Introduction. Dans les cours de $1^{ère}$ et $2^{ème}$ année, vous avez vu la construction de l'intégrale de Riemann qui permet en particulier d'intégrer une fonction continue sur un compact puis plusieurs résultats importants :

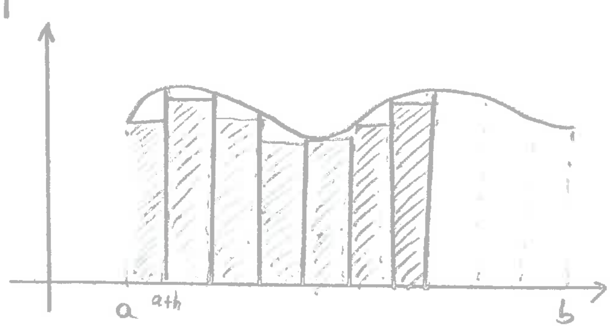
* Théorème de convergence qui permet d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$$

* Théorème de Fubini pour calculer des intégrales multiples
* Théorème de changement de variable.

L'objectif de ce cours est de construire un autre type d'intégrale : l'intégrale de Lebesgue et de démontrer des résultats analogues aux précédents pour cette intégrale. Comme on le verra en particulier, les résultats de convergence auront des hypothèses + souples que dans le cadre Riemann.

L'idée de départ de la construction de l'intégrale de Riemann est assez simple : il s'agit d'approcher l'aire sous le graphe de la fonction par une union de rectangles dont la base est portée par l'axe des abscisses



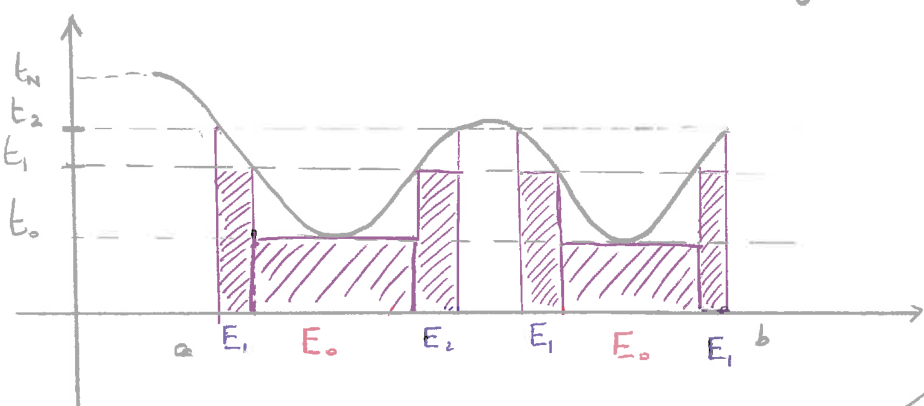
puis de faire tendre $h \longrightarrow 0$

L'idée de la construction de Lebesgue repose sur une sorte de renversement de la situation précédente : il s'agit toujours d'approcher l'aire sous le graphe de la fonction par une union de rectangles mais qui seront définis en fonction des valeurs prises par la fonction.

Plus précisément si $f : [a,b] \longrightarrow [m,M]$ et

si $m = t_0 < t_1 < \dots < t_N = M$

et $E_i = f^{-1}\left([t_i, t_{i+1}[\right)$, on va approcher l'intégrale (de Lebesgue) de f par les quantités $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} t_i\, m(E_i)$



où $m(E_i)$ désigne la "mesure" de l'ensemble E_i.

L'intégration de Riemann parcourt le segment $[a,b]$ et mesure la hauteur de la fonction au fur et à mesure tandis que l'intégration de Lebesgue considère la taille des ensembles de niveau de la fonction.

On voit qu'on est confronté à donner un sens à la "mesure" d'ensembles potentiellement compliqués....

C'est pourquoi, nous allons commencer par expliquer quels ensembles on peut mesurer et comment on les mesure.

Chapitre 1. Tribus et applications mesurables

1.1. Tribu et espaces mesurables

Définition 1 Soit X un ensemble non vide. Une famille $\mathcal{A}$ de parties de X est une <u>tribu</u> sur X si $\mathcal{A}$ possède les propriétés suivantes :

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow {}^cA = X \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1 \Longrightarrow A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Le couple $(X, \mathcal{A})$ s'appelle un <u>espace mesurable</u> et un élément de $\mathcal{A}$ s'appelle un <u>ensemble mesurable</u>.

Proposition 2 Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Alors

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(b) si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B \in \mathcal{A}$.

(c) si $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$ alors $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(d) si $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$ alors

$$\limsup_{n \to +\infty} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \liminf_{n \to +\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

où
$$\limsup_{n \to +\infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

et
$$\liminf_{n \to +\infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k$$

preuve: découle immédiatement de la définition d'une tribu. ∎

Exemples (1) $\{\emptyset, X\}$ est une tribu sur X qu'on appelle la tribu triviale sur X.

(2) si $A \subset X$ alors $\{\emptyset, A, {}^cA, X\}$ est une tribu sur X

(3) $\mathcal{P}(X)$ est une tribu sur X qu'on appelle la tribu grossière.

Proposition 3 Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de tribus sur X, $I \neq \emptyset$.

Alors $\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu sur X.

preuve: * Comme $\mathcal{A}_i$ est une tribu sur X, on a $\emptyset \in \mathcal{A}_i$ et donc $\emptyset \in \mathcal{A}$

** Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors $\forall i \in I$, $A \in \mathcal{A}_i$ et comme $\mathcal{A}_i$ est une tribu, on a ${}^cA \in \mathcal{A}_i$, $\forall i \in I$

Ainsi ${}^{c}A \in \mathcal{A}$

*** Soit $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$

Alors $\forall n \geq 1$, $\forall i \in I$, $A_n \in \mathcal{A}_i$

Comme $\mathcal{A}_i$ est une tribu, on a $A := \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}_i$

Ceci étant vrai $\forall i \in I$, on en déduit que $A \in \mathcal{A}$.

Ainsi $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.

Il est rare en général de pouvoir décrire complètement une tribu. En pratique, les tribus sont souvent définies à partir d'une famille de parties qui engendrent la tribu

Théorème 4. Soit X un ensemble non vide.

(a) Si $\mathcal{C}$ est une famille de parties de X alors il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) sur X contenant $\mathcal{C}$ et notée $\sigma(\mathcal{C})$.

(b) Si $\mathcal{C}$ est une tribu alors $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$

(c) Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ alors

$$\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D})$$

En particulier, si $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ est une tribu alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$.

preuve : (a) Notons $\mathcal{T}$ la collection des tribus sur X qui contiennent $\mathcal{C}$. Cette collection est non vide puisqu'elle contient la tribu $\mathcal{P}(X)$.

Définissons alors $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{T}} \mathcal{A}$.

(autrement dit, $\sigma(\mathcal{C})$ est l'intersection de toute les tribus sur X qui contiennent $\mathcal{C}$). D'après la proposition ③, $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu sur X. Elle contient $\mathcal{C}$ car $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{T}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$.

C'est la plus petite : en effet, si $\mathcal{A}$ est une tribu qui contient $\mathcal{C}$ alors $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ et donc $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

Les points (b) et (c) découlent immédiatement de la définition de $\sigma(\mathcal{C})$. ∎

__Définition⑤__ : Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{C}$ une famille de parties de X. La tribu $\sigma(\mathcal{C})$ s'appelle la __tribu engendrée__ par $\mathcal{C}$.

__Exemples__ Soit $A \subset X$

Alors $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, {}^cA, X\}$

Définition 6 Soit X un espace topologique. La <u>tribu borélienne</u> de X, notée $\mathcal{B}(X)$, est la tribu engendrée par les ouverts de X.
Les éléments de $\mathcal{B}(X)$ sont appelés les <u>boréliens de X</u>.

Cas où $X = \mathbb{R}$

Théorème 7 On a :

(a) Tous les intervalles (ouverts, fermés, semi-ouverts) de $\mathbb{R}$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$.

(b) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\{]a,b[\;\; -\infty < a < b < +\infty\}\right)$

(c) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\{]a,+\infty[: \;\; a \in \mathbb{Q}\}\right)$

(d) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\{]-\infty, a[: \;\; a \in \mathbb{Q}\}\right)$.

Remarque. Dans (b), on peut remplacer $]a,b[$ par $[a,b[$, $[a,b]$ ou $]a,b]$.
Dans (c) (respectivement dans (d)), on peut remplacer $]a,+\infty[$ (respectivement $]-\infty,a[$) par $[a,+\infty[$ (respectivement $]-\infty,a]$).

preuve du Théorème 7

(a) Si I est un intervalle ouvert, alors il est clair que $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Si $I = [a,b[$, on écrit $I = \{a\} \cup]a,b[$

Or $]a,b[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et comme $\{a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, alors $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (complémentaire d'un ouvert et stabilité de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par passage au complémentaire) Ainsi $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Si $I = [a,b]$, on raisonne de même en écrivant que $I = \{a\} \cup]a,b[\cup \{b\}$

et si $I =]a,b]$, on écrit $I =]a,b[\cup \{b\}$.

(b) On a $]a,b[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc d'après la proposition 4, on a

$$\sigma(\{]a,b[\quad -\infty < a < b < +\infty\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Soit maintenant I un ouvert de $\mathbb{R}$.

Remarquons que I s'écrit comme une réunion <u>dénombrable</u> d'intervalles ouverts

En effet, $$I = \bigcup_{\substack{(a,q)\in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^* \\ ]a-q,a+q[\subset I}}]a-q,a+q[$$

$\boxed{\supset}$ clair.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in I$. Comme I est ouvert, $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I$.

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe alors $a \in \mathbb{Q} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

De +, il existe $q \in \mathbb{Q}^*$ tel que

$$]a-q, a+q[\subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[.$$

(il suffit de choisir $q \in \mathbb{Q}^*$ tel que

$$q < \min\big(a-(x-\varepsilon), (x+\varepsilon)-a\big)).$$

Alors $\exists\; a \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}^+$ tel que

$$]a-q, a+q[\subset I$$

et donc l'inclusion $\subset$ est prouvée.

On en déduit donc que $I \in \sigma(\{]a,b[: -\infty<a<b<+\infty\})$

Ceci étant vraie pour tout ouvert I de $\mathbb{R}$, une nouvelle application de la proposition (4) implique

que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{]a,b[\, : -\infty<a<b<+\infty\})$

Ainsi $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a,b[\, : -\infty<a<b<+\infty\})$.

(c). Il est clair que $\forall a \in \mathbb{Q}$, on a :

$$]a,+\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Ainsi $\underline{\sigma(\{]a,+\infty[\, : a \in \mathbb{Q}\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

Vérifions que : $\forall -\infty<a<b<+\infty$, $]a,b[\in \sigma(\{]q,+\infty[\, : q\in\mathbb{Q}\})$.

On peut trouver deux suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ de rationnels

telles que $a_n \geq a$, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

$b_n \leq b$, $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

On a alors $]a,b[= \bigcup_{n\geq 1}]a_n,b_n[$

Comme $\sigma(\{]q,+\infty[\, : q\in\mathbb{Q}\})$ est une tribu, il suffit

de mq $]a_n,b_n[\in \sigma(\{]q,+\infty[, q\in\mathbb{Q}\})$

Ecrivons alors

$$]a_n, b_n[=]a_n ; +\infty[\cap]-\infty, b_n[$$

On a $\underline{]a_n, +\infty[\in \sigma(\{]q ; +\infty[; q \in \mathbb{Q}\})}$

et $]-\infty, b_n[= {}^c[b_n, +\infty[$.

Or $[b_n, +\infty[= \bigcap_{\ell \geq 1}]b_n - \frac{1}{\ell}, +\infty[$

et $]b_n - \frac{1}{\ell}, +\infty[\in \sigma(\{]q, +\infty[, q \in \mathbb{Q}\})$

$\left(\text{car } b_n - \frac{1}{\ell} \in \mathbb{Q}\right)$ et donc

$$[b_n, +\infty[\in \sigma(\{]q, +\infty[, q \in \mathbb{Q}\})$$

et finalement $\underline{]-\infty, b_n[\in \sigma(\{]q ; +\infty[, q \in \mathbb{Q}\})}$

D'où $]a_n, b_n[\in \sigma(\{]q ; +\infty[; q \in \mathbb{Q}\})$

On en déduit que $\forall -\infty < a < b < +\infty$,

$$]a, b[\in \sigma(\{]q ; +\infty[, q \in \mathbb{Q}\}).$$

D'où la proposition 4 implique que :

$$\sigma(\{]a,b[\ .\ -\infty<a<b<+\infty\}) \subset \sigma(\{]q,+\infty[,\ q\in\mathbb{Q}\})$$

D'après (b), on en déduit que

$$\underline{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{]q,+\infty[,\ q\in\mathbb{Q}\})}$$

Ceci conclut la preuve de (c).

Le point (d) se prouve par des arguments similaires.

Autres exemples de tribus

Tribu "image réciproque"

Proposition 8 Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $\mathcal{B}$ une tribu sur Y.

Alors $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) \ .\ B\in\mathcal{B}\}$ est une tribu sur X.

preuve: Le résultat est évident via les formules de Hausdorff

$$* \quad \phi = f^{-1}(\phi)$$

$$* \quad {}^{c}f^{-1}(B) = f^{-1}({}^{c}B)$$

$$* \quad \bigcup_{n\geq 1} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big)$$

Définition 9 La tribu $\{f^{-1}(B) \ .\ B\in\mathcal{B}\}$ s'appelle la tribu image réciproque de $\mathcal{B}$ par f

On la note $f^{-1}(\mathcal{B})$

Exemples ① Soit $Y \subset X$ et $i : Y \longrightarrow X$

où $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Alors $i^{-1}(\mathcal{A}) = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$.

On l'appelle la tribu trace de $\mathcal{A}$ sur Y.

Si $Y \in \mathcal{A}$ alors $i^{-1}(\mathcal{A}) = \{A \in \mathcal{A} : A \subset Y\} \subset \mathcal{A}$.

② Soit $\pi : X \times Y \longrightarrow (X, \mathcal{A})$ la projection

canonique de $X \times Y$ sur X.

Alors $\pi^{-1}(\mathcal{A}) = \{A \times Y : A \in \mathcal{A}\}$ est une

tribu sur $X \times Y$.

Tribu image

Proposition ⑪ : Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $\mathcal{A}$ une

tribu sur X. Alors

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} \text{ est}$$

une tribu sur Y.

$\mathcal{B}$ s'appelle la tribu image de $\mathcal{A}$ par f

preuve : immédiat avec les formules de Hausdorff ■

Il ne faut pas confondre la tribu image avec l'ensemble suivant

$$\{ f(A) : A \in \mathcal{A} \}$$

qui en général n'est pas une tribu : par exemple si f n'est pas surjective, on a $Y \notin \{ f(A) : A \in \mathcal{A} \}$ ....

La proposition suivante est connue sous le nom de lemme de transport :

Proposition (11) (Lemme de transport).

Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$.

Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$$

preuve : $\boxed{\subset}$ $f^{-1}(\mathcal{E}) = \{ f^{-1}(B) \; B \in \mathcal{E} \}$

On a $\forall B \in \mathcal{E}$, $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$

et d'après la proposition (8), $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ est une tribu. Ainsi

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})).$$

$\boxed{\supset}$ Soit $\mathcal{B}$ la tribu image de la tribu $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ par f. Autrement dit,

$$\mathcal{B} = \{ B \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\}.$$

(On sait que $\mathcal{B}$ est une tribu par la proposition 10).

On a : $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ car si $B \in \mathcal{E}$, on a

$$f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})).$$

D'où d'après la proposition 8, on en déduit que

$$\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}.$$

Ainsi $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\mathcal{B})$.

Mais par définition de $\mathcal{B}$, $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \sigma(f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})))$

ce qui implique $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset \sigma(f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})))$. ∎

Proposition 12 (a) Soit X un espace métrique et $Y \subset X$ muni de la distance induite.

On a : $\mathcal{B}(Y) = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(X)\}$

(b) De plus, $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X)$ si et seulement si $Y \in \mathcal{B}(X)$.

Dans ce cas $\mathcal{B}(Y) = \{A \in \mathcal{B}(X) : A \subset Y\}$.

preuve : $\boxed{(a)}$ désignons par $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique
$$y \longmapsto y$$

Alors d'après le cours de Topologie, on a :

$$\mathcal{O}(Y) = \{ O \cap Y : O \in \mathcal{O}(X) \}$$, où $\mathcal{O}(Y)$ (resp. $\mathcal{O}(X)$) désigne l'ensemble des ouverts de Y (resp de X).

Or $O \cap Y = i^{-1}(O)$, $\forall\, O \in \mathcal{O}(X)$.

D'où $\mathcal{O}(Y) = i^{-1}(\mathcal{O}(X))$

Ainsi par le lemme de transport (proposition 11), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(Y) = \sigma(\mathcal{O}(Y)) &= \sigma(i^{-1}(\mathcal{O}(X))) \\ &= i^{-1}(\sigma(\mathcal{O}(X))) \\ &= i^{-1}(\mathcal{B}(X)) \\ &= \{ A \cap Y : A \in \mathcal{B}(X) \} \end{aligned}$$

$\boxed{(b)}$ si $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X)$ alors comme $Y \in \mathcal{B}(Y)$ (Y est ouvert dans lui m !), on en déduit que $Y \in \mathcal{B}(X)$.

Réciproquement si $Y \in \mathcal{B}(X)$ et si $B \in \mathcal{B}(Y)$ alors d'après (a), on a : $B = A \cap Y$ avec $A \in \mathcal{B}(X)$.

Comme $\mathcal{B}(X)$ est stable par intersection (finie ou dénombrable) on en déduit que $B \in \mathcal{B}(X)$.

D'où $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X)$.

Supposons maintenant que $Y \in \mathcal{B}(X)$. D'après ce qui précède, on a : $\mathcal{B}(Y) \subset \{A \in \mathcal{B}(X), A \subset Y\}$

De +, si $A \in \mathcal{B}(X)$, $A \subset Y$, on peut écrire que $A = A \cap Y$ et d'après (a), $A \in \mathcal{B}(Y)$

Ainsi $\{A \in \mathcal{B}(X), A \subset Y\} \subset \mathcal{B}(Y)$. ∎

<u>Exemples</u>

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \subset \mathbb{R}_+\}$
  car $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc un borélien.

Cas de $\overline{\mathbb{R}}$

<u>Rappel sur $\overline{\mathbb{R}}$</u> : Pour définir $\overline{\mathbb{R}}$ comme espace métrique, il existe plusieurs façons de procéder qui se ramènent toutes à fabriquer un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ que l'on prolonge convenablement.

Par exemple, considérons
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$$
$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

On vérifie facilement que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ (sa réciproque est donnée par $f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$)

On définit alors $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

et $\tilde{f} : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$

$$x \longmapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R} \\ -1, & x = -\infty \\ 1, & x = +\infty \end{cases}$$

<u>Distance sur $\overline{\mathbb{R}}$</u> :

$\forall\, x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $\delta(x,y) := \left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right|$

On vérifie alors que :

(i) δ est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$

(ii) $\tilde{f}$ est une bijection de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[-1,1]$

(iii) $\tilde{f}$ et $\tilde{f}^{-1}$ sont continues (en fait elles sont des isométries !)

(iv) L'application $id : (\mathbb{R}, \delta_{|\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un homéomorphisme.

On déduit de (ii) et (iii) que

$*\quad \overline{\mathbb{R}} = \tilde{f}^{-1}([-1, 1])$ est un compact.

$*\quad \mathbb{R} = \tilde{f}^{-1}(]-1, 1[)$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$

et (iv) implique que $\mathcal{O}_\delta(\overline{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R} = \mathcal{O}_{|\cdot|}(\mathbb{R})$.

Proposition 13 On a :

(a) $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{ A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{\pm\infty\} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

(b) $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{ [a, +\infty], a \in \mathbb{Q} \})$

(c) $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{]a, +\infty], a \in \mathbb{Q} \})$

(d) $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{ [-\infty, a], a \in \mathbb{Q} \})$

(e) $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{ [-\infty, a[, a \in \mathbb{Q} \})$.

preuve : $\boxed{(a)}$ On sait que $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ donc $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ et on peut appliquer la proposition 12 qui dit que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{ B \cap \mathbb{R} : B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \}$

Ainsi $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subset \{ A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{\pm\infty\} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

D'autre part, puisque $\{+\infty\}$, $\{-\infty\}$ et $\{\pm\infty\}$ sont des ensembles finis, ils sont fermés dans $\overline{\mathbb{R}}$ (voir cours de topologie) et donc sont dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

De +, comme $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$, la proposition 12 implique aussi que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

Ainsi $\{ A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{\pm\infty\} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \} \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$\boxed{(b)}$ Il est facile de voir que $[a, +\infty]$ est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$ (par exemple comme f est strictement croissante, on a : $[a,+\infty] = f^{-1}([f(a),1])$ et comme f^{-1} est continue, $[a,+\infty]$ est un compact donc un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$)

Ainsi $[a,+\infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, $\forall a \in \mathbb{Q}$

et donc $\sigma(\{[a,+\infty], a \in \mathbb{Q}\}) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

De plus, on a :

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} [n,+\infty] \in \sigma(\{[a,+\infty], a \in \mathbb{Q}\})$$

et $$\{-\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} {}^c[-n,+\infty] \in \sigma(\{[a,+\infty], a \in \mathbb{Q}\})$$

D'où $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\pm\infty\} \in \sigma(\{[a,+\infty], a \in \mathbb{Q}\})$.

Notons $i : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ l'injection canonique.

On a alors d'après l'exemple ① page 13

$$i^{-1}(\sigma(\{[a,+\infty], a \in \mathbb{Q}\})) =$$

$$= \{A \cap \mathbb{R} : A \in \sigma(\{[a,+\infty], a \in \mathbb{Q}\})\}$$

et comme $\mathbb{R} \in \sigma(\{[a,+\infty], a \in \mathbb{Q}\})$, on en déduit que $i^{-1}(\sigma(\{[a,+\infty], a \in \mathbb{Q}\}))$

$$\subset \sigma(\{[a,+\infty], a \in \mathbb{Q}\})$$

On (le lemme de transport implique que :

$$i^{-1}\left(\sigma\left(\{[a,+\infty],\, a\in\mathbb{Q}\}\right)\right) = \sigma\left(\{i^{-1}([a,+\infty]),\, a\in\mathbb{Q}\}\right)$$

$$= \sigma\left(\{[a,+\infty[,\, a\in\mathbb{Q}\}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{théorème } 7}}{=} \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Ainsi $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma\left(\{[a,+\infty],\, a\in\mathbb{Q}\}\right)$.

Il reste alors à utiliser le (a) pour conclure que

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subset \sigma\left(\{[a,+\infty],\, a\in\mathbb{Q}\}\right).$$

Ceci achève la preuve de (b).

Les autres points (c), (d) et (e) se prouvent de la même manière. ∎

1.2. Fonctions mesurables.

Définition 14 :

Soit $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable (ou plus simplement mesurable) si

$$\forall B \in \mathcal{B},\quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Remarques (a) f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.

Ainsi $f^{-1}(\mathcal{B})$ est la plus petite tribu sur X qui rend la fonction f mesurable.

(b) Dans les applications courantes, $Y = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{R}}$, ou $\mathbb{R}^d$ et sont munis de leurs tribus boréliennes. On omettra alors couramment de faire figurer celle-ci.

Exemples (a) Si $A \subset X$, et si χ_A (ou $\mathbb{1}_A$) désigne la fonction indicatrice ou caractéristique de A,

i.e $$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus A \end{cases}$$

alors χ_A est mesurable $\iff A \in \mathcal{A}$.

(b) Toute fonction constante $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable.

La proposition suivante permet de vérifier la propriété de mesurabilité seulement pour une collection qui engendre la tribu.

Proposition 15 Soit $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ et supposons que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ est une famille de parties de Y. Alors

$$f \text{ est mesurable} \iff f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A} \quad (\text{au sens où } \forall B \in \mathcal{E},\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A})$$

preuve : Par définition, on a

$$f \text{ mesurable} \iff f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}.$$

Or d'après le lemme de transport, on a :

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$$

Ainsi f mesurable $\iff \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{A}$

et comme $\mathcal{A}$ est une tribu, on a :

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{A} \iff f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$$

D'où f mesurable $\iff f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

Exemple Si X et Y sont deux espaces métriques et si $f : X \longrightarrow Y$ est continue alors

$$f : (X, \mathcal{B}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y)) \text{ est mesurable.}$$

En effet, f mesurable $\underset{\text{Prop 15}}{\iff} \forall O$ ouvert de Y, $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(X)$

car $\mathcal{B}(Y) = \sigma(\{O \; O \text{ ouvert de } Y\})$

Or f continue $\Longrightarrow \forall O$ ouvert de Y, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X

$\Longrightarrow \forall O$ ouvert de Y, $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(X)$

Proposition 16 (critère de mesurabilité)

Soit $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

LASSE. (i) f mesurable

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$

(iv) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$

(v) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$

preuve: (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) : il suffit de remarquer que

$$\{x \in X : f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty[)$$

et d'après le théorème 7, on a

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[a, +\infty[\}).$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 15 pour obtenir (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Les autres équivalences se prouvent de la même manière

Remarque : on a un résultat exactement analogue pour $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Proposition 17 Soit $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ et soit $Y' \in \mathcal{B}$ tel que $f(X) \subset Y'$.
Alors f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable si et seulement si

$$\forall B \in \mathcal{B},\ B \subset Y',\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

En outre, si $i : Y' \hookrightarrow Y$ et si $\mathcal{B}' = i^{-1}(\mathcal{B})$
alors $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y', \mathcal{B}')$ est mesurable

preuve : Si f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable alors il est clair (par définition) que $\forall B \in \mathcal{B},\ B \subset Y',\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
Réciproquement, supposons que $\forall B \in \mathcal{B},\ B \subset Y',\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$
Soit $B \in \mathcal{B}$. Puisque $Y' \in \mathcal{B}$, on a

$$B \cap Y' \in \mathcal{B}. \quad \text{Ainsi} \quad f^{-1}(B \cap Y') \in \mathcal{A}$$

Mais $f^{-1}(B \cap Y') = f^{-1}(B)$ (car $f(X) \subset Y'$)
d'où $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ et f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable

La deuxième affirmation est évidente car
$$\mathcal{B}' = i^{-1}(\mathcal{B}) = \{B \in \mathcal{B} : B \subset Y'\} \qquad \blacksquare$$

Applications :

(a) si $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable et positive alors $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ est mesurable et inversement si $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ est mesurable alors $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable car $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ est la tribu trace de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) si $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable alors $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable et inversement si $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable et $f(X) \subset \mathbb{R}$ alors $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Proposition 18 : soit $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$

$g : (Y, \mathcal{B}) \longrightarrow (Z, \mathcal{C})$

Si f et g sont mesurables alors $g \circ f$ est mesurable

preuve : Soit $C \in \mathcal{C}$. On a
$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$$

Comme $C \in \mathcal{C}$ et $g : (Y, \mathcal{B}) \longrightarrow (Z, \mathcal{C})$ est mesurable, $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$.

Comme $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable, on en déduit que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$.

Ainsi $g \circ f$ est mesurable.

<u>Application</u> ⓐ si $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*))$ est mesurable alors $\frac{1}{f}$ est mesurable

ⓑ si $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ est mesurable alors $\sqrt{f}$ l'est aussi et si en outre, f ne s'annule pas, $\ln f$ est aussi mesurable

<u>Proposition</u> 19 Soit $f := (f_1, f_2) : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$

Alors f est mesurable ssi f_1 et $f_2 : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont mesurables.

<u>preuve</u>: $\boxed{\Longrightarrow}$ On a $f_1 = \pi_1 \circ f$ où $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la projection sur la 1ère coordonnée.

On sait que π_1 est continue donc mesurable

(voir exemple page 23)

D'où d'après la prop 18, f_1 est mesurable

On raisonne de m avec f_2.

$\Leftarrow$ Supposons maintenant que f_1 et f_2 sont mesurables

Remarquons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{U \times V : U, V \text{ ouverts de } \mathbb{R}\})$

En effet, si U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}$ alors $U \times V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (voir cours de topologie) et donc $U \times V \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

D'où $\sigma(\{U \times V : U, V \text{ ouverts de } \mathbb{R}\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

En raisonnant comme dans la preuve du Thm 7 pour montrer qu'un ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts, on montre (en utilisant la densité de $\mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) que Ω peut s'écrire comme

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} U_n \times V_n \quad , \text{ où } U_n, V_n \text{ sont des ouverts de } \mathbb{R}$$

Ainsi $\Omega \in \sigma(\{U \times V : U, V \text{ ouverts de } \mathbb{R}\})$

D'où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \sigma(\{U \times V : U, V \text{ ouverts de } \mathbb{R}\})$

ce qui donne finalement que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{U \times V : U, V \text{ ouverts de } \mathbb{R}\}).$$

La proposition 15 implique alors que

$$f \text{ mesurable} \iff f^{-1}(U \times V) \in \mathcal{A}, \ \forall U, V \text{ ouverts de } \mathbb{R}$$

Or

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= \{x \in X : f(x) \in U \times V\} \\ &= \{x \in X : (f_1(x), f_2(x)) \in U \times V\} \\ &= \{x \in X : f_1(x) \in U\} \cap \{x \in X : f_2(x) \in V\} \\ &= f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V) \end{aligned}$$

Par mesurabilité de f_1 et f_2, on en déduit que

$$f_1^{-1}(U) \text{ et } f_2^{-1}(V) \in \mathcal{A}$$

D'où $f^{-1}(U \times V) \in \mathcal{A}$. ∎

Corollaire 20 $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$

Alors f est mesurable ssi $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont mesurables

preuve: On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et on applique la proposition 19. ∎

Opération sur les fonctions mesurables.

Proposition 21 : Soient $f, g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux fonctions mesurables. Alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$\alpha f + g$ et fg sont mesurables.

preuve : D'après la proposition 18, $(f, g) : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ est mesurable. D'autre part, les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \longmapsto \alpha x_1 + x_2 & & (x_1, x_2) \longmapsto x_1 x_2 \end{array}$$

sont continues donc mesurables (voir exemple page 23)

On conclut alors en appliquant la proposition 18. ■

Corollaire 22 Soient $f, g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ deux fonctions mesurables. Alors $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,

$\alpha f + g$ et fg sont mesurables.

preuve : Si f est mesurable alors $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont mesurables d'après le corollaire 20. Notons $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et comme

$$\begin{aligned} \alpha f + g &= (\alpha_1 + i\alpha_2)(\mathrm{Re} f + i\, \mathrm{Im} f) + \mathrm{Re}\, g + i\, \mathrm{Im}\, g \\ &= \alpha_1 \mathrm{Re} f - \alpha_2 \mathrm{Im} f + \mathrm{Re}\, g + i(\alpha_1 \mathrm{Im} f + \alpha_2 \mathrm{Re} f + \mathrm{Im}\, g) \end{aligned}$$

on a

$$\mathrm{Re}(\alpha f + g) = \alpha_1 \mathrm{Re} f - \alpha_2 \mathrm{Im} f + \mathrm{Re}\, g$$

$$\mathrm{Im}(\alpha f + g) = \alpha_1 \mathrm{Im} f + \alpha_2 \mathrm{Re} f + \mathrm{Im}\, g$$

et donc d'après la prop 21, on en déduit que $\mathrm{Re}(\alpha f+g)$ et $\mathrm{Im}(\alpha f + g)$ sont mesurables

Une nouvelle application du corollaire 20 donne que $\alpha f + g$ est mesurable

On raisonne de façon similaire pour le produit fg.

Proposition 23 Soit $f_n : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$

Alors

(a) $\sup\limits_n f_n$ et $\inf\limits_n f_n$ sont mesurables

(b) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} f_n$ et $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} f_n$ sont mesurables

(c) Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ simplement alors f est mesurable.

preuve : voir TD !

Fonctions étagées sur un espace mesurable.

Définition (24) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ est <u>étagée</u> si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Remarques (1) Soit f une fonction étagée. Notons $\operatorname{Im} f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ l'ensemble des valeurs <u>distinctes</u> prises par f (Par définition, $\operatorname{card}(\operatorname{Im} f) < +\infty$).

On peut alors écrire que

$$(*) \qquad f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \chi_{A_i},$$

où $A_i = \{x \in X ; f(x) = \alpha_i\}$

Remarquons que $X = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

De plus, $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathcal{A}$ car f est mesurable et $\{\alpha_i\}$ est un fermé de $\mathbb{K}$ donc un borélien.

L'écriture $(*)$ s'appelle la <u>forme canonique</u> de f

Remarquons qu'il existe d'autres décomposition d'une fonction étagée sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions caractéristique.

Par exemple si $A_1 \subset A_2 \subset X$, $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$

alors $\chi_{A_2} = 1 \times \chi_{A_1} + 1 \times \chi_{A_2 \setminus A_1} + 0 \times \chi_{{}^cA_2}$

Remarque (2) Toute combinaison linéaire finie de fonction caractéristiques d'ensemble mesurable est étagée.

En effet, si $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{A}$

alors d'après la proposition (2.1) et le corollaire (2.2), f est mesurable. De +,

valeurs prises par $f \subset \{ \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \}$

et $\operatorname{card} \{ \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \} \leq$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n} = 2^n$$

D'où valeurs prises par $f \leq 2^n < +\infty$

Donc f est mesurable.

Notation On notera

$$\mathcal{E}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}) = \{ f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})), \ f \text{ étagée} \}.$$

Proposition (25)

(a) $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

(b) si $f, g \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A})$, alors $fg \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A})$.

preuve : La fonction nulle est étagée !

De +, si $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \chi_{A_i}$, $g = \sum_{j \in J} \beta_j \chi_{B_j}$

sont des fonctions étagées où $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$

forment une partition de X, alors

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$\alpha f + g = \sum_{i \in I, j \in J} (\alpha \alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}$$

et
$$fg = \sum_{i \in I, j \in J} \alpha_i \beta_j \chi_{A_i \cap B_j}$$

ce qui prouve le résultat... ∎

Chapitre 2. Mesure positive sur un espace mesurable

2.1. Définitions et premiers exemples.

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

Définition 1 ⓐ On appelle <u>mesure</u> sur $(X, \mathcal{A})$ toute application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$ vérifiant

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Si $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$ et $A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m$,

alors $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

(propriété de σ-additivité)

ⓑ La mesure μ est dite <u>finie</u> si $\mu(X) < +\infty$

ⓒ La mesure μ est dite une <u>mesure de probabilité</u> si $\mu(X) = 1$.

ⓓ La mesure μ est dite <u>σ-finie</u> s'il existe une suite croissante $(A_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que

$$X = \bigcup_{n \geq 1} A_n \quad \text{et} \quad \mu(A_n) < +\infty, \ n \geq 1$$

<u>Notations</u> * Dans la suite, on notera $\dot{\bigcup}_{n \geq 1} A_n$ pour indiquer que la réunion $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ est constituée d'ensembles 2 à 2 disjoints

* On notera $\bigcup\limits_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n$ pour indiquer que la réunion $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$ est constituée d'une suite croissante d'ensembles

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ s'appelle un espace mesuré.

Remarque Les hypothèses (i) et (ii) de la définition 1 c entraînent que si μ est une mesure et $A_1, \dots, A_n$ est une famille de parties de $\mathcal{A}$ alors :

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Il suffit de poser $A_k = \emptyset$, $k \geq n+1$ et d'appliquer (i) et (ii)

Exemples de mesure

1 La mesure nulle sur $(X, \mathcal{P}(X))$:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \mu(A) = 0 .$$

2 La mesure grossière sur $(X, \mathcal{P}(X))$

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \ A \neq \emptyset, \ \mu(A) = +\infty$$

3 La mesure de Dirac au point $a \in X$:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

Alors δ_a est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$

④ La <u>mesure de comptage</u> sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

$$c(A) := \operatorname{card}(A) \quad \text{si } A \in \mathcal{P}(X).$$

Alors c est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

2. 2. Propriétés essentielles

Soit μ une mesure (positive) sur $(X, \mathcal{A})$.

<u>Proposition ②</u> L'application μ est "croissante" pour l'inclusion :

(a) $\forall A, B \in \mathcal{A}, \ A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(b) Si $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ <u>et</u> $\mu(A) < +\infty$

alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

<u>preuve</u>: (a) Il suffit d'écrire que $B = A \cup (B \setminus A)$

d'où $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. $(*)$

Or $\mu(B \setminus A) \geq 0$. D'où $\mu(B) \geq \mu(A)$.

(b) découle facilement de $(*)$. ■

⚠ Si on ne sait pas que $\mu(A) < +\infty$, on ne peut pas écrire que $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ car le nombre de droite $\mu(B) - \mu(A)$ n'a aucun sens .....

en effet, si $\mu(A) = +\infty$ alors nécessairement d'après (a) $\mu(B) = +\infty$ et donc $\mu(B) - \mu(A) \text{ "=" } +\infty - (+\infty)$, ce qui évidemment n'a pas de sens...

Proposition 3 L'application μ est fortement additive

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, \quad \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Si de plus $\mu(A \cap B) < +\infty$, alors

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

preuve : Si $\mu(A \cap B) = +\infty$ alors d'après la proposition 2 comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, on a $\mu(A) = \mu(B) = +\infty$ et l'égalité $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ est vérifiée (les deux membres sont égaux à $+\infty$).

Si $\mu(A \cap B) < +\infty$, écrivons

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \,\dot{\cup}\, (A \cap B) \,\dot{\cup}\, (B \setminus (A \cap B))$$

Ainsi $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus (A \cap B))$

La proposition 2 (b) implique alors que

$$\mu(A \setminus (A \cap B)) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$$
$$\mu(B \setminus (A \cap B)) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

D'où
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) - \cancel{\mu(A \cap B)} + \cancel{\mu(A \cap B)} + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$
$$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Proposition 4 L'application μ est "continue à gauche" :

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } (A_n)_{n\geq 1} \text{ une suite croissante d'éléments de } \mathcal{A} \\ (\text{i.e } A_n \in \mathcal{A},\ n\geq 1 \text{ et } A_n \subset A_{n+1},\ n\geq 1) \\ \text{Alors } \quad \mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 1}^{\uparrow} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) \qquad (1)\end{array}}$

Remarque Pourquoi parle-t-on de continuité à gauche ?

Remarquons que $\displaystyle * \ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$

$$* \ \overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \underline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

et $\displaystyle * \ \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$

Ainsi si on note $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} A_n := \overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$,

la propriété (1) dit que $\displaystyle \mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$,

ce qui rappelle la continuité d'une fonction ....

preuve de la proposition 4 : posons $B_1 := A_1$

et $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$, $n\geq 2$

Vérifions par récurrence que $\displaystyle \forall n\geq 1, \quad A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$

Pour $n=1$, c'est clair $A_1 = B_1$!

Supposons maintenant que pour un certain entier $n\geq 2$, On a : $A_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$.

Il vient $A_n = (A_n \setminus A_{n-1}) \cup A_{n-1}$

Or $A_n \setminus A_{n-1} = B_n$ par définition

et par hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$A_n = B_n \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

D'autre part, les ensembles B_k sont deux à deux disjoints par construction et on a : $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$

D'où

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \mu(A_N)$$

Proposition 5 L'application μ est "continue à droite."

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ ($A_n \in \mathcal{A}$ et $A_{n+1} \subset A_n$, $n \geq 1$) et supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$.

Alors $\mu\left(\bigcap_{n\geq 1}^{\downarrow} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

preuve: On peut appliquer la proposition 5 à $B_n = A_{n_0} \setminus A_n$, $n \geq n_0$

Comme $A_{n+1} \subset A_n$, on a. $B_n \subset B_{n+1}$

De +, $\mathcal{A}$ étant stable par passage au complémentaire et intersection, on a bien évidemment $B_n = A_{n_0} \cap (X \setminus A_n) \in \mathcal{A}$

D'où $\mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} A_{n_0} \setminus A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n_0} \setminus A_n)$

Or $\bigcup_{n\geq n_0} A_{n_0} \setminus A_n = A_{n_0} \setminus \left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right)$

et $n \geq n_0 \Rightarrow A_n \subset A_{n_0} \Rightarrow \mu(A_n) \leq \mu(A_{n_0}) < +\infty$

D'où $\mu(A_{n_0} \setminus A_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)$ (Proposition 2)

De même, $\mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} A_{n_0} \setminus A_n\right) = \mu\left(A_{n_0} \setminus \bigcap_{n\geq n_0} A_n\right)$

$= \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right)$

D'où $\cancel{\mu(A_{n_0})} - \mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right) = \cancel{\mu(A_{n_0})} - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

Finalement, on en déduit que

$$\mu\Big(\bigcap_{n \geq n_0} A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

Mais comme $A_{n+1} \subset A_n$, $n \geq 1$, on a :

$$\bigcap_{n \geq n_0} A_n = \bigcap_{n \geq 1} A_n$$, ce qui donne le résultat.

■

<u>Remarque</u> l'hypothèse $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, \mu(A_{n_0}) < +\infty$ est indispensable cf TD.

Proposition 6 L'application μ est sous-additive :

soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

Alors $$\mu\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

<u>preuve</u> : On commence par montrer, par récurrence, que pour tout entier $N \geq 1$, $\forall A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$, on a :

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k).$$

Pour $N = 1$, c'est trivial !

par positivité de μ

Pour $N = 2$: on a $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)$

$= \mu(A_1) + \mu(A_2)$

par la proposition 3

Supposons l'inégalité vraie au rang N.

Soient alors $A_1, \dots, A_N, A_{N+1} \in \mathcal{A}$. Alors

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N+1} A_k\right) = \mu\left(A_{N+1} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right)\right)$$

$$\leq \mu(A_{N+1}) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) \quad \text{" rang 2 "}$$

$$\leq \mu(A_{N+1}) + \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) \quad \text{hypothèse de récurrence}$$

$$= \sum_{k=1}^{N+1} \mu(A_k).$$

Ainsi on a bien $\forall N \geq 1$, $\forall A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k). \quad (*)$$

Par la proposition 4 (continuité à gauche de μ), on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right)$$

Par $(*)$, on en déduit le résultat $\blacksquare$

2.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Nous allons maintenant introduire l'exemple essentiel de mesure pour ce cours : celui de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Cela nécessite un théorème que nous allons admettre dans un premier temps avant d'y revenir dans la suite.

Théorème 7 Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ notée λ_d, telle que pour tout pavé ouvert

$$P =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_d, b_d[\ , \quad -\infty < a_i < b_i < +\infty,$$

on a
$$\lambda_d(P) = (b_1 - a_1) \times \dots \times (b_d - a_d).$$

Cette mesure λ_d s'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Pour $d = 1$, on notera plus simplement λ au lieu de λ_1.

Proposition 8. On a :

(a) $\forall a \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_d(\{a\}) = 0$.

(b) Tout sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{R}^d$ est de mesure de Lebesgue nulle.

(c) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a :

$$\lambda([a, b[) = \lambda([a, b]) = \lambda(]a, b[) = \lambda(]a, b]) = b - a$$

(d) Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non borné, alors $\lambda(I) = +\infty$.

En particulier $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$

(e) λ est une mesure σ-finie.

(f) La mesure de Lebesgue est invariante par translation : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\forall a \in \mathbb{R}^d$,

on a
$$\lambda_d(A+a) = \lambda_d(A)$$
(où $A + a = \{x + a \,;\, x \in A\}$).

<u>preuve</u>: $\boxed{(a)}$ Soit $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$. Remarquons que

$$\{a\} = \bigcap_{n \geqslant 1} \underbrace{\prod_{k=1}^{d} \left]a_k - \frac{1}{n}, a_k + \frac{1}{n}\right[}_{= P_n}$$

On a $P_{n+1} \subset P_n$ et $\lambda_d(P_1) = \prod_{k=1}^{d} 2 = 2^d < +\infty$

La proposition 5 (continuité à droite d'une mesure) permet alors d'écrire que :

$$\lambda_d(\{a\}) = \lambda_d\left(\bigcap_{n\geqslant 1} P_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \lambda_d(P_n)$$

Or $\lambda_d(P_n) = \left(\frac{2}{n}\right)^d \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'où $\lambda_d(\{a\}) = 0$.

12

$\boxed{(b)}$ découle du (a) car un ensemble fini ou dénombrable s'écrit comme une réunion finie ou dénombrable de singletons deux à deux disjoints.

$\boxed{(c)}$ découle du (a) : par exemple

$$\lambda([a,b[) = \lambda(]a,b[\cup \{a\})$$
$$= \lambda(]a,b[) + \lambda(\{a\})$$
$$= \lambda(]a,b[).$$

$\boxed{(d)}$ Supposons par exemple que $I =]a,+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$.

Alors remarquons que $I = \bigcup_{n \geq \lfloor a \rfloor + 1} I_n$,

avec $I_n =]a, n[$, $n \geq \lfloor a \rfloor + 1$

On a : $I_n \subset I_{n+1}$, $n \geq \lfloor a \rfloor + 1$

D'où par la proposition 4 (continuité à gauche), on a :

$$\lambda(I) = \lambda\Big(\bigcup_{n \geq \lfloor a \rfloor + 1} I_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \lambda(I_n)$$
$$= \lim_{n \to +\infty} (n-a) = +\infty.$$

Les autres cas se traitent de la même manière.

$\boxed{(e)}$ Il suffit de poser $A_n = [-n, n]$, $n \geq 1$.

On a : $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, $A_n \subset A_{n+1}$ et

$\lambda(A_n) = 2n < +\infty$.

(f) Remarquons tout d'abord que si $a \in \mathbb{R}^d$, l'application $\tau_a : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $x \longmapsto x - a$ est continue donc mesurable.

De +, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$a + A = \tau_a^{-1}(A)$$

D'où $a + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définissons alors $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, +\infty]$

$$A \longmapsto \mu(A) = \lambda d(a + A)$$

On vérifie facilement que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

De plus, si $P = \prod_{i=1}^{d}]\alpha_i, \beta_i[$, $-\infty < \alpha_i < \beta_i < +\infty$

et $a = (a_1, \dots, a_d)$, on a :

$$a + P = \prod_{i=1}^{d}]\alpha_i + a_i, \beta_i + a_i[$$

D'où

$$\mu(P) = \lambda d(a + P)$$
$$= \prod_{i=1}^{d} (\beta_i + a_i - (\alpha_i + a_i))$$

i.e $\mu(P) = \prod_{i=1}^{d} (\beta_i - \alpha_i) = \lambda_d(P)$

Par unicité dans le théorème (7), on en déduit que $\mu = \lambda_d$, i.e

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \lambda_d(A) = \lambda_d(a + A)$.

2.4. Ensembles négligeables et la notion de μ-p.p

Définition (9) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

(a) Une partie $N \in \mathcal{P}(X)$ est dite <u>négligeable</u> par rapport à μ (ou μ-négligeable) s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

(b) Soit P_x, $x \in X$, une propriété.

On dit que P_x est vraie pour presque tout $x \in X$ par rapport à μ (ou encore que P_x est vraie μ-presque partout) si l'ensemble suivant $\{x \in X \cdot P_x \text{ est fausse}\}$ est négligeable.

Exemples: (a) La fonction $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

est nulle presque partout par rapport à δ_0 - la mesure de Dirac en 0.

En effet, $\{x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

et $\delta_0(\mathbb{R}^+) = 0$

(b) Les fonctions $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ x^2+10 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

et $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

coïncident presque partout par rapport à λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ car

$$\{x \in \mathbb{R} \cdot f(x) \neq g(x)\} = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \lambda(\mathbb{Q}) = 0$$

($\mathbb{Q}$ est dénombrable + proposition 8)

2.5 Caractérisation d'une mesure - unicité de la mesure de Lebesgue.

Les tribus, notamment boréliennes, sont généralement très "riches" au sens où il est impossible d'en décrire exhaustivement tous les éléments. En particulier, vérifier que deux mesures sont égales sur une tribu peut a-priori semblait extrême-ment difficile. Le but de cette section est de proposer un moyen pour surmonter cet obstacle. On l'appliquera ensuite pour montrer l'unicité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour cela, nous allons avoir besoin des deux affaiblissements suivants de la notion de tribu :

Définition 10 Soit X un ensemble et Λ, $\mathcal{E}$ deux familles de parties de X.

(a) On dit que Λ est un <u>λ-système</u> si

(i) $\emptyset \in \Lambda$

(ii) Λ est stable par réunion dénombrable croissante : si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'élément de Λ alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \Lambda$

(iii) Si $A, B \in \Lambda$ et $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \Lambda$.

(b) On dit que $\mathcal{E}$ est un <u>π-système</u> si

(iv) $X \in \mathcal{E}$

(v) $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie : si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ alors $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{E}$

Proposition 11 : (a) Si $\mathcal{E}$ est une famille de partie de X alors il existe un plus petit λ-système $\Lambda(\mathcal{E})$ contenant $\mathcal{E}$.

(b) Si Λ est un λ-système tel que $X \in \Lambda$ et Λ est stable par intersection finie alors Λ est une tribu.

<u>preuve</u> : $\boxed{(a)}$ On remarque que $\mathcal{P}(X)$ est un λ-système contenant $\mathcal{E}$

Ainsi l'ensemble $S = \{ \Lambda : \Lambda$ est un λ-système, $\mathcal{E} \subset \Lambda \}$ est non vide et on considère :

$$\Lambda(\mathcal{E}) = \bigcap_{\Lambda \in S} \Lambda$$

On vérifie aisément que $\Lambda(\mathcal{E})$ est un λ-système qui contient $\mathcal{E}$ (car $\mathcal{E} \subset \Lambda$, $\forall \Lambda \in S$). De +, c'est nécessairement le plus petit car si Λ_0 est un λ-système contenant $\mathcal{E}$ alors forcément $\Lambda_0 \in S$ et donc

$$\Lambda(\mathcal{E}) \subset \Lambda_0.$$

$\boxed{(b)}$ Soit Λ un λ-système, contenant X et stable par intersection finie. Pour montrer que Λ est une tribu, il faut montrer que Λ est stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable. Soit donc $A \in \Lambda$. Comme $X \in \Lambda$ et $A \subset X$, on a d'après la propriété (iii) (définition 10), $X \setminus A \in \Lambda$ ce qui prouve la stabilité par passage au complémentaire. Maintenant, si $A_n \in \Lambda$, $n \geq 1$, remarquons que

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} B_n, \quad \text{avec } B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Comme $B_n \subset B_{n+1}$, il suffit d'après la propriété (ii) définition 10 de montrer que $B_n \in \Lambda$.

Comme B_n est une union finie il suffit en fait de montrer que si $A_1, A_2 \in \Lambda$ alors $A_1 \cup A_2 \in \Lambda$ et

On $\qquad A_1 \cup A_2 = X \setminus ((X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2))$

on obtient le résultat en utilisant une nouvelle fois la propriété (iii) et la stabilité de Λ par intersection finie. (18)

Théorème (12): Soit $\mathcal{E}$ un π-système

Alors $\Lambda(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$

preuve : Montrons que $\sigma(\mathcal{E}) \subset \Lambda(\mathcal{E})$.

Remarquons que d'après la propriété (iv) définition (10), on a

$$X \in \mathcal{E} \subset \Lambda(\mathcal{E})$$

Pour montrer que $\sigma(\mathcal{E}) \subset \Lambda(\mathcal{E})$ il suffit au vu de la proposition (11)(b), de montrer que $\Lambda(\mathcal{E})$ est stable par intersection finie. En effet, dans ce cas, on en déduira par la prop 11(b) que $\Lambda(\mathcal{E})$ est une tribu contenant $\mathcal{E}$ et donc automatiquement

$$\sigma(\mathcal{E}) \subset \Lambda(\mathcal{E})$$

Il reste à vérifier que $\Lambda(\mathcal{E})$ est stable par intersection finie. Pour cela fixons $E \in \mathcal{E}$ et considérons $\Lambda_E = \{A \in \Lambda(\mathcal{E}) : A \cap E \in \Lambda(\mathcal{E})\}$

On vérifie facilement que Λ_E est un λ-système et il contient $\mathcal{E}$ car si $A \in \mathcal{E}$ alors $A \in \Lambda(\mathcal{E})$

et $A \cap E \in \mathcal{E} \subset \Lambda(\mathcal{E})$ (par la propriété (v) définition 10)

Par définition de $\Lambda(\mathcal{E})$, on a donc

$$\Lambda(\mathcal{E}) \subset \Lambda_E$$

et donc $\forall A \in \Lambda(\mathcal{E})$, on a : $A \cap E \in \Lambda(\mathcal{E})$

Finalement, on a

(*) $\forall E \in \mathcal{E}, \forall A \in \Lambda(\mathcal{E})$, on a. $A \cap E \in \Lambda(\mathcal{E})$.

Soit maintenant $B \in \Lambda(\mathcal{E})$ et posons

$$\Lambda_B = \{A \in \Lambda(\mathcal{E}) \quad A \cap B \in \Lambda(\mathcal{E})\}.$$

On vérifie que Λ_B est un λ-système et d'après (*) on a. $\mathcal{E} \subset \Lambda_B$. Donc $\Lambda(\mathcal{E}) \subset \Lambda_B$ et

finalement $\forall B \in \Lambda(\mathcal{E}), \forall A \in \Lambda(\mathcal{E}), A \cap B \in \Lambda(\mathcal{E})$

ce qui montre que $\Lambda(\mathcal{E})$ est stable par intersection finie.

D'où $\sigma(\mathcal{E}) \subset \Lambda(\mathcal{E})$.

Il reste alors à remarquer qu'une tribu est bien évidemment un λ-système et donc

$$\Lambda(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$$

(car $\sigma(\mathcal{E})$ est une tribu donc un λ-système contenant $\mathcal{E}$)

Finalement, on obtient $\Lambda(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

Corollaire 13 Soit μ et ν deux mesures finies sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ et supposons que $\mathcal{E}$ est un π-système tel que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$.
Si pour tout $E \in \mathcal{E}$, $\mu(E) = \nu(E)$ alors

$$\mu = \nu.$$

preuve : Posons $\Lambda = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$.

Vérifions que Λ est un λ-système

- $\emptyset \in \Lambda$ car $\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset)$.
- si $A_n \in \Lambda$, $n \geq 1$ et $A_n \subset A_{n+1}$

Alors $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

et $\nu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A_n)$

et comme $A_n \in \Lambda$, on a $\mu(A_n) = \nu(A_n)$, $n \geq 1$

D'où $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \nu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)$ et $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \Lambda$.

• si $A, B \in \Lambda$, $A \subset B$.

écrivons alors $B = A \cup (B \setminus A)$ réunion disjointe.

D'où $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\setminus A)$

et $\nu(B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A)$

Comme $A, B \in \Lambda$, on a : $\mu(B) = \nu(B)$

et $\mu(A) = \nu(A)$

d'où $\mu(A) + \mu(B\setminus A) = \nu(A) + \nu(B \setminus A)$

et comme $\mu(A) = \nu(A) < +\infty$, on peut simplifier et

en déduire que $\mu(B\setminus A) = \nu(B \setminus A)$

Ainsi $B \setminus A \in \Lambda$

D'où Λ est un λ-système qui contient $\mathcal{E}$.

Ainsi $\Lambda(\mathcal{E}) \subset \Lambda$ et comme $\mathcal{E}$ est un π-système

par hypothèse, on a d'après le théorème 12 que $\sigma(\mathcal{E}) = \Lambda(\mathcal{E})$

Ainsi $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) = \Lambda(\mathcal{E}) \subset \Lambda$

D'où $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \nu(A)$ et donc

$\mu = \nu$. ■

Remarque : L'hypothèse que ν et μ sont finies a servi pour montrer que Λ est un λ-système (stabilité "par différence").

On peut généraliser au cas de mesures σ-finies. 22

Corollaire 11 Soit μ et ν deux mesures sur $(X, \mathcal{A})$

et $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ telle que

(i) $\mathcal{E}$ est un π-système et $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$

(ii) $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mu(E) = \nu(E)$

(iii) $\exists E_n \in \mathcal{E}$, $E_n \subset E_{n+1}$, $n \geq 1$ telle que

$$X = \bigcup_{n \geq 1} E_n \quad \text{et} \quad \mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty$$

Alors $\nu = \mu$

preuve: Considérons pour $n \geq 1$,

$$\mu_n \quad \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$A \longmapsto \mu_n(A) = \mu(A \cap E_n)$$

et
$$\nu_n : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$A \longmapsto \nu_n(A) = \nu(A \cap E_n)$$

On vérifie facilement que μ_n et ν_n sont deux mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$. De plus, si $A \in \mathcal{E}$, alors comme $\mathcal{E}$ est un π-système, on a $A \cap E_n \in \mathcal{E}$

et donc par (ii), on a $\nu(A \cap E_n) = \mu(A \cap E_n)$

i.e. $\mu_n(A) = \nu_n(A)$, $\forall A \in \mathcal{E}$

Le corollaire 13 implique alors que $\mu_n = \nu_n$.

Soit $A \in \mathcal{A}$. Ecrivons alors

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A \cap E_n \quad \text{et} \quad A \cap E_n \subset A \cap E_{n+1}$$

D'où
$$\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A \cap E_n)$$
$$\nu(A) = \lim_{n \to +\infty} \nu(A \cap E_n)$$

Or $\forall n \geq 1$, $\mu(A \cap E_n) = \mu_n(A) = \nu_n(A) = \nu(A \cap E_n)$

D'où $\nu(A) = \mu(A)$ et donc $\nu = \mu$ ∎

Application unicité de la mesure de Lebesgue

Montrons maintenant l'unicité dans le théorème 7 pour $d = 1$.

Supposons qu'il existe deux mesures μ et ν sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que $\forall -\infty < a < b < +\infty$,

$$\nu(]a, b[) = \mu(]a, b[) = b - a \qquad (*).$$

En utilisant $(*)$ et la continuité à gauche d'une mesure, on voit que
$$\nu(]-\infty, b[) = \mu(]-\infty, b[)$$
$$\nu(]a, +\infty[) = \mu(]a, +\infty[)$$
et
$$\nu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}).$$

Ainsi si $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall A \in \mathcal{E}, \ \nu(A) = \mu(A).$$

D'autre part, il est immédiat que $\mathcal{E}$ est un π-système et si on choisit $E_n =]-n, n[$ alors $E_n \subset E_{n+1}$, $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ et $E_n \in \mathcal{E}$ et $\nu(E_n) = \mu(E_n) = 2n < +\infty$ par (*).

Il reste à remarquer que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

En effet, comme $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des intervalles ouverts, on a $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

D'autre part, on a vu au chapitre 1 que si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ alors il s'écrivait comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts (voir chapitre 1 page 9). Ainsi $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{E})$ et donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{E})$ ce qui donne l'égalité.

Finalement, le corollaire 11 implique que $\mu = \nu$. ■

2.6 Principe de construction de la mesure de Lebesgue. Mesure extérieure

Définition (12) Une application $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ est appelée une *mesure extérieure* si elle vérifie les propriétés suivantes : (i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(croissance)

(iii) $\forall (A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}^*}$, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-sous additivité})$$

Notez qu'une mesure extérieure est toujours définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ et qu'une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$ est une mesure extérieure. En revanche, une mesure extérieure n'est pas toujours une mesure !

On va donc commencer par définir une mesure extérieure à partir des unions dénombrables d'intervalles.

Pour $I =]a, b[$, $-\infty < a < b < +\infty$, on notera

$$|I| = b - a$$

Définition 13 Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On pose
$$\lambda^*(A) = \inf_{(I_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{J}_A} \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| \in [0, +\infty]$$

où $\mathcal{J}_A$ désigne l'ensemble des suites $(I_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ telles que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$$

Cette définition a bien un sens car :

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, si $I_k =]-k, k[$, $k \geq 1$, alors

$$A \subset \bigcup_{k \geq 1} I_k = \mathbb{R} \text{ et donc } \mathcal{J}_A \neq \emptyset$$

Cette application λ^* va nous permettre de construire la mesure de Lebesgue comme restriction de λ^* à une certaine tribu...

On peut décomposer la preuve en plusieurs étapes.

Etape 1. Si $I =]a, b[$, alors

$$\boxed{\lambda^*(I) = \lambda^*(]a, b[) = b - a, \quad -\infty < a < b < +\infty.}$$

preuve : Comme $(I, \emptyset, \emptyset, \dots) \in \mathcal{J}_I$, on a :

$$\lambda^*(I) \leq |I| = b - a$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition d'un inf, il existe une suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{J}_I$ telle que

$$\lambda^*(I) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| - \varepsilon.$$

Considérons alors $\tilde{I} := \left[a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}\right]$.

On a : $|\tilde{I}| = b - a - \varepsilon = |I| - \varepsilon$.

De +, $\tilde{I} \subset I \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$, I_k ouvert

Par compacité de $\tilde{I}$, il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tq

$$\tilde{I} \subset \bigcup_{k=1}^{p} I_k.$$

On utilise alors le lemme suivant :

<u>Lemme (technique).</u> Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ tel que

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{p}]a_i, b_i[$$

Alors $b - a \leq \sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i)$

Admettons le lemme dans un premier temps et appliquons à notre situation. Alors

$$|\tilde{I}| \leq \sum_{k=1}^{p} |I_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| \leq \lambda^*(I) + \varepsilon$$

Comme $|\tilde{I}| = |I| - \varepsilon$, on en déduit que

$$|I| \leq \lambda^*(I) + 2\varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient, en faisant tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$ (I ne dépend pas de ε) que

$$|I| \leq \lambda^*(I)$$

D'où finalement $\lambda^*(I) = |I|$

Il reste à prouver le lemme.

<u>preuve du lemme</u> : on raisonne par récurrence sur p.

Pour $p=1$, c'est clair.

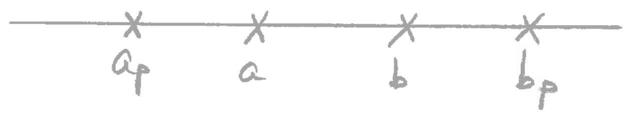
Supposons le résultat démontré pour $p-1$ intervalles. Soit

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{p}]a_i, b_i[.$$

On a $\quad b \in \bigcup_{i=1}^{p}]a_i, b_i[\quad$ et quitte à faire une permutation sur les intervalles, on peut supposer que

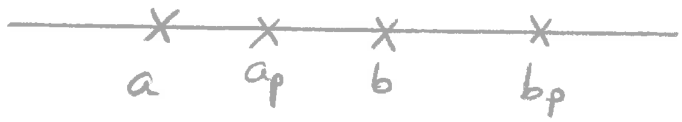
$$b \in]a_p, b_p[.$$

<u>1er cas:</u> $\underline{a_p \leq a}$



Alors, on a: $\quad b-a \leq b_p - a_p \leq \sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i)$

<u>2ie cas:</u> $\underline{a_p > a}$



On a.

$$[a, a_p] \subset [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{p}]a_i, b_i[$$

et $\quad [a, a_p] \cap]a_p, b_p[= \emptyset$

D'où $\quad [a, a_p] \subset \bigcup_{i=1}^{p-1}]a_i, b_i[\quad$ et par hypothèse de récurrence, on obtient

$$a_p - a \leq \sum_{i=1}^{p-1} (b_i - a_i)$$

De plus, $\quad b - a_p \leq b_p - a_p$

En additionnant ces deux inégalités, on en déduit

$$b-a \leq \sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i).$$

Etape 2 λ^* est une mesure extérieure

preuve (i) Il est clair que $\lambda^*(\phi) = 0$

(Par exemple $\forall \varepsilon > 0$, $\phi \subset [0, \varepsilon]$ et donc

$0 \leq \lambda^*(\phi) \leq \varepsilon$).

(ii) λ^* est monotone : si $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A \subset B$

alors comme $\mathcal{J}_B \subset \mathcal{J}_A$, on en déduit que

$$\lambda^*(A) = \inf_{(I_k)_{k\geq 1} \in \mathcal{J}_A} \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| \leq \inf_{(I_k)_{k\geq 1} \in \mathcal{J}_B} \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| = \lambda^*(B).$$

(iii) λ^* est σ-sous additive :

Soit $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

Par définition d'un inf, pour tout $n \geq 1$, il existe

$(I_{n,k})_{k\geq 1} \in \mathcal{J}_{A_n}$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |I_{n,k}| \leq \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Or $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_{n,k}$

D'où $A \subset \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq 1} I_{n,k}$

Ainsi $(I_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \in \mathcal{T}_A$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |I_{n,k}| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(A_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

D'où $\displaystyle\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(A_n) + \varepsilon$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit par passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ que

$$\lambda^*(A) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(A_n)$$

■

Le problème est que λ^* n'est pas une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, il n'est pas vrai que λ^* est σ-additive.

Il faut restreindre la tribu. C'est l'objet de l'étape 3 que nous allons admettre car "un peu" technique.

Etape 3 On définit

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \cap A^c)\}$$

On montre alors que $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

Nous admettons ce point et poursuivons.

Etape 4. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$

preuve : d'après le théorème 7 (Chapitre 1), on a

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a,+\infty[: a \in \mathbb{R}\})$$

et comme $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est une tribu, il suffit de vérifier que $\forall a \in \mathbb{R}$, $]a,+\infty[\in \mathcal{L}(\mathbb{R})$

Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Considérons $(I_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{J}_B$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| \leq \lambda^*(B) + \varepsilon$

On a $(I_n \cap]a,+\infty[)_{n\geq 1} \in \mathcal{J}_{B\cap]a,+\infty[}$

et $(I_n \cap]-\infty,a])_{n\geq 1} \in \mathcal{J}_{B \setminus]a,+\infty[}$

et pour tout $n \geq 1$,

$$|I_n| = |I_n \cap]a,+\infty[| + |I_n \cap]-\infty,a]|$$

(car $I_n \cap]a,+\infty[$ et $I_n \cap]-\infty,a]$ sont deux intervalles disjoints dont la réunion est I_n)

D'où

$$\lambda^*(B \cap]a,+\infty[) + \lambda^*(B \setminus]a,+\infty[) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n \cap]a,+\infty[| + \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n \cap]-\infty,a]|$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| \leq \lambda^*(B) + \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, on a :

$$\lambda^*(B \cap]a,+\infty[) + \lambda^*(B \setminus]a,+\infty[) \leq \lambda^*(B) + \varepsilon$$

En faisant tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient :

$$\lambda^*(B \cap]a,+\infty[) + \lambda^*(B \setminus]a,+\infty[) \leq \lambda^*(B).$$

L'inégalité réciproque

$$\lambda^*(B) \leq \lambda^*(B \cap]a,+\infty[) + \lambda^*(B \setminus]a,+\infty[)$$

découle de l'étape 2 et du fait que

$$B = (B \cap]a,+\infty[) \cup (B \setminus]a,+\infty[)$$

D'où $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap]a,+\infty[) + \lambda^*(B \setminus]a,+\infty[)$$

ce qui prouve que $]a, +\infty[\in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Etape 5 La restriction de λ^* à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ (et donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) est une mesure.

preuve : on a déjà vu que $\lambda^*(\phi) = 0$. Soit $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*}$ une suite de parties deux à deux disjointes. Notons par

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Par l'étape 2, on a $\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(A_n)$.

Pour l'inégalité inverse, montrons d'abord par récurrence que

$\forall\, p \geq 1$, on a :

$$\lambda^*(A) = \sum_{k=1}^{p} \lambda^*(A_k) + \lambda^*\Big(\bigcup_{n\geq p+1} A_n\Big).$$

$\boxed{p=1}$ Comme $A_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap A_1) + \lambda^*(A \setminus A_1)$$

Mais $A_1 \cap A_n = \phi$, $n \geq 2$, d'où

$$A \cap A_1 = A_1 \quad \text{et} \quad A \setminus A_1 = \bigcup_{n\geq 2} A_n$$

D'où $\lambda^*(A) = \lambda^*(A_1) + \lambda^*\Big(\bigcup_{n\geq 2} A_n\Big)$.

$\boxed{\text{Récurrence}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain $p \geq 1$.

Utilisons que $A_{p+1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Avec $B = \bigcup_{n\geq p+1} A_n$,

on a : $\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap A_{p+1}) + \lambda^*(B \setminus A_{p+1})$

Or $B \cap A_{p+1} = A_{p+1} \quad (A_{p+1} \subset B)$

et $B \setminus A_{p+1} = \bigcup_{n \geq p+2} A_n \quad (A_{p+1} \cap A_n = \emptyset, \ n \geq p+2)$

D'où $\lambda^*\left(\bigcup_{n \geq p+1} A_n\right) = \lambda^*(A_{p+1}) + \lambda^*\left(\bigcup_{n \geq p+2} A_n\right)$

L'hypothèse de récurrence donne

$$\lambda^*(A) = \sum_{k=1}^{p} \lambda^*(A_k) + \lambda^*\left(\bigcup_{n \geq p+1} A_n\right)$$

D'où $\lambda^*(A) = \sum_{k=1}^{p} \lambda^*(A_k) + \lambda^*(A_{p+1}) + \lambda^*\left(\bigcup_{n \geq p+2} A_n\right)$

$$\lambda^*(A) = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda^*(A_k) + \lambda^*\left(\bigcup_{n \geq p+2} A_n\right),$$

qui est l'égalité au rang $p+1$.

Ainsi $\forall p \geq 1, \quad \lambda^*(A) = \sum_{k=1}^{p} \lambda^*(A_k) + \lambda^*\left(\bigcup_{n \geq p+1} A_n\right)$

En particulier, $\forall p \geq 1$, on a

$$\lambda^*(A) \geq \sum_{k=1}^{p} \lambda^*(A_k).$$

En faisant tendre $p \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\lambda^*(A) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^*(A_k).$$

Ainsi $\lambda^*(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^*(A_k)$

et λ^* est une mesure sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$

On pose alors

$$\boxed{\lambda = \lambda^* |_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}}.$$

Par l'étape 4 et 5, λ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

De +, l'étape 1, prouve que

$$\lambda(]a,b[) = \lambda^*(]a,b[) = b-a.$$

Ceci prouve l'existence du théorème 7 pour $d=1$.

$\blacksquare$

Rappelons (voir TD) qu'une mesure μ sur $(X, \mathcal{A})$ est dite <u>complète</u> si tout ensemble négligeable pour μ est dans la tribu $\mathcal{A}$.

<u>Proposition 14</u> La mesure λ^* est complète sur $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$

<u>preuve:</u> Soit A un ensemble négligeable pour λ^*.

Par définition, il existe $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tel que

$$A \subset N \text{ et } \lambda^*(N) = 0.$$

Montrons que $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Soit donc $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On a :

$$A \cap B \subset A \subset N$$

et par l'étape 2 (λ^* est une mesure extérieure), on a

$$0 \leq \lambda^*(A \cap B) \leq \lambda^*(N) = 0$$

D'où

$$\lambda^*(B) \leq \lambda^*(A\cap B) + \lambda^*(B\setminus A) = \lambda^*(B\setminus A) \leq \lambda^*(B)$$

λ^* est une mesure extérieure.

D'où $\lambda^*(B) = \lambda^*(A\cap B) + \lambda^*(B\setminus A)$, $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

ce qui montre que $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. ∎

On peut montrer par contre que la mesure λ^* n'est pas complète sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour laquelle λ^* est complète.

On dit que λ^* sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est la complétée de la mesure de Lebesgue.

Nous terminerons ce chapitre par une dernière propriété de la mesure de Lebesgue qui sera importante au dernier chapitre.

2.7. Régularité de la mesure de Lebesgue

Définition 15 Soit X un espace métrique (ou topologique) et μ une mesure sur $(X, \mathcal{B}(X))$

(a) On dit que μ est <u>extérieurement régulière</u> si

$$\forall A \in \mathcal{B}(X),\ \mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \text{ ouvert}, A \subset O\}$$

(b) On dit que μ est <u>intérieurement régulière</u> si

$\forall A \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact}, K \subset A\}$

(c) On dit que μ est <u>régulière</u> si elle est à la fois extérieurement et intérieurement régulière.

<u>Théorème 16</u> : La mesure de Lebesgue λ est régulière.

<u>preuve</u> : <u>Etape 1</u> : <u>λ est extérieurement régulière</u>

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et O un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant A.

Alors $\lambda(A) \leq \lambda(O)$ et donc

(1) $\underline{\lambda(A) \leq \inf\{\lambda(O) : O \text{ ouvert de } \mathbb{R}, A \subset O\}}$.

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la mesure extérieure λ^*, il existe $(I_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{J}_A$ telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^*(I_k) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$$

Comme $\lambda^* = \lambda|\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(I_k) \leq \lambda(A) + \varepsilon.$$

Posons alors $\mathcal{U} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$. Comme les I_k sont des (intervalles) ouverts, $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

et par définition de $\mathcal{I}_A$, on a : $A \subset \mathcal{U}$.

D'où $\inf\{\lambda(O) : O \text{ ouvert de } \mathbb{R}, A \subset O\} \leq$

$$\leq \lambda(\mathcal{U}) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(I_k) \leq \lambda(A) + \varepsilon.$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $\inf\{\lambda(O) : O \text{ ouvert de } \mathbb{R}, A \subset O\} \leq \lambda(A) + \varepsilon$.

En faisant tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient

(2) $\underline{\inf\{\lambda(O) : O \text{ ouvert de } \mathbb{R}, A \subset O\} \leq \lambda(A)}$.

(1)+(2) $\Longrightarrow$ λ est extérieurement régulière.

<u>Etape 2</u> : <u>λ est intérieurement régulière</u>

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, $K \subset A$.

On a $\lambda(K) \leq \lambda(A)$ et donc

$$\underline{\sup\{\lambda(K) \; K \text{ compact}, K \subset A\} \leq \lambda(A)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $I_n = [-n, n]$ et $A_n = A \cap I_n$.

On a $A_n \subset A_{n+1}$ et $A = A \cap \mathbb{R}$

$$= A \cap \left(\bigcup_{n\geq 1} [-n,n]\right)$$

$$= \bigcup_{n \geq 1} A \cap [-n,n] = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

D'où (3) $\boxed{\lambda(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(A)}$ (continuité à gauche d'une mesure

Par la régularité extérieure de λ, on a

$$\lambda(I_n \setminus A_n) = \inf\{\lambda(O) \; O \text{ ouvert de } \mathbb{R},\ I_n \setminus A_n \subset O\}$$

Ainsi, il existe un ouvert O_n, $I_n \setminus A_n \subset O_n$,

tel que $\underline{\lambda(O_n) \leq \lambda(I_n \setminus A_n) + \frac{1}{n}}$ (4)

Posons alors $K_n = I_n \setminus O_n$.

On sait que $K_n = I_n \cap {}^cO_n$ est un fermé contenu dans le compact I_n. Donc K_n est lui même un compact.

De plus, remarquons que

$$K_n = I_n \cap {}^cO_n \subset I_n \cap {}^c(I_n \setminus A_n)$$

$$= I_n \cap ({}^cI_n \cup A_n)$$

$$= I_n \cap A_n = A_n \subset A$$

Ainsi $\underline{K_n \text{ est un compact contenu dans } A}$

D'autre part, observons que :

$$A_n \setminus K_n = A_n \cap {}^cK_n = A_n \cap {}^c(I_n \cap {}^cO_n)$$

$$= A_n \cap ({}^cI_n \cup O_n)$$

i e $\quad A_n \setminus K_n = (A_n \cap {}^c I_n) \cup (A_n \cap O_n)$

Comme $\quad A_n = A \cap I_n \subset I_n$, on a $A_n \cap {}^c I_n = \emptyset$

et donc $\quad A_n \setminus K_n = A_n \cap O_n$

En particulier, $\quad A_n \setminus K_n \subset O_n \cap (A_n \cup {}^c I_n)$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$

$$O_n \cap {}^c(I_n \cap {}^c A_n)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$

soit $\quad \underline{A_n \setminus K_n \subset O_n \setminus (I_n \setminus A_n)} \quad (5)$

En écrivant que

$$\lambda(A_n) = \lambda(A_n \cap K_n) + \lambda(A_n \setminus K_n)$$

$$\leq \lambda(K_n) + \lambda(A_n \setminus K_n)$$

et en remarquant que $\lambda(K_n) < +\infty$, on obtient avec (5)

$$\underline{\lambda(A_n) - \lambda(K_n) \leq \lambda(O_n \setminus (I_n \setminus A_n))} \quad (6).$$

Or $\quad I_n \setminus A_n \subset O_n$, d'où

$$\lambda(O_n) = \lambda(I_n \setminus A_n) + \lambda(O_n \setminus (I_n \setminus A_n))$$

et donc $\quad \lambda(O_n \setminus (I_n \setminus A_n)) = \lambda(O_n) - \lambda(I_n \setminus A_n)$

L'inégalité (4) implique alors que

$$\lambda(O_n \setminus (I_n \setminus A_n)) \leq \frac{1}{n}$$

et l'inégalité (6) donne :

$$\lambda(A_n) - \lambda(K_n) \leq \frac{1}{n}.$$

ce qui se réécrit comme $\lambda(A_n) - \frac{1}{n} \leq \lambda(K_n)$.

Comme K_n est un compact inclus dans A, on en déduit

$$\lambda(A_n) - \frac{1}{n} \leq \sup\{\lambda(K) : K \text{ compact}, K \subset A\}$$

En faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$, on déduit finalement de (3) que

$$\underline{\lambda(A) \leq \sup\{\lambda(K) : K \text{ compact}, K \subset A\}}$$

Ainsi λ est intérieurement régulière $\blacksquare$

Ainsi si $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \nu(A) = \mu(A)$$

Il est facile de voir que $\mathcal{E}$ est un π-système et $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

De +, si on choisit $E_n =]-n, n[$, $n \geq 1$, on voit que l'hypothèse (iii) du corollaire 2 est aussi vérifiée

Ainsi le corollaire 2 $\Longrightarrow$ $\mu = \nu$ ■

Chapitre 3. L'intégrale de Lebesgue

Dans ce chapitre, on considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et on adoptera les conventions suivantes

$$0 \times \mu(A) = 0 \quad, \forall A \in \mathcal{A} \quad (\text{même si } \mu(A) = +\infty)$$

$$0 \times f(x) = 0 \quad \text{pour toute fonction } f \quad (\text{même si } f(x) = \pm\infty)$$

En particulier, la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f} = f . \chi_{\{|f| < +\infty\}}$ vaut 0 en tout point x tel que $f(x) = \pm\infty$.

3.1. Intégrale d'une fonction étagée positive

Définition Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction étagée positive et $f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \, \mathcal{X}_{\{f=\alpha\}}$ son écriture canonique.

On appelle intégrale de f par rapport à la mesure μ la quantité
$$\int_X f \, d\mu = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \, \mu\left(\{f=\alpha\}\right) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

On note aussi parfois $\displaystyle\int_X f(x) \, d\mu(x) = \int_X f \, d\mu$

Proposition ① Soit f une fonction étagée positive.

Pour toute décomposition $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \, \mathcal{X}_{A_i}$, où $X = \bigcup_{i \in I}^{\cdot} A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$, I fini, on a
$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \, \mu(A_i)$$

preuve : Pour $\alpha \in f(X)$, notons
$$I_\alpha = \{ i \in I : \alpha_i = \alpha \}.$$

On a $\{f=\alpha\} = \bigcup_{i \in I_\alpha} A_i$

8

Ainsi
$$\int_X f\,d\mu = \sum_{\alpha\in f(X)} \alpha\, \mu(\{f=\alpha\})$$
$$= \sum_{\alpha\in f(X)} \alpha\, \mu\Big(\bigcup_{i\in I_\alpha} A_i\Big)$$
$$= \sum_{\alpha\in f(X)} \alpha \sum_{i\in I_\alpha} \mu(A_i)$$
$$= \sum_{\alpha\in f(X)} \sum_{i\in I_\alpha} \alpha_i\, \mu(A_i)$$
$$= \sum_{i\in I} \alpha_i\, \mu(A_i),$$

car $I = \bigcup_{\alpha\in f(X)} I_\alpha$, $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$, $\alpha\neq\beta$. ■

Proposition (2) Soient f, g deux fonctions étagées positives et $a \geq 0$. On a

(a) $$\int_X (af+g)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

(b) Si $f\leq g$ alors $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$

preuve. $\boxed{(a)}$ Soit $f = \sum_{i\in I} \alpha_i \chi_{A_i}$, $g = \sum_{j\in J} \beta_j \chi_{B_j}$

$A_i \in \mathcal{A}$, $B_j \in \mathcal{A}$, $X = \biguplus_{i\in I} A_i = \biguplus_{j\in J} B_j$

Alors $$af+g = \sum_{(i,j)\in I\times J} (a\alpha_i+\beta_j)\chi_{A_i\cap B_j}$$

et $X = \bigcup_{(i,j) \in I \times J}^{\cdot} A_i \cap B_j$.

Ainsi prop ① $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_X (af+g)\,d\mu = \sum_{(i,j)\in I\times J} (a\alpha_i + \beta_j)\,\mu(A_i \cap B_j)$

$$= a \sum_{i\in I} \alpha_i \underbrace{\sum_{j\in J} \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(A_i)} + \sum_{j\in J} \beta_j \underbrace{\sum_{i\in I} \mu(A_i\cap B_j)}_{\mu(B_j)}$$

$$= a \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu .$$

$\boxed{(b)}$ Si $f \leq g$, il est clair que $g-f$ est une fonction étagée positive. Or $g = (g-f)+f$ et donc en appliquant le (a), on obtient que

$$\int_X g\,d\mu = \int_X (g-f)\,d\mu + \int_X f\,d\mu$$

Mais comme $g-f$ est étagée positive, il est clair que

$$\int_X (g-f)\,d\mu \geqslant 0 \quad (\text{somme de termes positifs})$$

D'où $\displaystyle\int_X g\,d\mu \geqslant \int_X f\,d\mu$

3.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

Définition

Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive.

On appelle <u>intégrale de f</u> la quantité

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X h \, d\mu : h \text{ étagée positive}, \ h \le f \right\}.$$

<u>Remarques</u> ① Le sup existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ car $h(x) = 0, \ \forall x \in X$, est une fonction étagée positive qui minore f et $\int_X h \, d\mu = 0$.

② Lorsque f est une fonction étagée positive, la définition précédente de $\int_X f \, d\mu$ coïncide avec celle donnée dans le paragraphe précédent.

Définition Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable, positive et $A \in \mathcal{A}$. <u>L'intégrale de f sur A</u> est définie par :

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f \chi_A \, d\mu.$$

Remarquons que la définition précédente a bien un sens car si $A \in \mathcal{A}$, $f \chi_A$ est une fonction mesurable positive.

Proposition ③ : Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ mesurables ≥ 0, $A, B \in \mathcal{A}$.

Alors (i) si $f \leq g$ alors $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$

(ii) si $A \subset B$ alors $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$

(iii) si $c > 0$ alors

$$\int_X c f \, d\mu = c \int_X f \, d\mu$$

(iv) si $\int_X f \, d\mu < +\infty$ alors f est finie μ-p.p

(v) si $\int_X f \, d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ-pp

preuve : $\boxed{(i)}$ Remarquons que

$$\{\varphi \text{ étagée positive}, \varphi \leq f\} \subset \{\varphi \text{ étagée positive}, \varphi \leq g\}$$

et donc

$$\underset{\substack{\{\varphi \text{ étagée posit.} \\ \varphi \leq f\}}}{\operatorname{Sup}} \left(\int_X \varphi \, d\mu \right) \leq \underset{\substack{\{\varphi \text{ étagée posit.} \\ \varphi \leq g\}}}{\operatorname{Sup}} \left(\int_X \varphi \, d\mu \right)$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

$\boxed{(ii)}$ si $A \subset B$ alors $f \chi_A \leq f \chi_B$

et (ii) découle alors de (i)

$\boxed{(iii)}$ On écrit.

$$\int_X cf\,d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu : \varphi \leq cf,\ \varphi \text{ étagée} \geq 0\right\}$$

$$= \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu : \frac{\varphi}{c} \leq f,\ \varphi \text{ étagée} \geq 0\right\}$$

$$= c\sup\left\{\int_X \frac{\varphi}{c}\,d\mu : \frac{\varphi}{c} \leq f,\ \varphi \text{ étagée} \geq 0\right\}$$

car si ψ étagée ≥ 0, $c > 0$, on a vu que

$$\int_X c\,\psi\,d\mu = c\int_X \psi\,d\mu$$

D'où

$$\int_X cf\,d\mu = c\sup\left\{\int_X \psi\,d\mu : \psi \leq f,\ \psi \text{ étagée} \geq 0\right\}$$

$$= c\int_X f\,d\mu$$

$\boxed{(iv)}$ Il s'agit de mq

$$\int_X f\,d\mu < +\infty \Longrightarrow \mu(f = +\infty) = 0$$

Notons $A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ et remarquons que

$$n\chi_A \leq f, \quad \forall n \geq 1.$$

D'où $(i) \Longrightarrow$

$$\underbrace{\int_X n\chi_A\,d\mu}_{= n\mu(A)} \leq \int_X f\,d\mu$$

Donc $\forall n \geq 1, \quad n\mu(A) \leq \int_X f d\mu < +\infty$,

ce qui implique $\mu(A) = 0$.

$\boxed{(v)}$ Il s'agit de mq

$$\int_X f d\mu = 0 \Longrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0$$

Notons $B = \{f \neq 0\}$ et $B_n = \{f \geq \frac{1}{n}\}$.

On a $B, B_n \in \mathcal{A}$ car f est mesurable

et $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ avec $B_n \subset B_{n+1}$

D'où $\mu(B) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n)$.

D'après (ii), on a :

$$0 \leq \int_{B_n} f d\mu \leq \int_X f d\mu = 0$$

Or $\int_{B_n} f d\mu = \int_X f \chi_{B_n} d\mu \geq \int_X \frac{1}{n} \chi_{B_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(B_n)$.

$\left(\text{car } f\chi_{B_n} \geq \frac{1}{n} \chi_{B_n}\right)$

D'où $\forall n \geq 1, \mu(B_n) = 0$ et donc $\mu(B) = 0$.

Rappel Soit $\varphi = \sum_{\alpha \in \varphi(X)} \alpha \chi_{\{\varphi = \alpha\}}$ une fonction étagée positive

sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$. On pose $\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{\alpha \in \varphi(X)} \alpha \mu(\{\varphi = \alpha\})$

De +, pour $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive,

on définit $$\int_X f \, d\mu = \operatorname{Sup} \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \begin{array}{l} \varphi \text{ étagée positive} \\ \varphi \leq f \end{array} \right\}.$$

Premier théorème de convergence et applications

Lemme (d'approximation) Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, mesurable. Alors il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions étagées telle que, pour tout $x \in X$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

(i.e. $(f_n)_n$ converge simplement vers f)

En outre,

(a) si $f \geq 0$, on peut choisir la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ croissante et positive

(b) si f est bornée, on peut choisir $(f_n)_{n \geq 1}$ de sorte que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

preuve : (a) Supposons $f \geq 0$ et posons pour $n \in \mathbb{N}$

$$E_{n,k} = \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad 0 \leq k \leq n 2^n - 1$$

$$E_{n,\infty} = \{ f \geq n \}$$

On a $E_{n,k}$, $E_{n,\infty} \in \mathcal{A}$ et donc

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathcal{X}_{E_{n,k}} + n \mathcal{X}_{E_{n,\infty}}$$ est une

fonction étagée positive

On vérifie que $(f_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Vérifions que $\forall x \in X,\ f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Soit $x \in X$ Si $f(x) = +\infty$ alors $x \in E_{n,\infty}$, $\forall n \geq 1$

et donc $f_n(x) = n$, $\forall n \geq 1$

D'où $f_n(x) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty = f(x)$

Si $f(x) < +\infty$

Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N \Longrightarrow f(x) < n$

et donc $\exists\ k \in [0, n2^n-1]$ tq $x \in E_{n,k}$

D'où $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ et $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$

Ainsi $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

Si f est bornée par M, on a $\{f \geq n\} = \emptyset$,
$\forall n > M$.

Ainsi $\forall x \in X$, $\quad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$

i.e $\quad \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

d'où la convergence uniforme.

(b) <u>Si f est à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$</u>.

On introduit $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = \max(-f,0)$.

Il est clair que f^+, f^- sont mesurables positives

et on a. $\quad f = f^+ - f^-. \quad (1)$

et $\quad |f| = f^+ + f^-. \quad (2)$

On voit avec (2) que f est bornée $\Leftrightarrow$ f^+ et f^- sont bornées.

D'après (a), $\exists\ (f_n^+), (f_n^-)$ étagées positives et $\nearrow$

telles que $\quad f_n^+ \xrightarrow[n\to+\infty]{} f^+$ simplement (et unif^t
$\quad\quad f_n^- \xrightarrow[n\to+\infty]{} f^-$ si f est bornée)

On pose alors $f_n := f_n^+ - f_n^-$.

(c) <u>Si f est à valeurs complexes</u>

On décompose $f = \mathrm{Re} f + i\, \mathrm{Im} f$ et on applique le (b).

Théorème (de Beppo Levi)

Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonction mesurable positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et qui converge simplement vers f. Alors f est mesurable et positive et
$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu .$$

preuve: Comme $(f_n)_n \nearrow$, on sait que $n \longmapsto \int_X f_n \, d\mu$ est croissante et donc $\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

De +, comme $(f_n)_n \nearrow$ et $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$, on a:
$$f_n \leq f .$$

Ainsi
$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \;, \forall n$$

et donc
$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu .$$

Considérons maintenant une fonction étagée positive telle que $\varphi \leq f$ et soit $c \in]0,1[$. Définissons pour $n \geq 1$,
$$E_n = \{ f_n \geq c \varphi \} .$$

Il est clair que $E_n \in \mathcal{A}$ et $E_n \subset E_{n+1}$

De +, $X = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ En effet, si $\varphi(x) = 0$

alors $x \in E_n$, $\forall n \geq 1$

<u>Si $\varphi(x) > 0$</u> on a : $c\,\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$

Comme $\varphi_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$, $\exists\, n \geq 1 \,/\, c\,\varphi(x) \leq f_n(x)$

et donc $x \in E_n$.

De +,

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq c \int_{E_n} \varphi \, d\mu$$

Ecrivons $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $A_i \in \mathcal{A}$, $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} A_i$

Alors
$$\int_{E_n} \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \chi_{E_n} \, d\mu$$

$$= \int_X \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i \cap E_n} \, d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, \mu(A_i \cap E_n)$$

Or $A_i = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_i \cap E_n)$ et $A_i \cap E_n \subset A_i \cap E_{n+1}$

D'où $\mu(A_i) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_i \cap E_n)$, $\forall\, 1 \leq i \leq N$.

Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, \mu(A_i)$$
$$= \int_X \varphi \, d\mu$$

D'où
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \geqslant c \int_X \varphi \, d\mu$$

Ceci étant vrai $\forall\, c \in]0,1[$, on obtient par passage à la limite $c \xrightarrow[<]{} 1$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \geqslant \int_X \varphi \, d\mu, \quad \forall\, \varphi \text{ étagée} \geqslant 0,\ f \geqslant \varphi.$$

D'où
$$\int_X f \, d\mu = \sup_{\substack{\varphi \text{ étagée} \geqslant 0 \\ \varphi \leq f}} \int_X \varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$ $\blacksquare$

Corollaire 1 Soit $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable positive et $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Alors f est mesurable et

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu .$$

preuve : On applique le théorème de Beppo Levi à

$$h_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$$

Application Considérons la mesure de comptage μ sur $\mathbb{N}$ définie par $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$.

Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable, alors

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$$

Corollaire 2 Soit f, g mesurables positives $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

Alors

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

preuve : D'après le lemme d'approximation, il existe $(f_n)_n \nearrow$, $(g_n)_n \nearrow$ suites de fct étagées positives tq

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f, \quad g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} g \quad \text{simplement.}$$

Alors $(f_n+g_n)_n$ est une suite ↗ de fonctions mesurables qui cv simplement vers $f+g$.

Ainsi d'après le théorème de Beppo Levi, on a :

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X (f_n+g_n)\,d\mu = \lim_{n\to+\infty}\left[\int_X f_n\,d\mu + \int_X g_n\,d\mu\right]$$

$$= \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

On a vu que si f est mesurable et ≥ 0 et si $\int_X f\,d\mu = 0$ alors $f=0$ μ pp

La réciproque est aussi vraie.

Corollaire 3 Soit f une fonction mesurable positive telle que

$$\boxed{f = 0 \ \mu \text{ pp} \quad \text{Alors} \quad \int_X f\,d\mu = 0}$$

preuve : Soit $A = \{x \in X \ f(x) > 0\}$. Alors $A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$.

Notons $\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in {}^c A \end{cases}$

φ_n est étagée ≥ 0 et $(\varphi_n)_n$ ↗

De +, $\forall x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) \geq f(x)$

⑨

D'où
$$\int_X \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x)\,d\mu(x) \geqslant \int_X f(x)\,d\mu(x)$$
$$\| \text{ Beppo Levi}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n(x)\,d\mu(x)$$

Or
$$\int_X \varphi_n(x)\,d\mu(x) = n\,\mu(A) + 0 \times \mu({}^cA)$$
$$= 0$$
$$\Rightarrow 0 \geqslant \int_X f(x)\,d\mu(x) \geqslant 0$$
■

Corollaire 4 Si f, g mesurables positives et $f = g$ μ pp

Alors $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.

preuve: posons $h = \inf(f, g)$ Alors h est mesurable, $\geqslant 0$

$f_1 := f - h$ et $g_1 = g - h$.

Alors f_1, g_1 sont mesurables, $\geqslant 0$ et nulles pp

car $f = g = h$ μ pp.

D'où corollaire ③ $\Longrightarrow \int_X f_1\,d\mu = \int_X g_1\,d\mu = 0$

Ainsi
$$\int_X f\,d\mu = \int_X (f_1+h)\,d\mu$$
$$= \int_X f_1\,d\mu + \int_X h\,d\mu$$
$$= \int_X g_1\,d\mu + \int_X h\,d\mu$$
$$= \int_X (g_1+h)\,d\mu = \int_X g\,d\mu \qquad \blacksquare$$

<u>Corollaire 5</u> Soit f mesurable positive, $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$

Alors
$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$$

<u>preuve</u>: il suffit de remarquer que
$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B. \quad (\text{car } A\cap B = \emptyset) \qquad \blacksquare$$

<u>Généralisation de l'intégrale et théorème de cv dominée</u>

Pour $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, on pose
$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = \max(-f, 0)$$
Les fonctions f^+ et f^- sont mesurables positives et on a:

$$f = f^+ - f^- \quad , \quad |f| = f^+ + f^-$$

Les deux quantités suivantes

$$\int_X f^+ d\mu \quad \text{et} \quad \int_X f^- d\mu$$

ont un sens. Lorsque $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ et $\int_X f^- d\mu < +\infty$

(ce qui est équivalent à $\int_X |f| d\mu < +\infty$),

on pose

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu .$$

<u>Définition</u> Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable.
On dit que f est intégrable sur X et on note $f \in \mathcal{L}^1(X)$

si $\int_X |f| d\mu < +\infty$

On appelle alors <u>intégrale de f</u> la quantité

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Proposition : Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurables

(i) si $f = g$ μ pp et si $f \in \mathcal{L}^1(X)$ alors $g \in \mathcal{L}^1(X)$

et $$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

(ii) si $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$ et si $f \leq g$ μ pp

alors $$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

(iii) si $f \in \mathcal{L}^1(X)$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in \mathcal{L}^1(X)$

et $$\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu.$$

(iv) si $f \in \mathcal{L}^1(X)$ alors

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

(v) si $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$ alors $f + g \in \mathcal{L}^1(X)$

et $$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

preuve : exercice. Voir note.

Lemme (de Fatou) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables positives, on a :

$$\boxed{\int_\Omega \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.}$$

Rappel : $\left[\quad \underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} u_k = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} u_k . \right.$

preuve : Soit $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$

On sait que g_n est une fonction mesurable positive.

De plus, $g_{n+1} \geq g_n$.

D'où d'après le théorème de Beppo Levi, on a

$$\int_\Omega \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n \, d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} g_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu$$

Fixons $k \geq n$. On a : $g_n \leq f_k$

D'où : $$\int_\Omega g_n \, d\mu \leq \int_\Omega f_k \, d\mu$$

Ainsi $$\int_\Omega g_n \, d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_\Omega f_k \, d\mu$$

et par passage à la limite, on a

$$\int_\Omega \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} \int_\Omega f_k \, d\mu$$

$$= \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \quad \blacksquare$$

Théorème (de convergence dominée).

Soit $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, $n \geq 1$.

Supposons que : (i) il existe une fonction $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable telle que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ μ pp

(ii) il existe $g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ <u>intégrable</u> telle que

$\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$, μ pp

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

<u>preuve</u>: On peut bien sûr supposer que (i) et (ii) ont lieu partout (i.e $\forall x \in \Omega$). De plus, f_n et f sont intégrables d'après (ii).

Remarquons alors que $g + f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ sont

et $g - f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

des fonctions mesurables positives. En appliquant le lemme de Fatou, on a donc

$$\int_\Omega (g+f)\,d\mu = \int_\Omega \underline{\lim}_{n\to+\infty} (g+f_n)\,d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega (g+f_n)\,d\mu \quad (1)$$

et $$\int_\Omega (g-f)\,d\mu = \int_\Omega \underline{\lim}_{n\to+\infty} (g-f_n)\,d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega (g-f_n)\,d\mu \quad (2)$$

En utilisant l'additivité de l'intégrale, on obtient :

$$(1) \Longrightarrow \int_\Omega f\,d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu$$

et

$$(2) \Longrightarrow -\int_\Omega f\,d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty}\left(-\int_\Omega f_n\,d\mu\right) = -\overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu \leq \int_\Omega f\,d\mu$$

D'où $$\int_\Omega f\,d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu \leq \int_\Omega f\,d\mu.$$

Ceci permet d'en déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu$ existe

et $$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu.$$

__Corollaire__ Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions telles que $f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et

$$\sum_{n\geq 1} \int_\Omega |f_n| \, d\mu < +\infty,$$

alors $\sum_n f_n$ converge μ-p.p., sa somme est intégrable et on a

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

__preuve:__ Le théorème de Beppo Levi assure que

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, ce qui implique que $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ est fini μ-pp.

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ est absolument convergente donc convergente presque partout par rapport à μ.

De +, comme $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$,

la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

Posons $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$, $N \geq 1$

On a : (•) $S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ pp $/\mu$

(•) $|S_N| \leq \sum_{n=1}^{N} |f_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

Le théorème de convergence dominée s'applique et donne

que
$$\lim_{N \to +\infty} \int_\Omega S_N \, d\mu = \int_\Omega \lim_{N \to +\infty} S_N \, d\mu$$
$$= \int_\Omega \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu$$

Or
$$\int_\Omega S_N \, d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

D'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu$$

On obtient immédiatement des théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme qui s'avèrent fort utiles.

Théorème (de continuité sous le signe somme)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in U$. Soit $f : U \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) pour presque tout $\omega \in \Omega$, $f(\cdot, \omega)$ est continue en x_0.

(ii) pour tout $x \in U$, $f(x, \cdot)$ est mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$

(iii) $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ telle que

$\forall x \in U$, et pp tout $\omega \in \Omega$, on a $|f(x,\omega)| \leq g(\omega)$

Alors
$$F : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega f(x,\omega)\, d\mu(\omega) \end{array}$$

existe et est continue en x_0.

preuve : L'existence de F découle immédiatement de (ii) et (iii)

Montrons que : F est continue en x_0

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de U qui converge vers x_0

Posons $f_n(\omega) = f(x_n, \omega)$

On a $f_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0, \omega)$ pp par (i)

De +, $\quad |f_n(\omega)| = |f(x_n,\omega)| \leq g(\omega)$ pp

Le théorème de cv dominée implique alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x_n,\omega)\,d\mu(\omega)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\,d\mu(\omega)$$

$$= \int_\Omega f(x_0,\omega)\,d\mu(\omega) = F(x_0).$$

Ceci étant vrai pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ convergente vers x_0, on en déduit que

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0),$$

et F est continue en x_0.

Théorème (de dérivabilité sous le signe somme)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, Ω un ouvert de $\mathbb{R}$,

et $f : U \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) pour presque tout $\omega \in \Omega$, $f(\cdot, \omega)$ est dérivable sur U

(ii) pour tout $x \in U$, $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ 13

(iii) $\exists\ \varphi \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ telle que pour tout $x \in U$,

et p.p tout $\omega \in \Omega / \mu$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,\omega) \right| \leq \varphi(\omega).$$

Alors
$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_\Omega f(x,\omega)\,d\mu(\omega)$$

est bien défini et dérivable sur U et

$$F'(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x,\omega)\,d\mu(\omega).$$

preuve : F est bien défini d'après (ii).

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de U qui converge vers $x_0 \in U$

On considère la suite
$$f_n(\omega) := \frac{f(x_n,\omega) - f(x_0,\omega)}{x_n - x_0}$$

D'après (i), on a :
$$(\ast) \quad f_n(\omega) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\omega) \quad \text{pp tout } \omega \in \Omega$$

De plus, d'après le théorème des accroissements finis et (iii)

on a
$$(\ast) \quad |f_n(\omega)| \leq \varphi(\omega) \quad \text{pp tout } \omega \in \Omega$$

Le théorème de convergence dominée implique alors que

$$\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0} = \frac{1}{x_n-x_0}\left[\int_\Omega f(x_n,\omega)\,d\mu(\omega) - \int_\Omega f(x_0,\omega)\,d\mu(\omega)\right]$$

$$= \int_\Omega f_n(\omega)\,d\mu(\omega)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\omega)\,d\mu(\omega).$$

Ainsi F est dérivable en $x_0 \in U$ et

$$F'(x_0) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\omega)\,d\mu(\omega)$$

Lien entre intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue

On notera λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et

* si $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$, on notera

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda \quad \text{son intégrale de Lebesgue.}$$

* si f est Riemann intégrable, on notera

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{son intégrale de Riemann}$$

<u>Proposition</u> Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle compact $[a,b]$

Alors, on a :

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx ,$$

autrement dit, on a égalité entre les intégrales de Lebesgue et de Riemann pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle compact

<u>preuve:</u> Grâce à la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale (de Lebesgue et de Riemann), on peut se ramener au cas où f est continue sur $[a,b]$.

Posons alors

$$f_n := \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \chi_{[x_k, x_{k+1}[} ,$$

où $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $0 \leq k \leq n$.

Il est clair que f_n est une fonction étagée et on a

$$\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \int_{[a,b]} \chi_{[x_k, x_{k+1}[} \, d\lambda$$

16

$$\Longrightarrow \int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)(x_{k+1} - x_k)$$

Or $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$

D'où $\displaystyle\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$

Comme f est continue, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

D'autre part, pour $x \in [a,b] = \dot{\bigcup}_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}[$

$\exists\, k \in [\![0, n-1]\!]$ tq $\quad x_k \leq x < x_{k+1}$

et $f_n(x) = f\left(a + k\,\dfrac{b-a}{n}\right)$

Or $\quad x_k \leq x < x_{k+1} \Longrightarrow 0 \leq x - x_k < x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_k = x$

et par continuité de f, on a

$$f_n(x) = f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = f(x_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$

De $+$, f étant continue, $\exists\, M > 0$ /

$\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$

D'où
$$|f_n(x)| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{[x_k, x_{k+1}[}(x) = M$$

Le théorème de cv dominée implique alors que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$

D'où par unicité de la limite

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx \qquad \blacksquare$$

<u>Proposition</u> Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$, $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Alors (a) f est intégrable sur $[a,b[$ par rapport à la mesure de Lebesgue <u>ssi</u> l'intégrale impropre
$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$ est convergente.

(b) De plus, dans ce cas, on a

$$\int_{[a,b[} f(x)\,d\lambda(x) = \int_a^b f(x)\,dx$$

preuve. (a) Soit (b_n) une suite de réels telle que $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{<} b$.

On voit que $|f|\chi_{[a,b_n]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |f|\chi_{[a,b[}$

et d'après la proposition précédente (comme f est continue par morceaux sur $[a,b_n]$), on a :

$$\int_{[a,b_n]} |f|\,d\lambda = \int_a^{b_n} |f(x)|\,dx .$$

En utilisant le lemme de Fatou, on a :

$$\int_{[a,b[} |f|\,d\lambda = \int_{[a,b[} \lim_{n\to+\infty} |f|\chi_{[a,b_n]}\,d\lambda$$

(1) $$\leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{[a,b[} |f|\chi_{[a,b_n]}\,d\lambda$$

De +, $\forall n \geq 1$, on a :

$$\int_{[a,b[} |f|\chi_{[a,b_n]}\,d\lambda \leq \int_{[a,b[} |f|\,d\lambda$$

Ainsi

(2) $$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \int_{[a,b[} |f| \chi_{[a,b_n]} \, d\lambda \leq \int_{[a,b[} |f| \, d\lambda$$

Il découle alors de (1) et (2) que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b[} |f| \chi_{[a,b_n]} \, d\lambda = \int_{[a,b[} |f| \, d\lambda$$

Ainsi $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{b_n} |f(x)| \, dx = \int_{[a,b[} |f| \, d\lambda .$$

Par définition de la convergence d'une intégrale impropre, on en déduit que

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \text{ converge ssi } \int_{[a,b[} |f| \, d\lambda < +\infty$$

(b) De +, dans ce cas, on a

- $$f \chi_{[a,b_n]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \chi_{[a,b[}$$

et

- $$\left| f \chi_{[a,b_n]} \right| \leq |f| \chi_{[a,b[} \in \mathcal{L}^1([a,b[, d\lambda)$$

Le théorème de convergence dominée permet alors d'en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b_n]} f\,d\lambda = \int_{[a,b[} f\,d\lambda$$

D'où $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{b_n} f(x)\,dx = \int_{[a,b[} f\,d\lambda$$

Ceci montre donc que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b[} f\,d\lambda \qquad \blacksquare$$

⚠ Il est possible que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ existe sans que l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b[} f\,d\lambda$ existe.

Par exemple $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ existe mais

$$\int_{[0,+\infty[} \left|\frac{\sin x}{x}\right| d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$$

et donc $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{\sin x}{x}\, d\lambda(x)$ n'existe pas.

Etude de la fonction Gamma

Soit $\displaystyle \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$, $x > 0$.

Théorème : (a) La fonction Γ est définie, continue et C^∞ sur $]0,+\infty[$

(b) $\forall x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

En particulier, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \geqslant 1$.

preuve : (a) Γ est définie sur $]0,+\infty[$

- $t \longmapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc intégrable sur tout intervalle fermé borné $I \subset\,]0,+\infty[$

- En 0, on a $\displaystyle t^{x-1} e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$

et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, dt$ converge ssi $1-x < 1$

ssi $x > 0$

• En $+\infty$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \left(t^{x-1} e^{-t}\right) = \lim_{t \to +\infty} t^{x+1} e^{-t} = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

D'où $\quad t^{x-1} e^{-t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right) , t \to +\infty$

et $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt < +\infty$

D'où $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$

Ainsi, $\forall x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge

et donc Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$

Γ est continue sur $]0, +\infty[$

On a

* $\forall x > 0 \quad , t \longmapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$

donc mesurable

* $\forall t > 0, \quad x \longmapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$

* Soient $0 < \alpha < \beta < +\infty$ et $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

Alors $\forall t \in]0, 1], \quad t^{x-1} \leqslant t^{\alpha - 1}$

et donc $\quad |t^{x-1} e^{-t}| \leqslant t^{\alpha-1} e^{-t}$

- et $\forall t \in [1, +\infty[$, $\quad t^{x-1} \leq t^{\beta-1}$

$$\text{et donc} \quad |t^{x-1} e^{-t}| \leq t^{\beta-1} e^{-t}$$

On a donc $\forall\, t \in]0, +\infty[$, $\forall\, x \in]\alpha, \beta[$, on a

$$|t^{x-1} e^{-t}| \leq t^{\alpha-1} e^{-t} + t^{\beta-1} e^{-t} \in L^1(]0, +\infty[)$$

On peut donc appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres et on obtient que Γ est continue sur $]\alpha, \beta[$. Comme c'est vrai $\forall\, 0 < \alpha < \beta < +\infty$, on en déduit que Γ est continue sur $]0, +\infty[$

<u>Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$:</u>

Soit $f(x,t) = t^{x-1} e^{-t}$, $\quad x, t > 0$

* $\forall\, x > 0$, l'application

$$t \longmapsto f(x,t) \quad \text{est dans } L^1(]0, +\infty[)$$

* $\forall\, t > 0$, l'application $x \longmapsto f(x,t)$ est dérivable

et $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^{x-1} (\ln t) e^{-t}$$

* Comme précédemment, pour $0 < \alpha < x < \beta < +\infty$,

on a $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \left(t^{\alpha-1} + t^{\beta-1}\right) |\ln t| \, e^{-t}$$

De +, $t \longmapsto (t^{\alpha-1} + t^{\beta-1})|\ln t|\, e^{-t}$

est intégrable sur $]0,+\infty[$

Le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale implique que Γ est dérivable et même $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

et $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)e^{-t}\,dt$

Par récurrence, on montre que $\boxed{\Gamma^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^n e^{-t}\,dt}$

(b) Soit $A, \varepsilon > 0$, $x > 0$. On a :

$$\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_\varepsilon^A u(t)\,v'(t)\,dt$$

$u(t) = e^{-t}$ $\qquad u'(t) = -e^{-t}$

$v(t) = \frac{1}{x}t^x$ $\qquad v'(t) = t^{x-1}$

Une IPP $\Rightarrow$

$$\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}\left[t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^A + \frac{1}{x}\int_\varepsilon^A t^x e^{-t}\,dt$$

Or $A^x e^{-A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ et $\varepsilon^x e^{-\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

car $\underline{x > 0}$

D'où

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^{x} e^{-t}\,dt$$

i.e

$$\int_0^{+\infty} t^{x} e^{-t}\,dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

soit $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. ■

Chapitre 5. Intégration sur un espace produit

cours n°3 et 4 (a fait 9 et 10)

5.1. Tribu produit.

Définition. Soient $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables.

On appelle <u>tribu produit</u> de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, la tribu notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ définie par

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma\left(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}\right)$$

Autrement dit, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est engendrée par les "rectangles à cotés mesurables".

Notation $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

Donc $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

Proposition 1 Soient X, Y deux espaces métriques et $X \times Y$ l'espace métrique produit muni par exemple de la distance $d_\infty((x,y),(x',y')) = \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y'))$.

Alors (a) $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$

(b) Si X et Y sont séparables, alors

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$$

Avant de faire la preuve, faisons quelques compléments de topologie.

Soit (X, d) un espace métrique et $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts de X.

On dit que $\mathcal{B}$ est <u>une base de la topologie de X</u>

si $\forall G$ ouvert de X, $\forall x \in G$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tel que

$$x \in B \subset G.$$

<u>Remarque</u> : $\mathcal{B}$ est une base de la topologie de X <u>ssi</u> tout ouvert de X s'écrit comme une réunion d'élément de $\mathcal{B}$.

En effet, supposons d'abord que $\mathcal{B}$ est une base de la topologie de X. Soit G un ouvert de X et $x \in G$.

Alors $\exists B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset G$.

D'où

$$G = \bigcup_{x \in G} B_x$$

Réciproquement, supposons que tout ouvert de X s'écrit comme la réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Soit G un ouvert de X et $x \in G$.

Par hypothèse $G = \bigcup_{i \in I} B_i$, où $B_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$

$$x \in G \Longrightarrow \exists i \in I : x \in B_i$$

D'où $x \in B_i \subset G$

et donc $\mathcal{B}$ est une base de la topologie de X

Lemme 2 Soit (X,d) un espace métrique séparable. ②

$\boxed{\text{Alors } (X,d) \text{ est à base dénombrable d'ouverts.}}$

preuve Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dense dans X.

Considérons $$\mathcal{B} = \{ B(x_n, r) : n \geq 1, r \in \mathbb{Q}_+^* \}$$

Comme $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable, la famille $\mathcal{B}$ est une famille dénombrable d'ouverts.

Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de la topologie.

Soit G un ouvert de (X,d) et $x \in G$.

Alors il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que

$$(*) \quad B(x, 2r) \subset G.$$

De plus, par densité de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$, il existe $n \geq 1$ tel que $x_n \in B(x, r)$.

Remarquons alors que si $z \in B(x_m, r)$, on a :

$$d(z,x) \leq d(z, x_m) + d(x_m, x) < r + r = 2r$$

D'où $z \in B(x, 2r)$ et donc d'après $(*)$, on a $z \in G$. D'où $x \in B(x_m, r) \subset G$

Ceci prouve que $\mathcal{B}$ est une base de la topologie (4)

∎

Remarque. la réciproque est aussi vraie, c'est à dire

si (X,d) possède une base de la topologie formée d'une famille dénombrable d'ouverts, alors (X,d) est séparable (Exercice)

Lemme (3) Si $\mathcal{B}_1$ est une base de la topologie de (X, d_X) et $\mathcal{B}_2$ est une base de la topologie de (Y, d_Y) alors

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \{ B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2 \}$$

est une base de la topologie de $X \times Y$.

preuve: Rappelons que si U est un ouvert de (X, d_X)
V ______ (Y, d_Y)

alors $U \times V$ est un ouvert de $(X \times Y, d_\infty)$ où

$$d_\infty((x,y),(x',y')) = \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y')).$$

Soit Ω un ouvert de $X \times Y$ et $u = (x,y) \in \Omega$.

Alors $\exists r > 0$ / $B_{d_\infty}(u, r) \subset \Omega$.

Or $B_{d_\infty}(u, r) = B_{d_X}(x, r) \times B_{d_Y}(y, r)$.

Comme $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$) est une base de la topologie de X (resp de Y), alors il existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$ (resp $B_2 \in \mathcal{B}_2$) tel que

$$x \in B_1 \subset B_{d_X}(x, r) \quad , y \in B_2 \subset B_{d_Y}(y, r)$$

D'où $\quad u = (x, y) \in B_1 \times B_2 \subset B_{d_\infty}(u, r) \subset \Omega.$ ∎

ce qui prouve le lemme 3

preuve de la proposition 1

$\boxed{(a)}$ Les deux projections

$$\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$$
$$(x, y) \longmapsto x$$

et $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$
$$(x, y) \longmapsto y$$

sont continues et donc mesurables pour la tribu $\mathcal{B}(X \times Y)$.

Soit alors $U \in \mathcal{B}(X)$ et $V \in \mathcal{B}(Y)$.

Ecrivons $\quad U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V)$

et remarquons que $U \times Y = \pi_X^{-1}(U)$

et $X \times V = \pi_Y^{-1}(V)$

D'où $U \times V = \pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V) \in \mathcal{B}(X \times Y)$

car π_X (respectivement π_Y) sont $\mathcal{B}(X\times Y) - \mathcal{B}(X)$ mesurable (resp. $\mathcal{B}(X \times Y) - \mathcal{B}(Y)$ mesurable)

et $U \in \mathcal{B}(X)$, $V \in \mathcal{B}(Y)$.

Donc $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$

et ainsi $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$.

$\boxed{(b)}$ Comme X et Y sont séparables, d'après le lemme 2 il existe $\mathcal{U} = \{U_n \cdot n \geq 1\}$ (resp $\mathcal{V} = \{V_m \cdot m \geq 1\}$) une base dénombrable d'ouverts de la topologie de X (resp de Y).

D'après le lemme 3, l'ensemble

$$\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{U_n \times V_m : n, m \geq 1\}$$

est une base dénombrable d'ouverts de la topologie de $X \times Y$.

Soit Ω un ouvert de $X \times Y$.

Alors Ω est une union <u>dénombrable</u> d'élément de $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$

et donc $\quad \Omega \in \sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$

Ainsi $\quad \mathcal{B}(X \times Y) \subset \sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$

Or $\quad \mathcal{U} \subset \mathcal{B}(X) \; , \; \mathcal{V} \subset \mathcal{B}(Y)$

D'où $\quad \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$

et donc $\quad \sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \subset \sigma(\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y))$

Finalement, $\quad \mathcal{B}(X \times Y) \subset \underset{\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)}{\underset{\parallel}{\sigma(\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y))}}$

Avec (a), on obtient donc

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y).$$

<u>Exemple:</u> $\mathbb{R}$ étant séparable, on a peut appliquer la proposition ① et obtenir que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

Lemme 4 Soient $(Z, \mathcal{C})$, $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ des espaces mesurables et

$$f : Z \longrightarrow X \times Y$$
$$z \longmapsto f(z) = (f_X(z), f_Y(z))$$

La fonction f est $(\mathcal{C}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ mesurable ssi f_X et f_Y sont respectivement $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ et $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ mesurables.

preuve : $\boxed{\Longrightarrow}$ supposons f mesurable et $A \in \mathcal{A}$.

Alors $f_X^{-1}(A) = f^{-1}(A \times Y) \in \mathcal{C}$

car $A \times Y \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

De même, pour f_Y.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si f_X et f_Y sont mesurables et $A \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$

on a $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$

et donc $f^{-1}(A \times B) = f_X^{-1}(A) \cap f_Y^{-1}(B) \in \mathcal{C}$.

Or $\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, on en déduit que f est $(\mathcal{C}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ mesurable.

Corollaire 5

(a) Les fonctions

$$s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x+y \qquad\qquad (x,y) \longmapsto xy$$

sont $\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ mesurables.

(b) Si $f, g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont mesurables, alors $f+g$ et fg sont aussi $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables.

preuve: $\boxed{(a)}$ Les fonctions s et p sont continues donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables.

Or d'après la proposition 1 (voir exemple page 7), on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ d'où le résultat

$\boxed{(b)}$ D'après le lemme 4, l'application

$$(f, g) : X \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable

D'où $s \circ (f, g) = f+g : X \longrightarrow \mathbb{R}$

est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable par composée d'applications mesurables. De même, pour

$$fg = p\circ(f,g)$$

<u>Notation</u> Pour $C \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$, on introduit les deux "sections" suivantes

$$C_x = \{ y \in Y : (x,y) \in C \}$$

et

$$C^y = \{ x \in X : (x,y) \in C \}$$

<u>Proposition 6</u> $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurés et $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.
Alors $\forall x \in X$, $C_x \in \mathcal{B}$ et $\forall y \in Y$, $C^y \in \mathcal{A}$

<u>preuve:</u> Fixons $x \in X$ et considérons

$$\mathcal{F}_x = \{ C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : C_x \in \mathcal{B} \}$$

<u>Montrons que</u> $\mathcal{F}_x$ est une tribu sur $X \times Y$ qui contient $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

On vérifie d'abord aisément que l'application $C \longmapsto C_x$ "commutent" avec les opérations ensemblistes élémentaires : autrement dit, on a

(i) $(X \times Y \setminus C)_x = Y \setminus C_x$

(ii) $\quad (C \cap D)_x = C_x \cap D_x$

(iii) $\quad \left(\bigcup_n C_n\right)_x = \bigcup_n (C_n)_x$

En effet,

- $(X \times Y \setminus C)_x = \{ y \in Y : (x,y) \notin C \}$

$$= Y \setminus C_x \text{ , ce qui prouve (i).}$$

- $(C \cap D)_x = \{ y \in Y : (x,y) \in C \cap D \}$

$$= \{ y \in Y : (x,y) \in C \} \cap \{ y \in Y : (x,y) \in D \}$$

$$= C_x \cap D_x \text{ ce qui prouve (ii).}$$

- $\left(\bigcup_{n \geq 1} C_n\right)_x = \{ y \in Y : (x,y) \in \bigcup_{n \geq 1} C_n \}$

$$= \{ y \in Y : \exists n \geq 1 \cdot (x,y) \in C_n \}$$

$$= \bigcup_{n \geq 1} \{ y \in Y : (x,y) \in C_n \}$$

$$= \bigcup_{n \geq 1} (C_n)_x \text{ , ce qui prouve (iii).}$$

Pour montrer que $\mathcal{F}_x$ est une tribu sur $X \times Y$, remarquons que

$*$ $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{B}$ d'où $\underline{X \times Y \in \mathcal{F}_x}$

* Si $C \in \mathcal{F}_x$ alors $C_x \in \mathcal{B}$

et comme $\mathcal{B}$ est une tribu sur Y, on en déduit avec (i)

que $(X \times Y \setminus C)_x = Y \setminus C_x \in \mathcal{B}$, ce qui prouve

que $X \times Y \setminus C \in \mathcal{F}_x$

* Enfin, si $C_n \in \mathcal{F}_x$ alors $(C_n)_x \in \mathcal{B}$

et comme $\mathcal{B}$ est une tribu, on en déduit avec (ii)

que $$\left(\bigcup_{n \geq 1} C_n\right)_x = \bigcup_{n \geq 1} (C_n)_x \in \mathcal{B}$$

d'où $$\bigcup_{n \geq 1} C_n \in \mathcal{F}_x .$$

Ainsi $\mathcal{F}_x$ est une tribu sur $X \times Y$

Montrons qu'elle contient $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

Soit $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. On a $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

et $(A \times B)_x = \{ y \in Y : (x,y) \in A \times B \}$

$$= \begin{cases} B & \text{si } x \in A \\ \emptyset & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

D'où dans les deux cas, $(A \times B)_x \in \mathcal{B}$

et donc $A \times B \in \mathcal{F}_x$.

Finalement, on en déduit que

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subset \mathcal{F}_x \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

et donc $\mathcal{F}_x = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

Par conséquent, $\forall C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, on a $C_x \in \mathcal{B}$

On raisonne de même avec C^y, $y \in Y$

Corollaire 7 Soit $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application

et pour $x \in X$, notons $f_x : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$y \longmapsto f_x(y) = f(x,y)$$

et pour $y \in Y$, notons $f^y \; X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$x \longmapsto f^y(x) = f(x,y)$$

Supposons que f soit $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ mesurable.

Alors f_x est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable, $\forall x \in X$

et f^y est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable, $\forall y \in Y$

preuve : rappelons que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(]\alpha, +\infty], \alpha \in \mathbb{R})$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme f est $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est

mesurable, alors

$$C = \{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) > \alpha\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

D'où d'après la proposition 6, $C_x \in \mathcal{B}$.

Or $C_x = \{y \in Y \quad f(x,y) > \alpha\}$

$= \{y \in Y \quad f_x(y) > \alpha\}$

$= f_x^{-1}(]\alpha, +\infty])$.

D'où $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f_x^{-1}(]\alpha, +\infty]) \in \mathcal{B}$

Ainsi f_x est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ mesurable.

De même, on montre que f^y est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ mesurable. ∎

5.2. Mesure produit de mesures σ-finies.

Commençons par des rappels.

Définition 1 Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une mesure μ sur $(X, \mathcal{A})$ est σ-finie s'il existe une suite croissante $(E_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ vérifiant

$$X = \bigcup_{n\geq 1} E_n \quad \text{et} \quad \mu(E_n) < +\infty, \quad \forall n \geq 1.$$

Par extension, l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est dit lui même σ-fini.

Soit $A \in \mathcal{A}$. Ecrivons alors

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A \cap E_n \quad \text{et} \quad A \cap E_n \subset A \cap E_{n+1}$$

D'où $\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A \cap E_n)$

et $\nu(A) = \lim_{n \to +\infty} \nu(A \cap E_n)$.

Or $\forall n \geq 1$, $\mu(A \cap E_n) = \mu_n(A) = \nu_n(A) = \nu(A \cap E_n)$

D'où $\mu(A) = \nu(A)$ et donc $\mu = \nu$ ∎

<u>Théorème 12 (mesure produit)</u>. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.

(a) Il existe une unique mesure $\mu \otimes \nu$ sur $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}, \ (\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B) \qquad (*)$$

(b) De plus, cette mesure $\mu \otimes \nu$ est aussi σ-finie.

(c) Enfin, pour tout $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

$x \longmapsto \nu(C_x)$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$ mesurable

$y \longmapsto \mu(C^y)$ est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$ mesurable

et $$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(C^y)\, d\nu(y)$$

preuve: $\boxed{a}$ unicité: supposons qu'il existe deux mesures m et m'
sur $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ vérifiant $(*)$.

Les mesures μ et ν étant σ-finies, il existe deux suites croissantes $(A_n)_{n\geq 1}$, $(B_n)_{n\geq 1}$ telles que $A_n \in \mathcal{A}$, $B_n \in \mathcal{B}$

et $\mu(A_n) < +\infty$, $\nu(B_n) < +\infty$, $n \geq 1$

et $X = \bigcup_{n\geq 1} A_n$, $Y = \bigcup_{n\geq 1} B_n$.

Posons alors pour tout $n \geq 1$, $E_n := A_n \times B_n \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$

On a bien sûr $* \; E_n \subset E_{n+1}$

$$* \; X \times Y = \bigcup_{n\geq 1} E_n$$

(remarquons ici qu'on utilise la croissance de $(A_n)_n$ et $(B_n)_n$

car si $(x,y) \in X \times Y$ alors $\exists\, n \geq 1$, $\exists\, p \geq 1$ tel que

$x \in A_n$, $y \in A_p$ et donc

$(x,y) \in A_N \times B_N = E_N$ où $N = \max(n,p)$)

De +, $m(E_n) = m'(E_n) = \mu(A_n)\nu(B_n) < +\infty$.

<u>Vérifions que</u> $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est un π-système.

Tout d'abord, $X \times Y \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. De plus, $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est stable par réunion <u>finie</u> car si $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $A' \times B' \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$,

alors $(A \times B) \cap (A' \times B') = A \cap A' \times B \cap B' \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$

On a : $\sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

Enfin, $\forall A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, on a

$$m(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = m'(A \times B).$$

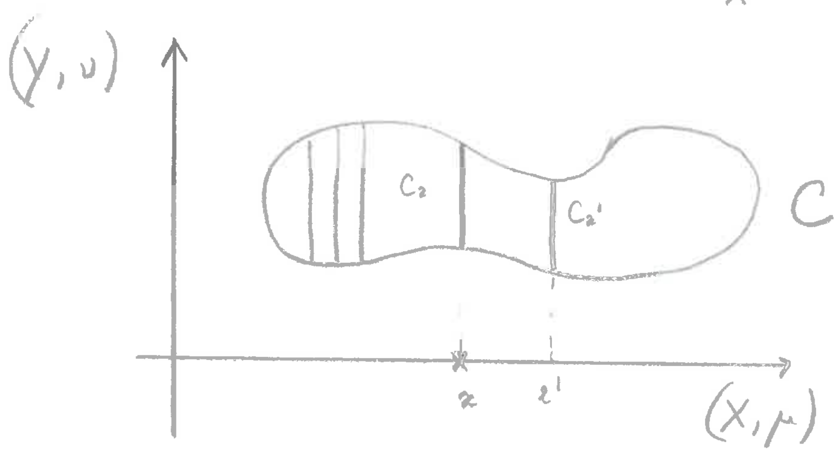
Le corollaire 11 permet alors d'en déduire que $m = m'$.

<u>construction de $\mu \otimes \nu$:</u>

Soit $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. D'après la proposition 6, on a :

$\forall x \in X$, $C_x \in \mathcal{B}$ et donc $\nu(C_x)$ a un sens.

Posons alors $$(\mu \otimes \nu)(C) = \int_X \nu(C_x)\, d\mu(x).$$



Etape 1 Montrons que $\mu \otimes \nu$ est bien définie.

Il s'agit de vérifier que l'application

$$x \longmapsto \nu(C_x)$$

est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$ mesurable pour tout $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

Supposons d'abord ν finie.

Considérons alors

$$\Lambda = \left\{ C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : x \longmapsto \nu(C_x) \text{ est } (\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+})) \text{ mesurable} \right\}$$

Vérifions que Λ est un λ-système.

* $\phi \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ et $\phi_x = \phi$ d'où $\nu(\phi_x) = 0$

et $x \longmapsto \nu(\phi_x)$ est une application constante

donc mesurable.

* Soit $(A_n)_n$ une suite croissante d'éléments de Λ.

Alors $\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right)_x = \bigcup_{n \geq 1} (A_n)_x$ et donc

$$\nu\left(\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{n \geq 1} (A_n)_x\right)$$

De +, comme $A_n \subset A_{n+1}$, on a $(A_n)_x \subset (A_{n+1})_x$

et donc $\nu\left(\left(\bigcup_{n\geq 1} A\right)_x\right) = \lim_{n \to +\infty} \nu((A_n)_x)$

Or $x \longmapsto \nu((A_n)_x)$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$-mesurable

et donc $x \longmapsto \nu\left(\left(\bigcup A_n\right)_x\right)$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$-mesurable

(comme limite simple de fonction mesurable)

Ainsi $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \Lambda$.

* Si $A, B \in \Lambda$ et $A \subset B$,

on a : $(A \setminus B)_x = A_x \setminus B_x$

et donc $\nu((A\setminus B)_x) = \nu(A_x) - \nu(B_x)$

(Attention ici on utilise que ν est finie)

Or $x \longmapsto \nu(A_x)$ et $x \longmapsto \nu(B_x)$

sont mesurables et donc $x \longmapsto \nu((A\setminus B)_x)$ est

mesurable et donc $A \setminus B \in \Lambda$.

Montrons que Λ contient $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Si $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$

Alors on a : $(A\times B)_x = \{y \in Y \cdot (x,y) \in A \times B\}$

$$= \begin{cases} B & \text{si } x \in A \\ \emptyset & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

et donc $\nu((A\times B)_x) = \begin{cases} \nu(B) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

$$= \nu(B)\chi_A(x)$$

D'où $x \longmapsto \nu((A\times B)_x)$ correspond à la

fonction $\nu(B)\chi_A$ qui est mesurable pour $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$

Ainsi $A \times B \in \Lambda$

On en déduit donc que :

$$\Lambda(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subset \Lambda \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

Comme $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est un π-système, le théorème ⑨ implique que

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \Lambda(\mathcal{A} \times \mathcal{B}).$$

D'où finalement $\Lambda = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

et donc $\forall C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $x \longmapsto \nu(C_x)$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$-mesurable.

Supposons maintenant que ν est seulement σ-finie.

$\exists (B_n)_n$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{B}$ vérifiant $\nu(B_n) < +\infty$, $\forall n \geq 1$.

$Y = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ et

On a alors pour $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ et $x \in X$,

$$C_x = \bigcup_{n \geq 1} C_x \cap B_n \quad \text{avec} \quad C_x \cap B_n \subset C_x \cap B_{n+1}$$

D'où

$$\nu(C_x) = \lim_{n \to +\infty} \nu(C_x \cap B_n)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \nu_n(C_x)$$

où $\nu_n(B) = \nu(B \cap B_n)$, $B \in \mathcal{B}$.

Les ν_n sont des mesures finies et donc d'après le 1er cas

$x \longmapsto \nu_n(C_x)$ sont $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$-mesurables

Ainsi $x \longmapsto \nu(C_x)$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$-mesurable

(comme limite simple de fonctions mesurables).

Etape 2 : Montrons que $\mu \otimes \nu$ est une mesure sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

On a :

* $$(\mu \otimes \nu)(\phi) = \int_X \nu(\phi_x)\, d\mu(x) = \int_X \nu(\phi)\, d\mu(x) = 0$$

* Si $(C_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ deux à deux disjoints, on a, pour tout $x \in X$,

$$\left(\bigcup_{n \geq 1} C_n\right)_x = \bigcup_{n \geq 1} (C_n)_x \quad \text{et} \quad \underset{n \neq m}{(C_n)_x \cap (C_m)_x = \phi},$$

d'où
$$\nu\left(\left(\bigcup_{n \geq 1} C_n\right)_x\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu((C_n)_x)$$

Le théorème de Beppo Levi (ou son corollaire pour les séries à termes mesurables positifs) entraîne que :

$$\int_X \nu\left(\left(\bigcup_{n \geq 1} C_n\right)_x\right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X \nu((C_n)_x)\, d\mu(x)$$

et donc par définition, on en déduit que

$$(\mu \otimes \nu)\left(\bigcup_{n \geq 1} C_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mu \otimes \nu)(C_n).$$

Etape 3 : $\mu \circledast \nu$ vérifie $(*)$ et est σ-finie.

Soit $C = A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

On a vu que $\nu(C_x) = \begin{cases} \nu(B) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$ (1)

Ainsi si $\nu(B) < +\infty$, on a :

$$\nu(C_x) = \nu(B)\chi_A(x),$$

et donc $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \int_X \nu(B)\chi_A(x)\,d\mu(x)$

$$= \nu(B)\mu(A).$$

Si $\nu(B) = +\infty$ et $\mu(A) = 0$

Alors d'après (1), on voit que $\nu(C_x) = 0$ pp tout x par rapport à μ et donc

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \int_X \nu(C_x)\,d\mu(x) = 0$$

Avec la convention usuelle $0 \times (+\infty) = 0$, on a donc

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \nu(B) \times \mu(A)$$

Si $\nu(B) = +\infty$ et $\mu(A) > 0$.

Alors d'après (1), on a $\mu(\{x \in X : \nu(C_x) = +\infty\}) = +\infty$

et donc $\displaystyle\int_X \nu(C_x)\,d\mu(x) = +\infty$

(car on a vu que si $\displaystyle\int_X \nu(C_x)\,d\mu(x) < +\infty$ alors $\nu(C_x)$ est fini pp).

D'où $(\mu\otimes\nu)(A\times B) = +\infty = \mu(A)\times\nu(B)$

(avec la convention usuelle $a\times(+\infty) = +\infty$, $a>0$).

Le fait que $\mu\otimes\nu$ est σ-finie a en fait été vu dans la partie unicité.

Etape 4 prouvons le (c).

On montre de façon similaire à l'étape 1 que pour tout $C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, $y\longmapsto\mu(C^y)$ est $(\mathcal{B},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ mesurable. De +, si on pose

$$m'(C) = \int_Y \mu(C^y)\,d\nu(y) \quad , \ C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},$$

on montre comme à l'étape 2 et 3 que m' est une mesure sur $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ qui vérifie $(*)$.

L'unicité prouvée au (a) implique alors

$\forall C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

$(\mu \otimes \nu)(C) = m'(C)$, i.e

$$\int_X \nu(C_x)\,d\mu(x) = \int_Y \mu(C^y)\,d\nu(y).$$

<u>Remarque:</u> ⚠ Le théorème (sur la mesure produit) peut être faux sans l'hypothèse de σ-finitude.

Ainsi considérons $X = Y = \mathbb{R}$ et on munit X de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ et Y de la tribu $\mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et de la mesure de comptage ν $(\nu(B) = \text{card}(B),\ B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Considérons enfin $\Delta = \{(x,x) \cdot x \in \mathbb{R}\}$. Comme Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, il est clair que

$$\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

De +, pour $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, on a: $\Delta_x = \{x\}$ et $\Delta^y = \{y\}$

Ainsi $$\int_{\mathbb{R}} \nu(\Delta_x)\,d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda(x) = +\infty$$

mais $$\int_{\mathbb{R}} \lambda(\Delta^y)\,d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}} 0\,d\nu(y) = 0$$

Application : mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Si λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on définit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ comme

$$\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda.$$

Autrement dit, pour $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

on a $$\lambda_2(A \times B) = \lambda(A) \times \lambda(B)$$

On vérifie que : $\forall\ C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\forall a \in \mathbb{R}^2$,

on a $$\lambda_2(a + C) = \lambda_2(C).$$

5.3. Théorèmes de Fubini

Théorème (de Fubini - Tonelli) 13

Soit $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$ mesurable, μ et ν deux mesures σ-finies, respectivement sur $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$.

Alors (a) Les fonctions $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ sont définies respectivement sur X et Y et sont respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ mesurables

(b) $$\int_{X\times Y} f \, d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x)$$

$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

preuve : $\boxed{(a)}$ D'après le corollaire 7, on sait que

$\forall x \in X$, $f_x : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$ mesurable

Ainsi $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ est bien définie sur X.

si $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et $f = \chi_C$, on a :

$$f(x,y) = \chi_C(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y)\in C \\ 0 & \text{si } (x,y)\notin C \end{cases}$$

et donc $$\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) = \nu(C_x)$$

D'après l'étape 1 page 24, on sait que

$x \longmapsto \nu(C_x)$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$ mesurable

Ainsi si $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et $f = \chi_C$, alors

$x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ est $\mathcal{A}$-mesurable.

Si f est une fonction étagée positive, le résultat découle de la linéarité de l'intégrale et la stabilité de la mesurabilité par somme de fonctions mesurables.

Si $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mesurable alors il existe une suite croissante $(\varphi_n)_n$ de fonction étagées positives telle que $\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ simplement

On
$$\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) = \int_Y \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x,y)\,d\nu(y)$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \int_Y \varphi_n(x,y)\,d\nu(y),$$
où la dernière égalité provient du lemme de Beppo Levi.

D'après ce qui précède,
$$x \longmapsto \int_Y \varphi_n(x,y)\,d\nu(y)$$
est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$ mesurable et donc
$$x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y) \text{ est } (\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+})) \text{ mesurable}$$
comme limite simple de fonctions mesurables.

On raisonne de façon similaire pour
$$y \longmapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$$

$\boxed{(b)}$ D'après le point (a), les intégrales considérées ont toutes un sens.

Si $f = \chi_C$ pour $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

Alors :
$$\int_{X\times Y} f \, d\mu\otimes\nu = (\mu\otimes\nu)(C)$$

$$\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) = \nu(C_x) \quad \text{et} \quad \int_X f(x,y)\,d\mu(x) = \mu(C^y)$$

D'où, l'identité annoncée s'écrit :

$$(\mu\otimes\nu)(C) = \int_X \nu(C_x)\,d\mu(x) = \int_Y \mu(C^y)\,d\nu(y) ,$$

ce qui est l'identité démontrée au Théorème (12)

On conclut alors comme en (a) en utilisant la linéarité pour étendre l'identité aux fonctions étagées puis aux fonctions mesurables positives par le procédé d'approximation et Beppo Levi ■

Théorème (de Fubini) (14) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.

Soit $f : X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure produit $\mu\otimes\nu$.

Alors (a) • $x \longmapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ pour presque tout $y \in Y$ par rapport à ν

• $y \longmapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(Y,\nu)$ pour presque tout $x \in X$ par rapport à μ.

(b) • $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ est définie μ-pp et est dans $\mathcal{L}^1(X,\mu)$

• $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ est définie ν-pp et est dans $\mathcal{L}^1(Y,\nu)$

(c) $$\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

preuve : $\boxed{(a)}$ On applique le théorème de Fubini Tonelli aux fonction f^+ et f^-. D'où

$$\int_X\left(\int_Y f^{\pm}(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_{X\times Y} f^{\pm}\,d\mu\otimes\nu$$

$$\leq \int_{X\times Y} |f|\,d\mu\otimes\nu < +\infty$$

D'où $$\int_Y f^{\pm}(x,y)\,d\nu(y) < +\infty$$ pour presque tout $x \in X$ par rapport à μ

Autrement dit,

$$y \longmapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(Y,\nu) \quad \text{pp tout } x \in X \ /\mu.$$

De même, on montre que $x \longmapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(X,\nu)$ pp tout $y \in Y$ $/\nu$.

$\boxed{(b)}$ On a, pour presque tout $x \in X$ par rapport à μ :

$$\left|\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right| \leq \int_Y |f(x,y)|\,d\nu(y)$$

$$= \int_Y f^+(x,y)\,d\nu(y) + \int_Y f^-(x,y)\,d\nu(y)$$

D'où

$$\int_X \left|\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right| d\mu(x) \leq$$

$$\leq \int_X \left(\int_Y f^+(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) + \int_X \left(\int_Y f^-(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x)$$

$$\leq 2 \int_{X\times Y} |f|\,d\mu\otimes\nu \qquad \text{d'après la preuve du (a)}$$

$$< +\infty$$

D'où $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y) \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$

De m̂, $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x) \in \mathcal{L}^1(Y,\nu)$.

$\boxed{(c)}$ Le point (c) découle de

$$(1)\quad \int_{X\times Y} f^+ \, d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f^+(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f^+(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

et

$$(2)\quad \int_{X\times Y} f^- \, d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f^-(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f^-(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

en faisant (1) − (2) ■

Remarque : Pour vérifier l'hypothèse que $f \in \mathcal{L}^1(X\times Y, \mu\otimes\nu)$, on applique en général dans les applications le théorème de Fubini Tonelli à $|f|$ pour vérifier que

$$\int_{X\times Y} |f| \, d\mu\otimes\nu < +\infty$$

5.4. Théorème de changement de variable

Tout ce qui précède peut se généraliser à des produits finis.

En particulier, on peut construire la mesure de Lebesgue λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d))$.

Rappelons que si $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ est une application différentiable d'un ouvert Δ de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $D \subset \mathbb{R}^d$, alors $\forall u \in \Delta$, $\varphi'(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et on appelle jacobien de φ au point u la quantité

$$J_\varphi(u) = \text{dét}\, \varphi'(u).$$

On dit que $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ est un C^1-difféomorphisme si φ est bijective de classe C^1 sur Δ et φ^{-1} est de classe C^1 sur D

Rappelons le résultat suivant.

Soit Δ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. La fonction $\varphi : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est un C^1-difféomorphisme sur son image $D = \varphi(\Delta)$ si et seulement si elle vérifie

(i) φ est injective sur Δ

(ii) φ est de classe C^1 sur Δ

(iii) $\varphi'(u)$ est inversible, $\forall u \in \Delta$ $\left(\Leftrightarrow \forall u \in \Delta,\ J_\varphi(u) \neq 0\right)$

De +, dans ce cas, D est un ouvert de $\mathbb{R}^d$

On a alors le résultat suivant

Théorème 15 (de changement de variable)

Soit φ un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts Δ et D de $\mathbb{R}^d$ ($\varphi : \Delta \longrightarrow D$). Alors

(a) Pour toute fonction borélienne $f : D \longrightarrow \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_D f(x)\, d\lambda_d(x) = \int_\Delta f(\varphi(u))\, |J_\varphi(u)|\, d\lambda_d(u)$$

(b) Pour toute fonction borélienne $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$,

f est λ_d-intégrable sur D ssi $(f\circ\varphi).|J\varphi|$ est λ_d-intégrable sur Δ et dans ce cas, on a

$$\int_D f(x)\, d\lambda_d(x) = \int_\Delta f(\varphi(u))\, |J_\varphi(u)|\, d\lambda_d(u)$$

Application ① (coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$)

L'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$

$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

est un C^1 difféomorphisme et

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad J\varphi(r,\theta) = \det(\mathrm{Jac}(\varphi)(r,\theta)) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \neq 0$$

Comme $\lambda_2(\mathbb{R}_+ \times \{0\}) = 0$, on obtient que,

$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, d\lambda_2)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2\setminus \mathbb{R}_+\times\{0\}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

Application ② (coordonnées sphériques)

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{x>0 \text{ et } y=0\}$

$$(r, u, v) \longmapsto (r\sin u\cos v, r\sin u\sin v, r\cos\theta)$$

On vérifie que φ est un C^1-difféomorphisme et

$$J\varphi(r,u,v) = r^2 \sin u > 0$$

D'où si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3, d\lambda_2)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\mathbb{R}^3\setminus\{x>0,\,y=0\}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r\sin u\cos v, r\sin u\sin v, r\cos\theta)\, r^2\sin u \; dv\,du\,dr$$

Espaces L^p.

Dans tout le chapitre $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

(I) Espace L^p : définition et premières propriétés.

<u>Définition</u> Pour tout réel $p > 0$, on définit

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X,\mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable tq } \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}.$$

<u>Exemple</u> Si $\mu = m$ est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$

alors $\mathcal{L}^p = \ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geq 0} |a_n|^p < +\infty \right\}$.

<u>Proposition (1)</u> Pour tout $p > 0$, $\mathcal{L}^p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

<u>preuve</u>: On vérifie que $\mathcal{L}^p$ est un s.e.v du $\mathbb{K}$ e.v de fonctions de X dans $\mathbb{K}$.

Tout d'abord, il est clair que $0 : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto 0 \end{array}$ est dans $\mathcal{L}^p$.

De plus, si $f, g \in \mathcal{L}^p$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f + g$ est mesurable et on a :

$$|\lambda f + g|^p \leq \left(|\lambda|\,|f| + |g|\right)^p \leq \left(2 \max\left(|\lambda||f|, |g|\right)\right)^p$$

$\Longrightarrow |\lambda f+g|^p \leq 2^p \left(|\lambda|^p |f|^p + |g|^p \right)$

Ainsi $\displaystyle\int_X |\lambda f+g|^p d\mu \leq 2^p |\lambda|^p \int_X |f|^p d\mu + 2^p \int_X |g|^p d\mu < +\infty$

D'où $\lambda f+g \in \mathcal{L}^p$

Proposition 2 (a) si $\mu(X) < +\infty$ alors

$$0 < p \leq q \Longrightarrow \mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p.$$

(b) si $\mu = m$ est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$

alors $0 < p \leq q \Longrightarrow l^p \subset l^q$

preuve : (a) Si $0 < p \leq q$, on a pour $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable :

$$|f|^p \leq |f|^q \mathbb{1}_{\{|f| \geq 1\}} + \mathbb{1}_{\{|f| < 1\}}$$

Donc si $f \in \mathcal{L}^q$ et $\mu(X) < +\infty$, on a :

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \int_X |f|^q d\mu + \mu(X) < +\infty.$$

(b) Si $0 < p \leq q$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, alors

en particulier, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

D'où $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} /\ n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| \leq 1$

Ainsi
$$|a_n|^q = |a_n|^p \, |a_n|^{q-p}$$
$$\leq |a_n|^p \qquad \text{pour } n \geq n_0$$

D'où
$$\sum |a_n|^q < +\infty$$

<u>Remarque:</u> Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue

on a :
$$x \longmapsto \frac{\mathbb{1}_{[0,1]}(x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1 \setminus \mathcal{L}^2$$

et
$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in \mathcal{L}^2 \setminus \mathcal{L}^1$$

donc il n'y a aucune inclusion entre $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^2$

Plus généralement, on montre (exercice) qu'il n'y a aucune inclusion entre $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \lambda)$ et $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}, \lambda)$ pour $p \neq q$.

II Inégalités de Hölder et Minkowski

Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable et $p > 0$,

on définit
$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

avec la convention que $(+\infty)^{1/p} = +\infty$

Cette quantité $\|\cdot\|_p$ s'appelle la "norme" de $\mathcal{L}^p$ mais il faut se méfier de cette terminologie car nous verrons que $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme mais une semi-norme.

Théorème 3 (Inégalité de Hölder)

Soit $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (On dit que p et q sont conjugués)

(a) Si f et g sont réelles et positives alors

$$0 \leq \int_X fg \, d\mu \underset{(*)}{\leq} \|f\|_p \|g\|_q .$$

En outre, lorsque $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$, il y a égalité dans $(*)$ si et seulement si $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que

$(**)$ $\alpha f^p = \beta g^q$ μ-p.p.

(b) Si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

En outre, il y a égalité dans l'inégalité précédente ssi $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ tq $\alpha |f|^p = \beta |g|^q$ μ pp.

preuve : $\boxed{(a)}$ Etape 1 : Inégalité de Young

Considérons $\varphi(t) = \ln(t)$, $t > 0$.

La fonction φ est strictement concave et donc on a :

$\forall\, u, v > 0,\ \forall\, \alpha \in]0,1[$:

$$\alpha \ln(u) + (1-\alpha)\ln(v) \leq \ln(\alpha u + (1-\alpha)v)$$

De +, on a égalité ssi $u = v$.

D'où (*) $u^{\alpha} v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha) v$, (Young)

avec égalité ssi $u = v$.

On voit que (*) reste vrai si $u = 0$ et ou $v = 0$.

Etape 2 : Inégalité de Hölder

Si $\|f\|_p = 0$ alors $f = 0$ μ pp et donc $fg = 0$ μ pp

et l'inégalité de Hölder est trivialement vérifiée.

De m si $\|g\|_q = 0$.

Supposons maintenant $\|f\|_p$, $\|g\|_q > 0$

Si $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_q = +\infty$, l'inégalité est aussi évidente

On peut donc maintenant supposer que $\begin{cases} 0 < \|f\|_p < +\infty \\ 0 < \|g\|_q < +\infty \end{cases}$

Posons alors : $u = \dfrac{f^p(x)}{\|f\|_p^p}$, $v = \dfrac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}$

Appliquons (*) avec $\alpha = \frac{1}{p}$ et $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$.

D'où $\forall x \in X$, on a

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q} ,$$

et on a égalité $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} = \dfrac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}$.

En intégrant, on obtient :

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_X fg\,d\mu \leq \frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_X f^p d\mu + \frac{1}{q}\frac{1}{\|g\|_q^q}\int_X g^q d\mu$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

D'où

$$\int_X fg\,d\mu \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

et on a égalité ssi $\dfrac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} = \dfrac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}$ pp $/\mu$.

$\boxed{(b)}$ On applique (a) à $|f|$ et $|g|$.

Théorème 4 (Inégalité de Minkowski)

(a) Si $p \in [1, +\infty[$, alors $\mathcal{L}^p$ est un $\mathbb{K}$-e.v semi-normé.

Em particulier,

$\forall f, g \in \mathcal{L}^p$, on a :

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

(b) Cas d'égalité. De plus :

* si $p > 1$, il y a égalité ssi $f = 0$ μ pp ou $g = \alpha f$, μ pp pour un $\alpha \geq 0$.

* si $p = 1$, il y a égalité ssi $f\overline{g} \geq 0$ μ pp.

preuve : $\boxed{(a)}$ L'application $\| \cdot \|_p : \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

* $\|0\|_p = 0$

* $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall f \in \mathcal{L}^p$

* $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, $\forall f, g \in \mathcal{L}^p$

En effet, par l'inégalité triangulaire, on a

$$|f+g|^p \leq |f| \, |f+g|^{p-1} + |g| \, |f+g|^{p-1}$$

et en intégrant, on obtient que

$$\|f+g\|_p^p \leq \int_X |f| \, |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \, |f+g|^{p-1} d\mu$$

si $p = 1$ c'est terminé. Sinon on applique l'inégalité de Hölder qui donne

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} +$$
$$+ \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q}$$

Or
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \iff 1+\frac{p}{q}=p$$
$$\iff p=(p-1)q.$$

D'où
$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/q}$$
$$=\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)\ \|f+g\|_p^{p/q}$$

D'où en divisant par $\|f+g\|_p^{p/q}<+\infty$, on obtient

$$\|f+g\|_p^{p-p/q} \leq \|f\|_p+\|g\|_p$$

i.e
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p$$

(Remarquons que si $\|f+g\|_p=0$, l'inégalité est triviale)

(b) Cas d'égalité. Exercice!

III Les espaces de Banach L^p, $1\leq p<+\infty$

Remarquons que si $f\in \mathcal{L}^p$, alors
$$\|f\|_p=0 \not\Longrightarrow f=0.$$
Ainsi $\|\ \|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p$

En revanche, on a :

$$\|f\|_p = 0 \longrightarrow f = 0 \ \mu \text{ pp}.$$

Pour obtenir une "vraie" norme, on va donc quotienter l'espace $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence suivante :

si f et $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, on dit que $f \sim g$ si $f(x) = g(x)$ μ pp.

<u>On note alors</u>

$$\bar{f} = \{ g \in \mathcal{L}^p : g \sim f \} \quad \text{pour } f \in \mathcal{L}^p$$

$$= \{ g \in \mathcal{L}^p : g(x) = f(x) \ \mu \text{ pp} \}.$$

Puis on définit l'espace quotient

$$L^p = \mathcal{L}^p / \sim \ = \{ \bar{f} : f \in \mathcal{L}^p \}$$

On vérifie facilement que L^p est un $\mathbb{K}$ e.v. muni des opérations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{f} + \bar{g} = \overline{f+g} \\ \text{et} \quad \lambda \bar{f} = \overline{\lambda f} \end{cases}, \quad \begin{matrix} f, g \in \mathcal{L}^p \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{matrix}$$

De plus, on pose

$$\|\bar{f}\|_p = \|f\|_p \quad , \ f \in \mathcal{L}^p$$

Remarquons que cette définition a bien un sens

car si $\overline{f} = \overline{g}$ alors $f \sim g$ et donc

$f(x) = g(x)$ μ pp ce qui donne $\|f\|_p = \|g\|_p$

On vérifie alors que $(L^p, \|\ \|_p)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé

⚠ Dans la pratique, on désignera indifféremment par f, la fonction $f \in \mathcal{L}^p$ ou sa classe $\overline{f} \in L^p$

C'est un abus de notation auquel il faut prendre garde

Ainsi quand on écrira soit $f \in L^p$, il faut prendre garde que la fonction f (ou son représentant) n'est définie que μ pp .....

Théorème ⑤ (de Riesz-Fisher)

$\boxed{\text{Pour tout } p \in [1, +\infty[, \text{ l'espace } (L^p, \|\cdot\|_p) \text{ est un espace de Banach}}$

preuve: Soit $(\overline{F_n})_n$ une suite de Cauchy de L^p

et soit f_n un représentant de $\overline{F_n}$. (i.e $\overline{f_n} = \overline{F_n}$)

Comme $\|f_n - f_m\|_p = \|F_n - F_m\|_p$, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p$.

On peut alors construire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ telle que

$$(*) \quad \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq 0.$$

<u>En effet</u>, comme (f_n) est une suite de Cauchy,

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ /

$$(1) \qquad q \geq n_0 \Longrightarrow \|f_q - f_{n_0}\|_p \leq 1$$

Posons $\varphi(0) = n_0$.

Puis il existe $n_1 \geq n_0 + 1$ telle que

$$(2) \qquad q \geq n_1 \Longrightarrow \|f_q - f_{n_1}\|_p \leq \frac{1}{2}.$$

Posons $\varphi(1) = n_1 > n_0 = \varphi(0)$.

Avec (1), on a de plus, $\|f_{\varphi(1)} - f_{\varphi(0)}\|_p \leq 1$

Supposons avoir construit $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(k)$

$$\text{tq} \quad q \geq \varphi(j) \Longrightarrow \|f_q - f_{\varphi(j)}\|_p \leq \frac{1}{2^j}$$

$$0 \leq j \leq k$$

Alors comme $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy, il existe $n_{k+1} \geq \varphi(k)+1$ telle que

$$q \geq n_{k+1} \Longrightarrow \|f_q - f_{n_{k+1}}\|_p \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

Posons alors $\varphi(k+1) = n_{k+1}$.

Comme $\varphi(k+1) \geq \varphi(k)+1 > \varphi(k)$, on a :

$$\| f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)} \| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Ainsi par récurrence on obtient bien une sous suite $(f_{\varphi(n)})_n$ vérifiant $(*)$.

Posons alors $$g_k := \sum_{j=1}^{k} |f_{\varphi(j+1)} - f_{\varphi(j)}|$$

et $$g := \sum_{j=1}^{+\infty} |f_{\varphi(j+1)} - f_{\varphi(j)}|$$

Il est clair que g_k et g sont mesurables et on a :

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} \| f_{\varphi(j+1)} - f_{\varphi(j)} \|_p$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} \leq 1$$

D'autre part, la suite $(g_k)_k$ est croissante, positive et $\lim_{k\to+\infty} g_k = g$.

Le théorème de convergence de Beppo Levi s'applique et donne :

$$\int_X g^p d\mu = \int_X \lim_{k\to+\infty} g_k^p \, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k^p \, d\mu \leq 1$$

Ainsi $g^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et donc g^p est finie μ pp et donc g est aussi finie μ pp.

Cela signifie que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} |f_{\varphi(j+1)} - f_{\varphi(j)}| < +\infty$ μ pp. Autrement dit, la série $\sum_{j\geq 1} (f_{\varphi(j+1)} - f_{\varphi(j)})$ converge absolument μ pp et donc converge μ pp.

Posons alors :

$$f(x) = \begin{cases} f_{\varphi(1)}(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} (f_{\varphi(j+1)}(x) - f_{\varphi(j)}(x)) & \text{si } g(x) < +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f est mesurable et

pour presque tout $x \in X$, on a :

$$f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_{\varphi(k)}(x).$$

<u>Montrons que</u> $f \in \mathcal{L}^p$ et $\|f - f_k\|_p \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy,

$\exists\, N \geq 1 \,/\, n, k \geq N \Longrightarrow \|f_n - f_k\|_p \leq \varepsilon$.

Pour $k \geq N$, le lemme de Fatou implique alors

$$\int_X |f - f_k|^p \, d\mu = \int_X \lim_{j \to +\infty} |f_{\varphi(j)} - f_k|^p \, d\mu$$

$$\leq \varliminf_{j \to +\infty} \int_X |f_{\varphi(j)} - f_k|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p$$

Ainsi $f - f_k \in \mathcal{L}^p$ et donc $f = (f - f_k) + f_k \in \mathcal{L}^p$

De +, $\lim_{k \to +\infty} \|f - f_k\|_p = 0$

Finalement, si $F \in L^p(\mu)$ est la classe d'$\,$ de f

on a : $\|F - F_k\|_p = \|f - f_k\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

■

Notons qu'au passage, on a prouvé le résultat suivant très utile

Théorème 6 Si $(f_n)_n$ converge vers f dans L^p, $1 \leq p < +\infty$ alors on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ qui converge presque partout vers f.

⚠ $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f \not\Longrightarrow f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ pp

<u>Exemple</u>: $X = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mu = \lambda$ mesure de Lebesgue et pour $n \geq 0$ et $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$

posons $f_{2^n+k} := \mathcal{X}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[}$

On a : $\|f_{2^n+k}\|_p = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{-\frac{n}{p}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

De +, si $x \in [0,1[$, considérons $k_n^x \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$

tq $\dfrac{k_n^x}{2^n} \leq x < \dfrac{k_n^x + 1}{2^n}$

Alors $f_{2^n + k_n^x}(x) = 1$, $\forall n$

Ainsi $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans L^p

et $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ μ pp

car $f_{2^n+k_n^x}(x) = 1, \ \forall n, \ \forall x \in [0,1[$

IV L'espace L^∞

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Definition: On dit qu'une application mesurable

$$f : X \longrightarrow \mathbb{K}$$

est essentiellement bornée s'il existe un nombre $M < +\infty$

tel que $|f(x)| \leq M$ pour presque tout $x \in X$.

Remarque: f est essentiellement bornée s'il existe $M < +\infty$ tel que $\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$.

Si $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ est essentiellement bornée, on appelle borne supérieure essentielle de f le nombre

$$\|f\|_\infty = \operatorname{supess}(f) = \inf\{M \geq 0 : |f| \leq M \text{ pp}\}.$$

On note $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X) = \mathcal{L}^\infty(X, \mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées de X dans $\mathbb{K}$

Proposition 7 : Si $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$, alors

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} \ \forall M \geq \|f\|_\infty, \text{ on a } & \mu(\{|f|>M\}) = 0 \\ \text{(ii)} \ \forall M < \|f\|_\infty, \text{ on a : } & \mu(\{|f|>M\}) > 0 \end{array}}$$

preuve : par définition, on a :

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : \mu(\{|f|>M\}) = 0\}$$

De plus, si $M \geq M'$, on a :

$$\{|f|>M\} \subset \{|f|>M'\}$$

et donc $\mu(\{|f|>M\}) \leq \mu(\{|f|>M'\})$.

Ainsi l'application $M \longmapsto \mu(\{|f|>M\})$ est décroissante et positive.

Il est clair par définition de la borne inférieure que

. si $M < \|f\|_\infty$, on a : $\mu(\{|f|>M\}) > 0$.

. Montrons maintenant que $\forall \delta > 0$, $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty + \delta\}) = 0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty + \delta\}) > 0$$

Alors comme $M \longmapsto \mu(\{|f|>M\})$ est décroissante

on a : $\forall M \leq \|f\|_\infty + \delta$, $\mu(\{|f|>M\}) > 0$.

D'où $\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 \;\; \mu(\{|f|>M\})=0\} \geq \|f\|_\infty + \delta$, absurde ! (18)

Donc $\forall \delta > 0$, $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty + \delta\}) = 0$ c'est-à-dire que

$\forall M > \|f\|_\infty$, $\mu(\{|f| > M\}) = 0$.

Il reste à vérifier que (i) est vraie pour $M = \|f\|_\infty$

Pour cela, remarquons que $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} \{|f| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\}\right)$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f| > \|f\|_\infty + \tfrac{1}{n}\}) = 0$$

■

Corollaire (8) Si $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$, on a : $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pp tout $x \in X$

■

preuve : découle immédiatement de la proposition (7)(i).

Comment calcule-t-on $\|f\|_\infty$?

Si (i) $\mu(\{|f| > M\}) = 0$, i.e. $|f| \leq M$ μ pp

et (ii) $\forall \delta > 0$, $\mu(\{|f| > M - \delta\}) > 0$

alors $\|f\|_\infty = M$

En effet, (i) $\Rightarrow$ $\|f\|_\infty \leq M$. De plus, si $\|f\|_\infty < M$

alors $\exists \delta > 0$ / $\|f\|_\infty < M - \delta$ et d'après la proposition (7)

on a $\mu(\{|f| > M - \delta\}) = 0$, ce qui contredit (ii).

D'où $\|f\|_\infty = M$

Remarques : (1) Si $f = g$ μ pp et $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

alors on vérifie immédiatement que $g \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

et $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$

2) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ est mesurable, bornée

alors $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ et $\|f\|_\infty \leq \sup_{x\in X} |f(x)|$ (*)

En effet, $\forall x \in X$, on a

$$|f(x)| \leq M = \sup_{x\in X} |f(x)| < +\infty$$

D'où $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ et $\mu(\{|f| > M\}) = 0$. Donc

$$\|f\|_\infty \leq M$$

3) ⚠ On peut avoir une inégalité stricte dans (*).

Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

et munissons $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ. Alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = 2$$

De +, $\|f\|_\infty = 1$.

En effet, on a $|f(x)| \leq 1$ pp tout $x \in \mathbb{R}$

De +, si $\delta > 0$ alors $\{|f| > 1-\delta\} = \mathbb{R}$

et donc $\lambda(\{|f| > 1-\delta\}) = +\infty$.

Comme c'est vrai pour tout $\delta > 0$, on en déduit que

$$\|f\|_\infty = 1$$

④ Soit X un espace topologique (métrique) muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ et soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{B}(X))$ telle que

$\forall G$ ouvert <u>non vide</u> de X, on a $\mu(G) > 0$.

(Par exemple, $X = \mathbb{R}$ et $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$)

Alors si $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue et bornée, on a :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

En effet, d'après la remarque ②, on a $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Supposons alors que $\|f\|_\infty < \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Alors par définition du sup, $\exists\, x \in X$ /

$$\|f\|_\infty < |f(x)|$$

D'où $\Omega = \{|f| > \|f\|_\infty\}$ est <u>non vide</u>. De +,

Comme $x \longmapsto |f(x)|$ est continue, Ω est un <u>ouvert</u> de X

et donc par hypothèse sur μ, on a :

$$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) > 0,$$

mais ceci contredit la proposition ⑦ (i)

Ces fonctions μ-essentiellement bornées se caractérisent à l'aide des fonctions bornées usuelles.

<u>Lemme 8</u> Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable.

Alors $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ si et seulement si il existe une fonction $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable, <u>bornée</u> telle que

$$f = g \quad \mu\text{-p.p.} \quad \text{et} \quad \|g\|_\infty = \sup_{x\in X}|g(x)| = \|f\|_\infty$$

<u>preuve:</u> $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ et posons

$$g = f\,\chi_{\{|f| \leq \|f\|_\infty\}}$$

Comme $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0$ (proposition 7),

on a $f = g \quad \mu$ pp

De plus, $\forall x \in X, \quad |g(x)| \leq \|f\|_\infty$ donc

g est mesurable et bornée

et $\sup_{x\in X}|g(x)| \leq \|f\|_\infty = \|g\|_\infty$

car $|f| = |g| \quad \mu$ pp.

Comme $\|g\|_\infty \leq \sup_{x\in X}|g(x)|$ (Remarque 2)

on obtient le résultat

$\boxed{\Leftarrow}$ c'est évident car $g \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ d'après la remarque ② et alors d'après la remarque ①, $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$. ∎

Proposition ⑨ $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\| \ \|_\infty$ est une semi-norme

preuve: * La fonction $0 : X \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto 0$ est évidemment dans $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

et $\|0\|_\infty = 0$

* Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$. Alors d'après le lemme ⑧,

$\exists\, g_1, g_2 : X \longrightarrow \mathbb{K}$ bornées telle que

$\forall i \in \{1,2\}$, $g_i = f_i$ μ pp et $\|f_i\|_\infty = \sup_{x\in X}|g_i(x)|$

Alors $f_1+f_2 = g_1+g_2$ μ pp et g_1+g_2 est bornée

D'où $f_1+f_2 \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ De +,

$$\|f_1+f_2\|_\infty = \|g_1+g_2\|_\infty \leq \sup_{x\in X}|g_1(x)+g_2(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in X}|g_1(x)| + \sup_{x\in X}|g_2(x)|$$

$$= \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$$

* Soit $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$, $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ (23)

On a $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ pp

et donc $|\lambda f| = |\lambda|\,|f| \leq |\lambda|\,\|f\|_\infty$ μ pp

D'où $\lambda f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ et $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\,\|f\|_\infty$

De +, si $\delta > 0$, on a

$$\mu(\{|\lambda f| > |\lambda|\,\|f\|_\infty - \delta\}) = \mu\left(\left\{|f| > \|f\|_\infty - \frac{\delta}{\lambda}\right\}\right) > 0$$

D'où $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty$. (voir page 18)

Comme dans le cas $1 \leq p < +\infty$, $\|\ \|_\infty$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ car

$$\|f\|_\infty = 0 \Longrightarrow f = 0 \quad \mu \text{ pp}$$

et

$$\|f\|_\infty = 0 \not\Longrightarrow f \equiv 0$$

On va donc quotienter par la relation d'équivalence

$$f \sim g \quad \text{si} \quad f = g \quad \mu \text{ pp}$$

On définit $\mathrm{L}^\infty := \mathcal{L}^\infty/\sim \; = \{\bar{f} \quad f \in \mathcal{L}^\infty\}$

où $\bar{f} = \{g \in \mathcal{L}^\infty : \; g = f \;\mu \text{ pp}\}$

On vérifie que L^∞ est un $\mathbb{K}$-e v et de plus, si on pose

$\|\overline{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$ alors on obtient une norme sur L^∞.

Théorème (10) L'espace $(L^\infty(X,\mu), \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach

preuve: On va s'appuyer sur le fait que

$(B(X,\mathbb{K}), \|\ \|_{sup})$ est un espace de Banach,

où $B(X,\mathbb{K}) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} \text{ bornée} \}$

et $\|f\|_{sup} = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Soit $(\overline{f_n})_n$ une suite de Cauchy de $L^\infty(X,\mu)$

Alors $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$

Posons alors

$$A_\infty = \bigcup_{n\geq 1} \{ |f_n| > \|f_n\|_\infty \} \cup \bigcup_{n,m\geq 1} \{ |f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty \}$$

Alors $\mu(A_\infty) = 0$ (comme réunion dénombrable d'ensembles

négligeables). Posons $g_n := f_n \chi_{{}^cA_\infty}$

Les fonctions g_n sont mesurables $\mathcal{D}$ + ,

$\forall x \in X$, on a $|g_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$

Ainsi $g_n \in B(X,\mathbb{K})$, $\forall n\geq 1$

De +, $\forall x \in X$, $\forall n, m \geq 1$, on a

$$|g_n(x) - g_m(x)| = |f_n(x) - f_m(x)| \chi_{{}^cA_m}(x)$$

$$\leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

D'où

$$\sup_{x \in X} |g_n(x) - g_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$$

Ainsi $(g_n)_n$ est une suite de Cauchy de $(B(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{sup})$ donc elle converge. Autrement dit, $\exists\, g \in B(X, \mathbb{K})$

telle que $\sup_{x \in X} |g_n(x) - g(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

En particulier, $\forall x \in X$, $g(x) = \lim_{n \to +\infty} g_n(x)$.

Donc g est mesurable (comme limite simple de fonctions mesurables). De +, g étant bornée alors $g \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$

Enfin, comme $f_n - g = g_n - g$ μ pp,

on a $\|f_n - g\|_\infty = \|g_n - g\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |g_n(x) - g(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

D'où $\|\overline{f_n} - \overline{g}\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et

$(\overline{f_n})_n$ converge dans $L^\infty(X, \mu)$

On peut étendre l'inégalité de Hölder au cas $p = 1$ en convenant que l'exposant conjugué de $p = 1$ est $q = +\infty$.

Théorème 11 (Inégalité de Hölder)

Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et q l'exposant conjugué de p

i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors si $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$, on a $fg \in \mathcal{L}^1$

et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

preuve: Le seul cas à étudier est $p = 1$ et $q = +\infty$.

On a $|fg| \leq |f| \|g\|_\infty$ μ pp

D'où $\displaystyle\int_X |fg| \, d\mu \leq \|g\|_\infty \int_X |f| \, d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$

Ainsi $fg \in \mathcal{L}^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ ∎

V Théorèmes de densité

Dans cette section, nous allons nous placer sur $X = \mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens $\mathcal{A} = \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue $\mu = \lambda$.

Rappelons que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ est une fonction étagée positive, $f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \lambda(A_i),$$

et avec la convention $0 \times \infty = 0$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda < +\infty \iff \lambda(\{f \neq 0\}) < +\infty$$

Par définition de l'intégrale de Lebesgue, on étend immédiatement ce résultat au cas où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction étagée (non nécessairement positive) :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \iff \lambda(\{f \neq 0\}) < +\infty$$

<u>Remarquons</u> que si f est étagée et $p \geq 1$ alors $f \in L^1(\mathbb{R}) \iff f \in L^p(\mathbb{R})$.

Théorème (12)

a) Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mathbb{R})$

b) L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mathbb{R})$

<u>preuve</u> : (a) Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, en écrivant $f = f^+ - f^-$ où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$, on peut supposer que $f \geq 0$

D'après le lemme d'approximation, on peut trouver une suite croissante $(\varphi_n)_n$ de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f. Comme

$$0 \leq \varphi_n \leq f,$$

on a : $\varphi_n \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $|\varphi_n - f|^p \leq 2^p |f|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Ainsi le théorème de convergence dominée implique que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n - f|^p \, d\mu = 0$$

(b) se démontre avec un raffinement du lemme d'approximation qui dit que si f est bornée mesurable positive alors on peut choisir une suite croissante (φ_n) de fonctions étagées ≥ 0 qui converge uniformément vers f.

En effet, rappelons que φ_n est définie de la façon suivante

$$\varphi_n := \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + n \chi_{E_{n,\infty}},$$

où $E_{n,k} := \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\}$, $0 \leq k \leq n 2^n - 1$

et $E_{n,\infty} = \{ f \geq n \}$

Si f est bornée par M alors $E_{n,\infty} = \emptyset$ pour $n > M$

et donc si $x \in \mathbb{R}$, $\exists\, k \in \{0, \dots, n2^{n-1}\}$ tq

$$x \in E_{n,k}$$

D'où $$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) = f(x) - \frac{k}{2^n} < \frac{1}{2^n}$$

Ainsi $$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Pour le deuxième résultat de densité, on va avoir besoin de la notion de support d'une fonction.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle <u>support de f</u> l'ensemble suivant

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R} \;\; f(x) \neq 0\}}.$$

Remarquons que $\operatorname{supp} f$ est toujours fermé.

De plus, $\operatorname{supp} f$ est compact $\iff \exists\, M > 0$ tq $|x| > M \Rightarrow f(x) = 0$.

En effet, comme $\operatorname{supp} f$ est fermé, alors

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} f \text{ est compact} &\iff \exists\, M > 0 \text{ tq } \operatorname{supp} f \subset [-M, M] \\ &\iff \exists\, M > 0 \text{ tq } |x| > M \Rightarrow f(x) = 0. \end{aligned}$$

Théorème (13) : Soit $p \in [1, +\infty[$

(a) L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$

(b) L'ensemble $C_{cc}(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$

preuve : Commençons par un fait.

Fait 1 Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset L^p(\mathbb{R})$. Si $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{D}$ pour la norme $\|\cdot\|_p$ et $\mathcal{D}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_p$, alors $\mathcal{C}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_p$.

En effet, soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $g \in \mathcal{D}$ telle que $\|f - g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Il existe alors $h \in \mathcal{C}$ telle que $\|g - h\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'où $\|f - h\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - h\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

ce qui prouve la densité de $\mathcal{C}$

$\boxed{(a)}$ Notons $\mathcal{C}$ = l'ensemble des fonctions en escalier à support compact
$\mathcal{D}$ = l'ensemble des fonctions étagées intégrable.

On a $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset L^p(\mathbb{R})$.

D'après le théorème (12), on sait que $\mathcal{D}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ et donc d'après le fait 1, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{D}$ autrement dit qu'on peut approcher en norme $\| \cdot \|_p$ une fonction étagée f intégrable par une suite de fonctions en escalier à support compact. En décomposant f sous la forme $f = f_+ - f_-$ où $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \max(-f, 0)$, on peut supposer que $f \geq 0$ et par linéarité, on peut finalement supposer que $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{B}o(\mathbb{R})$, $\lambda(A) < +\infty$.

La mesure de Lebesgue a la propriété suivante connue sous le nom de mesure extérieurement régulière et qui dit que:

$$\lambda(A) = \inf \{ \lambda(G) : A \subset G, G \text{ ouvert de } \mathbb{R} \}.$$

Alors il existe une suite d'ouverts $(\Omega_n)_{n \geq 1}$, $A \subset \Omega_n$

et $\lambda(\Omega_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda(A)$

Posons alors $\tilde{\Omega}_n := \Omega_n \cap]-n, n[$

La fonction $\chi_{\tilde{\Omega}_n}$ est à support compact et on a

$$\|\chi_{\tilde{\Omega}_n} - \chi_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |\chi_{\tilde{\Omega}_n} - \chi_A|^p \, d\lambda$$

$$= \int_{]-n,n[} |\chi_{\tilde{\Omega}_n} - \chi_A|^p \, d\lambda + \int_{\mathbb{R} \setminus]-n,n[} |\chi_{\tilde{\Omega}_n} - \chi_A|^p \, d\lambda$$

. D'où

$$\|\chi_{\tilde{\Omega}_n} - \chi_A\|_p^p = \int_{]-n,n[} |\chi_{\Omega_n} - \chi_A|^p d\lambda + \int_{\mathbb{R}\setminus]-n,n[} |\chi_A|^p d\lambda$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |\chi_{\Omega_n} - \chi_A|^p d\lambda + \int_{\mathbb{R}\setminus]-n,n[} |\chi_A|^p d\lambda$$

Or

$$|\chi_{\Omega_n}(x) - \chi_A(x)|^p = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in \Omega_n \setminus A \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\Omega_n \end{cases}$$

(ne pas oublier que $A \subset \Omega_n$)

D'où

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_{\Omega_n} - \chi_A|^p d\lambda = \lambda(\Omega_n \setminus A)$$

$$= \lambda(\Omega_n) - \lambda(A) \quad (\text{car } \lambda(A) < +\infty)$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |\chi_{\Omega_n} - \chi_A|^p d\lambda = 0$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}\setminus]-n,n[} |\chi_A|^p d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |\chi_A \chi_{\mathbb{R}\setminus]-n,n[}|^p d\lambda$$

et $\cdot\ \forall x \in \mathbb{R},\ \chi_A(x)\chi_{\mathbb{R}\setminus]-n,n[}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(car si $x \in \mathbb{R}$, $\exists n \,/\, n > |x|$ et donc

$\chi_{\mathbb{R}\setminus]-n,n[}(x) = 0$)

- $\left|\chi_A \chi_{\mathbb{R}\setminus]-n,n[}\right|^p \leq |\chi_A|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ car $\lambda(A) < +\infty$.

Le théorème de convergence dominée implique alors que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus]-n,n[} |\chi_A|^p \, d\lambda = 0$$

D'où on déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \|\chi_{\tilde{\Omega}_n} - \chi_A\|_p = 0 .$$

Pour conclure, il reste à remarquer que si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(I_n)_{n \geq 1}$ d'intervalles ouverts (bornés) deux à deux disjoints telle que $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} I_n$.

D'où $\chi_\Omega = \sum_{n \geq 1} \chi_{I_n}$

Notons $\varphi_k := \sum_{n=1}^{k} \chi_{I_n}$.

Les fonctions φ_k sont des fonctions en escaliers à support compact car $\operatorname{supp} \varphi_k \subset \Omega$ et Ω est borné.

De +, $\|\varphi_k - \chi_\Omega\|_p \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

En effet, on a

$$\|\varphi_k - \chi_\Omega\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_k - \chi_\Omega|^p \, d\lambda$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_k(x) - \chi_\Omega(x) = \sum_{n=1}^{k} \chi_{I_n}(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{I_n}(x)$$

$$\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

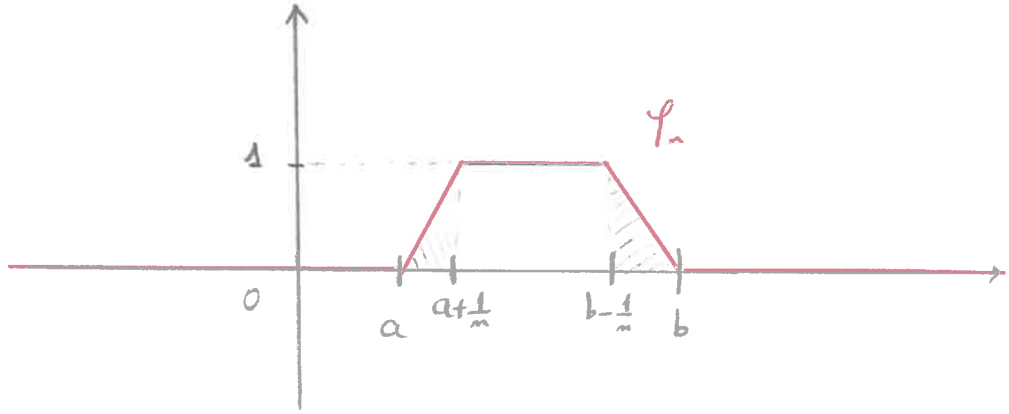
et $$|\varphi_k(x) - \chi_\Omega(x)|^p \leq 2^p \chi_\Omega(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

car $\lambda(\Omega) < +\infty$

Le théorème de cv dominée s'applique et donne

$$\lim_{k \to +\infty} \|\varphi_k - \chi_\Omega\|_p = 0.$$

$\boxed{(b)}$ D'après (a), il suffit d'approcher dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ $\chi_{]a,b[}$, où $-\infty < a < b < +\infty$, par une suite de fonction continue à support compact.



Pour $n > \dfrac{2}{b-a}$, on définit $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left]a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right[\\ \text{affine} & \text{si } t \in \left]a, a+\frac{1}{n}\right[\text{ et } t \in \left]b-\frac{1}{n}, b\right[\\ 0 & \text{si } t \in \left]-\infty, a\right] \cup \left[b, +\infty\right[\end{cases}$$

Alors φ_n est continue et à support compact.

De plus, $\|\varphi_n - \chi_{]a,b[}\|_p^p = \displaystyle\int_{]a,b[} |\varphi_n(t) - 1|^p \, d\lambda(t)$

$$= \int_a^{a+\frac{1}{n}} |\varphi_n(t)-1|^p dt + \int_{b-\frac{1}{n}}^{b} |\varphi_n(t)-1|^p dt$$

On vérifie facilement que si $t \in \left[a, a+\frac{1}{n}\right]$,

$$\varphi_n(t) = n(t-a)$$

D'où $\displaystyle\int_a^{a+\frac{1}{n}} |\varphi_n(t) - 1|^p dt = \int_a^{a+\frac{1}{n}} |n(t-a)-1|^p dt$

D'où

$$\int_a^{a+\frac{1}{n}} |\varphi_n(t) - 1|^p \, dt = \int_a^{a+\frac{1}{n}} \left(1 - n(t-a)\right)^p dt$$

$$= \left[\frac{\left(1 - n(t-a)\right)^{p+1}}{n(p+1)} \right]_{a+\frac{1}{n}}^{a}$$

$$= \frac{1}{n(p+1)}.$$

De même

$$\int_{b-\frac{1}{n}}^{b} |\varphi_n(t) - 1|^p \, dt = \frac{1}{n(p+1)}$$

D'où

$$\|\varphi_n - \chi_{]a,b[}\|_p^p = \frac{2}{n(p+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

$\blacksquare$