_l$ où $L$ est dénombrable

et $\forall l \in L$, $I_l$ est dénombrable.

On peut trouver une surjection $f : \mathbb{N} \longrightarrow L$
et pour tout $l \in L$, une surjection $\lambda_l : \mathbb{N} \longrightarrow I_l$

Montrons que l'application
$$\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow I$$
$$(n, m) \longmapsto \lambda_{f(n)}(m)$$

est surjective.

- $\varphi$ est bien à valeurs dans $I$ car

$$\lambda_{f(n)}(m) \in I_{f(n)} \subset I$$

- $\varphi$ est surjective car si $x \in I$, il existe $l \in L$ tel que $x \in I_l$. Comme $\lambda_l$ est surjective, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x = \lambda_l(m)$ et $f$ étant surjective, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $l = f(n)$. Ainsi

$$x = \lambda_{f(n)}(m) = \varphi(n, m).$$

Ceci prouve que $\varphi$ est une surjection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $I$. Mais d'après le point 1, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable (infini) donc il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Finalement, on obtient une surjection de $\mathbb{N}$ sur $I$ et donc $I$ est dénombrable.

$\boxed{(\ldots)}$ Si $I$ est dénombrable et $I' \subset I$, on peut écrire avec la proposition 1 que

$$I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \quad \text{avec } I_k \text{ fini et } \nearrow$$

d'où $I' = I \cap I' = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (I_k \cap I')$

Comme $I_k \cap I'$, $k \geq 0$, forme une suite $\nearrow$ de parties finies, la prop 1 permet d'en déduire que $I'$ est dénombrable.

$\boxed{(\bullet\bullet\bullet)}$ si $f$ est une application définie sur $I$ dénombrable, toujours avec la prop 1, on peut écrire que

$I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$, $I_k$ suite $\nearrow$ de parties finies

Alors, $f(I) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(I_k)$ et

$f(I_k)$ est une suite $\nearrow$ de parties finies

Prop1 $\Longrightarrow$ $f(I)$ est dénombrable. ■

## 1.2. Espaces vectoriels normés.

<u>Définition</u>: Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On appelle <u>norme</u> sur $E$ une application notée

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ vérifiant:}$$

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$

2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité)

3) $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

Si les propriétés 2) et 3) seulement sont vérifiées, on parle de <u>semi-norme</u>.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K}$-e.v.n) est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v et $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$.

Une conséquence immédiate de la propriété 3) est le résultat suivant :

Proposition 4 : Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v.n.

Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

preuve : on écrit $x = (x-y)+y$ et on applique l'inégalité triangulaire qui donne

$$\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|.$$

Ainsi $\|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|$.

En échangeant le rôle des variables $x$ et $y$, on a aussi

$$\|y\|-\|x\| \leq \|y-x\| \underset{\text{homogénéité}}{=} \|x-y\|$$

Ainsi $\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\|$. ■

### 1.2.1. Normes provenant d'un produit scalaire :

Rappelons qu'un produit scalaire sur un $\mathbb{K}$-e.v $E$ est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ qui :

- est linéaire par rapport à la première variable
- symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ : $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- définie positive : $\forall x \neq 0$ , $\langle x, x \rangle > 0$.

__Exemple:__ a) si $E = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

b) si $E = \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$.

__Remarque:__ si $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni d'un produit scalaire, on a $\forall x, y, z \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ :

- $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$
- $\langle x, y + \lambda z \rangle = \langle x, y \rangle + \overline{\lambda} \langle x, z \rangle$
- $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$.

Théorème 5: Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $E$. On a l'__inégalité de Cauchy-Schwarz__:

$$\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $x$ et $y$ sont colinéaires.

preuve : Soient $x, y \in E$. Si $x=0$ ou $y=0$, on a bien sûr l'inégalité voulue car les deux membres sont nuls. On peut donc supposer $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Supposons également dans un premier temps que $<x,y> \in \mathbb{R}$. et considérons alors pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = <x+ty, x+ty>.$$

Comme le produit scalaire est défini positif, on a bien évidement $f(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

De plus, $f(t) = <x,x> + t<y,x> + t<x,y> + t^2<y,y>$

$$= <x,x> + 2t<x,y> + t^2<y,y>$$

$$\left(\text{car } <x,y> \in \mathbb{R} \Longrightarrow <y,x> = \overline{<x,y>} = <x,y>\right).$$

Ainsi, $f$ est un polynôme à coefficients réels, de degré 2 car $y \neq 0 \Longrightarrow <y,y> > 0$.

Comme $f(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, cela implique que $\Delta$ le discriminant de $f$ est négatif ou nul.

Or $\Delta = 4<x,y>^2 - 4<x,x><y,y>$

$$= 4\left(<x,y>^2 - <x,x><y,y>\right),$$

ce qui donne $<x,y>^2 \leq <x,x><y,y>$

et on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

De plus, il y a égalité si et seulement si $\Delta = 0$, c'est à dire si et seulement s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$. Par définition de $f$ et des propriétés du produit scalaire, cela signifie que

$$x + t_0 y = 0$$

c'est à dire les vecteurs $x$ et $y$ sont colinéaires.

Dans le cas général, c'est à dire où $<x,y>$ n'est pas nécessairement réel, on choisit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{i\theta} < x, y > \in \mathbb{R}$$

(si $<x,y> = 0$ on peut prendre $\theta = 0$ et si $<x,y> \neq 0$. on peut prendre $\theta = -\arg(<x,y>)$).

En appliquant alors le raisonnement précédent à $e^{i\theta}x$ et $y$ on obtient le cas général. $\blacksquare$

Corollaire 6 : Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. muni d'un produit scalaire $<\cdot,\cdot>$.

Posons pour $x \in E$, $\|x\| := \sqrt{<x,x>}$

Alors : (i) $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$.

(ii) il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si $x$ et $y$ sont colinéaires et de même sens (i.e le coefficient de proportionnalité $\alpha$ dans $\mathbb{R}_+$) 

(iii) On a : $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|, \ \forall (x,y) \in E \times E.$

preuve : (i) On a : * $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$* \ \|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x\rangle}$$

$$= |\lambda| \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|$$

* Inégalité triangulaire :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

D'où

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

ce qui donne l'inégalité triangulaire.

Ainsi $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$.

(ii) On voit qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire

si et seulement si $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|.$

Or il y a égalité dans l'inégalité de C.S. ssi il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = 0$.

Ainsi il y a égalité dans l'inégalité triangulaire ssi

(il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda y$ et $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$) ou $y = 0$

Or si $x = \lambda y$ alors

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| \\
&\Updownarrow \\
&\mathrm{Re}(\lambda\langle y, y\rangle) = |\lambda|\,|\langle y, y\rangle| \\
&\Updownarrow \\
&\mathrm{Re}\,\lambda = |\lambda| \\
&\Updownarrow \\
&\lambda \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

ce qui donne le point (ii).

Le point (iii) est simplement une réécriture de C.S. ■

## 1.2.2. Exemples fondamentaux de normes :

a) Sur $\mathbb{K}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$, on définit pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{p=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty$$

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Alors $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

preuve : * pour $p = 1$ et $p = \infty$ c'est facile !

* pour $p=2$, $\|\cdot\|_2$ découle du produit scalaire usuel sur $\mathbb{K}^n$ et donc $\|\cdot\|_2$ est une norme d'après le corollaire 6
* pour $1 < p < +\infty$, $p \neq 2$, l'inégalité triangulaire est plus difficile à démontrer et va nécessiter plusieurs lemmes.

Lemme 7 (Inégalité de Young) :

Soit $1 < p < +\infty$ et $q$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

($q$ s'appelle l'exposant conjugué de $p$)

Alors $\forall\, a, b \geq 0$, on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

preuve : fixons $b$ et considérons la fonction

$$f(a) := \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab, \quad a \geq 0.$$

Alors $f$ est dérivable et $f'(a) = a^{p-1} - b$

Donc $f'(a) \geq 0 \iff a \geq b^{\frac{1}{p-1}}$.

Ainsi $f$ admet un minimum et on a :

$$\forall a \geq 0, \quad f(a) \geq f\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{1+\frac{1}{p-1}}$$

Or $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies p = 1 + \frac{p}{q} \implies \boxed{p-1 = \frac{p}{q}}$

D'où $b^{\frac{p}{p-1}} = b^q$

et $\quad f(a) \geq b^q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) - b^{1+\frac{1}{p-1}}$

$$= b^q - b^{1+\frac{1}{p-1}} = b^q - b^{1+\frac{q}{p}}$$

Or $\quad 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow q = \frac{q}{p} + 1$

et $\quad f(a) \geq b^q - b^q = 0.$ ■

**Lemme 8.** (Inégalité de Hölder) :

Si $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$,

alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \|a\|_p \|b\|_q$$

Remarque : pour $p = 2$ et donc $q = 2$, c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz !

preuve : On peut bien évidemment supposer $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Soit $A > 0$ (qu'on fixera par la suite).

On a :
$$|a_i b_i| = |A a_i| \left|\frac{b_i}{A}\right|$$
$$\leq \frac{A^p |a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{A^q q}$$

avec Young.

En sommant, on obtient :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \frac{A^p}{p} \alpha^p + \frac{1}{A^q q} \beta^q,$$

où $\alpha = \|a\|_p$ et $\beta = \|b\|_q$.

Choisissons alors $A$ tq $A^p \alpha^p = \dfrac{\beta^q}{A^q}$,

c'est à dire $A = \left(\dfrac{\beta^q}{\alpha^p}\right)^{\frac{1}{p+q}}$.

On obtient ainsi :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) A^p \alpha^p$$

$$= A^p \alpha^p = \alpha^p \left(\frac{\beta^q}{\alpha^p}\right)^{\frac{p}{p+q}}.$$

Or $\dfrac{p}{p+q} = \dfrac{1}{\frac{p+q}{p}} = \dfrac{1}{1+\frac{q}{p}} = \dfrac{1}{q}$

Donc :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \alpha^p \left(\frac{\beta^q}{\alpha^p}\right)^{\frac{1}{q}} = \alpha^{p-\frac{p}{q}} \beta = \alpha\beta. \quad \blacksquare$$

Lemme 9 (inégalité de Minkowski) :

Soient $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}.$$

preuve : on peut supposer $a + b \neq 0$. Posons alors

$$\alpha = \|a+b\|_p > 0$$

On a en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|\,|a_i+b_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

Or $(p-1)q = p$ et donc :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|\,|a_i+b_i|^{p-1} \leq \|a\|_p \, \alpha^{p/q}.$$

En échangeant le rôle de $a$ et $b$, on obtient également

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i|\,|a_i+b_i|^{p-1} \leq \|b\|_p \, \alpha^{p/q}.$$

En sommant ces deux inégalités, on en déduit :

$$\alpha^p = \sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p \leq \alpha^{p/q} \left(\|a\|_p + \|b\|_p\right).$$

D'où $\quad \alpha^{p-p/q} \leq \|a\|_p + \|b\|_p$

Comme $p - \frac{p}{q} = 1$, on obtient finalement :

$$\|a+b\|_p = \alpha \leq \|a\|_p + \|b\|_p . \qquad \blacksquare$$

Remarquons que l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$ est exactement l'inégalité de Minkowski.

Les autres propriétés pour que $\|\cdot\|_p$ soit une norme sont immédiats à vérifier.

b) Soit $\ell^p(\mathbb{K}) = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|u\|_p = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p \right)^{1/p} < +\infty \right\}$

Alors $(\ell^p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$- espace vectoriel normé.

preuve : exercice !

c) Soient $-\infty < a < b < +\infty$

$C([a,b]) = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K} \text{ continue} \}$

Posons $\quad \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \; 1 \leq p < +\infty$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

Alors $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. 

preuve: exercice. S'inspirer du cas discret!

## 1.3. Espaces métriques:

Pour définir une norme, on avait besoin d'une structure d'espace vectoriel sur $E$; pour une distance ce n'est pas nécessaire.

Il faut donc faire attention au vocabulaire:

un espace métrique n'est pas nécessairement un espace vectoriel

en revanche, un espace vectoriel normé est toujours un espace vectoriel!

Définition: Soit $X$ un ensemble. Une distance sur $X$ est une application $d: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tous $x, y, z \in X$:

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie)

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace métrique est un couple $(X,d)$ où $X$ est un ensemble et $d$ est une distance sur $X$.

Exemple 1: Si $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$.

<u>Exemple 2</u> : Si $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé alors l'application

$$d(x,y) := \|x-y\|, \quad (x,y) \in E \times E,$$

définit une distance sur $E$.
Les espaces vectoriels normés sont donc des exemples d'espaces métriques particuliers.
<u>preuve</u> : laissé en exercice (c'est facile) !

<u>Exemple 3</u> : Soit $X$ un ensemble quelconque.
L'application

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

définit une distance sur $X$ qu'on appelle la <u>distance discrète</u>.

<u>Exemple 4</u> : Soit $(X,d)$ un espace métrique et $A \subset X$. Alors la restriction de $d$ à $A \times A$ définit sur $A$ une distance qu'on appelle la <u>distance induite</u> de $d$ sur $A$.

Exemple 5: Soient $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques.

On peut munir le produit $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ d'une distance en posant pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ :

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i).$$

On peut aussi prendre $d_p(x,y) = \|(d_1(x_1,y_1), \ldots, d_n(x_n,y_n))\|_p$, $1 \leq p < +\infty$

où $\|\cdot\|_p$ est la norme définie page 12.

Exercice: montrer que $d_p$ définit une distance sur $X$, $1 \leq p \leq +\infty$

(Indication : remarquer que si $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}_+^n$ alors $\forall i,\ u_i \leq v_i + w_i \Longrightarrow \|u\|_p \leq \|v+w\|_p$).

Sauf mention expresse du contraire, on supposera dans la suite que le produit $X$ est muni de la distance $d_\infty$.

Dans le cas particulier où $(X_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (X_n, \|\cdot\|_n)$ sont des espaces vectoriels normés, alors le produit $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ est aussi un espace vectoriel normé où la norme est prise égale à

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i.$$

Proposition 10: Si $(X,d)$ est un espace métrique, alors $\forall (x,y,z) \in X^3$, on a:

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z).$$

preuve: l'inégalité de droite est l'inégalité triangulaire.

Pour obtenir l'inégalité de gauche, on applique de nouveau l'inégalité triangulaire qui donne

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

D'où $\quad d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$.

En échangeant le rôle des variables $x$ et $y$, on obtient

aussi $\quad d(y,z) - d(x,z) \leq d(y,x) = d(x,y)$

Ainsi $\quad \pm\left(d(x,z) - d(y,z)\right) \leq d(x,y)$.

ce qui donne la majoration $\left|d(x,z) - d(y,z)\right| \leq d(x,y)$.

$\blacksquare$

1.3.1. Boules soit $(X,d)$ un espace métrique

Définition : soit $x \in X$.

On appelle :

(i) la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r > 0$

l'ensemble

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

(Noter que $x \in B(x,r)$ et donc en particulier $B(x,r) \neq \emptyset$)

(ii) la boule fermée de centre $x$ et de rayon $r \geq 0$

l'ensemble

$$BF(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\} \; (*).$$

(iii) la sphère de centre $x$ et de rayon $r$ l'ensemble

$$S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}$$

(*) (Noter que $BF(x,0) = \{x\}$).

**Remarque:** (1) On a les inclusions :

pour $0 < r < r'$ : $B(x,r) \subset BF(x,r) \subset B(x,r')$.

⚠ : ces inclusions ne sont pas toujours strictes.

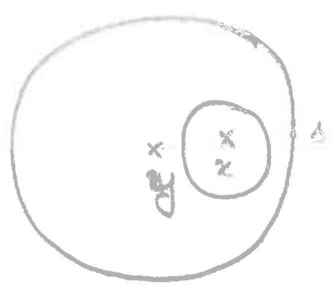
Ainsi dans $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$, on a :

$$B\left(0,\tfrac{1}{3}\right) = BF\left(0,\tfrac{1}{3}\right) = B\left(0,\tfrac{1}{2}\right) = \{0\}.$$

(2) On a : $S(x,r) = BF(x,r) \setminus B(x,r)$

(3) Si $s \geq r + d(x,y)$ alors

$$B(x,r) \subset B(y,s)$$




En effet, si $z \in B(x,r)$, alors avec l'inégalité triangulaire, on a:

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$$
$$< d(x,y) + r = s$$

donc $z \in B(y,s)$.

**Exemples:** (1) Si $X$ est un ensemble et $d$ est la distance discrète sur $X$ alors

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r \leq 1 \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

(2) Si $E = E_1 \times \dots \times E_n$, $(E_i, d_i)$ espace métrique et si on munit $E$ de la distance

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$$

alors

$$B_E(x,r) = B_{E_1}(x_1, r) \times \dots \times B_{E_n}(x_n, r).$$

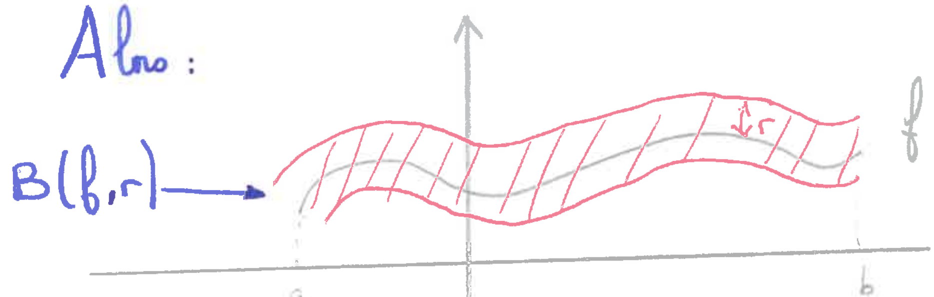
⚠ Cela n'est plus forcément vrai si on munit $E$ d'une autre distance.

<u>Exercice (à faire)</u>: dans $\mathbb{R}^2$, dessiner la boule unité pour la norme $\|\cdot\|_p$ dans le cas $p = 1, 2, \infty$.
c'est à dire la boule de centre $0$ et de rayon $1$.

(3) Dans $E = C([a,b])$, on considère la distance induite par la norme infinie :

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Alors :




$$B(f,r) = \left\{ g \in C([a,b]) : \begin{array}{l} \forall t \in [a,b] : \\ f(t) - r < g(t) < f(t) + r \end{array} \right\}.$$

## 1.3.2. Parties bornées, distances entre deux parties, diamètre. 

**Définition** : (a) On dit qu'une partie $A$ d'un espace métrique $(X, d)$ est bornée s'il existe une boule fermée $BF(x_0, r)$ contenant $A$, i.e :

$$\exists x_0 \in X, \exists r > 0 \; / \; \forall x \in A, \; d(x_0, x) \leq r.$$

(b) Une fonction $f : I \longrightarrow X$ est bornée si $f(I)$ est une partie bornée de $X$.

(c) Une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $X$ est bornée si $A = \{u_n : n \geq 0\}$ est bornée, autrement dit s'il existe $x_0 \in X$, $r > 0$ / $\forall n \geq 0$, $d(u_n, x_0) \leq r$.

**Remarque**: Le caractère borné ne dépend pas du choix de $x_0$ car s'il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(x_0, r)$ et si $x_1 \in X$ . alors $\forall x \in A$, on a :

$$d(x, x_1) \leq d(x, x_0) + d(x_0, x_1) \leq r + d(x_0, x_1) =: r_1$$

et donc $A \subset B(x_1, r_1)$.

**Définition**: Soit $(X, d)$ un espace métrique.

(a) On appelle diamètre de $A \subset X$ l'élément de $[0, +\infty]$ défini par

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

où par convention on pose $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$.

(b) Pour $A, B$ deux sous ensembles non vides de $X$, on définit <u>la distance entre $A$ et $B$</u> par

$$d(A,B) = \inf_{x\in A,\, y\in B} d(x,y).$$

<u>Remarque</u> : On a $d(A,A) = 0$ mais en revanche

$$d(A,B) = 0 \not\Rightarrow A = B.$$

En effet, dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ considérer $A = \{0\}$ et

$$B = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}.$$

<u>Proposition 11</u> : Soit $(X,d)$ un espace métrique et $A \subset X$. On a :

(i) $\operatorname{diam}(A) = 0 \iff A = \emptyset$ ou $A$ est un singleton.

(ii) $\operatorname{diam}(A) < +\infty \iff A$ est bornée.

<u>preuve</u> : (i) découle immédiatement du fait que $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(ii) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $r = \operatorname{diam}(A) < +\infty$ et soit $x \in A$ (si $A = \emptyset$ alors évidemment $A$ est bornée !).

Par définition du diamètre, pour tout $y \in A$,

on a $d(x,y) \leq r$, et donc $y \in BF(x,r)$.

Ainsi $A \subset BF(x,r)$ et $A$ est borné.

$\Leftarrow$ Si $A$ est borné, alors $\exists x_0 \in X, r > 0$ tq

$A \subset BF(x_0, r)$.

Pour tout $x, y \in A$, on a par l'inégalité triangulaire :

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y) \leq r + r \leq 2r.$$

Ainsi $$\sup_{(x,y) \in A \times A} d(x,y) \leq 2r$$

et donc $$\mathrm{diam}(A) \leq 2r < +\infty$$

## 1.3.3. Convergence d'une suite dans un espace métrique :

<u>Définition :</u> Soit $(X,d)$ un espace métrique, $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X$.

On dit que $u$ est <u>convergente</u> s'il existe $x \in X$ tel que $$d(u_n, x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

autrement dit, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ /

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(u_n, x) < \varepsilon$$

De manière équivalente, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{ \ell \in \mathbb{N} : u_\ell \notin B(x,\varepsilon)\}$ est fini.

On dit alors que $x$ est la limite de la suite $u$

ou bien que $u$ converge vers $x$.

On note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = x$ ou $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

**Proposition 12:**

(a) Si $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est convergente alors $u$ est bornée

(b) Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ alors pour tout $y \in X$, on a :

$$d(u_n, y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(x, y)$$

(c) Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ , $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} y$ alors

$$d(u_n, v_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(x, y)$$

(d) La limite d'une suite convergente est unique.

preuve: (a) si $u = (u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $x$ alors

$d(u_n, x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc en particulier, $(d(u_n, x))_{n \geq 0}$ est une suite bornée dans $\mathbb{R}$. Il existe donc $M > 0$ tel que

$$\forall n \geq 0 \ , \ d(u_n, x) \leq M,$$

ce qui signifie que $\{u_n : n \geq 0\} \subset BF(x, M)$ et donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

(b) Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire qui dit que :

$$\left|d(u_n,y)-d(x,y)\right| \leq d(u_n,x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(c) On a :

$$\left|d(u_n,v_n)-d(x,y)\right| = \left|d(u_n,v_n)-d(u_n,y)+d(u_n,y)-d(x,y)\right|$$

$$\leq \left|d(u_n,v_n)-d(u_n,y)\right| + \left|d(u_n,y)-d(x,y)\right|$$

$$\leq d(v_n,y) + d(u_n,x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(d) Supposons que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $x$ et vers $y$

Alors en appliquant (c), on a :

$$0 = d(u_n,u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x,y).$$

Ainsi $d(x,y)=0$ et donc $x=y$. ■

## 1.3.4. Distances et normes équivalentes :

**Définition** :

(a) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $E$ sont dites *équivalentes* si il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que :

$$\forall x \in E : \quad c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

(b) Soit $X$ un ensemble. Deux distances $d_1$ et $d_2$ sur $X$ sont dites équivalentes s'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\forall (x,y) \in X \times X, \quad c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y).$$

(c) Soit $X$ un ensemble. Deux distances $d_1$ et $d_2$ sur $X$ sont dites topologiquement équivalentes si pour tout $x \in X$, toute boule ouverte pour $d_1$ centrée en $x$ contient une boule ouverte pour $d_2$ centrée en $x$ et réciproquement. Autrement dit, $d_1$ et $d_2$ sont topologiquement équivalentes si $\forall x \in X, \forall r_1 > 0, \exists r_2 > 0$ tq $B_{d_2}(x, r_2) \subset B_{d_1}(x, r_1)$ et $\forall x \in X, \forall r_2 > 0, \exists r_1 > 0$ tq $B_{d_1}(x, r_1) \subset B_{d_2}(x, r_2)$.

Remarque : Les trois relations introduites ci-dessus sont des relations d'équivalences : rappelons qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble $\mathcal{E}$ est une relation d'équivalence si

* $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall d \in \mathcal{E}, \ d \mathcal{R} d$
* $\mathcal{R}$ est symétrique : $\forall d, d' \in \mathcal{E}, \ d \mathcal{R} d' \Rightarrow d' \mathcal{R} d$
* $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall d, d', d'' \in \mathcal{E}$, on a :

$$d \mathcal{R} d', \ d' \mathcal{R} d'' \longrightarrow d \mathcal{R} d''.$$

<u>Exercice</u>: mq les trois relations (équivalence de normes, distances équivalentes, distances topologiquement équivalentes) sont des relations d'équivalence.

<u>Exemples</u>:

(a) Sur $\mathbb{K}^n$, les normes $\|\cdot\|_p$ sont équivalentes.

<u>preuve</u>: voir TD.

Nous verrons plus tard un résultat plus général qui dit que sur un espace vectoriel de <u>dimension finie</u>, <u>toutes</u> les normes sont équivalentes.

(b) Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes sur $E$ et si

$$d_i(x,y) = \|x-y\|_i \quad , \quad i = 1, 2$$

alors $\left(\|\cdot\|_1 \text{ et } \|\cdot\|_2 \text{ équivalentes}\right) \Longrightarrow \left(d_1 \text{ et } d_2 \text{ équivalentes}\right)$

(c) Si $(X,d)$ est un espace métrique, posons

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

Alors $\tilde{d}$ est topologiquement équivalente à $d$.

<u>preuve</u>: exercice.

**Proposition 13:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v et $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 2 normes sur $E$. LASSE :

(i) $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes

(ii) pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0} \subset E^{\mathbb{N}}$, on a :

$$\|u_n\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \|u_n\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

preuve: (i) $\Longrightarrow$ (ii) est claire.

Mq (ii) $\Longrightarrow$ (i) par l'absurde en supposant que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes. On peut par exemple supposer qu'il n'existe pas de constante $c_1 > 0$ tel que

$\forall x \in E, \quad c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2.$

Autrement dit, $\forall c > 0, \ \exists x \in E : \ c\|x\|_1 > \|x\|_2.$

En particulier, $\forall n \geq 1, \ \exists x_n \in E : \ \frac{1}{n}\|x_n\|_1 > \|x_n\|_2.$

Notons que nécessairement $\|x_n\|_1 > 0$.

Considérons alors $z_n := \dfrac{x_n}{\|x_n\|_1}$.

Alors $\|z_n\|_1 = 1$ et $\|z_n\|_2 = \dfrac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1} < \dfrac{1}{n}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\|z_n\|_2 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\|z_n\|_1 = 1$

ce qui contredit (ii).

Ainsi $\exists\, c_1 > 0$ tq $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \,, \forall x \in E$.

Par symétrie, on a aussi l'existence d'une constante $c_2 > 0$

telle que $c_2 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \,, \forall x \in E$

Ainsi $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \frac{1}{c_2} \|x\|_1 \,, \forall x \in E$.

■

**Proposition 14 :** Soit $X$ un ensemble et $d_1, d_2$ deux distances sur $X$. Si $d_1$ et $d_2$ sont équivalentes alors elles sont topologiquement équivalentes.

preuve : Par hypothèse, $\exists\, c_1, c_2 > 0$ tq

$(*)\quad \forall (x,y) \in X \times X \,, \quad c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y)$

Soit $x \in X$, $r_1 > 0$. On cherche $r_2 > 0$ tq

$(\cdot)\quad B_{d_2}(x, r_2) \subset B_{d_1}(x, r_1)$.

Or $y \in B_{d_2}(x, r_2) \Longrightarrow d_2(x,y) < r_2$

$(*) \Longrightarrow c_1 d_1(x,y) < r_2$

$\Longrightarrow d_1(x,y) < \frac{r_2}{c_1}$

Ainsi si $\frac{r_2}{c_1} = r_1$, on obtient $(\cdot)$.

Donc $r_2 = r_1 c_1$ convient.

On a donc montré que

$$c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \Longrightarrow Bd_2(x, r_1 c_1) \subset Bd_1(x, r_1)$$

De +, $(*) \Longrightarrow \frac{1}{c_2} d_2(x,y) \leq d_1(x,y)$

$$\underset{\text{ce qui précède}}{\Longrightarrow} Bd_1\left(x, \frac{r_2}{c_2}\right) \subset Bd_2(x, r_2)$$

On en déduit donc que $d_1$ et $d_2$ sont topologiquement équivalents. ∎

<u>Remarque:</u> la réciproque de la proposition 14 est fausse.

Par exemple sur $\mathbb{R}$, considérer

$$d_1(x,y) := |x-y| \quad , \quad d_2(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

Alors $d_1$ et $d_2$ sont topologiquement équivalentes mais pas équivalentes. (Pourquoi ? Exercice !).

# Chapitre 3. Continuité.



## 3.1 Fonctions continues.

### 3.1.1. Définition et caractérisation.

Définition. Soit $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ une application.

- On dit que $f$ est continue au point $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x' \in X, d_X(x', x) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon.$$

- On dit que $f$ est continue sur $X$ si elle est continue en chaque point $x \in X$.

Notation: L'ensemble des applications de $(E, d_X)$ dans $(Y, d_Y)$ sera noté $C((X, d_X), (Y, d_Y))$ ou plus simplement $C(X, Y)$.

Lorsque $X = Y$ et $d_X = d_Y$, on notera aussi par souci d'alléger les notations $C(X, d_X)$ ou $C(X)$ l'ensemble $C((X, d_X), (X, d_X))$.

Remarques: (a) pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la définition s'écrit:

$f$ continue en $x \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x' - x| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon$

et on retrouve la définition que vous connaissez.

(b) En terme de boules, on voit que la continuité de $f$ en un point $x \in X$ signifie que

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } B_{d_X}(x, \delta) \subset f^{-1}\left(B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)\right)}$$

(c) Notons que la propriété de continuité est invariante par changement de distances équivalentes (et même topolo-giquement équivalentes). Exercice !

<u>Théorème 1.</u> (<u>Caractérisation par les ouverts/fermés</u>):

Soit $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$.

LASSE : (i) $f$ est continue sur $X$ ;

(ii) $\forall\, O$ ouvert de $Y$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $X$ ;

(iii) $\forall\, F$ fermé de $Y$, $f^{-1}(F)$ est un fermé de $Y$.

<u>preuve:</u> (i) $\Longrightarrow$ (ii) : Soit $O$ un ouvert de $Y$. Nous devons montrer que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $X$. Pour cela, nous allons montrer que $\forall x \in f^{-1}(O)$, $\exists\, \delta > 0$, $B(x, \delta) \subset f^{-1}(O)$.

Soit donc $x_0 \in f^{-1}(O)$. Comme $f(x_0) \in O$ et $O$ est un ouvert de $Y$, $\exists\, r > 0$ tq $B_{d_Y}(f(x_0), r) \subset O$.

De plus, comme $f$ est continue en $x_0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$B_{d_X}(x_0, \delta) \subset f^{-1}\left(B_{d_Y}(f(x_0), r)\right)$$

et donc $B_{d_X}(x_0, \delta) \subset f^{-1}(O)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : soit $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$.

Remarquons que $O = B_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$ est un ouvert de $Y$.

Donc par hypothèse $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon))$ est un ouvert de $X$, qui contient $x_0$. Ainsi $\exists\, \delta > 0$ tel que

$$B_{d_X}(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)).$$

Ceci donne la continuité de $f$ en $x_0$ et donc sur $X$.

Pour l'équivalence avec (iii) remarquons que pour $F \subset Y$, on a $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$.

Ainsi $f^{-1}(F)$ fermé de $X$ si et seulement si $f^{-1}(Y \setminus F)$ ouvert de $X$.

L'équivalence de (i) $\Leftrightarrow$ (iii) découle alors de (i) $\Leftrightarrow$ (ii) par passage au complémentaire et le fait que

$O$ ouvert de $Y \Leftrightarrow F = Y \setminus O$ fermé de $Y$. $\blacksquare$

Remarque : dans des espaces topologiques généraux (qui ne possèdent pas nécessairement de métriques), la propriété (ii) est celle qu'on prend habituellement pour la définition de la continuité.



**Théorème 2.** (Caractérisation avec les suites) :

Soit $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$, $x_0 \in X$.

LASSE : (i) $f$ est continue en $x_0$.

(ii) Pour toute suite $(u_n)_n \subset X$

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \implies f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0).$$

preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $(u_n) \subset X$, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$.

Comme $f$ est continue en $x_0$, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tq $x' \in B(x_0, \delta) \implies f(x') \in B(f(x_0), \varepsilon)$.

Comme $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tq

$$n \geq N \implies u_n \in B(x_0, \delta)$$
$$\implies f(u_n) \in B(f(x_0), \varepsilon).$$

On a donc montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tq $f(u_n) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.

Ceci signifie exactement que $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : supposons par l'absurde que $f$ ne soit pas continue en $x_0$.

Alors $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists x' \in B_{d_X}(x, \delta)$ et
$f(x') \notin B_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$

En particulier, $\forall k \geq 0$, $\exists x_k \in B_{d_X}(x_0, \frac{1}{2^k})$

et $f(x_k) \notin B_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$.

On voit donc que $d_X(x_k, x_0) < \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

et $d_Y(f(x_k), f(x_0)) > \varepsilon$

D'où $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x_0$ et $f(x_k) \not\xrightarrow[k \to +\infty]{} f(x_0)$,

ce qui est contraire à l'hypothèse. ∎

### 3.1.2. Limites d'une fonction :

<u>Définition</u>: Soit $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques,

$A \subset X$, $f : A \longrightarrow Y$ et $x \in \bar{A}$.

On dit que <u>$f$ a une limite au point $x$</u>

s'il existe $y \in Y$ tel que

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq

(*) $$\left.\begin{array}{l} x' \in B(x, \delta) \setminus \{x\} \\ x' \in A \end{array}\right| \Longrightarrow f(x') \in B(y, \varepsilon)$$

**Proposition 3 :** Avec les notations ci-dessus, si

$f$ admet une limite en un point $x \in \bar{A}$, alors l'élément $y \in Y$ vérifiant $(*)$ est unique et se nomme la limite de $f$ au point $x$. On note alors

$$y = \lim_{x' \to x} f(x')$$

preuve : supposons qu'il existe deux éléments $y_1, y_2 \in Y$ vérifiant $(*)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists\, \delta_i > 0$, $i = 1, 2$, tq $x' \in (B(x, \delta_i) \setminus \{x\}) \cap A \Rightarrow f(x') \in B(y_i, \varepsilon)$.

On a alors pour $x' \in (B(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap A$,

où $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, $f(x') \in B(y_1, \varepsilon) \cap B(y_2, \varepsilon)$.

Cela permet d'écrire en utilisant l'inégalité triangulaire

$$d_Y(y_1, y_2) \leq d_Y(y_1, f(x')) + d_Y(f(x'), y_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela implique que

$d_Y(y_1, y_2) = 0$ et donc $y_1 = y_2$. $\blacksquare$

**Proposition 4 :** $f : A \longrightarrow Y$, $x_0 \in A$.

LASSE : (i) $f$ continue en $x_0$

(ii) $f$ admet une limite en $x_0$ égale à $f(x_0)$.

preuve : découle immédiatement des définitions.

Proposition 5 : $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $A \subset X$

$f : A \longrightarrow Y$ et $a \in \overline{A}$.

Supposons que pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0} \subset A$, $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$,

la suite $(f(a_n))_{n \geq 0}$ est convergente.

Alors (i) la limite de la suite $(f(a_n))_{n \geq 0}$ est

indépendante du choix de $(a_n)$ ; notons la $\ell$.

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

preuve : (i) supposons par l'absurde qu'il existe deux

suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n \subset A$ telles que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

$f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, $f(b_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell'$ et $\ell \neq \ell'$.

Considérons alors la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$c_n = \begin{cases} a_k & , n = 2k \\ b_k & , n = 2k+1 \end{cases}.$$

La suite $c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et $(f(c_n))_n$ possède deux

valeurs d'adhérences ; donc elle ne peut converger,

ce qui contredit l'hypothèse.

(ii) Supposons que $f(x)$ ne tend pas vers $l$ quand $x$ tend vers $a$. Alors $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $\forall\, \delta > 0$, ⑧

$\exists\, x' \in (B(a,\delta) \setminus \{a\}) \cap A$ et $f(x') \notin B(l,\varepsilon)$.

Ainsi on construit une suite $a_n \in B(a, \frac{1}{2^n}) \setminus \{a\} \cap A$ et $d(f(a_n), l) \geqslant \varepsilon$.

Ceci contredit le point (i). ■

<u>Définition</u>: soit $f : A \subset X \longrightarrow Y$ une application continue, $A \subset Z \subset X$. On dit que $f$ admet un <u>prolongement par continuité à $Z$</u> s'il existe une application $F : Z \longrightarrow Y$ continue telle que $F|_A = f$.

En général, la question d'un prolongement par continuité est une question délicate. Nous donnons maintenant un résultat élémentaire et nous verrons au chapitre 6 <u>un contexte</u> où pour les applications lipschitziennes, ce prolongement existe sur $\overline{A}$.

<u>Proposition 6</u>: soient $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $A \subset X$, $f : A \xrightarrow[\text{continue}]{} Y$, $Z \subset X$ tel que $A \subset Z \subset \overline{A}$.

Supposons que $f$ admet une limite en tout point de $Z \setminus A$.

Alors $f$ admet un unique prolongement par continuité sur $Z$. (9)

preuve : Posons

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \lim_{x' \to x} f(x') & , \text{ si } x \in Z \setminus A \end{cases}$$

Ceci définit une application $F : Z \longrightarrow Y$ telle que $F|_A = f$. Nous devons mq elle est continue.

Soit $x \in Z$ et soit $(x_n)_n$ une suite de points de $Z$ qui converge vers $x$. Il s'agit de mq

$$F(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(x).$$

Tout d'abord, remarquons que pour tout $n \geq 0$

$$\lim_{\substack{y \to x_n \\ y \in A}} f(y) = F(x_n)$$

(si $x_n \in A$, c'est la continuité de $f$ qui donne la propriété et si $x_n \in Z \setminus A$, c'est la définition de $F$!).

En particulier, pour tout $n \geq 0$, il existe $\delta = \delta(n) > 0$ tel que $y \in B(x_n, \delta) \cap A \Rightarrow f(y) \in B(F(x_n), \frac{1}{n})$

Maintenant comme $x_n \in Z \subset \overline{A}$, il existe

$$y_n \in A \cap B\left(x_n, \min\left(\frac{1}{n}, \delta\right)\right).$$

On obtient alors :

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d\left(f(y_n), F(x_n)\right) < \frac{1}{n}.$$

D'où

$$d(x, y_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n)$$

$$< \frac{1}{n} + d(x, x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

Ceci implique que $f(y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(x)$.

En effet, comme précédemment si $x \in A$, c'est la continuité de $f$ et si $x \in Z \setminus A$, c'est la définition de $F$.

On en déduit finalement que

$$d(F(x_n), F(x)) \leq d\left(F(x_n), f(y_n)\right) + d\left(f(y_n), F(x)\right)$$

$$< \frac{1}{n} + d\left(f(y_n), F(x)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Ainsi $F(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(x)$.

Le Théorème 2 permet alors de conclure que 

$F$ est continue. Ceci achève de prouver l'existence d'un prolongement par continuité.

Pour l'unicité, supposons $\exists\ G : Z \longrightarrow Y$ une autre application continue tel que $G|_A = f$.

Soit $z \in Z$. Comme $Z \subset \overline{A}$, $\exists\ z_n \in A$ tq

$$z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} z$$

Par continuité,
$$F(z_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(z)$$
$$G(z_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} G(z)$$

et comme $z_n \in A$, on a $F(z_n) = G(z_n)\ \big(= f(z_n)\big)$.

D'où par unicité de la limite, on en déduit que $F(z) = G(z)$, ce qui prouve l'unicité! ∎

### 3.1.3. Exemples:

(a) Exemples élémentaires :

Commençons par donner deux exemples élémentaires.

(a.1) Toute fonction constante d'un espace métrique $(X, d_X)$ dans un autre espace métrique $(Y, d_Y)$ est continue.

(a.2) si $(X,d)$ est un espace métrique et si on 

munit $X\times X$ de $d_\infty$ (voir Example 5 page 20, chapitre 1)

alors $d : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

En effet, d'après le théorème 2, il suffit de mq

si $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ dans $(X\times X, d_\infty)$ alors

(*) $d(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x,y)$ dans $\mathbb{R}$.

Or $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ dans $(X\times X, d_\infty)$ équivaut à

$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$ et ~~la~~ proposition 12 permet

alors de conclure que (*) est vérifié.

Nous verrons que la distance $d$ jouit en fait d'une propriété plus forte que la continuité; elle est lipschitzienne.

(b) <u>Injection canonique</u> :

<u>Proposition 7</u> : Soit $(X,d)$ un espace métrique, $A\subset X$.

L'application $i : A \longrightarrow X$, $x \longmapsto x$ est continue.

<u>preuve</u> : d'après le théorème 1, il suffit de mq

$\forall\, O$ ouvert de $X$, $i^{-1}(O)$ est un ouvert de $A$.

Or $i^{-1}(O) = O\cap A$ et par le théorème 14, chap 2,

$O \cap A$ est un ouvert de $A$. ■

(c) Composée d'applications continues :

**Proposition 8 :** Soient $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$, $(Z, d_Z)$ 3 espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$.
Si $f$ (resp $g$) est continue sur $X$ (resp $Y$) alors $g \circ f$ est continue sur $X$.

preuve : Soit $O$ un ouvert de $Z$.

Remarquons que $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$

Comme $g$ est continue, $g^{-1}(O)$ est un ouvert de $Y$ et comme $f$ est continue, $f^{-1}(g^{-1}(O))$ est un ouvert de $X$.

Ainsi on obtient que :
pour tout ouvert de $Z$, $(g \circ f)^{-1}(O)$ est un ouvert de $X$.
D'après le théorème 1, cela implique que $g \circ f$ est continue. ■

**Corollaire 9 :** La restriction d'une application continue est continue.

preuve : soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue et $A \subset X$. Si on désigne par

$i : A \longrightarrow X$ l'injection canonique, alors la restriction de $f$ à $A$, notée $f_A$, s'écrit $f_A = f \circ i$.

Les propositions 7 et 8 permettent alors de conclure. ■

(d) Projections canoniques :

Proposition 10 : Soient $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ l'espace produit muni de la distance $d_\infty$ (voir chapitre 1). Alors les projections canoniques

$$\pi_j : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_j$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_j$$

sont continues.

preuve : Soit $O_j$ un ouvert de $X_j$.

Alors $\pi_j^{-1}(O_j) = X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times O_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n$.

D'après la proposition 16, chapitre 2, on en déduit que $\pi_j^{-1}(O_j)$ est un ouvert de $X$.

Le théorème 1 permet une nouvelle fois de conclure que $\pi_j$ est continue sur $X$. ■

En particulier, on peut appliquer la proposition 10 à $X = \mathbb{R}^n$ et on obtient que si on munit

$\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors les projections sont continues. Remarquons bien sûr que cela reste vrai si on munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ par exemple la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. En effet, comme on l'a remarqué, le changement d'une distance (ou d'une norme) en une distance (ou une norme) équivalente ne change pas les ouverts et donc la continuité.

<u>Corollaire 11</u>: Soient $(X, d_X)$, $(Y_1, d_1), \ldots, (Y_n, d_n)$, $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ muni de $d_\infty$.

Soit
$$f : X \longrightarrow Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$$
$$x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

Alors $f$ continue sur $X$ si et seulement si chaque $f_i$ est continue sur $X$.

<u>preuve</u>: Remarquons que $f_i = \pi_i \circ f$ où $\pi_i$ est la projection canonique de $Y$ sur $Y_i$.

Si $f$ est continue, alors $f_i$ est continue comme composé d'applications continues (on applique les propositions 10 et 8).

Réciproquement, supposons que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i$ est continue.

Pour mq $f$ est continue, nous allons utiliser la caractérisation séquentielle. Soit donc $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de $X$ qui converge vers $x$.

Comme chaque $f_i : X \longrightarrow Y_i$ est continue, on en déduit que $d_i(f_i(x_n), f_i(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi $d_\infty(f(x_n), f(x)) = \max\limits_{1\leq i\leq n} d_i(f_i(x_n), f_i(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Autrement dit, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ dans $(Y, d_\infty)$.

Ceci prouve avec le théorème 2 que $f$ est continue. ∎

(e). <u>Opérations élémentaires dans un espace vectoriel normé</u> :

<u>Proposition 12:</u>

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ les applications

$$s : \begin{array}{rcl} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \quad \text{et} \quad m : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

sont continues.

<u>preuve</u>: exercice ! ∎

Corollaire 13 : Soit $(X, d)$ un espace métrique, $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

Si $f_1, f_2 : X \longrightarrow E$ sont continues, alors la somme $f_1 + f_2 : X \longrightarrow E$ est continue

et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f_1 : X \longrightarrow E$ est continue.

preuve : L'application
$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{h_1} E \times E \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

est continue d'après le corollaire 11.

Il suffit alors de remarquer que $f_1 + f_2 = s \circ h_1$ et d'appliquer la proposition 12.

De même l'application
$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{h_2} \mathbb{K} \times E \\ x &\longmapsto (\lambda, f_1(x)) \end{aligned}$$

est continue d'après le corollaire 11.

Or $\lambda f_1 = m \circ h_2$ et donc $\lambda f_1$ est continue d'après la proposition 12. ■

Nous allons maintenant nous intéresser au produit de deux fonctions mais bien évidemment pour que ce produit soit bien défini il est naturel de supposer que l'espace d'arrivé est une algèbre.

**Définition:** Une <u>algèbre normée unitaire</u> est un quintuplet $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times, \|\cdot\|)$ où

① $(\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé

② $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ est une algèbre unitaire avec $\|1\| = 1$

③ $\forall\, x, y \in \mathcal{A}$, $\|x \times y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

**Exemples:** (1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni des opérations usuelles et de $\|x\| = |x|$, est une algèbre normée unitaire.

(2) L'ensemble des fonctions ~~bornées~~ de $I = [a, b]$ dans $\mathbb{K}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$, est une algèbre normée unitaire.

**Proposition 14:** Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée unitaire.

$$\boxed{\text{L'application } p : \begin{array}{rcl} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (x, y) & \longmapsto & x \times y \end{array} \text{ est continue.}}$$

**preuve:** Soient $(x_0, y_0) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$.

On cherche $\delta > 0$ tel que

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_\infty < \delta \implies \|x \times y - x_0 \times y_0\| < \varepsilon .$$

Remarquons tout d'abord que

$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty < \delta \iff \|x-x_0\| < \delta \text{ et } \|y-y_0\| < \delta$$

De +, $\|x\times y - x_0\times y_0\| = \|x\times(y-y_0) + (x-x_0)\times y_0\|$

$$\leq \|x\|\,\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\,\|y_0\|$$

inégalité triangulaire + propriété ③ vérifiée par une norme d'algèbre normé.

Donc si $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty < \delta$, on obtient

$$\|x\times y - x_0\times y_0\| \leq (\|x-x_0\| + \|x_0\|)\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\,\|y_0\|$$

$$< (\delta + \|x_0\|)\,\delta + \delta\,\|y_0\|$$

$$= \delta\,(\|x_0\| + \|x_0\| + \delta).$$

On voit par exemple que si $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{1+\|x_0\|+\|y_0\|}\right)$,

alors $\|x\times y - x_0\times y_0\| < \delta\,(1+\|x_0\|+\|y_0\|) \leq \varepsilon$.

Ceci prouve la continuité de p. ∎

Corollaire 15 : Soit $(X,d)$ un espace métrique et $\mathcal{A}$ une algèbre normée unitaire.

Si $f_1, f_2 : X \longrightarrow \mathcal{A}$ sont continues alors le produit

$$f_1\times f_2 : X \longrightarrow \mathcal{A} \qquad \text{est continue.}$$
$$x \longmapsto f_1(x)\times f_2(x)$$

preuve : l'application $h_1 : X \longrightarrow ct \times ct$
$x \longmapsto (f_1(x), f_2(x))$

est continue d'après le corollaire 11.

Il suffit alors de remarquer que $f_1 \times f_2 = p \circ h_1$ et d'appliquer la proposition 14. ∎

Proposition 16 : Dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,

le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue.

preuve : la preuve est très similaire à celle de la proposition 14 (avec la différence qu'à la place de la propriété ③ vérifiée par une norme d'algèbre unitaire, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Les détails sont laissés en exercice. ∎

## 3.1.4. Propriétés plus fortes que la continuité :

Définition : Soient $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$. On dit que $f$ est :

(a) uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x, y \in X, d_X(x,y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

(b) $k$-lipschitzienne (où $k \in \mathbb{R}_+$) si

$$\forall x, y \in X, \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq k\, d_X(x,y). \qquad (*)$$

La plus petite constante $k$ pour laquelle $(*)$ est vérifiée est appelée <u>constante de Lipschitz de $f$</u>.

On note $\mathrm{Lip}((X,d_X),(Y,d_Y))$ ou plus simplement $\mathrm{Lip}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $(X,d_X)$ dans $(Y,d_Y)$.

(c) <u>strictement contractante</u> si elle est $k$-lipschitzienne pour un $k<1$.

(d) <u>$\alpha$-höldérienne</u> (où $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$) si $\exists C>0$ tq
$$\forall x,y \in X, \quad d_Y(f(x),f(y)) \leq C\, d_X(x,y)^\alpha.$$

<u>Proposition 17</u> : On a :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Lipschitzienne} & \Longrightarrow & \text{uniformément continue} & \Longrightarrow & \text{continue} \\ & & \Uparrow & & \\ & & \text{höldérienne} & & \end{array}$$

De plus les trois réciproques sont fausses en général.

<u>preuve</u> : • si $f$ est $k$-lipschitzienne, soit $\varepsilon>0$.

Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. Alors
$$d_X(x,y)<\delta \Longrightarrow d_Y(f(x),f(y)) \leq k\, d_X(x,y) < k\delta = \varepsilon.$$

• L'implication uniformément continue $\Longrightarrow$ continue est claire.

- Supposons maintenant $f$ $\alpha$-höldérienne : $\exists c>0$ tq

$$d_Y(f(x),f(y)) \leq c\, d_X(x,y)^{\alpha}.$$

Fixons $\varepsilon>0$ et choisissons $\delta = \dfrac{\varepsilon^{1/\alpha}}{c^{1/\alpha}}$.

Alors $d_X(x,y)<\delta \Longrightarrow d_Y(f(x),f(y)) < c\,\delta^{\alpha} = \varepsilon$.

Ceci montre que $f$ est uniformément continue.

Donnons maintenant 3 contre exemples aux réciproques; les détails sont laissés en exercice :

- Sur $[0,1]$, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne.
- Sur $\mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue.
- La fonction $f : [0,\frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1}{\ln x}, & x\in\,]0,\frac{1}{2}] \end{cases}$$

est uniformément continue et elle n'est $\alpha$-höldérienne pour aucun $\alpha>0$.

**Proposition 18 :** Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

L'application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne (donc en particulier continue).

<u>preuve</u> : Il suffit d'utiliser la proposition 4 du chapitre 1 qui dit que

$\forall x, y \in E$, on a : $$\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\| .$$

Cela signifie exactement que $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne.

$\blacksquare$

<u>Proposition 19</u> : Soit $(E,d)$ un espace métrique.
L'application $d : (E\times E, d_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ est 2-lipschitzienne.

<u>preuve</u> : Soit $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E\times E$.

On a : $$d(x_1,x_2) \leq d(x_1,y_1) + d(y_1,y_2) + d(y_2,x_2).$$

Donc $$d(x_1,x_2) - d(y_1,y_2) \leq d(x_1,y_1) + d(y_2,x_2)$$

De même, on obtient en échangeant le role de $x_1 \leftrightarrow y_1$ ; et $x_2 \leftrightarrow y_2$ : $$d(y_1,y_2) - d(x_1,x_2) \leq d(x_1,y_1) + d(y_2,x_2)$$

Ainsi
$$\big|d(x_1,x_2) - d(y_1,y_2)\big| \leq d(x_1,y_1) + d(y_2,x_2)$$
$$\leq 2\, d_\infty\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)$$

$\blacksquare$

## 3.1.5. Homéomorphismes :

<u>Définition</u> : Soient $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$.
On dit que $f$ est un <u>homéomorphisme de $X$ sur $Y$</u>

si $f$ est bijective de $X$ sur $Y$ et $f$ et $f^{-1}$ sont continues.

Proposition 20 : Soit $f$ un homéomorphisme de $X$ sur $Y$.
Alors l'image et la preimage par $f$ de tout ouvert sont des ouverts.

preuve : découle immédiatement de la définition d'homéomorphisme et de la caractérisation de la continuité via les ouverts. ∎

Dans le cas où il existe un homéomorphisme $f$ de $X$ sur $Y$ on dit que $X$ et $Y$ sont homéomorphes. Comme $f$ échange les ouverts de $X$ et $Y$, les deux espaces auront les mêmes propriétés topologiques.

Exemples : (a) $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $]-1, 1[$ via $x \longmapsto th(x)$.

(b) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}$, distance discrète$)$ ne sont pas homéomorphes puisque les ouverts ne sont pas les mêmes.

(c) Si $d_1$ et $d_2$ sont deux distances topologiquement équivalentes sur un espace $X$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

est un homéomorphisme de $(X, d_1)$ sur $(X, d_2)$.

## 3.2. Continuité et densité :

**Proposition 21:** Soient $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques $f : X \longrightarrow Y$ continue et $A \subset B \subset X$.

Si $A$ est dense dans $B$ alors $f(A)$ est dense dans $f(B)$.

preuve: Nous allons utiliser le théorème 10 du chapitre 2 qui donne une caractérisation de l'adhérence par les suites:

ainsi $f(A)$ est dense dans $f(B)$ si et seulement tout élément de $f(B)$ peut être approché par une suite d'éléments de $f(A)$.

Soit donc $y \in f(B)$. Alors $\exists\, x \in B$ tq $y = f(x)$.

Mais comme $x \in B \subset \overline{A}$, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $A$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

Par continuité de $f$, on a alors $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) = y$.

Il reste à remarquer que $f(x_n) \in f(A)$. $\blacksquare$

**Théorème 22 :** Soit $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques,

$f, g : X \longrightarrow Y$ continues et $A \subset X$ <u>dense</u>.

Si $f$ et $g$ coïncident sur $A$ alors elles coïncident sur $X$.

<u>preuve</u> : Soit $x \in X$. Par densité de $A$ dans $X$, il existe une suite $(a_n)_n \subset A$ telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

Or comme $a_n \in A$ on a $f(a_n) = g(a_n)$ ; $n \geq 0$

et par continuité de $f$ et $g$, on a

$$f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) \quad \text{et} \quad g(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(x).$$

L'unicité de la limite implique alors que $f(x) = g(x)$.

Cela étant vrai pour tout $x \in X$, on obtient le résultat. ∎

## 3.3. Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés :

**Théorème 23 :** Soit $E, F$ des espaces vectoriels normés et

$u : E \longrightarrow F$ linéaire.

LASSE :
- (i) $u$ est continue sur $E$.
- (ii) $u$ est continue en (au moins) un point.
- (iii) $u$ est bornée sur (au moins) une boule.
- (iv) $\exists\, k \geq 0 : \forall x \in E, \ \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$
- (v) $u$ est lipschitzienne.

preuve: $(i) \Longrightarrow (ii)$ est évidente.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ : supposons $\exists x_0 \in E$ tq $u$ soit continue en $x_0$. Alors il existe $\delta > 0$ tq

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|u(x) - u(x_0)\| < 1$$

et donc $\forall x \in B(x_0, \delta)$, $\|u(x)\| < 1 + \|u(x_0)\|$,

ce qui montre que $u$ est bornée sur $B(x_0, \delta)$.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$ : supposons $\exists a \in E$, $r > 0$ et $M > 0$ telle que

$$\forall x \in B(a, r), \quad \|u(x)\|_F \leq M.$$

Remarquons tout d'abord que si $x \in B(0, r)$ alors $x + a \in B(a, r)$ et donc $\|u(x+a)\|_F \leq M$.

Mais par linéarité de $u$, on a $u(x) + u(a)$ et l'inégalité triangulaire donne alors

$$x \in B(0,r) \Longrightarrow \|u(x)\|_F \leq \|u(a)\|_F + M =: M'$$

Maintenant, soit $x \in E$, $x \neq 0_E$. Alors le vecteur

$$y = \frac{r}{2\|x\|_E} x \in B(0, r)$$ et donc d'après ce qui précède $\|u(y)\|_F \leq M'$.

L'homogénéité des normes donne alors :

$$\frac{r}{2\|x\|_E} \|u(x)\|_F \leq M',$$

c'est à dire

$$\|u(x)\|_F \leq \frac{2M'}{r} \|x\|_E = k \|x\|_E$$

avec $k = \frac{2M'}{r}$.

Pour $x = 0_E$, comme $u(x) = 0_F$, cette inégalité est aussi vérifiée.

Ainsi $\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) : $\forall x, y \in E$, on a :

$$\|u(x) - u(y)\|_F \underset{\text{linéarité de } u}{=} \|u(x-y)\| \underset{\text{hypothèse (iv)}}{\leq} k \|x-y\|$$

Ainsi $u$ est $k$-lipschitzienne.

(v) $\Rightarrow$ (i) : vrai (même si $u$ n'est pas linéaire !). ∎

Remarques : (1) Il existe des applications linéaires qui ne sont pas continues. Par exemple, si $E = C^\infty([0,1], \mathbb{R})$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$ alors

$$T : f \longmapsto f'$$ est une application linéaire de $E$ dans $E$ qui n'est pas continue.

En effet, par l'absurde si $T$ était continue, alors il existerait $k > 0$ telle que $\forall f \in E$,

$$\|f'\|_\infty \leq k \|f\|_\infty .$$

En particulier pour $f(t) = t^n$, on obtiendrait

$n \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui évidemment est impossible

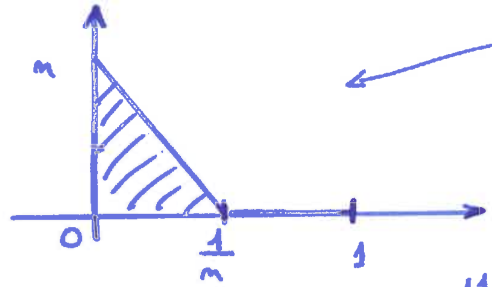
(2). On peut en fait montrer que si $E$ est de dimension infinie et $F$ quelconque, alors on peut toujours construire une application linéaire de $E \longrightarrow F$ discontinue.
Cela nécessite la notion de base en dimension finie qui elle même est basée sur ce qu'on appelle l'axiome du choix. Cela dépasse le programme du cours et nous n'en disons pas plus....
En revanche, nous verrons dans le chapitre sur la compacité que si $E$ est de dimension finie et $F$ qcq alors toute application linéaire de $E \longrightarrow F$ est automatiquement continue.

(3) La continuité dépend bien évidemment de la norme.
Par exemple, considérons $E = C([0,1]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $T(f) = f(0)$, $f \in E$.

si $E$ est muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, alors $T$ est évidemment continue. En revanche, si $E$ est muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$, alors $T$ n'est pas continue. En effet, supposons qu'il existe $k \geq 0$ telle que

$$|f(0)| \leq k \|f\|_1, \forall f \in E.$$

Alors en considérant $f_n$ défini par




on a $f_n(0) = n$ et $\int_0^1 |f_n(t)| dt = 1$

d'où $n \leq k \; , \forall n \in \mathbb{N}$. Absurde à nouveau !

<u>Définitions - Notations :</u> Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On note <u>$\mathcal{L}(E,F)$</u> l'ensemble des applications linéaires continues. Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de <u>formes linéaires continues</u> et dans ce cas $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ s'appelle le <u>dual topologique</u> de $E$ et se note $E'$ ou $E^*$.

Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on définit :

$$\|u\|_{E,F} := \inf \left\{ k \geq 0 : \forall x \in E, \; \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E \right\}$$

S'il n'y a pas d'ambiguité, on notera aussi pour simplifier, $\|u\| = \|u\|_{E,F}$.

Remarquer que d'après le théorème 23, l'ensemble $\left\{ k \geq 0 : \forall x \in E, \; \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E \right\}$ est non vide et donc $\|u\|_{E,F}$ est bien défini.

**Proposition 24**: Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a :

$$\|u\|_{E,F} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|u(x)\|_F = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|u(x)\|_F.$$

De plus, $\|\cdot\|_{E,F}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ qu'on appelle <u>norme d'opérateur</u> ou <u>norme subordonnée</u>.

<u>preuve</u> : Notons $M_1 = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$, $M_2 = \sup_{x \in \overline{B}_E} \|u(x)\|_F$ et

$M_3 = \sup_{x \in S_E} \|u(x)\|_F$, où

$\overline{B}_E = BF(0,1) = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$ et $S_E = S(0,1) = \{x \in E : \|x\|_E = 1\}$

(a) <u>Montrons que</u> : $\|u\|_{E,F} = M_1$

Pour tout $x \in E$, on a : $\|u(x)\|_F \leq M_1 \|x\|_E$

(pour $x \neq 0_E$, c'est par définition de $M_1$ et pour $x = 0_E$ c'est évident car $u(0_E) = 0_F$)

Donc par définition de $\|u\|_{E,F}$, on a :

$$\|u\|_{E,F} \leq M_1.$$

Remarquons par définition de la borne inférieure qu'il existe une suite de constante $(k_n)_n$, $k_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|u\|_{E,F}$, telle que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq k_n \|x\|_E.$$

Ainsi par passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on obtient que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq \|u\|_{E,F} \, \|x\|_E .$$

D'où $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\quad \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \|u\|_{E,F}$.

En prenant le sup sur les $x \in E \setminus \{0\}$, on en déduit

que $$M_1 \leq \|u\|_{E,F}$$

Cela donne l'égalité $\quad M_1 = \|u\|_{E,F}$.

(b) Montrons que $M_1 = M_3$.

Remarquons que :

$$M_3 = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|u(x)\|_F = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = M_1$$

De plus, si $x \in E \setminus \{0\}$, on a par homogénéité de la norme et linéarité de $u$ :

$$\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F$$

et comme $\dfrac{x}{\|x\|_E} \in S_E$, on en déduit que

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq M_3$$

En prenant le sup sur les $x \in E \setminus \{0\}$, on en déduit

que $\quad M_1 \leq M_3$.

Donc finalement $M_1 = M_3$.

(c) Montrons que : $M_3 = M_2$

Comme $S_E \subset \overline{B_E}$, on a bien évidemment

$$M_3 \leq M_2.$$

De plus, si $x \in \overline{B_E}$, $x \neq 0$, écrivons :

$$x = \|x\|_E \frac{x}{\|x\|_E}$$ et remarquons que $\frac{x}{\|x\|_E} \in S_E$.

D'où $$\|u(x)\|_F = \|x\|_E \left\|u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F$$

$$\leq \|x\|_E M_3 \leq M_3.$$

En prenant le sup sur les $x \in \overline{B_E}$, on obtient

$$M_2 \leq M_3.$$

Ainsi $M_2 = M_3$.

(d) Montrons que $\|\cdot\|_{E,F}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

- On a tout d'abord pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$\|u\|_{E,F} = 0 \iff \forall x \in E, \ u(x) = 0 \iff u \equiv 0.$$

- Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$\forall x \in E \quad \|\lambda u(x)\|_F = |\lambda| \, \|u(x)\|_F$ et en prenant le sup sur les $x \in \overline{B_E}$ (par exemple), on obtient que

$$\|\lambda u\|_{E,F} = |\lambda| \, \|u\|_{E,F}$$

- Si $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$, on a :

$\forall x \in E,\quad \|(u+v)(x)\|_F = \|u(x) + v(x)\|_F$

$$\leq \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F$$

$$\leq \left(\|u\|_{E,F} + \|v\|_{E,F}\right) \|x\|_E .$$

Ceci implique que :

$$\|u+v\|_{E,F} \leq \|u\|_{E,F} + \|v\|_{E,F} .$$

Ainsi $\|\cdot\|_{E,F}$ vérifie les propriétés d'une norme. ∎

<u>A retenir.</u>

1. Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on a :

$\forall x \in E,\quad \|u(x)\|_F \leq \|u\|_{E,F} \, \|x\|_E .$

2. Si $u$ <u>est linéaire</u>, pour montrer que $u$ est continue, on cherche à montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que : $\forall x \in E,\quad \|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E$

ou de façon équivalente que :

$$\forall x \in \overline{B_E},\quad \|u(x)\|_F \leq M .$$

Une inégalité de ce type montre d'une part que $u$ est continue et d'autre part que $\|u\|_{E,F} \leq M$.

<u>Remarque</u> : Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, le calcul de $\|u\|_{E,F}$ se fait en deux étapes :

1ère étape : on cherche à trouver une constante $M > 0$ telle que $\forall x \in \overline{B}_E$, $\|u(x)\|_F \leq M$.

Ceci permet d'en déduire que $\|u\|_{E,F} \leq M$.

2ième étape : pour montrer que $\|u\|_{E,F} = M$, deux cas peuvent se présenter :

<u>1er cas</u> : le sup dans la définition de $M_2$ ($M_1$ ou $M_3$ de façon équivalente) est atteint. Autrement dit, il existe $x_0 \in \overline{B}_E$ tel que $\|u(x_0)\|_F = M$.

Mais l'existence d'un tel $x_0$ n'est pas toujours garanti notamment lorsque $E$ est de dimension finie.

<u>2ème cas</u> : le sup n'est pas atteint. Dans ce cas, on cherche une suite $(x_n)_n \subset \overline{B}_E$ telle que

$$\|u(x_n)\|_F \longrightarrow M,$$

ou de manière équivalente on montre que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists\, x_\varepsilon \in \overline{B}_E \text{ tel que } \|u(x_\varepsilon)\|_F \geqslant M - \varepsilon.$$

Voir TD pour des exemples.

On verra dans le chapitre sur la complétude pourquoi le calcul de la norme d'une application linéaire est si important. 

**Proposition 25** : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, on a : $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$

et $\|v \circ u\|_{E,G} \leq \|u\|_{E,F} \|v\|_{F,G}$.

preuve : Il est facile de voir que $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

De plus, si $x \in E$, on a :

$$\|(v \circ u)(x)\|_G = \|v(u(x))\|_G \leq \|v\|_{F,G} \|u(x)\|_F$$

$$\leq \|v\|_{F,G} \|u\|_{E,F} \|x\|_E .$$

Ainsi, on en déduit $\|v \circ u\|_{E,G} \leq \|v\|_{F,G} \|u\|_{E,F}$

■

Dans le cas où $E = F$, si on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ et si on munit le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ de l'opération interne

$$\circ : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ (u, v) & \longmapsto & u \circ v \end{array}$$

alors $\mathcal{L}(E)$ devient une $\mathbb{K}$-algèbre normée unitaire (d'après la proposition 25).

Le théorème 23 se généralise assez facilement au cas des applications multi-linéaires.

**Théorème 24:** Soit $(E_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, \dots, n$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés.

Soit $L : E = E_1 \times \quad \times E_n \longrightarrow F$

une application $n$-linéaire

Munissons $E$ de la norme $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|_j$.

LASSE :

(i) $L$ est continue ;

(ii) $L$ est continue en $0$ ;

(iii) $\exists\, C > 0$ tq

$$\|L(x)\|_F \leqslant C \prod_{j=1}^{n} \|x_j\|_j \quad , \forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in E$$

preuve : admis.

## 3.4. Convergence uniforme :

Définition : Soient $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques

Soient $f_n, f : X \longrightarrow Y$, $n \geq 1$.

On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur $X$

si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$n \geq n_0 \implies \forall x \in X,\ d_Y\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

Théorème 25 : Soit $f, f_n : X \longrightarrow Y$. On suppose que :
(i) $f_n$ est continue pour tout $n \geq 0$.
(ii) $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers $f$ sur $X$.
Alors $f$ est continue.

preuve : Soit $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)$ cv uniformément vers $f$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall x \in X,\ d_Y\big(f_{n_0}(x), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Comme $f_{n_0}$ est continue, il existe $\delta > 0$ tq

$$x \in B_X(x_0, \delta) \implies d_Y\big(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Par l'inégalité triangulaire, on a donc pour tout $x \in B_X(x_0, \delta)$ :

$$d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) \leq d_Y\big(f(x), f_{n_0}(x)\big) + d_Y\big(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)\big) + d_Y\big(f_{n_0}(x_0), f(x_0)\big)$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

D'où $f$ est continue en $x_0$. Comme $x_0$ est arbitraire, on en déduit que $f$ est continue. ■

# Chapitre 4. Espaces complets.

## 4.1 Complétude d'un espace métrique :

### 4.1.1. Suite de Cauchy.

**Définition :** Soit $(X, d)$ un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $X$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \,/\, p \geq q \geq N \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Autrement dit, $(x_n)_n$ est de Cauchy si $\lim_{p,q \to +\infty} d(x_p, x_q) = 0$.

**Proposition 1 :** Soit $(X, d)$ un espace métrique, $(x_n)_n \subset X$.

(a) Si $(x_n)_n$ converge, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy.

(b) Si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, alors :

(i) elle est bornée ;

(ii) elle a au plus une valeur d'adhérence ;

(iii) si elle possède une valeur d'adhérence, alors elle converge.

preuve : (a) Si $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq

$$n \geq N \Longrightarrow d(x_n, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $p \geq q \geq N$, on a :

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

inégalité triangulaire

(b) Supposons que $(x_n)_n$ soit une suite de Cauchy: ②

(*) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geq q \geq N$, on a $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

(i) En appliquant (*) avec $\varepsilon = 1$ (par exemple),

on a $\forall p \geq N$ : $d(x_p, x_N) < 1$.

Posons $M = \max\big(1, d(x_0, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N)\big)$.

Alors $\forall p \geq 0$, $d(x_p, x_N) \leq M$ et donc

$x_p \in BF(x_N, M)$. Ceci prouve que $(x_n)_n$ est bornée.

(ii) Supposons que $l$ et $l'$ sont des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$. Par définition, cela signifie qu'il existe deux sous suites, i.e deux applications $\varphi, \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes, telles que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et $x_{\psi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l'$.

Alors

$$d(l, l') \leq \underbrace{d(l, x_{\varphi(n)})}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + d(x_{\varphi(n)}, x_{\psi(n)}) + \underbrace{d(x_{\psi(n)}, l')}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

et comme $(x_n)$ est une suite de Cauchy et que

$\varphi(n), \psi(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, on a $d(x_{\varphi(n)}, x_{\psi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On obtient finalement que $d(l, l') = 0$, et donc

$l = l'$.

(iii) Supposons maintenant que $(x_n)$ possède une valeur d'adhérence $\ell$ ; il existe donc une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Alors

$$d(x_n, \ell) \leq \underbrace{d(x_n, x_{\varphi(n)})}_{\substack{\downarrow n \to +\infty \\ 0}} + \underbrace{d(x_{\varphi(n)}, \ell)}_{\substack{\downarrow n \to +\infty \\ 0}}$$

et donc $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. ∎

<u>Exemple</u> : * $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, n'est pas de Cauchy car elle a deux valeurs d'adhérence.

* $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ est de Cauchy dans $E = [0, 1[$ mais elle n'a pas de valeur d'adhérence dans $E$.

## 4.1.2 Espaces complets :

<u>Définition</u> : Un espace métrique $(X, d)$ est dit <u>complet</u> si toute suite de Cauchy dans $X$ est convergente (<u>dans</u> $X$). Un <u>espace de Banach</u> est un espace vectoriel normé complet.

Une algèbre normée unitaire $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est dite une <u>algèbre de Banach</u> si l'espace vectoriel normé $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est complet.

<u>Remarque</u>: si $(X,d)$ est un espace métrique et $d'$ est une distance équivalente à $d$, alors il découle immédiatement des définitions que $(X,d)$ est complet si et seulement $(X,d')$ est complet. Mais il faut faire attention au fait que cela n'est plus vrai si $d$ et $d'$ sont seulement topologiquement équivalents (voir TD pour un contre exemple). Ainsi la notion de complétude est une notion métrique mais pas topologique.

<u>Exemple fondamental</u>:

<u>Théorème 2</u>: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

<u>preuve</u>: Rappelons que d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite réelle bornée admet au moins une sous suite convergente et donc une valeur d'adhérence. Donc, si $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, alors elle est bornée (proposition 1, (b), (i)) et donc elle admet une valeur d'adhérence. En appliquant une nouvelle fois la proposition 1 (b), (iii), on en déduit qu'elle converge.

Ainsi $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

<u>Proposition 3</u>: Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques complets et soit

$X = X_1 \times \dots \times X_n$ muni de la distance $d_\infty$

(On rappelle que $d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} d_i(x_i, y_i)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$
$y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ )

Alors $(X, d_\infty)$ est complet.

preuve: soit $(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})_k$ une suite de Cauchy dans $X$.

Alors il est clair que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la suite $(x_i^{(k)})_k$ est une suite de Cauchy de $(X_i, d_i)$ qui est complet donc elle converge. Ainsi il existe $l_i \in X_i$, $1 \leq i \leq n$ telle que

$$x_i^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l_i \text{ dans } (X_i, d_i).$$

Il est alors immédiat de voir que $(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})_k$ converge vers $l = (l_1, \dots, l_n)$ dans $(X, d_\infty)$. ■

Proposition 4: Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de vectoriels normés et supposons qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi : E \longrightarrow F$ tel que $\varphi$ et $\varphi^{-1}$ sont continues. Alors

$$(E, \|\cdot\|_E) \text{ espace de Banach} \iff (F, \|\cdot\|_F) \text{ espace de Banach}.$$

preuve: Par symétrie, il suffit de montrer que:

$$(E, \|\cdot\|_E) \text{ espace de Banach} \Longrightarrow (F, \|\cdot\|_F) \text{ espace de Banach}.$$

Soit $(v_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

Notons $u_n = \varphi^{-1}(v_n)$, $n \geq 0$ ($\varphi$ est bijective).

On a alors:

$$\|u_n - u_m\|_E \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi^{-1} \text{ linéaire}}}{=} \|\varphi^{-1}(v_n - v_m)\|_E \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi^{-1} \text{ continue}}}{\leq} \|\varphi^{-1}\| \, \|v_n - v_m\| \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$$

Ainsi $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$.

Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in E$.

Par continuité de $\varphi$, on en déduit finalement que

$$v_n = \varphi(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(l) \quad \text{dans } (F, \|\cdot\|_F).$$

Ainsi toute suite de Cauchy de $(F, \|\cdot\|_F)$ converge et donc $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. ∎

Remarque: La proposition 4 s'applique en particulier lorsqu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ telle que $\varphi$ soit isométrique, i.e $\|\varphi(x)\|_F = \|x\|_E$, $\forall x \in E$.

En effet, dans ce cas, il est clair que $\varphi$ et $\varphi^{-1}$ sont automatiquement continues (avec de plus : $\|\varphi\| = \|\varphi^{-1}\| = 1$).

Corollaire 5: Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les espaces $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des espaces de Banach munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$ ou de toute autre norme équivalente.

<u>preuve</u> : pour $\mathbb{R}^n$, il suffit d'appliquer le théorème 2 et la proposition 3. Pour $\mathbb{C}^n$, on peut commencer par montrer que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un espace de Banach. Pour cela, remarquons que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) &\longrightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|) \\ (a,b) &\longmapsto z = a+ib \end{aligned}$$

est un isomorphisme (d'espaces vectoriels) isométrique.

Il suit alors de la proposition 4 et de sa remarque que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un espace de Banach si et seulement si $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach, ce qu'on vient de montrer.

Pour passer de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{C}^n$, il suffit d'appliquer une nouvelle fois la proposition 3.

Pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut utiliser l'application

$$\begin{aligned} \psi : (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty) &\longrightarrow (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_\infty) \\ A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} &\longmapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) \end{aligned}$$

Cette application est clairement un isomorphisme d'espace vectoriel isométrique. Ainsi comme $(\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, la proposition 4 permet d'en déduire que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. ∎

**Proposition 6 :** Soit $(X, d)$ un espace métrique, $A \subset X$.

(a) $A$ complet (muni de la distance induite) $\Longrightarrow$ $A$ fermé dans $X$.

(b) Si $(X, d)$ est complet et $A$ fermé dans $X$ alors $A$ est complet.

preuve : (a) pour montrer que $A$ est fermé, on va utiliser la caractérisation séquentielle. Soit $x \in \overline{A}$. Alors il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $A$ telle que

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \text{ dans } (X, d).$$

Bien évidemment, cela force la suite $(a_n)_n$ à être de Cauchy dans $A$ qui est supposé complet. Donc la suite $(a_n)_n$ converge dans $A$. Autrement dit, il existe $a \in A$ telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ dans $(A, d_A)$.

Mais évidemment $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ dans $(X, d)$ (car $d_A$ est simplement la restriction de $d$ à $A \times A$).

Ainsi par unicité de la limite dans $(X, d)$, on a

$$x = a \in A.$$

Ceci prouve que $\overline{A} \subset A$ et donc

$$A = \overline{A} \text{ est fermé.}$$

(b) On suppose maintenant que $(X,d)$ est complet et que $A$ est fermé. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de $(A,d_A)$. En particulier, $(a_n)_n$ est aussi une suite de Cauchy de $(X,d)$ qui est complet. Donc il existe $x \in X$ tel que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ dans $(X,d)$. 9

Ceci montre que $x \in \overline{A}$ mais comme $A$ est fermé $x \in A$. Ainsi on peut dire que

$$a_n \longrightarrow x \text{ dans } (A, d_A)$$

et donc $(a_n)_n$ converge dans $A$, ce qui prouve que $(A,d_A)$ est complet. ■

__Remarque:__ Ceci permet d'en déduire par exemple que $(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, |\cdot|)$ n'est pas complet car sinon $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ serait fermé dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$, ce qui n'est pas le cas. Pourtant, $(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, |\cdot|)$ est homéomorphe, via la fonction tan, à $(\mathbb{R},|\cdot|)$ qui est complet. On voit donc que __la complétude n'est pas préservée par homéomorphisme__. Cela montre une nouvelle fois que ce n'est pas une notion topologique.

## 4.1.3. Exemples et méthodes:

**Proposition 7**: Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach.

Alors $\mathcal{L}(E,F)$ (muni de la norme opérateur) est un espace de Banach.

preuve: Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E,F)$.

Soit $x \in E$. On a:

$$\|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F \leq \underbrace{\|T_n - T_m\| \, \|x\|_E}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

Donc $(T_n x)_n$ est une suite de Cauchy de $(F, \|\cdot\|_F)$ qui est complet. On en déduit que $(T_n x)_n$ converge dans $(F, \|\cdot\|_F)$ vers une limite qu'on note $Tx$.

Ainsi, on a défini une application

$$T : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto Tx := \lim_{n \to +\infty} T_n x.$$

* Remarquons d'abord que $T$ est linéaire. En effet, si $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a:

$$T(\lambda x + y) = \lim_{n \to +\infty} T_n(\lambda x + y) \underset{T_n \text{ linéaire}}{=} \lim_{n \to +\infty} (\lambda T_n(x) + T_n(y))$$

et avec la proposition 12 du chapitre 3 (qui dit que la somme et la multiplication par un scalaire sont continues sur un e.v.n.) on en déduit que

$$T(\lambda x + y) = \lambda Tx + Ty .$$

Ainsi $T$ est linéaire.

* Remarquons que $T$ est continue. En effet, $(T_n)_n$ étant une suite de Cauchy alors elle est bornée (Proposition 1). Autrement dit, il existe $M > 0$ telle que

$$\|T_n\| \leq M .$$

D'où $\forall x \in E, \quad \|T_n x\|_F \leq M \|x\|_E$

En faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$, on obtient que

$$\forall x \in E, \quad \|Tx\|_F \leq M \|x\|_E .$$

Ceci implique que $T$ est continue et $\|T\| \leq M$.

* Il reste à montrer que $\|T_n - T\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Pour cela écrivons la définition du fait que $(T_n)_n$ est une suite de Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq m \geq N \Longrightarrow \|T_n - T_m\| < \varepsilon$.

D'où $\forall x \in E, \quad \|T_n x - T_m x\|_F < \varepsilon \|x\|_E$

Faisons tendre $n \longrightarrow +\infty$, on a :

$$m \geq N \ , \ x \in E \Rightarrow \| T_m x - T x \|_F < \varepsilon \, \|x\|_E$$

D'où pour $m \geq N$, on a $\| T_m - T \| < \varepsilon$.

Ceci prouve que $\lim\limits_{m \to +\infty} T_m = T$. ■

Proposition 8 : Soit $I$ un ensemble quelconque, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach et notons

$$\ell^\infty(I, F) = \{ f : I \longrightarrow F \text{ bornée} \}$$

muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in I} \|f(t)\|_F$.

Alors $(\ell^\infty(I, F), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

preuve : On vérifie sans peine que $\ell^\infty(I, F)$ est un espace vectoriel normé. Montrons qu'il est complet. La preuve est très similaire à celle de la proposition 7. Soit donc $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(\ell^\infty(I, F), \|\cdot\|_\infty)$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \ / \ \forall p \geq q \geq N, \ \| f_p - f_q \|_\infty < \varepsilon$$

$$\text{et donc } \forall t \in I, \ \| f_p(t) - f_q(t) \|_F < \varepsilon. \quad (*)$$

Pour tout $t \in I$, la suite $(f_n(t))_n$ est une suite de Cauchy de $(F, \|\cdot\|_F)$ qui est complet. Donc la suite $(f_n(t))_n$ converge vers $f(t) \in F$.

On a donc défini
$$f : I \longrightarrow F$$
$$t \longmapsto f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$$

Il reste à vérifier que $f \in \ell^\infty(I, F)$ et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour cela, faisons tendre $p \longrightarrow +\infty$ dans $(*)$. On obtient donc que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N /$

$$\left.\begin{array}{c} q \geqslant N \\ t \in I \end{array}\right) \Longrightarrow \|f_q(t) - f(t)\|_F < \varepsilon$$

Donc $f - f_q \in \ell^\infty(I, F)$ et $\|f - f_q\|_\infty \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$

On en déduit de plus que
$$f = (f - f_q) + f_q \in \ell^\infty(I, F)$$
car $\ell^\infty(I, F)$ est un espace vectoriel. $\blacksquare$

---

Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé. On rappelle que $C([a,b], F)$ désigne l'espace des fonctions continues $f : [a,b] \longrightarrow F$.

Comme $F$ est un espace vectoriel (normé), il est clair que $C([a,b], F)$ est un espace vectoriel.

On verra <u>au chapitre suivant</u> que si $f \in C([a,b], F)$

alors nécessairement $f$ est bornée.

Autrement dit, on a

$$C([a,b],F) \subset \ell^\infty([a,b],F)$$

et en particulier, on peut munir $C([a,b],F)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

**Proposition 9** : Soient $-\infty < a < b < +\infty$, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé.
Si $F$ est un espace de Banach alors $(C([a,b],F), \|\cdot\|_\infty)$ est aussi un espace de Banach.

preuve : Nous avons que

$$C([a,b],F) \subset \ell^\infty([a,b],F)$$

et d'après la proposition 8, $(\ell^\infty([a,b],F), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Ainsi pour montrer que $(C([a,b],F), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, il suffit d'après la proposition 6 de montrer que $C([a,b],F)$ est fermé dans $(\ell^\infty([a,b],F), \|\cdot\|_\infty)$. Pour cela, soit $f \in \ell^\infty([a,b],F)$ telle qu'il existe une suite $(f_n)_n$ de $C([a,b],F)$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Cela signifie que $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ (15)

sur $[a,b]$. Le théorème 25 du chapitre 3 permet alors d'en déduire que $f$ est continue.

Ceci prouve que $C([a,b],F)$ est fermé dans $l^\infty([a,b],F)$ et donc c'est un espace de Banach. ■

## 4.2. Application de la complétude à des problèmes de limite :

L'utilité de la complétude se situe véritablement dans des problèmes d'existence de limite. Dans un espace complet, si on veut montrer qu'une suite converge, nul besoin de deviner à l'avance sa limite (ce qui peut parfois s'avérer difficile). Il "suffit" de montrer que c'est une suite de Cauchy, propriété qui ne fait pas intervenir la limite. Avant de voir des exemples d'applica-tions plus sophistiqués, revenons sur l'exponentielle. Une des approches possibles pour définir $e^x$, pour $x \in [-1,1]$, sans utiliser la théorie des séries entières, est de définir la suite $r_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $n \geq 0$.

On montre alors facilement que pour $m > n > 2$, on a

$$|r_m - r_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+2-|x|}$$

puis en utilisant le fait que $|x| \leq 1$, on en déduit que $|r_m - r_n| \leq \frac{1}{n}$.

Ceci montre que $|r_m - r_n| \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$ et donc $(r_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ complet.

Donc elle converge et on peut poser

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in [-1, 1].$$

(Bien évidemment, on peut aussi montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_k \frac{x^k}{k!}$ est $+\infty$ .....).

## 4.2.1. Théorème du point fixe de Picard.

Théorème 10 (Théorème du point fixe de Picard).

Soit $(X, d)$ un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application strictement contractante : $\exists k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y).$$

Alors, $f$ a un unique point fixe $c \in X$ (i.e $f(c) = c$). De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérées définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$, converge vers $c$ et

$$d(x_n, c) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \;, \; n \geq 0$$

preuve : Existence du point fixe : on va montrer que la suite $(x_n)_n$ converge et que sa limite $c$ est un point fixe de $f$.

Pour tout $n$, on a :

$$d(x_{n+1}, x_n) = d\big(f(x_n), f(x_{n-1})\big) \leq k \, d(x_n, x_{n-1}).$$

Ainsi par récurrence, on en déduit que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$$

Donc pour $p > q$, on a :

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p-1}) + \cdots + d(x_{q+1}, x_q) \\ &\leq \left(k^{p-1} + \cdots\cdots + k^q\right) d(x_1, x_0) \\ &= k^q\left(1 + \cdots + k^{p-1-q}\right) d(x_1, x_0) \\ &\leq k^q \cdot \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0). \qquad (*) \end{aligned}$$

Comme $0 < k < 1$, on a $k^q \xrightarrow[q \to +\infty]{} 0$, ce qui implique que $d(x_p, x_q) \xrightarrow[p,q \to +\infty]{} 0$ et donc cela montre que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de $(X, d)$ qui est complet.

Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $c \in X$.

De plus, remarquons que si on fait tendre $p$ vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient $d(c, x_q) \leq \frac{k^q}{1-k} d(x_1, x_0)$

(on utilise ici que l'application

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x, x_q) \end{array}$$ est continue ;

voir par exemple Prop 19, chapitre 3).

Vérifions maintenant que $c$ est un point fixe de $f$.

Pour cela remarquons que $f$ étant lipschitzienne, elle est continue. Or si on fait tendre $n \longrightarrow +\infty$ dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$,

comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$, on obtient $c = f(c)$.

<u>Unicité du point fixe:</u> si $f(c) = c$ et $f(c') = c'$,

alors $d(c, c') = d(f(c), f(c')) \leq k\, d(c, c')$

Comme $k \in [0, 1[$, nécessairement cela implique que $d(c, c') = 0$, c'est à dire $c = c'$.

<u>Attention</u>: toutes les hypothèses pour appliquer le théorème du point fixe sont indispensables. Notamment, il ne faut pas oublier de vérifier que $f(E) \subset E$.

Par exemple, si $E = [0,1]$, alors $E$ est complet (car fermé dans $\mathbb{R}$), l'application $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est strictement contractante de $E$ dans $\mathbb{R}$ (appliquer par exemple l'inégalité des accroissements finis) <u>mais</u> $f$ n'a pas de point fixe dans $E$ (pourquoi ?).

En fait le théorème ne s'applique pas car $f(E)$ n'est pas inclus dans $E$......

### 4.2.2. Critère de Cauchy :

<u>Proposition 11</u> : Soit $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques.

On suppose que $(Y, d_Y)$ est complet. Soit $A \subset X$, $x_0 \in \bar{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$

Alors $f$ a une limite au point $x_0$ si et seulement si <u>le critère de Cauchy</u> au voisinage de $x_0$ est satisfait, à savoir :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall (x,y) \in (B_{d_X}(x_0, \delta) \cap A)^2 \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

<u>Remarque</u> : $f$ satisfait le critère de Cauchy au voisinage de $x_0$ si et seulement si $d_Y(f(x), f(y)) \xrightarrow[x,y \to x_0]{} 0$

Ce critère a l'énorme avantage de montrer que $f$ a une limite sans connaître au préalable cette limite.

preuve: Supposons tout d'abord que $f$ a une limite quand $x \to x_0$, que nous appelerons disons $l$.

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tq $\forall x \in B_{d_X}(x_0, \delta) \cap A$, on a

$$d_Y(f(x), l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi si $(x, y) \in \left(B_{d_X}(x_0, \delta) \cap A\right)^2$, on a avec l'inégalité triangulaire :

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), l) + d_Y(f(y), l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Réciproquement supposons que $f$ satisfait le critère de Cauchy au voisinage de $x_0$. Pour montrer que $f$ a une limite quand $x \longrightarrow x_0$, nous allons utiliser la proposition 5 du chapitre 3. Soit donc $(a_n)_n$ une suite de $A$ telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$. Alors

$$d_Y(f(a_n), f(a_m)) \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$$

Ceci signifie donc que $(f(a_n))_n$ est une suite de Cauchy dans $(Y, d_Y)$ qui est supposé complet. Donc la suite $(f(a_n))_n$ converge. Ceci étant vrai pour toute suite $(a_n)_n \subset A$ qui converge vers $x_0$, on en déduit (par la proposition 5, chap 3) que $f$ a une limite en $x_0$. ■

**Corollaire 12** (prolongement des applications lipschitziennes):

Soient $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques, on suppose que $Y$ est complet. Soit $f : A \longrightarrow Y$ où $A \subset X$ et on suppose que $f$ est $k$-lipschitzienne sur $A$.

Alors (i) $f$ a une limite en tout point de $\overline{A}$.

(ii) $f$ admet un unique prolongement par continuité $\tilde{f}$ sur $\overline{A}$. De plus, $\tilde{f}$ est $k$-lipschitzienne sur $\overline{A}$.

preuve: (i) Pour tout $(x,y) \in A^2$, on a :

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq k\, d_X(x,y),$$

et pour tout $x_0 \in \overline{A}$, on a par continuité de

$$d_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d_X(x,y) \xrightarrow[x,y \to x_0]{} 0$$

Ainsi $$d_Y(f(x), f(y)) \xrightarrow[x,y \to x_0]{} 0.$$

Donc $f$ vérifie le critère de Cauchy au voisinage de $x_0$. Ainsi $f$ admet une limite en tout point $x_0 \in \overline{A}$.

(ii) Il reste maintenant à appliquer la proposition 6 du chapitre 3 qui donne l'existence et l'unicité d'un prolongement par continuité $\tilde{f}$ de $f$ sur $\bar{A}$. Pour conclure la preuve, remarquons que si $(x,y) \in \bar{A} \times \bar{A}$ alors il existe $(a_n, b_n) \in A \times A$ telle que

$$(a_n, b_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x,y).$$

Comme $$d_Y(\tilde{f}(a_n), \tilde{f}(b_n)) = d_Y(f(a_n), f(b_n)) \leq k\, d_X(a_n, b_n)$$

on obtient par passage à la limite que

$$d_Y(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq k\, d_X(x,y).$$

Donc $\tilde{f}$ est $k$ lipschitzienne. ■

### 4.2.3. Séries et complétude :

<u>Définition :</u> Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $(a_n)_n$ une suite d'éléments de $E$. On dit que la série de terme général $a_n$, notée $\sum_n a_n$,

(a) <u>converge dans $E$</u> si la suite des sommes partielles $(S_N)_N$ définie par $$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n, \quad N \in \mathbb{N},$$

converge dans $E$.

On note dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n .$$

(b) <u>converge normalement</u> si la série numérique $\sum_n \|a_n\|_E$ converge.

On a un résultat important car très utile.

Théorème 13 : Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach, toute série normalement convergente est convergente.

<u>Remarque</u> : La propriété

(*) $\quad \forall (a_n)_n \subset E, \ \sum_n \|a_n\|_E$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

caractérise en fait les espaces de Banach. ~~Le~~ Le théorème 13 dit que (*) est vrai si E est un espace de Banach. Le fait que si (*) est vrai, alors nécessairement E est un espace de Banach sera vu en TD.

<u>preuve du théorème 13</u> : Soit $(a_n)_n \subset E$ et supposons que $\sum_n \|a_n\|_E$ converge. Notons

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n , \quad N \in \mathbb{N} .$$

Il s'agit de montrer que $(S_N)_N$ converge dans E.

Comme $E$ est complet, il suffit de montrer que $(S_N)_N$ est une suite de Cauchy.

Or pour $N > M$, on a :

$$\|S_N - S_M\|_E = \Big\| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \Big\|_E \leq \sum_{n=M+1}^{N} \|a_n\|_E$$

inégalité triangulaire.

Comme la série numérique $\sum_n \|a_n\|_E$ converge, alors

$$\sum_{n=M+1}^{N} \|a_n\|_E \xrightarrow[M \to +\infty]{} 0$$

Ainsi $\|S_N - S_M\|_E \xrightarrow[N, M \to +\infty]{} 0$, ce qui prouve que $(S_N)_N$ est de Cauchy.

Corollaire 14 : Soit $E$ un espace de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E)$.
Si $\|Id - T\| < 1$ alors $T$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$, autrement dit il existe $U \in \mathcal{L}(E)$ tq

$$UT = TU = Id.$$

preuve : En échangeant $T$ en $Id - T$ il suffit de montrer que $\|T\| < 1 \Rightarrow Id - T$ inversible dans $\mathcal{L}(E)$.

Notons $q = \|T\| \in [0,1[$ et remarquons que d'après la proposition 25 du chapitre 3, on a :

$$0 \leq \|T^n\| \leq \|T\|^n = q^n.$$

Comme la série numérique $\sum_n q^n$ converge, la série $\sum_n \|T^n\|$ converge. Autrement dit, la série $\sum_n T^n$ converge normalement. Or $E$ étant un espace de Banach, $\mathcal{L}(E)$ est aussi un espace de Banach. Ainsi le théorème 13 implique que la série $\sum_n T^n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$.

Notons $$U = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n \in \mathcal{L}(E).$$

Vérifions maintenant que $U(Id - T) = (Id - T)U = Id$.

Pour cela, remarquons que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{N} T^n\right)(Id - T) = \sum_{n=0}^{N} T^n - \sum_{n=0}^{N} T^{n+1}$$

$$= Id - T^{N+1}$$

Or $\|T^{N+1}\| \leq \|T\|^{N+1} = q^{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

D'où $Id - T^{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} Id$.

D'autre part, par continuité de la composition à droite, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{N} T^n\right)\left(Id - T\right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} U\left(Id - T\right).$$

Par unicité de la limite, on en déduit que

$$U\left(Id - T\right) = Id.$$

On montre de même que $(Id - T)U = Id$. $\blacksquare$

<u>Exercice</u> L'ensemble $GL(E) = \{ T \in \mathcal{L}(E) : T \text{ inversible} \}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

# Chapitre 5. Compacité.

## 5.1. Parties compactes dans un espace métrique

### 5.1.1. Définition et caractérisation séquentielle.

<u>Définition</u> Soit $(X, d)$ un espace métrique et $K \subset X$.

On dit que $K$ est <u>compact</u> si $K$ vérifie <u>l'axiome de Borel Lebesgue</u>, à savoir que de tout recouvrement de $K$ par des ouverts, on peut extraire un sous recouvrement fini.

Autrement dit, $K$ est compact si $\forall (O_i)_{i \in I}$ famille d'ouverts de $(X, d)$ telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, il existe $i_1, \dots, i_N \in I$ tel que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} O_{i_j}$$

<u>Remarque:</u> Par définition de la topologie induite, les ouverts de $K$ sont exactement les intersections des ouverts de $(X, d)$ avec $K$. Ainsi l'axiome de Borel-Lebesgue est équivalent à :

si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de $K$ telle que $K = \bigcup_{i \in I} O_i$, alors il existe $i_1, \dots, i_N \in I$ telle que

$$K = \bigcup_{j=1}^{N} O_{i_j} .$$

En passant au complémentaire, on voit aussi que $K$ est compact si et seulement si $\forall (F_i)_{i\in I}$ famille de fermés de $K$ telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ alors il existe $i_1, .., i_N \in I$ telle que

$$\bigcap_{j=1}^{N} F_{i_j} = \emptyset .$$

<u>Proposition 1:</u> (propriété des fermés emboîtés)

Soit $(X, d)$ un espace métrique, $K \subset X$. Supposons que $K$ est compact et soit $(F_n)_n$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés non vides de $K$. Alors $\bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n \neq \emptyset$.

<u>preuve:</u> par l'absurde, supposons que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n = \emptyset$.

Par la propriété de Borel Lebesgue ($K$ étant compact) il existe $i_1, .., i_N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\bigcap_{j=1}^{N} F_{i_j} = \emptyset .$$

Mais la suite $(F_n)_n$ étant décroissante, on a

$$\bigcap_{j=1}^{N} F_{i_j} = F_k \quad \text{où} \quad k = \max\{i_1, .., i_N\} .$$

On obtient ainsi que $F_k = \emptyset$ ce qui contredit l'hypothèse. ■

La compacité admet une caractérisation séquentielle très utile mais qui sera admise. Une preuve est incluse à la fin du chapitre mais cette preuve est hors programme. En revanche le résultat est à connaître.

Théorème 2 : Soit $(X, d)$ un espace métrique, $K \subset X$. LASSE : (i) $K$ est compact ;

(ii) toute suite d'éléments de $K$ admet une valeur d'adhérence dans $K$.

preuve : voir annexe fin du chapitre. ■

### 5.1.2. Propriétés :

Proposition 3 : Soient $(X_i, d_i)$, $1 \leq i \leq n$, des espaces métriques et $K_i \subset X_i$, $1 \leq i \leq n$.

Supposons que pour tout $i = 1, \dots, n$, $K_i$ est compact.

Alors $K = K_1 \times \dots \times K_n$ est compact dans $(X, d_\infty)$

où $X = X_1 \times \dots \times X_n$ et $d_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$,

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$.

preuve : Il suffit évidemment de faire la preuve pour $n = 2$.
Nous allons utiliser le théorème 2 pour montrer que $K_1 \times K_2$ est compact lorsque $K_1$ et $K_2$ le sont. Soit donc $\left(\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)\right)_n$ une suite de $K_1 \times K_2$.

La suite $\left(x_1^{(n)}\right)_n$ est dans $K_1$ qui est compact. Donc elle admet une sous-suite convergente dans $K_1$. Autrement dit, il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$x_1^{(\varphi_1(n))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_1 \in K_1 .$$

De même, la suite $\left(x_2^{(\varphi_1(n))}\right)_n$ est dans $K_2$ qui est compact.

Donc elle admet une sous suite convergente dans $K_2$.
Autrement dit, il existe $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_2^{(\varphi_1(\varphi_2(n)))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_2 \in K_2$.

Remarquons que $x_1^{(\varphi_1(\varphi_2(n)))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_1$

(car $\left(x_1^{(\varphi_1(\varphi_2(n)))}\right)_n$ est une sous suite de $\left(x_1^{(\varphi_1(n))}\right)_n$ qui converge vers $l_1$).

Posons alors $\psi := \varphi_1 \circ \varphi_2$ qui est une application de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

On a $\left(x_1^{(\psi(n))}, x_2^{(\psi(n))}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (l_1, l_2) \in K_1 \times K_2$

Ainsi $(\ell_1, \ell_2)$ est une valeur d'adhérence de $\left(\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right)\right)_n$ et donc le théorème 2 implique que $K_1 \times K_2$ est compact. ∎

<u>Remarque</u>: Ce théorème se généralise à un produit dénombrable de compacts mais dans ce cas, la preuve nécessite (pour construire la sous-suite convergente) un argument de "procédé diagonal". Nous n'entrerons pas dans ces détails qui vont au delà du programme.

<u>Proposition 4</u>: Soit $(X, d)$ un espace métrique, $K \subset X$.

Si $K$ est compact alors il est borné, complet et fermé dans $X$.

<u>preuve</u>: • <u>Montrons que $K$ est borné</u> : par l'absurde si $K$ n'est pas borné alors on peut construire une suite $(x_n)_n$ dans $K$ telle que $d(x_n, x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Dans ce cas, bien évidemment, $(x_n)_n$ n'a aucune valeur d'adhérence ce qui contredit la compacité par le théorème 2.

• <u>Montrons que $K$ est complet</u> : soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans K. Puisque K est compact, $(x_n)_n$ admet une valeur d'adhérence. Mais d'après la proposition 1 du chapitre 4, une suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence converge. Donc $(x_n)_n$ converge ce qui prouve que K est complet.

Pour montrer que K est fermé dans X, il suffit d'appliquer la proposition 6 du chapitre 4 qui dit que complet $\Longrightarrow$ fermé. ∎

<u>Proposition 5:</u> Soit $(X, d)$ un espace métrique, $F \subset K \subset X$. Supposons que K est compact et F est un fermé de X.
Alors F est compact.

<u>preuve:</u> Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de F.
Comme $F \subset K$ et que K est compact, $(x_n)$ admet une valeur d'adhérence. Autrement dit, il existe une sous-suite $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in K$.
Comme $x_{\varphi(n)} \in F$, on a $l \in \overline{F}$. Mais F étant fermé, $\overline{F} = F$ et donc $(x_n)$ a une valeur d'adhérence dans F. Ainsi par le théorème 2, F est compact. ∎

**Proposition 6 :** Soit $(X, d)$ un espace métrique, $K \subset X$ compact et $(x_n)_n$ une suite de $K$. Si $(x_n)$ admet une seule valeur d'adhérence alors elle est convergente.

**preuve :** Soit $l$ l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)$ et supposons par l'absurde que $(x_n)_n$ ne converge pas vers $l$. Autrement dit, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$(*) \quad \forall n, \ \exists k > n, \ d(x_k, l) \geq \varepsilon_0.$$

On peut alors construire une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ tel que

$$d(x_{\varphi(n)}, l) \geq \varepsilon_0.$$

En effet, appliquons $(*)$ avec $n = 0$ : $\exists k_0 > 0$ tel que

$$d(x_{k_0}, l) \geq \varepsilon_0$$

et on pose $\varphi(0) = k_0$.

Supposons paravoir construit $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(p)$ tel que

$$d(x_{\varphi(j)}, l) \geq \varepsilon_0, \quad j = 0, \dots, p.$$

On applique $(*)$ avec $n = \varphi(p)$. Alors il existe $k_{p+1} > \varphi(p)$ tel que $d(x_{k_{p+1}}, l) \geq \varepsilon_0$

et on pose $\varphi(p+1) = k_{p+1}$.

Ainsi, on construit la suite $(x_{\varphi(n)})_n$ par récurrence.

Comme $(x_{\varphi(n)})_n$ est une suite dans $K$ compact, il existe une sous suite $x_{\varphi(\psi(n))} \longrightarrow \ell' \in K$.

Mais $\ell'$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$. Donc par hypothèse $\ell' = \ell$. Mais comme

$$d(x_{\varphi(\psi(n))}, \ell) \geqslant \varepsilon_0 > 0,$$

on obtient une contradiction en faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$. ■

<u>Remarque:</u> la proposition 6 n'est évidemment pas valable sans l'hypothèse de compacité de $K$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}$, la suite

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k \\ k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

possède une unique valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ (qui est 1) et elle n'est pas convergente !

## 5.1.3. Compacts dans $\mathbb{K}^n$:

Rappelons tout d'abord le théorème de Bolzano-Weierstrass dont on donnera une preuve aussi en annexe.

Théorème 7 (de Bolzano-Weierstrass) :

Toute suite réelle bornée admet une sous suite convergente.

preuve : voir fin du chapitre - annexe. ■

Corollaire 8 :

(a) Soient $-\infty < a < b < +\infty$. Alors $I = [a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$.

(b) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Alors $K = BF(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ est un compact de $\mathbb{C}$.

preuve : (a) Soit $(x_n)_n$ une suite de $I$. En particulier, la suite $(x_n)_n$ est bornée et le théorème de Bolzano-Weierstrass assure qu'il existe une sous-suite $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$.

Mais on a $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$ et en faisant tendre $n \to +\infty$, on en déduit que $a \leq l \leq b$, i.e $l \in I$.

Ainsi toute suite de $I$ admet une valeur d'adhérence dans $I$. Le théorème 2 affirme alors que $I$ est compact.

(b) Soit $(z_n)_n$ une suite de points de $K$.

Il est alors clair que les deux suites réelles $(\mathrm{Re}\, z_n)_{n \geq 0}$ et $(\mathrm{Im}\, z_n)_{n \geq 0}$ sont bornées.

Ainsi, il existe une sous suite $(\mathrm{Re}\, z_{\varphi(n)})_n$ telle que

$$\mathrm{Re}\, z_{\varphi(n)} \longrightarrow a \in \mathbb{R}$$

De même comme $(\mathrm{Im}\, z_{\varphi(n)})_n$ est bornée, il existe une sous-suite $(\mathrm{Im}\, z_{\varphi(\psi(n))})_n$ telle que

$$\mathrm{Im}\, z_{\varphi(\psi(n))} \longrightarrow b \in \mathbb{R}.$$

Alors $$z_{\varphi(\psi(n))} = \mathrm{Re}\, z_{\varphi(\psi(n))} + i\, \mathrm{Im}\, z_{\varphi(\psi(n))} \longrightarrow a+ib$$

De plus comme $z_{\varphi(\psi(n))} \in BF(z_0, R)$ qui est fermé,

on a : $a+ib \in BF(z_0, R)$.

Ainsi toute suite de points de $K$ a une valeur d'adhérence dans $K$ et le théorème 2 implique que $K$ est un compact de $\mathbb{C}$. ∎

$\boxed{\text{Corollaire 9 :}}$ Dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, les compacts sont exactement les fermés bornés.

preuve : D'après la proposition 4, on sait déjà que si $K \subset \mathbb{K}^n$ est compact, alors $K$ est fermé et borné.

Réciproquement supposons que $K$ soit fermé et borné dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Alors $\exists\, R > 0$ tel que

$$K \subset BF_{\mathbb{K}^n}(0, R) = \{ x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty \leq R \}.$$

Remarquons alors que

$$BF_{\mathbb{K}^n}(0,R) = BF_{\mathbb{K}}(0,R) \times \dots \times BF_{\mathbb{K}}(0,R).$$

D'après le corollaire 8, l'ensemble $BF_{\mathbb{K}}(0,R)$ est un compact de $\mathbb{K}$. Or un produit de compact est un compact (proposition 3) et donc $BF_{\mathbb{K}^n}(0,R)$ est un compact de $\mathbb{K}^n$.

De plus, $K$ étant supposé fermé et inclus dans un compact, on en déduit avec la proposition 5 que $K$ est compact. $\blacksquare$

<u>Exemples</u> : Dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ les boules fermés et les sphères sont compactes.

⚠ ce n'est plus vraie en dimension infinie. Par exemple, dans l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, la boule $BF(0,1)$ est fermée et bornée mais elle n'est pas compacte : la suite $u^{(k)} = (0, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow\ k^{\text{e}}\ \text{place}}{1}, 0, 0, \dots), k \geq 0$, est dans $BF(0,1)$ mais elle n'a pas de valeur d'adhérence car $\forall k \neq \ell$, $\|u^{(k)} - u^{(\ell)}\|_\infty = 1 \dots$

## 5.2. Applications de la compacité :

### 5.2.1. Compacité et continuité :

**Théorème 10 :** $(X, d_X)$ - espace métrique compact

$(Y, d_Y)$ - espace métrique

$f : X \longrightarrow Y$ continue.

Alors $f(X)$ est un sous-ensemble compact de $(Y, d_Y)$.

preuve : Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $Y$ telle que

$$f(X) \subset \bigcup_{i\in I} O_i .$$

Remarquons que $X = f^{-1}(f(X))$.

D'où : $X \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} O_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$

Or $O_i$ est un ouvert de $Y$ et $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, donc $f^{-1}(O_i)$ est un ouvert de $X$.

Comme $(X, d_X)$ est un compact, il existe $i_1, \dots, i_N \in I$

tq
$$X \subset \bigcup_{j=1}^{N} f^{-1}(O_{i_j})$$

Donc
$$f(X) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{N} f^{-1}(O_{i_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{N} f(f^{-1}(O_{i_j}))$$
$$= \bigcup_{j=1}^{N} O_{i_j}$$

Ainsi $f(X)$ est compact.

Exercice: refaire la preuve avec la caractérisation séquentielle de la compacité.

Corollaire 11: Soit $(X, d)$ un espace métrique compact et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.
Alors $f$ est borné et atteint ses bornes : il existe $a, b \in X$ tels que :
$$f(a) = \operatorname{Inf}_{x \in X} f(x) \quad \text{et} \quad f(b) = \operatorname{Sup}_{x \in X} f(x).$$

preuve: D'après le théorème 10, $f(X)$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc un ensemble fermé et borné. Ceci montre donc que $f$ est bornée. De plus, comme on a $\operatorname{Inf}_{x \in X} f(x) \in \overline{f(X)}$ (par exemple car par définition d'une borne inférieure, il existe $x_n \in X$ tq $f(x_n) \longrightarrow \operatorname{Inf}_{x \in X} f(x)$) et que $f(X)$ est fermé, on a déduit que $\operatorname{Inf}_{x \in X} f(x) \in f(X)$. Ainsi $\exists\, a \in X$ tq $f(a) = \operatorname{Inf}_{x \in X} f(x)$.
On raisonne de même avec la borne supérieure. ∎

Corollaire 12: Soit $(X, d_X)$ un espace métrique compact, $(Y, d_Y)$ un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$.
Supposons que $f$ soit bijective et continue. Alors

$f$ est un homéomorphisme. Autrement dit, $f^{-1}$ est automatiquement continue.

<u>Remarque</u> : Dans le corollaire 12, l'hypothèse de compacité de l'espace de départ est essentielle. En effet par exemple en notant $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle (la sphère) unité du plan complexe, on vérifie facilement que l'application

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{T} \\ \theta &\longmapsto f(\theta) = e^{i\theta} \end{aligned}$$

est continue et bijective. En revanche, $f^{-1}$ n'est pas continue car sinon $f^{-1}(\mathbb{T}) = [0, 2\pi[$ serait un compact de $\mathbb{R}$ ce qui n'est pas le cas. $\blacksquare$

<u>preuve du corollaire 12</u> : pour montrer la continuité de $f^{-1}$, nous allons utiliser la caractérisation par les fermés (voir théorème 1, chapitre 3). Soit donc $F$ un fermé de $(X, d_X)$. Montrons que $(f^{-1})^{-1}(F)$ est un fermé de $Y$.

Or comme $f$ est bijective, on a $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$.

De plus, $F$ est un fermé de $(X, d_X)$ qui est compact.

Donc par la proposition 5, $F$ est compact.

Or l'image d'un compact par une application continue est compact (théorème 10)

D'où $f(F)$ est un compact de $(Y, d_Y)$ et donc en particulier, $f(F)$ est fermé dans $(Y, d_Y)$ (proposition 4).

Ainsi l'image réciproque par $f^{-1}$ de tout fermé de $(X, d_X)$ est un fermé de $(Y, d_Y)$. Donc $f^{-1} : X \longrightarrow Y$ est continue. ∎

On a vu au chapitre 3 la notion d'<u>uniforme continuité</u> et d'après les définitions, il est clair que

$$f \text{ uniformément continue} \Longrightarrow f \text{ continue.}$$

En général, la réciproque est fausse mais si l'espace de départ est compact alors cela devient vrai !

<u>Théorème 13</u> (<u>Théorème de Heine</u>):

Soit $(X, d_X)$ un espace métrique compact, $(Y, d_Y)$ un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$ continue. Alors $f$ est uniformément continue.

<u>preuve:</u> Supposons par l'absurde que $f$ n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et il existe une suite $(x_n, y_n) \in X \times X$ telle que

$$d_X(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \text{ et } d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 .$$

Comme $X$ est compact, la proposition 3 implique que $X \times X$ est compact. Donc il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (l_1, l_2) \in X \times X$.

Or $$d_X(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'où $$d_X(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

D'autre part, la proposition 12 du chapitre 1 (ou la continuité de $d_X$ sur $X \times X$) donne que
$$d_X(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \longrightarrow d_X(l_1, l_2).$$
Ainsi par unicité de la limite, on a $d_X(l_1, l_2) = 0$ i.e $l_1 = l_2$.

Comme $f$ est continue en $l_1$, on a
$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(l_1)$$
$$f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(l_1)$$

et donc $$d_Y(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d_Y(f(l_1), f(l_1)) = 0$$

ce qui contredit le fait que $d_Y(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \geq \varepsilon$. $\blacksquare$

## 5.2.2. Particularité des espaces vectoriels normés de dimension finie.

**Théorème 14.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et supposons que $\dim E < +\infty$. Alors toutes les normes sur $E$ sont 2 à 2 équivalentes. En particulier, les notions d'ouverts, de fermés, de compacts, d'adhérence, de suite convergente, ... ne dépendent pas de la norme choisie.

preuve: Fixons une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ de $E$ et pour $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$, on pose :

$$N(x) = \max(|x_1|, \dots, |x_N|).$$

On vérifie facilement que $N$ est une norme sur $E$. Comme l'équivalence des normes est une relation d'équivalence, il suffit de montrer que toute norme $\|\cdot\|$ sur $E$ est équivalente à $N$.

Etape 1: L'application $\| \, \| : \begin{array}{ccc} (E, N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$ est continue.

Tout d'abord avec l'inégalité triangulaire, on a: pour tout $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$,

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i| \|e_i\| \leq N(x) \sum_{i=1}^{N} \|e_i\| = \mu N(x),$$

où $\mu := \sum_{i=1}^{N} \|e_i\|$ est une constante $> 0$ indépendante de $x$.

On a donc :

$$\forall x \in E, \qquad \|x\| \leq \mu\, N(x) . \qquad (*)$$

En particulier, $\forall x, y \in E$,

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \underset{\substack{\text{inégalité}\\ \text{triangulaire}}}{\leq} \|x-y\| \underset{\text{inégalité } (*) \text{ appliquée à } x-y}{\leq} \mu\, N(x-y) .$$

Cette inégalité signifie que l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : (E,N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

est $\mu$-lipschitzienne et donc en particulier continue.

<u>Etape 2:</u> <u>L'ensemble</u> $S = \{x \in E : N(x) = 1\}$ <u>est un compact</u> <u>de $(E, N)$</u>.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty) &\longrightarrow (E,N) \\ (x_1, \dots, x_N) &\longmapsto x_1 e_1 + \dots + x_N e_N \end{aligned}$$

Alors $\phi$ est clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels qui est en plus une isométrie. En particulier, $\phi$ est continue. Or

$$S = \phi\big(S_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)\big),$$

où

$$S_{\|\cdot\|_\infty}(0,1) = \{x \in \mathbb{K}^N : \|x\|_\infty = 1\}$$

D'après le corollaire 9, on sait que $S_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)$ est un compact de $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$ et donc on en déduit que $S$ est un compact de $(E, N)$ comme image d'un compact par une application continue.

<u>Etape 3</u> : <u>les normes $N$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes sur $E$.</u>

L'application $\|\cdot\|$ continue sur $(E,N)$ est bornée et atteint ses bornes <u>sur</u> le compact $S$ de $(E, N)$.

Autrement dit,

$$\alpha = \inf_{x\in S} \|x\| \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{x\in S} \|x\|$$

sont des réels et il existe $x_0 \in S$ tels que

$\alpha = \|x_0\|$.

Remarquons que $x_0 \in S \Longrightarrow N(x_0) = 1 \Longrightarrow x_0 \neq 0 \Longrightarrow \alpha > 0$.

Ainsi $\quad 0 < \alpha < \beta < +\infty$.

De plus, $\forall x \in E$, $N(x) = 1 \Longrightarrow \alpha \leq \|x\| \leq \beta$ $(**)$.

Maintenant si $y \in E$, $y \neq 0$, posons $x = \dfrac{y}{N(y)}$.

Alors $N(x) = 1$ et donc avec $(**)$,

$$\alpha \leq \left\| \frac{y}{N(y)} \right\| \leq \beta,$$

ce qui donne $\quad \alpha N(y) \leq \|y\| \leq \beta N(y)$.

Cette inégalité est évidemment aussi vérifiée pour $y=0$, ce qui signifie que $\|\cdot\|$ et $N$ sont équivalentes. ∎

<u>Corollaire 15</u>: Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors (a) $E$ est complet

(b) les compacts de $E$ sont les fermés, bornés.

En particulier, les boules fermées et les sphères sont compactes.

<u>preuve</u>: (a) Soit $\mathcal{B}=\{e_1,\dots,e_N\}$ une base de $E$. Comme toutes les normes sur $E$ sont équivalentes, on peut choisir la norme
$$N\Big(\sum_{i=1}^{N} x_i e_i\Big) = \max_{1\le i\le N} |x_i| .$$
L'espace vectoriel $(E,N)$ est alors isométriquement isomorphe à l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$ via l'application linéaire
$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{K}^N &\longrightarrow E\\ (x_1,\dots,x_N) &\longmapsto \sum_{i=1}^{N} x_i e_i\end{aligned}$$
Or $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$ est complet (corollaire 5, chapitre 4) et donc $(E,N)$ est complet.

(b) Nous devons montrer maintenant que si $F$ est un fermé, borné de $(E, N)$ alors $F$ est compact.

Pour cela, remarquons tout d'abord que $\phi^{-1}(F)$ est fermé dans $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$ car $\phi$ est continue.

De plus, $\phi^{-1}(F)$ est aussi borné dans $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$.

En effet, comme $F$ est borné dans $(E, N)$ il existe $R>0$ tel que $\forall\, y \in F,\ N(y) \leq R$

et donc $\forall\, x \in \phi^{-1}(F)$, on a: $N(\phi(x)) \leq R$.

Mais comme $\phi$ est une isométrie, on a:

$$\|x\|_\infty = N(\phi(x)) \leq R.$$

Ainsi $\phi^{-1}(F) \subset BF_{\|\cdot\|_\infty}(0, R)$.

Donc $\phi^{-1}(F)$ est un fermé, borné de $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$ donc un compact de $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$ (corollaire 9).

D'où $F = \phi(\phi^{-1}(F))$ est un compact de $(E, N)$. $\blacksquare$

<u>Corollaire 16</u>. Soit $E$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie. Alors $F$ est fermé dans $E$.

<u>preuve</u>: $F$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé de dimension finie. Donc d'après le corollaire 15,

$F$ est complet. Donc par la proposition 6 du chapitre 4, on en déduit que $F$ est fermé dans $E$. $\blacksquare$

**Corollaire 17**: Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-e.v normés et supposons que $\dim E < +\infty$.
Si $T : E \longrightarrow F$ est linéaire, alors $T$ est automatiquement continue.

preuve: Soit $(e_1, \dots, e_N)$ une base de $E$ et pour $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$, définissons la norme $N$ sur $E$ par $N(x) = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$.

Remarquons alors que par l'inégalité triangulaire, on a:

$$\|T(x)\|_F = \Big\| \sum_{i=1}^{N} x_i T(e_i) \Big\|_F$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} |x_i| \, \|T(e_i)\|_F$$

$$\leq N(x) \sum_{i=1}^{N} \|T(e_i)\|_F.$$

Autrement dit, si

$$C = \sum_{i=1}^{N} \|T(e_i)\|_F,$$

on a $\forall x \in E, \quad \|T(x)\|_F \leq C\, N(x)$.

Comme $\dim E < +\infty$, le théorème 14 permet d'affirmer

que $N$ et $\|\cdot\|_E$ sont équivalents. En parti- (23)
-culier, il existe $c'>0$ tq $\forall x\in E$, $N(x)\leq c'\|x\|_E$.

On obtient finalement que :

$$\forall x\in E, \quad \|T(x)\|_F \leq c\,c'\|x\|_E,$$

ce qui prouve que $T : (E,\|\cdot\|_E) \longrightarrow (F,\|\cdot\|_F)$ est continue. ■

Remarque : le résultat vrai reste vrai pour les applications

$$\phi : E_1\times E_2\times\dots\times E_p \longrightarrow F \quad p \text{ linéaires}$$

si chaque $E_i$, $1\leq i\leq p$, est un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice : le prouver !

Si $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. normé de dimension finie, on a vu que la boule unité fermée $BF(0,1)$ est compacte.
Il est remarquable que cela caractérise les espaces vectoriels normés de dimension finie.

Théorème 17 : Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

LASSE : (i) $BF(0,1)$ est compacte
(ii) $\dim E<+\infty$.

preuve : (ii) $\Longrightarrow$ (i) : corollaire 15 !

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Supposons que $K = BF(0,1)$ soit compacte. Comme $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{1}{2})$,

il existe $x_1, \dots, x_N \in K$ tq

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \tfrac{1}{2}).$$

Soit $F = \text{Vect}\{x_1, \dots, x_N\}$.

Montrons que $K \subset F$.

Soit $x \in K$. Nous allons construire une suite $(y_k)_k$ d'éléments de $F$ tels que $y_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x$.

Cette suite va être construite par récurrence.

Tout d'abord comme $x \in K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{2})$,

il existe $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ tq $\|x - x_{i_0}\| < \frac{1}{2}$.

On pose alors $y_0 := x_{i_0} \in F$.

Supposons avoir construit une suite $y_0, \dots, y_k \in F$ tq

$$\|x - y_\ell\| < \frac{1}{2^{\ell+1}}, \quad \ell = 0, \dots, k$$

On a $\| 2^{k+1}(x - y_k) \| < 1$ et donc

$$2^{k+1}(x - y_k) \in B(0,1) \subseteq K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \tfrac{1}{2}).$$

Ainsi il existe $i_{k+1} \in \{1, \dots, N\}$ tq

$$\left\| 2^{k+1}(x - y_k) - x_{i_{k+1}} \right\| < \frac{1}{2}$$

et donc $\quad \left\| x - \left( y_k + \frac{1}{2^{k+1}} x_{i_{k+1}} \right) \right\| < \frac{1}{2^{k+2}}$

En posant $\quad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2^{k+1}} x_{i_{k+1}}$ , on obtient un vecteur $y_{k+1} \in F$ ( $F$ est un espace vectoriel) tel que

$$\| x - y_{k+1} \| < \frac{1}{2^{k+2}} .$$

Ainsi par récurrence, on construit une suite $(y_k)_k \subset F$ telle que $\quad \| x - y_k \| < \frac{1}{2^{k+1}}$ .

Comme $\frac{1}{2^{k+1}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ , on en déduit que

$y_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x$ , et comme $y_k \in F$ , cela implique que $x \in \overline{F}$.

On obtient donc $K \subset \overline{F}$.

Mais $\dim F < +\infty$ donc en particulier fermé dans $E$ (corollaire 16). Ainsi $\overline{F} = F$ et $K \subset F$.

Il est alors facile en utilisant le fait que $F$ est un sous espace vectoriel de voir que

$$BF(0,1) \subset F \Longrightarrow E = F.$$

Donc $\dim E = \dim F \leq N < +\infty$.

## 5.3. Annexe :

### 5.3.1. Preuve du théorème de Bolzano Weierstrass :

Rappelons le théorème de Bolzano Weierstrass.

**Théorème (Bolzano Weierstrass) :**

Toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}$ admet une sous-suite convergente

La preuve que nous allons donner du théorème de Bolzano-Weierstrass utilise les suites adjacentes. Le fait que 2 suites adjacentes convergent vers la même limite repose lui sur la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$ : tout ensemble de réels non vide et majoré possède une borne supérieure.

Preuve du théorème de Bolzano Weierstrass : soit $x = (x_k)_k$ une suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}$ et soit $R > 0$ tel que

$$-R \leq x_k \leq R \quad , \forall k \geq 0.$$

Notons $I_0 = [-R, R]$. On va construire par récurrence sur $k$ une suite d'intervalles fermés $I_k = [a_k, b_k]$ de longueur $\frac{2R}{2^k}$ tel que pour $k \geq 0$

on a $\quad I_{k+1} \subset I_k$

et $\quad \{ j \geq 0 : x_j \in I_k \}$ est infini. $\quad (*)$

Pour $k=0$, $\quad I_0$ convient.

Supposons la suite construite jusqu'au rang $k$ et posons

$$c_k := \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Notons $\quad I_{k+1}^- = [a_k, c_k]$ et $\quad I_{k+1}^+ = [c_k, b_k]$

Comme $\quad I_k = I_{k+1}^- \cup I_{k+1}^+$, <u>au moins</u> l'un

des deux ensembles $\{ j : x_j \in I_{k+1}^- \}$ ou $\{ j : x_j \in I_{k+1}^+ \}$

est infini. On choisit alors

$$I_{k+1} = I_{k+1}^- \quad \text{ou bien} \quad I_{k+1} = I_{k+1}^+$$

de sorte que $(*)$ soit vrai au rang $k+1$.

Notons bien sûr que $\quad I_{k+1} \subset I_k$ et la longueur de

$I_{k+1}$ est la moitié de la longueur de $I_k$, à savoir

$$\frac{1}{2} \; \frac{2R}{2^k} = \frac{2R}{2^{k+1}}.$$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang $k+1$.

On construit maintenant la sous suite de $(x_n)_n$ de la

façon suivante. On pose :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et pour } k \geq 0$$

$$\varphi(k+1) = \min \{ j > \varphi(k) : \; x_j \in I_{k+1} \}$$

Notons que $\varphi(k+1)$ est bien défini car $\{j : x_j \in I_{k+1}\}$ est infini et donc l'ensemble $\{j > \varphi(k) : x_j \in I_{k+1}\}$ est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ et donc il admet un minimum.

Les suites $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ sont adjacentes :

* la suite $(a_k)$ est croissante
* la suite $(b_k)$ est décroissante

car $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$

* $b_k - a_k = \frac{2R}{2^k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.

Ainsi $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ convergent vers la même limite $x$.

Il reste à remarquer que par définition de $\varphi(k)$, on a :

$$a_k \leq x_{\varphi(k)} \leq b_k$$

et donc le théorème des gendarmes implique que

$$\lim_{k \to +\infty} x_{\varphi(k)} = x.$$

■

## 5.3.2 Preuve de la caractérisation séquentielle des compacts.

Le but de cette section est de présenter une preuve du théorème 2 dont nous rappelons maintenant l'énoncé.

Théorème (de Borel-Lebesgue) : Soit $(X, d)$ un espace métrique et $K \subset X$. LASSE : (i) $K$ est compact

(ii) toute suite d'éléments de $K$ admet une valeur d'adhérence dans $K$.

La preuve utilise deux lemmes:

Lemme a: Soit $(X,d)$ un espace métrique telle que toute suite d'élément de $X$ admet une valeur d'adhérence dans $X$. Alors, pour tout $r>0$, il existe un ensemble fini de points $\{x_1,\dots,x_n\}$ de $X$ tel que

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,r)$$

preuve: Si $X=\emptyset$, il n'y a rien à démontrer. Si $X\neq\emptyset$, supposons par l'absurde qu'il existe $r>0$ tel qu'aucun ensemble fini de boules de la forme $B(x,r)$ ne recouvre $X$. Nous allons construire par récurrence une suite $(x_k)\subset X$ telle que

$$(*) \qquad d(x_j,x_k)\geq r, \quad \forall k>j\geq 0.$$

Commençons par choisir $x_0\in X$ quelconque. Supposons alors avoir construit $x_0,\dots,x_k$ satisfaisant $(*)$. Par hypothèse, l'ensemble

$$U_k := \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j,r)$$

ne recouvre pas $X$. Autrement dit, $\exists\, x_{k+1}\in X\setminus U_k$.

et donc $x_{k+1} \in X$

et $\forall j \in \{1,..,k\}$, $d(x_{k+1}, x_j) \geq r$.

Ainsi $(*)$ est vérifié au rang $k+1$.

Une fois la suite $(x_k)_k$ construite, remarquons que cette suite n'admet aucune sous-suite convergente. En effet, si

$$x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} x \quad \text{alors on aurait}$$

$$r \leq d(x_{\varphi(k)}, x_{\varphi(k+1)}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} d(x,x) = 0,$$

ce qui est absurde. ■

<u>Lemme b (Lebesgue):</u> Soit $(X,d)$ un espace métrique tel que toute suite d'éléments de $X$ admet une valeur d'adhérence dans $X$. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts qui recouvre $X$.

$$X \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Alors $\exists r > 0$ tq

$$\forall x \in X, \exists i \in I \text{ tq } B(x,r) \subset U_i.$$

<u>preuve:</u> par l'absurde (une nouvelle fois!), supposons que

$$\forall r > 0, \exists x \in X, \forall i \in I, B(x,r) \not\subset U_i.$$

Appliquons ceci à $r_j = \frac{1}{2^j}$, $j \geq 0$.

En particulier, $\forall j \geq 0$, $\exists x_j \in X$,

(*) $\forall i \in I$, $B(x_j, \frac{1}{2^j}) \not\subset U_i$

Par hypothèse, la suite $(x_j)_j$ admet une valeur d'adhérence dans $X$. Autrement dit, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(j)})_j$ tq $x_{\varphi(j)} \xrightarrow[j \to +\infty]{} x \in X$.

Or $\exists i_0 \in I$ tq $x \in U_{i_0}$ - ouvert.

Donc $\exists r > 0$ / $B(x, r) \subset U_{i_0}$.

Pour $j$ assez grand, on a

$$B(x_{\varphi(j)}, r_{\varphi(j)}) \subseteq B(x, r).$$

En effet, si $u \in B(x_{\varphi(j)}, r_{\varphi(j)})$, on a :

$$d(u, x) \leq d(u, x_{\varphi(j)}) + d(x_{\varphi(j)}, x)$$

$$< r_{\varphi(j)} + d(x_{\varphi(j)}, x)$$

Notons que $r_{\varphi(j)} + d(x_{\varphi(j)}, x) \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$

et donc $\exists j_0$ tq $r_{\varphi(j_0)} + d(x_{\varphi(j_0)}, x) < r$

ainsi $d(u, x) < r$ ce qui donne

$$B(x_{\varphi(j_0)}, r_{\varphi(j_0)}) \subseteq B(a,r).$$

Mais alors on a :

$$B(x_{\varphi(j_0)}, r_{\varphi(j_0)}) \subseteq U_{i_0} ,$$

ce qui contredit $(*)$. ∎

<u>preuve du théorème de Borel Lebesgue :</u>

<u>(i) ⟹ (ii) :</u> Supposons que $X$ soit compact et supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(u_k)_k \subset X$ telle que $(u_k)$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $X$.

D'après la proposition 18 du chapitre 2, $\forall x \in X$, $\exists\, r_x > 0$ tel que $\{k : u_k \in B(x, r_x)\}$ est fini.

La famille $(B(x, r_x))_{x \in X}$ forme un recouvrement d'ouverts de $X$. Par compacité, on peut en extraire un sous recouvrement fini. Autrement dit, $\exists\, x_1, \dots, x_n \in X$ tq

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r_{x_j}).$$

On a alors

$$(**) \quad \mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{n} \{k : u_k \in B(x_j, r_{x_j})\}$$

En effet, si $m \in \mathbb{N}$ alors

$$u_m \in X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j; r_{x_j})$$

et donc $\exists\, j \in \{1, \dots, n\}$ tq $u_m \in B(x_j; r_{x_j})$.

et donc $m \in \bigcup_{j=1}^{n} \{k : u_k \in B(x_j, r_{x_j})\}$,

ce qui prouve $(**)$.

On obtient alors une contradiction car on a écrit $\mathbb{N}$ comme une union finie d'ensembles finis !

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons maintenant que toute suite d'éléments de $X$ admet une valeur d'adhérence dans $X$.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts qui recouvre $X$.

D'après le lemme b (de Lebesgue), il existe $r > 0$ tq

$(***)$ $\forall x \in X, \exists\, i \in I$ tq $B(x, r) \subset U_i$,

et par le lemme a, il existe $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r).$$

Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, on peut trouver par $(***)$ $i_j \in I$ tq $B(x_j, r) \subset U_{i_j}$

On a donc $X \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$ ce qui prouve la compacité de $X$.

# Chapitre 6. Espaces connexes.

## 6.1. Définition et exemple fondamental:

### 6.1.1. Définition.

Dans tout le chapitre, $(X, d)$ est un espace métrique.

**Définition:**

On dit que $X$ est <u>connexe</u> s'il n'est pas réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints.

Autrement dit, $X$ est connexe si pour tous ouverts $\Omega$ et $O$ de $X$ tels que $X = \Omega \cup O$, $\Omega \cap O = \emptyset$ alors $\Omega = \emptyset$ ou $O = \emptyset$.

Un espace connexe est donc intuitivement un espace en un seul "morceau".

**Proposition 1:** $(X, d)$ un espace métrique.

LASSE: (i) $X$ est connexe.

(ii) L'espace $X$ n'est pas réunion de deux fermés non vides disjoints.

(iii) Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de $X$ sont $\emptyset$ et $X$.

preuve: (i) $\Leftrightarrow$ (ii): $X$ n'est pas connexe si et seulement si il existe deux ouverts $\Omega$ et $O$ non vides disjoints tels que $X = \Omega \cup O$.

Par passage au complémentaire, c'est équivalent à l'existence de deux ouverts $\Omega$ et $O$ non vides tels que
$$\phi = (X \setminus \Omega) \cap (X \setminus O)$$
$$\text{et} \quad X = (X \setminus \Omega) \cup (X \setminus O)$$
Or $\Omega$ (resp. $O$) est un ouvert ssi $X \setminus \Omega$ (resp. $X \setminus O$) est un fermé.

De plus $X \setminus \Omega = \phi \Leftrightarrow \Omega = X \Leftrightarrow O = \phi$

et $X \setminus O = \phi \Leftrightarrow O = X \Leftrightarrow \Omega = \phi$

D'où $X$ n'est pas connexe si et seulement si il existe deux fermés $F$ et $G$ non vides disjoints tels que
$$X = F \cup G.$$
On obtient alors l'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) par contraposée.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Soit $A$ une partie de $X$ tel que $A$ est à la fois ouvert et fermé. On peut écrire
$$X = A \cup (X \setminus A)$$
et $A$, $X \setminus A$ sont deux ouverts disjoints.

Ainsi $X$ étant connexe, on a $A = \phi$ ou $X \setminus A = \phi$

c'est à dire $A = \phi$ ou $A = X$.

De plus, on sait que $\phi$ et $X$ sont à la fois ouverts et fermés.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soient $\Omega$ et $O$ deux ouverts de $X$ tels que

$$X = \Omega \cup O \text{ et } \Omega \cap O = \emptyset.$$

Alors $\Omega = X \setminus O$ est à la fois ouverte et fermé (comme complémentaire d'un ouvert).

Donc $\Omega = \emptyset$ ou $\Omega = X$.

Mais $\Omega = X \Longrightarrow O = \emptyset$.

D'où $\Omega = \emptyset$ ou $O = \emptyset$ ce qui prouve que $X$ est connexe. $\blacksquare$

Définition : on dit qu'une partie $A$ d'un espace métrique $(X, d)$ est connexe si $A$ muni de la distance induite est connexe.

⚠ : si $(X, d)$ est connexe et $A \subset X$ alors $A$ n'est pas nécessairement connexe.

Par exemple, il suffit de prendre la réunion de deux boules ouvertes disjointes .....

Proposition 2 : $(X, d)$ un espace métrique, $A \subset X$.

Alors $A$ est connexe si et seulement si pour tout ouvert $\Omega$ et $O$ de $X$ vérifiant $A \subset \Omega \cup O$ et $A \cap \Omega \cap O = \emptyset$ on a $A \subset \Omega$ ou $A \subset O$.

preuve : supposons $A$ connexe et soit $\Omega$ et $O$ deux ouverts de $X$ tels que $A \subset \Omega \cup O$ et $A \cap \Omega \cap O = \emptyset$.

Par définition de la topologie induite, $A \cap \Omega$ et $A \cap O$ sont deux ouverts de $A$ qui sont disjoints et tels que

$$A = (A \cap \Omega) \cup (A \cap O).$$

Ainsi par connexité de $A$, on en déduit que $A \cap \Omega = \emptyset$ ou $A \cap O = \emptyset$.

Mais $A \subset \Omega \cup O$, donc si $A \cap \Omega = \emptyset$ alors $A \subset O$ et si $A \cap O = \emptyset$ alors $A \subset \Omega$.

Réciproquement, supposons que pour tout ouvert $\Omega$ et $O$ de $X$ vérifiant $A \subset \Omega \cup O$ et $A \cap \Omega \cap O = \emptyset$, on a $A \subset \Omega$ ou $A \subset O$ et montrons que $A$ est connexe.

Pour cela, soit $\Omega_1$ et $O_1$ deux ouverts de $A$ (relativement à la topologie induite) tels que $A = \Omega_1 \cup O_1$ et $\Omega_1 \cap O_1 = \emptyset$.

Par définition de la topologie induite, il existe deux ouverts $\Omega$ et $O$ de $X$ tels que $\Omega_1 = \Omega \cap A$ et $O_1 = O \cap A$.

D'où $A = (\Omega \cap A) \cup (O \cap A) \subset \Omega \cup O$

et $A \cap \Omega \cap O = \Omega_1 \cap O_1 = \emptyset$.

Par hypothèse, on en déduit donc que $A \subset \Omega$ ou $A \subset O$. Mais si $A \subset \Omega$ alors $\Omega_1 = A$ et donc $O_1 = \emptyset$.

De même, si $A \subset O$ alors $O_1 = A$ et donc

$\Omega_1 = \emptyset$.

Ceci prouve la connexité de $A$. ■

## 6.1.2. Exemple fondamental.

Théorème 3. Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. LASSE :

(i) $A$ est connexe

(ii) $A$ est un intervalle.

En particulier, $\mathbb{R}$ est connexe.

preuve: (i) $\Rightarrow$ (ii) : supposons que $A$ est connexe mais que $A$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < z < y$ avec $x, y \in A$ et $z \notin A$. Soit $\Omega = ]-\infty, z[$ et $O = ]z, +\infty[$.

Alors $A \subset \Omega \cup O$, $A \cap \Omega \cap O = \emptyset$ et $\Omega$ et $O$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}$.

Comme $A$ est connexe, la proposition 2 implique que $A \subset \Omega$ ou $A \subset O$. Mais $x \in A \setminus O$ et $y \in A \setminus \Omega$ ce qui contredit le fait que $A \subset \Omega$ ou $A \subset O$.

(ii) ⟹ (i) : supposons que $A$ soit un intervalle mais que $A$ ne soit pas convexe. Alors il existe deux ouverts de $\mathbb{R}$, $\Omega$ et $O$, tels que $A \subset \Omega \cup O$,

$$A \cap \Omega \cap O = \emptyset \text{ et } A \cap \Omega \neq \emptyset,\ A \cap O \neq \emptyset.$$

Soit $x \in A \cap \Omega$ et $y \in A \cap O$. On peut supposer sans perte de généralité que $x < y$ (noter que $x \neq y$ car $A \cap \Omega \cap O = \emptyset$ !).

Comme $A$ est un intervalle, on a $[x, y] \subset A$.

D'où $\quad [x, y] = ([x,y] \cap \Omega) \cup ([x,y] \cap O)$

$$\text{et} \quad [x,y] \cap \Omega \cap O = \emptyset.$$

Soit $B = [x,y] \cap \Omega$. Comme $B$ contient $x$, c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ bornée par $y$.

Soit $x_0 = \sup(B)$. Alors $x_0 \in \overline{B} \subset [x, y]$.

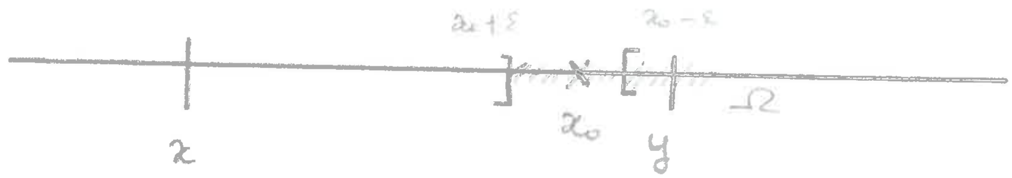
On distingue deux cas.

<u>1er cas</u> : <u>$x_0 \in B$</u>. Alors $x_0 < y$ car $y \in O$ et

$$\Omega \cap O \cap A = \emptyset.$$

De plus, $x_0 \in B \subset \Omega$ - ouvert. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tq $\left]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[ \subset \Omega$.

Ainsi il existe $z > x_0$ et $z \in \Omega \cap [x, y] = B$ ce qui contredit la définition de $x_0$.




2ième cas : $x_0 \notin B$

Alors $x_0 \in [x,y] \cap O \subset O$ - ouvert

Donc il existe $\varepsilon > 0$ tq $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[ \subset O$.

Par définition du sup, il existe $z \in B$ tel que

$$x_0 - \varepsilon < z \leq x_0 . \quad \text{D'où } z \in B \cap O$$

i.e $z \in [x,y] \cap \Omega \cap O$ ce qui est absurde.

$\blacksquare$

## 6.2. Fonctions continues et connexité :

**Théorème 4:** Soient $X, Y$ deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si $X$ est connexe alors $f(X)$ est connexe.

preuve: on raisonne par l'absurde en supposant que $X$ est connexe et que $f(X)$ est connexe. Alors il existe deux ouverts $\Omega$ et $O$ de $Y$ tels que $f(X) \subset \Omega \cup O$ et $f(X) \cap \Omega \cap O = \emptyset$ et $f(X) \cap \Omega \neq \emptyset$, $f(X) \cap O \neq \emptyset$.

Remarquons alors que $f$ étant continue, $f^{-1}(\Omega)$ et $f^{-1}(O)$ sont deux ouverts de $X$ tels que

- $f^{-1}(\Omega) \cap f^{-1}(O) = \emptyset$

(car si $x \in f^{-1}(\Omega) \cap f^{-1}(O)$ alors $f(x) \in O \cap \Omega \cap f(X)$) ⑧

- $X = f^{-1}(\Omega) \cup f^{-1}(O)$ car si $x \in X$ alors $f(x) \in f(X) \subset \Omega \cup O$ et donc soit $f(x) \in \Omega$ et alors $x \in f^{-1}(\Omega)$, soit $f(x) \in O$ et alors $x \in f^{-1}(O)$.

Par convexité de $X$, on en déduit donc que

$$f^{-1}(\Omega) = \emptyset \quad \text{ou} \quad f^{-1}(O) = \emptyset.$$

D'où $X = f^{-1}(\Omega)$ ou $X = f^{-1}(O)$, soit encore $f(X) \subset \Omega$ ou $f(X) \subset O$,

ce qui contredit le fait que $\begin{cases} f(X) \cap \Omega \cap O = \emptyset \\ \text{et } f(X) \cap \Omega \neq \emptyset,\ f(X) \cap O \neq \emptyset. \end{cases}$

■

**Corollaire 5:** (Théorème de la valeur intermédiaire)

Soit $(X, d)$ un espace métrique convexe. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(X)$ est un intervalle.

preuve: il suffit de combiner le théorème 4 et le théorème 3. ■

**Corollaire 6:**

Soit $(X, d)$ un espace métrique compact et convexe. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(X)$ est un intervalle fermé, borné preuve : simple application du corollaire 5 et du théorème 10 chapitre 5.

**Proposition 7** : Soit $(X, d)$ un espace métrique.

LASSE :

(i) $X$ est connexe.

(ii) Toute fonction continue $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ (où $\{0,1\}$ est muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$) est constante.

preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii) : supposons $X$ connexe et soit $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ continue. Alors $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ forme une partition de $X$ en deux fermés disjoints. La proposition 1 implique alors que $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ ou $f^{-1}(\{1\})$, c'est à dire que $X = f^{-1}(\{1\})$ ou $X = f^{-1}(\{0\})$ et donc $f$ est constante.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit $\Omega$ et $O$ deux ouverts de $X$ tels que $\Omega \cap O = \emptyset$ et $X = \Omega \cup O$.

Supposons que $\Omega \neq \emptyset$ et soit $f = \chi_\Omega$.

Montrons que $f$ est continue. Les seuls ouverts de $\{0,1\}$ sont $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0,1\}$.

On $f^{-1}(\{0\}) = O$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{1\}) = \Omega$ et $f^{-1}(\{0,1\}) = X$.

Ainsi l'image réciproque de tout ouvert de $\{0,1\}$ est un ouvert de $X$ et donc $f$ est continue. L'hypothèse implique alors que $f$ est constante, ce qui implique nécessairement que $O = \emptyset$. ■

## 6.3. Union, adhérence, produit:

### 6.3.1 Union.

Théorème 8: Soit $(X,d)$ un espace métrique, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexe de $X$.
Supposons que pour tout $i,j \in I, i\neq j$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.
Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.
En particulier, si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

preuve: Soit $f : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \{0,1\}$ continue.

Alors, $\forall i \in I$, $f|_{A_i} : A_i \longrightarrow \{0,1\}$ est continue.

Comme $A_i$ est connexe, le théorème 7 implique que $f|_{A_i}$ est constante; il existe $a_i \in \{0,1\}$ tel que

$\forall i \in I$, $f|_{A_i} = a_i$.

Mais $(A_i \cap A_j \neq \emptyset, i\neq j) \Longrightarrow a_i = a_j$ si $i \neq j$.

Ainsi, $f$ est constante et $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe ■

<u>Exercice:</u> prouver le résultat précédent avec la définition de la connexité (sans utiliser la caractérisation avec les fonctions).

## 6.3.2. Adhérence.

<u>Proposition 9:</u> Soit $(X, d)$ un espace métrique et $A$ une partie connexe de $X$.

Si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors $B$ est connexe.

En particulier, $A$ connexe $\Longrightarrow$ $\overline{A}$ connexe.

<u>preuve:</u> soit $f : B \longrightarrow \{0,1\}$ continue.

Alors $f_{|A} : A \longrightarrow \{0,1\}$ est continue.

Comme $A$ est connexe, il existe $c \in \{0,1\}$ tel que $\forall x \in A,\ f(x) = c$.

Soit $u \in B \subset \overline{A}$ : il existe alors $x_n \in A$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$.

Par continuité de $f$, on a alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(u)$

et comme $f(x_n) = c$, $\forall n \geqslant 1$, on en déduit que $f(u) = c$.

Ainsi $f$ est constante et le théorème 7 implique que $B$ est connexe. ■

**Proposition 10** : Soit $(X,d)$ un espace métrique.
Soient $A, B \subset X$ et supposons que $B$ est connexe,
$A \cap B \neq \emptyset$ et $B \cap {}^cA \neq \emptyset$.
Alors $B \cap \partial A \neq \emptyset$.

preuve : rappelons que $\partial A = \overline{A} \cap (X \setminus \mathring{A}) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Supposons que $B \cap \partial A = \emptyset$.

On a donc $B \subset \overline{A} \cup \overline{X \setminus A}$

et $B \cap \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = B \cap \partial A = \emptyset$.

Comme $\overline{A}$ et $\overline{X \setminus A}$ sont fermés, la proposition 2 (ou plutôt son analogue pour les fermés) montre que
$B \subset \overline{A}$ ou $B \subset \overline{X \setminus A}$ (car $B$ est connexe).

Si $B \subset \overline{A}$ alors $B \cap \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = B \cap \overline{(X \setminus A)}$

et donc $B \cap (X \setminus A) \subset B \cap \overline{(X \setminus A)} = \emptyset$

ce qui est absurde car $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

De même, si $B \subset \overline{X \setminus A}$ alors $B \cap \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} = B \cap \overline{A}$

et donc $B \cap A \subset B \cap \overline{A} = \emptyset$,

ce qui contredit le fait que $B \cap A \neq \emptyset$.

**Corollaire 11** (Théorème du passage des douanes) : Soient $(X,d)$ un espace métrique, $A \subset X$ et $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continue telle que $\gamma(0) \in A$ et $\gamma(1) \notin A$.
Alors il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\gamma(t_0) \in \partial A$.

preuve : il suffit d'appliquer la proposition 10 au connexe $B = \gamma([0,1])$. ■

Corollaire 12 : Soit $(X,d)$ un espace métrique connexe et $A$ une partie de $X$ telle que $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$. Alors $\partial A \neq \emptyset$.

preuve : on applique la proposition 10 à $B = X$. ■

### 6.3.3. Produit.

Théorème 13 : Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_N, d_N)$ une famille finie d'espaces métriques connexes. Alors le produit $X = X_1 \times \dots \times X_N$ muni de $d_\infty$ est un espace métrique connexe.

preuve : il suffit de faire la preuve pour $N = 2$.

Soit $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow \{0,1\}$ continue.

Fixons $x_1 \in X_1$ et considérons

$$\begin{aligned} f_{x_1} : X_2 &\longrightarrow \{0,1\} \\ x_2 &\longmapsto f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

La fonction $f_{x_1}$ est clairement continue et comme $X_2$ est connexe, $f_{x_1}$ est constante.

Autrement dit, il existe une constante $c_{x_1} \in \{0,1\}$

telle que pour tout $x_2 \in X_2$, $f(x_1, x_2) = c_{x_1}$

De même, pour tout $x_2 \in X_2$, il existe $c_{x_2} \in \{0,1\}$ tq pour tout $x_1 \in X_1$, $f(x_1, x_2) = c_{x_2}$.

Fixons $(u_0, v_0) \in X_1 \times X_2$.

Pour tout $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, on a donc

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, v_0) = f(u_0, v_0).$$

Ainsi $f$ est constante et donc $X$ est connexe. ∎

## 6.4. Convexité, connexité par arcs.

<u>Définition</u> : Un espace métrique $(X, d)$ est dit <u>connexe par arcs</u> si pour tous $x, y \in X$, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

<u>Exemples</u>: (1) Un intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs : si $x, y \in I$, $\gamma(t) = (1-t)x + ty$, $t \in [0,1]$.

(2) l'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs : $f : X \longrightarrow Y$ continue, $X$ connexe par arcs $\Longrightarrow f(X)$ est connexe par arcs.

<u>Définitions</u> : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

(a) Pour $x, y \in E$, <u>le segment entre $x$ et $y$</u>, noté $[x,y]$, est défini par : $[x,y] = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$

(b) Si $A \subset E$. On dit que

(i) $A$ est <u>convexe</u> si $\forall a, b \in A$, $[a,b] \subset A$.

(ii) $A$ est <u>étoilée par rapport à $x_0 \in A$</u> si $\forall a \in A$, $[x_0, a] \subset A$.

<u>Proposition 14</u> : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et $A \subset E$. Alors

$A$ convexe $\Longrightarrow$ $A$ étoilée $\Longrightarrow$ $A$ connexe par arcs.

<u>preuve</u> : • il est clair que si $A$ est convexe alors $A$ est étoilée par rapport à n'importe lequel de ses points.

•• Supposons maintenant que $A$ est étoilé par rapport à $x_0$

Soient $a, b \in A$ et posons

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)a + 2t\, x_0 & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1-(2t-1))x_0 + (2t-1)b & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(on parcourt $[a, x_0]$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, puis le segment

$[x_0, b]$ pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$).

On vérifie que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $\gamma$ est continue sur $[0,1]$. De plus, comme $\gamma([0,\frac{1}{2}]) = [a, x_0] \subset A$ et $\gamma([\frac{1}{2}, 1]) = [x_0, b] \subset A$, on a $\gamma([0,1]) \subset A$.

Ainsi $A$ est connexe par arcs. ■

Corollaire 15: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Toute boule (ouverte ou fermée) est convexe donc connexe par arcs.

preuve: Soient $a, b \in B(x_0, r)$, $x_0 \in E$, $r > 0$.

Soit $x \in [a,b]$. Alors il existe $t \in [0,1]$ tq $x = (1-t)a + tb$.

D'où

$$\|x - x_0\| = \|(1-t)(a - x_0) + t(b - x_0)\|$$
$$\leq (1-t)\|a - x_0\| + t\|b - x_0\|$$
$$< (1-t)r + tr = r$$

Ainsi $x \in B(x_0, r)$ qui est donc convexe.

La preuve est exactement la même pour les boules fermées. ■

Remarques: (1) $\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ n'est pas connexe par arcs. En effet supposons par l'absurde que $\mathbb{R}^*$ est connexe par arcs. En particulier, il existerait une application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^*$ telle que

$\gamma(0) = -\frac{1}{2}$ et $\gamma(1) = \frac{1}{2}$.

Or $0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et le théorème des valeurs intermédiaires impliquant alors qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tq $\gamma(t_0) = 0$, ce qui est absurde.

(2) $\underset{\mathbb{R}}{S}(0,1) = \{-1, 1\}$ n'est pas connexe par arcs.

On raisonne de même !

Les deux résultats précédents deviennent valides lorsque la dimension de l'espace vectoriel est supérieure ou égal à 2.

<u>Théorème 16</u> : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-e.v. normé de dimension supérieure ou égale à 2.

Alors (a) $\forall x_0 \in E$, $E \setminus \{x_0\}$ est connexe par arcs

(b) $\forall x_0 \in E, r > 0$, $S(x_0, r)$ est connexe par arcs.

<u>preuve</u>: Soit $x_0 \in E$ et $r > 0$.

L'application $f : x \longmapsto x + x_0$ est un homéomorphisme qui envoie $0$ sur $x_0$ et

$$f(E \setminus \{0\}) = E \setminus \{x_0\}$$
$$f(S(0,r)) = S(x_0, r).$$

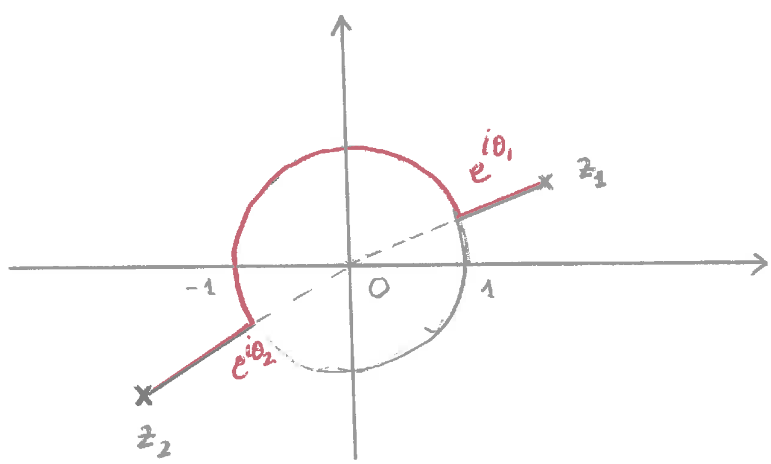
Comme le caractère connexe par arcs est préservé par homéomorphisme, il suffit de montrer que $E \setminus \{0\}$ et $S(0,r)$ sont connexes par arcs.

De plus, comme $S(0,r) = g(E \setminus \{0\})$, où

$$g : E\setminus\{0\} \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto r\frac{x}{\|x\|}$$

est continue et que l'image par une application continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs, il suffit de montrer que $E\setminus\{0\}$ est connexe par arcs.

Commençons par montrer que $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ est connexe par arcs :




En écriture complexe, deux points de $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ s'écrivent :

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, $r_1, r_2 > 0$.

On peut les relier par l'application suivante :

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-3t)z_1 + 3te^{i\theta_1} & , 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ e^{i((2-3t)\theta_1 + (3t-1)\theta_2)} & , \frac{1}{3} < t \leq \frac{2}{3} \\ (3t-2)z_2 + 3(1-t)e^{i\theta_1} & , \frac{2}{3} < t \leq 1 \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\gamma$ est continue,

$\gamma(0) = z_1$, $\gamma(1) = z_2$ et $\gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

Si $E$ est maintenant un $\mathbb{R}$-e.v. normé de dimension $\geq 2$. (19)

Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$ et $P$ un plan contenant $0$, $x$ et $y$ : un tel plan existe puisque $E$ est de dimension supérieure ou égale à 2 (si $x$ et $y$ ne sont pas colinéaires, on prend $P = \text{Vect}\{x, y\}$ sinon on complète par un vecteur $e$ non colinéaire à $x$ et $y$ et on prend $P = \text{Vect}\{x, y, e\}$).

Alors $P \setminus \{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donc connexe par arcs. On peut donc relier $x$ à $y$ par un chemin continu restant dans $P \setminus \{0\}$ donc à fortiori dans $E \setminus \{0\}$. Ainsi $E \setminus \{0\}$ est connexe par arcs. ∎

<u>Théorème 17:</u> Tout connexe par arcs est connexe.

<u>preuve:</u> on peut bien sûr supposer que $X \neq \emptyset$.

Donc il existe $x_0 \in X$ et puisque $X$ est connexe par arcs, on a :

$$X = \bigcup_{\substack{\gamma : [0,1] \to X \text{ continue} \\ \text{et } \gamma(0) = x_0}} \gamma([0,1])$$

(En effet, $\forall x \in X$, $\exists\, \gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continue telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x$).

Comme $x_0 \in \bigcap\limits_{\substack{\gamma : [0,1] \to X \text{ continue} \\ \text{et } \gamma(0) = x_0}} \gamma([0,1])$ , et que

$\gamma([0,1])$ est connexe (d'après les théorèmes 3 et 4),

le théorème 8 implique que $X$ est connexe. ■

<u>Corollaire 18 :</u> Soit $E$ un $\mathbb{R}$-e.v. normé.

(a) Toute boule (ouverte ou fermée) est connexe

(b) Si $\dim E \geq 2$, toute sphère est connexe.

<u>preuve:</u> (a) : corollaire 15 + théorème 17

(b) : théorèmes 16 et 17. ■

⚠ dans un espace métrique, les boules ne sont pas forcément connexes : ainsi dans $\mathbb{Z}$, $B(0,2) = \{-1, 0, 1\}$.

<u>Remarque :</u> connexe $\not\Longrightarrow$ connexe par arcs.

Par exemple, si $\Gamma = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) : x \in ]0,1] \right\}$ le graphe de la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

alors $\Gamma$ est connexe (et même connexe par arcs) comme image continue du connexe $]0,1]$ par la fonction continue $x \longmapsto \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Donc $\overline{\Gamma}$ est connexe (proposition 9).

On peut montrer que : * $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \left(\{0\} \times [-1,1]\right)$

* $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs.

(voir TD).

## 6.5. Composantes connexes :

### 6.5.1. Définition :

Quand l'espace $X$ n'est pas connexe, on peut toujours le "découper en morceaux" connexes disjoints :

$$(*) \qquad X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$$

mais on souhaite le faire en optimisant le nombre de "morceaux" et la décomposition $(*)$ n'est pas très économique...

Définition : Soit $(X, d)$ un espace métrique, $x \in X$.

La composante connexe de $x$ dans $X$ est notée $C_x$ et définie par

$$C_x = \bigcup_{\substack{\Omega \text{ connexe} \\ \text{et } x \in \Omega}} \Omega$$

**Proposition 19** : $(X,d)$ - espace métrique, $x \in X$

Alors (a) $C_x$ est la plus grande partie convexe contenant $x$

(b) $C_x$ est fermé.

preuve : (a) $C_x$ est une réunion de convexes ayant (au moins) un point commun $x$ donc le théorème 8 implique que $C_x$ est une partie convexe qui contient $x$.

De plus, par définition, si $C$ est une partie convexe de $X$ qui contient $x$ alors $C \subset C_x$.

Ceci prouve que $C_x$ est la plus grande partie convexe contenant $x$.

(b) D'après (a), $C_x$ est convexe et la proposition 9 implique alors que $\overline{C_x}$ est convexe.

Comme $x \in \overline{C_x}$ et $C_x$ est la plus grande partie convexe contenant $x$, on a $\overline{C_x} \subset C_x$.

L'inclusion $C_x \subset \overline{C_x}$ étant toujours vraie, on en déduit que $C_x = \overline{C_x}$ et donc $C_x$ est fermé. ∎

Si $(X,d)$ est un espace métrique et $x,y \in X$,

on définit

$x \sim y$ s'il existe une partie connexe $\Omega$ de $X$ telle que $x,y \in \Omega$.

<u>Proposition 20</u>: La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $X$

<u>preuve</u>: • <u>La relation $\sim$ est réflexive</u>: La partie $\{x\}$ est connexe et donc $x \sim x$.

• <u>La relation $\sim$ est symétrique</u>: c'est évident.

• <u>La relation $\sim$ est transitive</u>: si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors il existe deux connexes $\Omega_1$ et $\Omega_2$ tels que $x,y \in \Omega_1$ et $y,z \in \Omega_2$.

L'ensemble $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ est la réunion de deux connexes tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ (car $y \in \Omega_1 \cap \Omega_2$).

Ainsi le théorème 8 implique que $\Omega$ est connexe.

Comme $x, z \in \Omega$, on en déduit que $x \sim z$, ce qui prouve la transitivité de $\sim$. ∎

<u>Théorème 21</u>: Soit $(X,d)$ un métrique, $x \in X$.

Si $[x]$ désigne la classe d'équivalence de $x$ pour la relation d'équivalence $\sim$, i.e:

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\} = \{y \in X : \exists\, \Omega \text{ connexe tq } x,y \in \Omega\}$$

Alors $[x] = C_x$.

Autrement dit, les classes d'équivalences pour la relation $\sim$ sont les composantes connexes de $X$.

<u>preuve</u> : • <u>Montrons que</u> $[x]$ est connexe :

Soit $u : [x] \longrightarrow \{0,1\}$ une fonction continue et $y \in [x]$. Alors il existe une partie connexe $\Omega$ de $X$ telle que $x, y \in \Omega$.

De plus, pour tout $z \in \Omega$, on a $z \sim x$ et donc $z \in [x]$. Donc $\Omega \subset [x]$.

Ainsi $u_{|\Omega} : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ est continue sur $\Omega$ - connexe. La proposition 7 implique alors que $u_{|\Omega}$ est constante. En particulier, $u(y) = u(x)$.

Ainsi, pour tout $y \in [x]$, on a $u(y) = u(x)$ et donc $u$ est constante sur $[x]$. La proposition 7 implique que $[x]$ est connexe.

•• <u>Montrons que</u> $[x] = C_x$.

On a $x \in [x]$ et $[x]$ est connexe.

Donc nécessairement, $[x] \subset C_x$.

D'autre part, si $\Omega$ est une partie connexe

tel que $x \in \Omega$ alors pour tout $y \in \Omega$,
on a $y \sim x$ et donc $y \in [x]$.

Ainsi $\Omega \subset [x]$.

En particulier, on a $C_x \subset [x]$ et donc
$C_x = [x]$.

Proposition 22 : Soit $A$ une partie connexe de $X$, $A \neq \emptyset$.

Supposons que $A$ est à la fois ouverte et fermée dans $X$. Alors $A$ est une composante connexe de $X$, i.e $\exists\, x \in X$ tel que $A = C_x$.

preuve : comme $A \neq \emptyset$, il existe $x \in A$.
Comme $A$ est supposé connexe, on a $A \subset C_x$.

Ecrivons alors $C_x = A \cup (C_x \setminus A)$

et remarquons que :

- $A = A \cap C_x$ est un ouvert de $C_x$ car $A$ est un ouvert de $X$
- $C_x \setminus A = C_x \cap (X \setminus A)$ est aussi un ouvert de $C_x$ car $A$ fermé de $X \Longrightarrow X \setminus A$ ouvert de $X$.

Comme $C_x$ est connexe, on en déduit que
soit $A = \emptyset$, soit $C_x \setminus A = \emptyset$.

Mais $A = \emptyset$ est exclu par hypothèse donc nécessairement $C_x \setminus A = \emptyset$ et donc $A = C_x$. ■

<u>Exemples</u>: (a) Un convexe non vide a une seule composante connexe : lui même !

(b) $\mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes :

$$]-\infty, 0[ \text{ et } ]0, +\infty[.$$

(c) Dans $(\mathbb{Z}, d)$, $d(x,y) = |x-y|$, les composantes connexes sont les singletons.

<u>Proposition 23</u> : $(X, d)$ un métrique.

(a) Si $x, y \in X$. Alors soit $C_x = C_y$, soit

$$C_x \cap C_y = \emptyset$$

(b) Si $X$ admet un nombre fini de composantes connexes, alors ces composantes connexes sont ouvertes.

<u>preuve</u>: (a) Soient $x, y \in X$ et supposons que $C_x \cap C_y \neq \emptyset$. Alors $\exists\, z \in C_x \cap C_y$. Cela signifie que $z \sim x$ et $z \sim y$ et par transitivité, on en déduit que $x \sim y$. Donc $C_x = C_y$.

(b) Soient $C_{x_1}, \dots, C_{x_N}$ les composantes connexes de $X$.

Elles forment une partition de $X$, c'est à dire que $X = C_{x_1} \cup \dots \cup C_{x_N}$

et $i \neq j \Rightarrow C_{x_i} \cap C_{x_j} = \emptyset$

On en déduit donc que $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$C_{x_i} = X \setminus \left( \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} C_{x_j} \right)$$

Or $C_{x_j}$ est fermée (proposition 19) et une union finie de fermés est fermée. Donc $\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} C_{x_j}$ est fermée et $C_{x_i}$ est alors ouverte comme complémentaire d'un fermé. ■

**Théorème 24:** Soient $X, Y$ deux espaces métriques et

$f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme.

Alors $f$ permute les composantes connexes de $X$ et $Y$.

En particulier, deux espaces homéomorphes ont le même nombre de composantes connexes.

preuve: soit $x \in X$ et $C_x^X$ sa composante connexe dans $X$. Alors $f(C_x^X)$ est un connexe qui contient $f(x)$. Donc

$$f(C_x^X) \subset C_{f(x)}^Y,$$

où $C_{f(x)}^Y$ est la composante connexe de $f(x)$ dans $Y$.

De plus, $f : X \longrightarrow Y$ étant bijective et $f^{-1}$ continue, alors $f^{-1}\left(C^Y_{f(x)}\right)$ est un connexe qui contient $f^{-1}(f(x)) = x$.

Donc $f^{-1}\left(C^Y_{f(x)}\right) \subset C^X_x$, c'est à dire

$$C^Y_{f(x)} \subset f(C^X_x).$$

Finalement, on a : $f(C^X_x) = C^Y_{f(x)}$.

Enfin, comme $f : X \longrightarrow Y$ est surjective, $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tel que $y = f(x)$ et $C^Y_y = C^Y_{f(x)} = f(C^X_x)$. $\blacksquare$

Ce critère permet de montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes.

<u>Exercice:</u> montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ ne sont pas homéomorphes.

**Licence de mathématiques–Semestre 5**

**Topologie (M52)**

**Devoir surveillé du 8 novembre 2017**

**Durée : 2 heures**

Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet comporte 2 exercices indépendants qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

**Exercice 1** Soit $A$ une partie non vide d'un espace métrique $(X, d)$. On rappelle que, pour $x \in X$, on définit

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et on munit $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle.

(a) Montrer que $f$ est continue sur $X$ si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in X : f(x) < \lambda\}$ et $\{x \in X : f(x) > \lambda\}$ sont des ouverts de $X$.

(b) A quelle condition sur $A$, la fonction caractéristique de $A$, définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$, est-elle continue sur $X$ ?

(c) Montrer que l'application $x \longmapsto d(x, A)$ est lipschitzienne de $X$ dans $\mathbb{R}$ (muni de sa distance usuelle).

(d) Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

(e) Soient $A$ et $B$ deux parties de $X$ non vides telles que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

   (i) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)} \end{array}$$

   est bien définie et continue sur $X$. Que vaut-elle sur $A$ et $B$ ?

   (ii) En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints $U$ et $V$ tels que $\overline{A} \subset U$ et $\overline{B} \subset V$.

**Exercice 2** On rappelle que $\ell^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |u_n|, \qquad u = (u_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty(\mathbb{R}).$$

On considère les trois sous-ensembles suivants de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ :

$$A = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : u \text{ converge vers } 0\},$$

$$B = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : u \text{ admet } 0 \text{ comme valeur d'adhérence}\},$$

et

$$C = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : u \text{ est périodique}\}.$$

On rappelle qu'une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est dite périodique s'il existe $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, tel que pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+N} = u_n$.

(a) Montrer que $A$, $B$ et $C$ ne sont pas ouverts dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $A$ et $B$ sont fermés dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

(c) Pour $p \geq 1$, posons $u^{(p)} = (u_n^{(p)})_{n\geq 0}$ avec

$$u_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{|\sin(\frac{2\pi n}{k})|}{k^2}, \quad n \geq 0.$$

(i) Montrer que pour tout $p \geq 1$, la suite $u^{(p)}$ est $p!$ périodique.

(ii) Montrer que la suite $(u^{(p)})_{p\geq 1}$ converge pour la norme $||\cdot||_\infty$ vers la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ avec

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(\frac{2\pi n}{k})|}{k^2}, \qquad (n \geq 0).$$

(iii) Montrer que $u$ vérifie $u_0 = 0$ et $u_n > 0$ pour $n > 0$.

(iv) Conclure que $C$ n'est pas fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Licence 3e année, parcours Mathématiques — 2017-2018
M52 - Topologie — S5

# Examen final

11 janvier 2018

[ durée : 3 heures]

*Les documents ne sont pas autorisés. Le sujet comporte 3 exercices indépendants qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.*

**Exercice 1.**
On note $F = S_\infty(0,1)$ la sphère dans $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon 1 pour la norme infinie

$$\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Dessiner $F$.

b) L'ensemble $F$ est-il compact ? connexe ? Justifier.

c) Déterminer les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus F$.

d) Montrer que si $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $I = f(F)$ est un segment (c'est-à-dire un intervalle fermé borné).

e) Montrer que si $f : F \longrightarrow I$ est continue et bijective, alors $f$ est un homéomorphisme.

f) Déterminer le sous-ensemble de $F$ défini par

$$G = \Big\{ u \in F : F \setminus \{u\} \text{ est connexe} \Big\}.$$

g) Montrer que $F$ n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

**Exercice 2.**
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $2\pi$-périodique, définie par $f(x) = x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

a) Représenter $f$.

b) Calculer les coefficients de Fourier de $f$.

c) La série de Fourier de $f$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$ et si oui vers quelle fonction ? Est-ce que la série de Fourier de $f$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ ?

d) Calculer

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

puis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

T.S.V.P.

**Exercice 3.**

a) Le but de cette question est de (re)démontrer le théorème de Heine d'une autre manière que celle vue en cours. Rappelons que ce théorème dit que *si* $(X, d)$ *est un espace métrique compact et* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue, alors* $f$ *est uniformément continue.*

Pour cela, on se donne $(X, d)$ un espace métrique compact, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et $\varepsilon > 0$. On pose alors

$$K_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\}.$$

On munit $X \times X$ de la distance habituelle :

$$d_\infty(u, v) = \max(d(u_1, v_1), d(u_2, v_2)), \qquad u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in X \times X.$$

(i) Montrer que $K_\varepsilon$ est un sous-ensemble compact de $X \times X$.

(ii) Supposons que $K_\varepsilon \neq \emptyset$ et soit $\delta_\varepsilon = \inf_{(x,y)\in K_\varepsilon} d(x, y)$. Justifier qu'il existe $(x_0, y_0) \in K_\varepsilon$ tel que $d(x_0, y_0) = \delta_\varepsilon$.

(iii) En déduire que, si $K_\varepsilon \neq \emptyset$, alors $\delta_\varepsilon > 0$.

(iv) Montrer que si $K_\varepsilon \neq \emptyset$, alors

$$(x, y) \in X \times X, d(x, y) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(v) Retrouver le théorème de Heine.

b) Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et $g : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On rappelle que l'espace

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} : \text{continue}\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|, \qquad f \in C([a, b]),$$

est un espace vectoriel normé complet. Pour $f \in C([a, b])$, on pose

$$T_g(f)(x) = \int_a^b g(x, y)f(y)\, dy, \qquad x \in [a, b].$$

(i) Montrer que $T_g(f) \in C([a, b])$.
*(Indication : on pourra utiliser le théorème de Heine pour* $g$*.)*

(ii) Justifier que si $M = \sup_{(x,y)\in[a,b]\times[a,b]} |g(x, y)|$, alors $M < +\infty$.

(iii) Montrer que $T_g : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$ est une application linéaire continue et que $\|T_g\| \leq M(b - a)$.

(iv) On suppose que $M(b - a) < 1$. Montrer qu'il existe une unique application $f \in C([a, b])$ telle que

$$f(x) = x^2 + \int_a^b g(x, y)f(y)\, dy, \qquad x \in [a, b].$$