Cours d'analyse du Master.

Chapitre I : Espace de fonctions continues sur un compact.

On notera dans ce cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si (K, d) est un espace métrique compact, on munit

$$C(K) = \{ f : K \longrightarrow \mathbb{K} \text{ continue} \}$$

de la norme $\quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$

Rappelons que $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, i.e un espace vectoriel, normé et complet.

I.1. Théorème de Dini:

Il est bien connu que la convergence simple d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ n'entraine pas la convergence uniforme. Voilà néanmoins une situation où cela est vraie !

Théorème 1 (de Dini): Soit (X, d) un espace métrique compact

$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

(i) $f_n \longrightarrow f$ simplement

(ii) f est continue sur X

(iii) $\forall x \in X$, la suite $(f_n(x))_n$ est croissante.

Alors $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow +\infty$

preuve: Fixons $x_0 \in X$. D'après (i), il existe $n(x_0) \in \mathbb{N}$ tq

$$n \geq n(x_0) \Longrightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme $f_{n(x_0)}$ et f sont continue en x_0, il existe $\delta(x_0) > 0$ tq

$$|x - x_0| < \delta(x_0) \Longrightarrow |f_{n(x_0)}(x) - f_{n(x_0)}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{et } |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où, si $|x - x_0| < \delta(x_0)$, on a:

$$|f_{n(x_0)}(x) - f(x)| \leq |f_{n(x_0)}(x) - f_{n(x_0)}(x_0)| + |f_{n(x_0)}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

En utilisant la croissance de f_n, on en déduit que pour $n \geq n(x_0)$ et $|x - x_0| < \delta(x_0)$, on a:

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{n(x_0)}(x) = |f(x) - f_{n(x_0)}(x)| \leq \varepsilon.$$

Il reste à utiliser un argument de compacité.

Ecrivons $X = \bigcup_{x_0 \in X} B(x_0, \delta(x_0))$. Comme X est compact, il existe $x_1, \dots, x_N \in X$ tel que :

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \delta(x_i)).$$

Posons alors $M = \max_{i=1,\dots,N} n(x_i)$.

Soit $x \in X$. Il existe $i \in [\![1, N]\!]$ tel que

$$|x - x_i| < \delta(x_i)$$

et donc pour $n \geq M \geq n(x_i)$, on a :

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon.$$

D'où pour $n \geq M$, $\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$,

ce qui prouve la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f. ■

Voici un exemple d'application !

<u>Corollaire 2</u> : soit $P_0(t) = 0$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t))$

Alors $(P_n)_{n \geq 0}$ est une suite de polynômes qui converge uniformément vers $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $[0,1]$.

<u>preuve</u>: montrons par récurrence que : $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$.

Pour $n = 0$, c'est trivial !

Supposons la propriété vraie au rang n.

On a alors :

$$P_{n+1}(t) = \underbrace{P_n(t)}_{\geq 0} + \frac{1}{2}\big(\underbrace{t - P_n^2(t)}_{\geq 0}\big)$$

d'où $P_{n+1}(t) \geq 0$.

De plus, $P_{n+1}(t) - \sqrt{t} = P_n(t) - \sqrt{t} + \frac{1}{2}\left(t - P_n^2(t)\right)$

$$= \big(\underbrace{\sqrt{t} - P_n(t)}_{\geq 0}\big)\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right) - 1\right)$$

et $\frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right) \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + \sqrt{t}\right) = \sqrt{t} \leq 1$

Donc $\frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right) - 1 \leq 0$ et $P_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$.

On en déduit que $P_{n+1}(t) \geq P_n(t)$ et une récurrence évidente montre aussi que $P_n(t)$ est un polynôme.

Comme pour $t \in [0,1]$, la suite $(P_n(t))_{n \geq 0}$ est croissante et majorée (par 1), elle converge vers $f(t)$.

En utilisant la relation de récurrence, on a :

$$f(t) = f(t) + \frac{1}{2}\left(t - f^2(t)\right)$$

et donc $f(t) = \pm\sqrt{t}$, $t \in [0,1]$.

Or $0 \leq P_n(t)$, donc $f(t) \geq 0$ et $f(t) = \sqrt{t}$.

Ainsi f est continue sur $[0,1]$ et on peut appliquer le théorème de Dini qui assure la cv uniforme de $(f_n)_n$ vers f.

I.2. Théorème de Stone-Weierstrass :

La question à laquelle on s'intéresse dans cette section est la suivante :

Question : quelles sont les sous-algèbres unitaires de $C(K)$ qui sont denses dans $C(K)$?

Remarque : supposons que A soit une sous-algèbre unitaire dense de $C(K)$. Alors A sépare les points, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in K,\ x \neq y\ .\ \exists f \in A \text{ tel que } f(x) \neq f(y).$$

En effet, considérons $\varphi(t) = d(t, y)$, $t \in K$.

Alors $\varphi \in C(K)$ et $\varphi(x) = d(x,y) =: \delta > 0$
$\varphi(y) = 0$.

Par densité, il existe $f \in A$ tq $\displaystyle\sup_{t \in K} |f(t) - \varphi(t)| < \frac{\delta}{2}$.

On a alors : $|f(x)| \geq |\varphi(x)| - |f(x) - \varphi(x)| > \delta - \frac{\delta}{2} = \delta/2$

et $|f(y)| = |f(y) - \varphi(y)| < \frac{\delta}{2}$.

D'où $f(x) \neq f(y)$ et A sépare les points !

Ce qui est remarquable, c'est que cette condition dans le cas réel est aussi suffisante !

Théorème (3) (de Stone Weierstrass, cas réel) :

Soit (K, d) un espace métrique compact et A une sous algèbre unitaire de $C(K) = C(K, \mathbb{R})$.

Supposons que $\mathcal{A}$ sépare les points. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $C(K)$. (6)

preuve: Fait 1: si $\mathcal{A}$ est une sous algèbre unitaire de $C(K)$ et si $f \in \mathcal{A}$, alors $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$ (l'adhérence de $\mathcal{A}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$).

En effet, posons $g = \frac{f}{\|f\|_\infty} \in \mathcal{A}$ (Si $f=0$, le résultat est trivial !).

Alors $0 \leq g^2 = \frac{f^2}{\|f\|_\infty^2} \leq 1$.

D'autre part, le corollaire (2) assure l'existence d'une suite de polynômes $(P_n)_n$ telle que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \sup_{t\in[0,1]} \left|P_n(t) - \sqrt{t}\right| \leq \varepsilon.$$

D'où

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \sup_{x\in K} \left|P_n(g^2(x)) - |g(x)|\right| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Remarquons que :

$x \longmapsto P_n(g^2(x)) \in \mathcal{A}$ car $g \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre unitaire.

Donc $(*) \Longrightarrow |g| \in \overline{\mathcal{A}}$. D'autre part, comme $\overline{\mathcal{A}}$ est stable par multiplication par un scalaire, on en déduit que $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$, ce qui achève la preuve du fait 1.

<u>Fait 2</u>: si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre unitaire de $C(K)$ et si $f, g \in \mathcal{A}$, alors $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g) \in \mathcal{A}$.

En effet, on a : $\sup(f,g) = \frac{1}{2}\left(f+g+|f-g|\right)$

et $\inf(f,g) = \frac{1}{2}\left(f+g-|f-g|\right)$

et il suffit donc d'appliquer le fait 1.

<u>Fait 3</u>: sous les hypothèses du théorème, $\mathcal{A}$ satisfait la propriété d'interpolation suivante : $\forall (x,y) \in K^2$, $x \neq y$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ $\exists f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

En effet, comme $\mathcal{A}$ sépare les points de K, $\exists g \in \mathcal{A}$ tel que $g(x) \neq g(y)$. Le déterminant du système linéaire

$$\begin{cases} \lambda g(x) + \mu = \alpha \\ \lambda g(y) + \mu = \beta \end{cases}$$

est $g(x) - g(y) \neq 0$. Donc ce système possède une (unique) solution en (λ, μ). Comme $\mathcal{A}$ est une sous algèbre unitaire, la fonction $f = \lambda g + \mu \mathbb{1} \in \mathcal{A}$ et répond au problème d'interpolation.

<u>Fait 4</u>: Fixons $\varphi \in C(K)$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in K$, il existe $f_x \in \mathcal{A}$ telle que $f_x(x) = \varphi(x)$ et $f_x(z) > \varphi(z) - \varepsilon, \forall z \in K$.

Fixons $x \in K$. Pour tout $y \in K$, $\exists\, f^y \in \mathcal{C}$ tel que

$$f^y(x) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad f^y(y) = \varphi(y).$$

Si $y \neq x$, cela découle du fait 3. Si $y = x$, il suffit de considérer $f^y = \varphi(x)\mathbb{1} \in \mathcal{C}$.

Par continuité de f^y et φ, il existe un voisinage ouvert V^y de y tel que

$$\forall z \in V^y, \quad f^y(z) > \varphi(z) - \varepsilon.$$

La famille $(V^y)_{y \in K}$ constitue un recouvrement ouvert du compact K et donc on peut trouver $y_1, \dots, y_p \in K$ tels que $K = V^{y_1} \cup \dots \cup V^{y_p}$.

Posons alors $f_x = \operatorname{Sup}\{f^{y_1}, \dots, f^{y_p}\}$

D'après le fait 2, $f_x \in \mathcal{C}$ et on a :

$$f_x(x) = \operatorname{Sup}\{f^{y_1}(x), \dots, f^{y_p}(x)\} = \varphi(x)$$

et pour $z \in K$, $\exists\, i \in [\![1, p]\!]$ tq $z \in V^{y_i}$

et donc $f_x(z) \geq f^{y_i}(z) > \varphi(z) - \varepsilon$.

Fait 5: [pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\, f \in \mathcal{C}$ tq $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$

Pour tout $x \in K$, soit $f_x \in \mathcal{C}$ la fonction construite au fait 4

Par continuité de f_x et φ, il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que

$$\forall z \in V_x, \quad f_x(z) < \varphi(z) + \varepsilon .$$

Par compacité une nouvelle fois, il existe $x_1, \dots, x_m \in K$ tq $K = \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$.

Posons alors $f = \inf\{f_{x_1}, \dots, f_{x_m}\}$.

D'après le fait 2, $f \in \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

De plus, si $z \in K$, il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tq $z \in V_{x_i}$ et on a :

$$f(z) \leq f_{x_i}(z) < \varphi(z) + \varepsilon$$

De plus, comme $\forall j \in [\![1, m]\!]$, on a :

$$f_{x_j}(z) > \varphi(z) - \varepsilon, \quad \forall z \in K$$

on a aussi $\quad f(z) > \varphi(z) - \varepsilon$.

D'où $\quad \varphi(z) - \varepsilon < f(z) < \varphi(z) + \varepsilon$,

c'est à dire : $\quad \|\varphi - f\|_\infty < \varepsilon$.

<u>Conclusion</u> : Soit $\varphi \in C(K, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.

D'après le fait 5, $\exists f \in \mathcal{A}$ tel que

$$\|f - \varphi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, comme $f \in \overline{\mathcal{A}}$, $\exists\, g \in \mathcal{A}$ telle que

$$\|f-g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi $\|g-\varphi\|_\infty \leq \|g-f\|_\infty + \|f-\varphi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

ce qui prouve la densité de $\mathcal{A}$ dans $C(K,\mathbb{R})$. ■

Corollaire 4: Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Les fonctions polynomiales sont denses dans $C([a,b],\mathbb{R})$. Plus généralement si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, alors les fonctions polynomiales en les d variables $x_1,\dots,x_d$ sont denses dans $C(K,\mathbb{R})$.

preuve: exercice. Appliquer le théorème 3! ■

Remarque: Le corollaire 4 est purement existentiel : il affirme que pour toute fonction continue f, on peut trouver une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f mais il ne donne pas de méthode pour construire de tels polynômes. Il se trouve qu'il existe des procédés explicites d'approximation. Par exemple, si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est continue alors les polynômes

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k}$$

convergent uniformément vers f sur $[0,1]$.
Ces polynômes sont les polynômes de Bernstein associés à f.
(voir TD).

Corollaire 5: Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de X - métrique compact à valeurs dans $\mathbb{R}$, i.e
$h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $C>0$:
$$|h(x)-h(y)| \leq C\, d(x,y),\ \forall\, x,y \in X.$$
Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

preuve : Appliquer le théorème 3 ! Laissé en exercice.
(Voir TD)

Remarque : dans le théorème 3, on ne peut pas remplacer $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ par $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$. En effet, considérons $\mathbb{T} = \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$. Il est clair que l'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$ est une algèbre unitaire qui sépare les points de $\mathbb{T}$ mais $\mathcal{A}$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{C})$. En effet, pour tout $n\geq 0$, on a :
$$\int_0^{2\pi} e^{int} e^{it}\, dt = 0 \quad \text{et donc pour tout } p\in\mathcal{A}$$

on a (par linéarité) : $\int_0^{2\pi} p(e^{it})e^{it}\,dt = 0$.

Par passage à la limite uniforme, on en déduit que pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$, on a $\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{it}\,dt = 0$.

Remarquons alors que $g : z \longmapsto \bar{z}$ est continue sur $\mathbb{T}$ et $\int_0^{2\pi} g(e^{it})e^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0$.

Ainsi $g \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \setminus \mathcal{A}$ et donc $\mathcal{A}$ n'est pas dense dans $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$.

Dans le cas complexe, il faut rajouter la stabilité par conjugaison.

Théorème 6 (de Stone-Weierstrass, cas complexe) :

Soit (K, d) un espace métrique compact et soit $\mathcal{A}$ une sous algèbre unitaire de $C(K, \mathbb{C})$, stable par conjugaison ($f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$) et qui sépare les points. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $C(K, \mathbb{C})$.

preuve : Posons $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \mathcal{A} \cap C(K, \mathbb{R})$.

Il est clair que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre unitaire de $C(K, \mathbb{R})$. De plus, si $f \in \mathcal{A}$ alors

$$\mathrm{Re}\, f = \frac{f + \bar{f}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, f = \frac{f - \bar{f}}{2i}$$

appartiennent à $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ (car $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison). Si $x, y \in K$, $x \neq y$, comme $\mathcal{A}$ sépare les points, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Donc l'une au moins des deux propriétés $\mathrm{Re}\, f(x) \neq \mathrm{Re}\, f(y)$ ou $\mathrm{Im}\, f(x) \neq \mathrm{Im}\, f(y)$, ce qui prouve que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ sépare aussi les points. D'après le théorème de Stone Weierstrass réel, $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est donc dense dans $C(K, \mathbb{R})$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C(K, \mathbb{C})$. Alors il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ tel que $\|f_1 - \mathrm{Re}(\varphi)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|f_2 - \mathrm{Im}(\varphi)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi $f = f_1 + i f_2 \in \mathcal{A}$ et

$$\|f - \varphi\|_\infty = \|(f_1 - \mathrm{Re}\,\varphi) + i\,(f_2 - \mathrm{Im}\,\varphi)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

<u>Corollaire 7</u> (<u>Théorème de Fejér</u>) : l'ensemble $\mathrm{Lin}\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$.

<u>preuve</u> : simple application du théorème 6. Exercice ! ■

On appelle <u>polynôme trigonométrique</u> de degré inférieur ou égal à N toute fonction de la forme

$$p(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}$$

et $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in [\![-N, N]\!]$.

Compte tenu de la relation $e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt)$, il revient au même de dire qu'un polynôme trigonométrique est une fonction de la forme

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right),$$

où les coefficients a_k et b_k sont reliés aux c_k par les relations $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$, $n \geq 1$

Corollaire 8 : soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique.

Alors f est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

preuve : découle immédiatement du corollaire 7 et de l'identification

$$\begin{aligned} C_{2\pi}(\mathbb{R}) &\longrightarrow C(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto \tilde{f}(e^{it}) = f(t). \end{aligned}$$

Voir TD pour les détails. $\blacksquare$

I.3 Espaces séparables.

Nous introduisons maintenant une notion qui permet de mesurer la "grosseur" des espaces métriques. Cette notion sera en particulier utilisée dans le chapitre sur les espaces de Hilbert.

Définition : soit (E, d) un espace métrique. On dit que E est séparable, s'il existe une partie D dénombrable et dense dans E.

<u>Exemple 1</u> : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables.

($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{C}$).

<u>Exemple 2</u> : Tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable. (Exercice, <u>cf TD</u> !)

<u>Exemple 3</u> : pour $1 \leq p < +\infty$, $\ell^p(\mathbb{N})$ est séparable.

De même, l'espace $c_0(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0 \right\}$

est séparable.

<u>preuve</u> : notons $c_{00}(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } x_n = 0 \text{ pour } n \geq N \right\}$

l'ensemble des suites à support fini.

Il est clair que si $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ (resp. $x \in c_0(\mathbb{N})$) et si $x^{(n)} = (x_0, \dots, x_n, 0, \dots\dots)$, alors $x^{(n)} \in c_{00}(\mathbb{N})$

et $\|x^{(n)} - x\|_p \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow +\infty$, $p \in [1, +\infty[$.

(respectivement $\|x^{(n)} - x\|_\infty \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$)

Donc $c_{00}(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^p(\mathbb{N})$ et dans $c_0(\mathbb{N})$.

De plus, comme toute suite à support fini peut s'approcher par une suite à coordonnées rationnelles et

Comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{Q}^n$ est dénombrable, on en déduit le résultat. ■

Nous allons maintenant donner une condition nécessaire pour la séparabilité qui va nous permettre ensuite d'en déduire que $l^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

Proposition 9 : Dans un espace métrique séparable, toute famille d'ouverts non vide deux à deux disjoints est dénombrable

preuve : Soit D une partie dénombrable dense de (E,d) et soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts non vide de E telle que $i,j\in I, i\neq j \Rightarrow O_i \cap O_j = \emptyset$.

Comme D est dense dans E, pour tout $i\in I$,

$\exists\ x_i \in D \cap O_i$.

Comme les O_i sont 2 à 2 disjoints, on a

$$i,j\in I,\ i\neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j .$$

Ainsi l'application

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow D \\ i &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

est injective, ce qui prouve que I est dénombrable. ■

Corollaire 10: l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable

preuve: posons $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Si $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$, on a $|\alpha(n) - \beta(n)|$ pour au moins un $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on en déduit que $\|\alpha - \beta\|_\infty = 1$.

Donc les boules ouvertes $B_\alpha = B(\alpha, \frac{1}{2})$, $\alpha \in \Delta$, sont deux à deux disjointes. Comme Δ est non dénombrable, la proposition 9 implique que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable. $\blacksquare$

Proposition 11: Soit (E, d) un espace métrique compact.

Alors E est séparable.

preuve: Par compacité, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_1^n, x_2^n, \dots, x_{N_n}^n \in E$ tel que

$$E = \bigcup_{i=1}^{N_n} B\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right).$$

Considérons $D = \left\{ x_i^n : n \geq 1, i \in [\![1, N_n]\!] \right\}$

Il est clair que D est dénombrable. Montrons que D est dense dans E. Soit $x \in E$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $i_n \in [\![1, N_n]\!]$ tq $d(x, x_{i_n}^n) \leq \frac{1}{n}$

Donc $x_{i_n}^n \in D$, pour tout $n \geq 1$ et

$$x_{i_n}^n \longrightarrow x \quad , n \longrightarrow +\infty,$$

ce qui prouve que D est dense dans E. ■

Le résultat suivant, conséquence du théorème de Stone-Weierstrass, donne un autre exemple important d'espaces séparables.

<u>Théorème 12.</u> Soit (K, d) un espace métrique compact.

L'espace $C(K)$ est séparable.

<u>preuve</u>: d'après la proposition 11, il existe $D = \{a_n : n \geq 1\}$ dense dans K. Pour $n \geq 1$, soit $f_n \in C(K)$ définie par :

$$f_n(t) = d(t, a_n) \quad , \quad t \in K.$$

Montrons que l'ensemble $\{f_n : n \geq 1\}$ sépare les points de K. Soit $t_1, t_2 \in K$. $t_1 \neq t_2$.

Il existe deux suites $(a_{\varphi(n)})_n$ et $(a_{\psi(n)})_n$ telles que

$$a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} t_1 \quad \text{et} \quad a_{\psi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} t_2.$$

Si $\delta := d(t_1, t_2) > 0$. il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} d(a_{\varphi(n)}, t_1) \leq \frac{\delta}{4} \\ \text{et} \\ d(a_{\psi(n)}, t_2) \leq \frac{\delta}{4}. \end{array} \right.$

D'où $f_{\varphi(n)}(t_1) = d(t_1, a_{\varphi(n)}) \leq \frac{\delta}{4}$, $n \geq N$

et $f_{\varphi(n)}(t_2) = d(t_2, a_{\varphi(n)})$

$$\geq d(t_2, t_1) - d(t_1, a_{\varphi(n)})$$

$$\geq \delta - \frac{\delta}{4} = \frac{3}{4}\delta$$

Ainsi $f_{\varphi(n)}(t_1) \neq f_{\varphi(n)}(t_2)$, $n \geq N$,

ce qui prouve que $\{f_n : n \geq 1\}$ sépare les points de K.

Posons $f_0 = \mathbb{1}$. La sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $C(K, \mathbb{R})$ engendrée par $\{f_n : n \geq 0\}$ vérifie les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass et donc est dense dans $C(K, \mathbb{R})$. Mais toute fonction $f \in \mathcal{A}$ est limite uniforme de combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels de fonctions du type

$\prod_{i \in I} f_i$, où I est une partie finie de $\mathbb{N}$.

Comme l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable, on en déduit que $\mathcal{A}$ est séparable et donc $C(K, \mathbb{R})$ est séparable.

Comme $C(K,\mathbb{C}) = C(K,\mathbb{R}) + i\,C(K,\mathbb{R})$, l'espace $C(K,\mathbb{C})$ est aussi séparable. $\blacksquare$

I.4. Théorème d'Ascoli.

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux ensembles compacts de $C(K)$. Avant cela, faisons quelques rappels.

Si $(E_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'espaces métriques, on peut munir l'espace produit $E = \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i$ d'une distance en posant

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i}\min\big(1, d_i(x_i,y_i)\big),$$

$$x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}},\ y=(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E.$$

On vérifie facilement que $x^n = (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans (E,d) si et seulement si

$$\forall i\in\mathbb{N},\quad x_i^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_i \quad \text{dans } (E_i,d_i).$$

On rappelle alors l'important théorème de compacité suivant:

Théorème 13 (de Tikhonov): Soit $(K_i,d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métrique compact et soit $K=\prod_{i\in\mathbb{N}} K_i$. Alors (K,d) est un espace métrique compact.

Corollaire 14 : Soit T un ensemble et soit $f_n : T \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite de fonctions. On suppose que $\forall t \in T$, la suite $(f_n(t))_{n \geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{K}$.
Si D est une partie dénombrable de T, alors $(f_n)_{n \geq 0}$ possède une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ telle que $(f_{n_k}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ pour tout $t \in D$.

preuve : écrivons $D = \{t_i : i \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\exists M_i$ telle que

$$|f_n(t_i)| \leq M_i \ , \quad \forall n \geq 0 .$$

Posons $K_i = \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq M_i\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Les K_i sont compacts donc le théorème de Tikhonov implique que l'espace produit $\prod_{i \in \mathbb{N}} K_i$ est compact.

La suite $(f_n(t_1), f_n(t_2), \dots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} K_i$ et donc elle admet une sous-suite convergente. ■

Introduisons maintenant une notion qui nous sera utile dans la caractérisation des parties compactes de $C(K)$.

Définition : Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de $C(E)$ est équicontinue en un point $x \in E$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tel que

$$\forall y \in E, \ d(x,y) \leq \delta \Longrightarrow \forall f \in \mathcal{F}, \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est équicontinue si elle est équicontinue en tout point $x \in E$.

Théorème 15 : Soit (K, d) un espace métrique compact et soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues sur K.

On suppose que : (i) $\forall x \in K$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est bornée

(ii) la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est équicontinue.

Alors $(f_n)_n$ possède une sous-suite uniformément convergente.

preuve : D'après la proposition 11, K est séparable et donc il existe $D \subset K$ dénombrable et dense dans K. En utilisant (i) et le corollaire 14, il existe donc une sous suite (f_{n_k}) telle que $\forall z \in D$, $(f_{n_k}(z))_k$ converge. Nous allons montrer que la suite $(f_{n_k})_k$ vérifie le critère de Cauchy uniforme dans $C(K)$. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après (ii), pour tout

$a \in K$, il existe $\delta_a > 0$ tel que

$$\forall u \in K,\ d(a,u) < \delta_a \Longrightarrow |f_{n_k}(a) - f_{n_k}(u)| < \varepsilon,\ \forall k \geq 0.$$

On a alors $\forall u, v \in B(a, \delta_a)$,

$$(*) \qquad |f_{n_k}(u) - f_{n_k}(v)| < 2\varepsilon,\ \forall k \geq 0.$$

Comme $K = \bigcup_{a \in K} B(a, \delta_a)$ est compact, il existe $a_1, \dots, a_p \in K$ tel que $K = \bigcup_{i=1}^{p} B(a_i, \delta_{a_i})$.

Comme D est dense dans K, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe $z_i \in D \cap B(a_i, \delta_{a_i})$.

La suite $(f_{n_k}(z_i))_{k \in \mathbb{N}}$ étant convergente, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} p, q \geq N \\ i \in [\![1, p]\!] \end{array}\right\} \Longrightarrow |f_{n_p}(z_i) - f_{n_q}(z_i)| < \varepsilon.$$

Soit maintenant $x \in K$. Il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $x \in B(a_i, \delta_i)$. D'après $(*)$, on a alors

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(z_i)| < 2\varepsilon,\ \forall k \geq 0$$

D'où :

$$|f_{n_p}(x) - f_{n_q}(x)| \leq |f_{n_p}(x) - f_{n_p}(z_i)| + |f_{n_p}(z_i) - f_{n_q}(z_i)| + |f_{n_q}(z_i) - f_{n_q}(x)|$$

ce qui donne pour $p, q \geq N$:

$$|f_{n_p}(x) - f_{n_q}(x)| < 2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon.$$

Ceci prouve donc que (f_{n_k}) vérifie le critère de Cauchy uniforme. Comme $C(K)$ est complet, on en déduit donc que (f_{n_k}) converge uniformément.

<u>Corollaire 16 (Ascoli)</u>: Soit (K, d) un espace métrique compact. Les parties compactes de $C(K)$ sont exactement les parties fermées, bornées et équicontinues. Les parties relativement compactes sont les parties bornées et équicontinues.

<u>preuve</u>: d'après le théorème 15 et le fait que compact $\Longrightarrow$ fermé + borné, la ~~seule~~ chose qu'il reste à montrer est que si $\mathcal{F} \subset C(K)$ est compact alors $\mathcal{F}$ est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$. Par compacité, il existe $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{F}$ telle que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_i, \varepsilon).$$

Fixons $a \in K$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\exists\, \delta_i > 0$ tq $d(x, a) < \delta_i \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$

Posons $\delta = \min(\delta_i : i \in [\![1, p]\!])$ et soit $f \in \mathcal{F}$. Il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $f \in B(f_i, \varepsilon)$

Si $d(x, a) < \delta$, on a :

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(a)| + |f_i(a) - f(a)|$$
$$\leq 2\|f - f_i\|_\infty + |f_i(x) - f_i(a)|$$
$$\leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

$\blacksquare$

ce qui prouve l'équicontinuité.

Avec quasiment la même preuve, on peut montrer un théorème un peu plus fort (admis. Exercice !).

<u>Théorème 17 (Ascoli II)</u> : soit (E, d) un espace métrique séparable et (F, δ) un espace métrique. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $C(E, F)$ telle que : (i) $\forall x \in E$, $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans F

(ii) la suite $(f_n)_n$ est équicontinue.

Alors $(f_n)_n$ possède une sous suite qui converge uniformément sur tout compact de E vers une fonction $f \in C(E, F)$.

Chapitre 2 - Théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle.

§ 2.1. Espaces métriques complets et théorème de Baire.

Proposition ① (Théorème des fermés emboîtés) : Soit (E,d) - espace métrique complet, (F_n) une suite de fermés non vides de E. On suppose que la suite (F_n) est décroissante et que le diamètre de F_n tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$, i.e :

$$* \quad F_{n+1} \subset F_n \quad , n \geq 0$$

et

$$* \quad \mathrm{diam}(F_n) := \sup\{d(a,b) : a, b \in F_n\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Alors, l'intersection des F_n est non vide, réduite à un seul point.

preuve : Pour $n \geq 0$, choisissons un point $x_n \in F_n$.

Si $p < q$, alors $x_q \in F_q \subset F_p$ et donc

$$d(x_p, x_q) \leq \mathrm{diam}(F_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

Ainsi la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (E,d) complet donc elle converge vers un point $x_\infty \in E$.

Comme $x_p \in F_n$ pour tout $p > n$ et que F_n est fermé, on en déduit que $x_\infty \in F_n$ pour tout $n \geq 0$.

Ainsi $$x_\infty \in \bigcap_{n \geq 0} F_n.$$

Il reste à remarquer que l'intersection des F_n ne peut pas contenir plus d'un point car si $a, b \in \bigcap_{n \geq 0} F_n$ alors

$$d(a,b) \leq \mathrm{diam}(F_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ et donc } d(a,b) = 0$$

ce qui entraîne que $a = b$.

Par conséquent $$\bigcap_{n \geq 0} F_n = \{x_\infty\}.$$

$\blacksquare$

Le résultat suivant est d'une grande importance

Théorème (2) (Théorème de Baire):

Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $(O_n)_{n \geq 0}$ une suite d'ouverts de E. Si tous les ouverts O_n sont denses dans E, alors $O = \bigcap_{n \geq 0} O_n$ est encore dense dans E. En particulier, on a

$$\bigcap_{n \geq 0} O_n \neq \emptyset$$

Remarques (1) Attention, l'ensemble $O = \bigcap_{n \geq 0} O_n$ n'a aucune raison d'être ouvert !

② Le Théorème de Baire est complètement faux pour ③
une famille non dénombrable d'ouverts. Pour le voir, il suffit de considérer la famille $(O_x)_{x\in\mathbb{R}}$, où
$O_x = \mathbb{R}\setminus\{x\}$. Les O_x sont des ouverts denses de $\mathbb{R}$ mais $\bigcap_{x\in\mathbb{R}} O_x = \emptyset$.

preuve du théorème : Il s'agit de montrer que si $\mathcal{U}$ est un ouvert de (E, d) alors $\mathcal{U} \cap G \neq \emptyset$.

Comme G_0 est un ouvert dense dans E, l'ensemble
$\mathcal{U} \cap G_0$ est un ouvert non vide. Soit $x_0 \in G_0 \cap \mathcal{U}$
et $r_0 \leq 2^{-0}$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset G_0 \cap \mathcal{U}$.

Comme G_1 est un ouvert dense dans E, on a
$G_1 \cap B(x_0, r_0) \neq \emptyset$ et on peut trouver $x_1 \in E$ et
$r_1 \leq 2^{-1}$ tels que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap G_1$
$\subset G_1 \cap G_0 \cap \mathcal{U}$.

Par récurrence, on peut donc construire une suite de boules ouvertes $B_n = B(x_n, r_n)$ vérifiant les propriétés :

(1) $\overline{B_{n+1}} \subset B_n$

(2) $r_n \leq 2^{-n}$

(3) $\overline{B_n} \subset G_n \cap \mathcal{U}$

D'après (1), (2) et le théorème des fermés emboîtés, on a $\bigcap_{n\geq 0} \overline{B_n} \neq \emptyset$ et d'après (3), on en déduit que $G \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, ce qui prouve que G est dense dans E. $\blacksquare$

Corollaire 3 : (Théorème de Baire) : Soit (E,d) un espace métrique complet. Si $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fermés d'intérieurs vides dans E, alors $\bigcup_{n\geq 0} F_n$ est encore d'intérieur vide. Par conséquent, si $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fermés de E telle que

$$E = \bigcup_{n\geq 0} F_n,$$

alors il existe au moins un entier n tel que $\mathring{F}_n \neq \emptyset$.

preuve : c'est immédiat par passage aux complémentaires, puisqu'un ensemble A est dense dans E si et seulement si $E \setminus A$ est d'intérieur vide. $\blacksquare$

Corollaire 4 : (E,d) métrique complet, $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite de fermés de E telle que $\bigcup_{n\geq 0} F_n = E$.

Alors $\Omega = \bigcup_{n\geq 0} \mathring{F}_n$ est un ouvert dense dans E.

preuve : Une réunion (quelconque) d'ouverts est ouverte donc Ω est un ouvert de E.

De plus, on a :

$$E\setminus\Omega = \bigcup_{n\geq 0} F_n \setminus \Big(\bigcup_{n\geq 0} \mathring{F}_n\Big) \subset \bigcup_{n\geq 0} \big(F_n \setminus \mathring{F}_n\big)$$

Les ensembles $C_n = F_n \setminus \mathring{F}_n$ sont des fermés d'intérieur vide, donc $E\setminus\Omega \subset \bigcup_{n\geq 0} C_n$ est également d'intérieur vide d'après le théorème de Baire. Par conséquent, Ω est dense dans E. $\blacksquare$

On dit qu'un espace métrique X est un espace de Baire s'il vérifie le théorème de Baire.

Remarquons que si (E,d) est un espace métrique complet alors tout fermé F de E étant lui même complet, l'espace (F,d) est un espace de Baire. C'est aussi vrai pour les ouverts de E mais c'est moins évident ! Pour le prouver, rappelons que deux distances d_1 et d_2 sur un ensemble E sont dites équivalentes si les deux applications

$$id : (E,d_1) \longrightarrow (E,d_2) \quad \text{et} \quad id : (E,d_2) \longrightarrow (E,d_1)$$

sont continues.

D'après la caractérisation de la continuité par les suites, on a immédiatement que deux distances sont équivalentes si et seulement si elles possèdent les mêmes suites convergentes.

Rappelons d'autre part que si (E, d) est un espace métrique complet, alors une partie F de E est complète si et seulement si F est fermée. Ainsi un ouvert d'un espace métrique complet n'est à priori pas complet pour la distance induite. On a cependant le résultat suivant qui montre en particulier que la complétude n'est pas une propriété topologique mais bien une propriété métrique.

Lemme 5 : Soit (E, d) un espace métrique, G un ouvert de E. Pour $x, y \in G$, posons

$$\delta(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, E \setminus G)} - \frac{1}{d(y, E\setminus G)} \right| .$$

Alors (a) δ est une distance sur G équivalente à la distance d

(b) Si (E, d) est complet alors (G, δ) est aussi complet.

preuve : (a) Le fait que δ est une distance est laissée en exercice ! Pour montrer que les deux distances δ et d sont $\sim$ sur G, on peut montrer qu'elles possèdent les même suites convergentes.

Remarquons tout d'abord que $\delta(x,y) \geq d(x,y)$ et donc il est clair que si $(x_n)_n$ converge vers x dans (G,δ) alors $(x_n)_n$ converge vers x dans (G,d).

Réciproquement, supposons que $(x_n)_n$ converge vers x dans (G,d).

On a : $\delta(x_n,x) = d(x_n,x) + \left| \dfrac{1}{d(x_n, E\setminus G)} - \dfrac{1}{d(x, E\setminus G)} \right|$.

L'application
$$f : (G,d) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto d(t, E\setminus G)$$

est continue et ne s'annule pas car

$d(t, E\setminus G) = 0 \Longleftrightarrow t \in \overline{E\setminus G} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } G \text{ est ouvert}}}{=} E\setminus G$

D'où si $d(x_n,x) \longrightarrow 0$ alors $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

i.e $d(x_n, E\setminus G) \longrightarrow d(x, E\setminus G)$

et $\dfrac{1}{d(x_n, E\setminus G)} \longrightarrow \dfrac{1}{d(x, E\setminus G)}$.

Ainsi $\delta(x_n,x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui achève la preuve de (a).

(b) Supposons maintenant (E,d) complet et soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans (G,δ).

Comme $\delta(x_n,x_p) \geq d(x_n,x_p)$, la suite (x_n) est aussi une suite de Cauchy dans (E, d) et donc elle converge vers $x \in E$. Il reste à montrer que $x \in G$.

Par définition de δ, on voit que la suite $\left(\frac{1}{d(x_n, E\setminus G)}\right)_n$ est bornée. Ainsi $\inf_{n \geq 0} d(x_n, E\setminus G) > 0$

et comme $d(x_n, E\setminus G) \longrightarrow d(x, E\setminus G)$, on en déduit que $d(x, E\setminus G) > 0$, i.e $x \in G$.

Ainsi $(x_n)_n$ converge vers x dans (G, d) et le (a) implique que $(x_n)_n$ converge vers x dans (G, δ). ∎

Corollaire ⑥: Soit (E, d) un espace métrique complet.

Alors tout fermé et tout ouvert de E est un espace de Baire.

preuve: Le résultat est immédiat pour les fermés ! Supposons donc que G est un ouvert de E. D'après le lemme ⑤, il existe une distance δ sur G équivalente à d telle que (G, δ) est complet. D'après le théorème de Baire, l'espace (G, δ) est un espace de Baire et comme les distances δ et d sur G sont équivalentes les ensembles ouverts, fermés, denses et d'intérieur vide sont les m̂ pour (G, d) et (G, δ). Ainsi (G, d) est aussi un espace de Baire. ∎

Application : On sait que si une suite $(f_n)_n$ de fonctions continues converge simplement vers une fonction f, alors f n'est pas nécessairement continue. On a cependant le résultat suivant.

Théorème ⑦ : Soit (E, d) un espace métrique complet et soit (f_n) une suite de fonctions continues

$$f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors l'ensemble des point de continuité de f est dense dans E.

En particulier, f possède au moins un point de continuité.

preuve : Notons $\mathrm{Cont}(f)$ l'ensemble des points de continuité de f. Pour $\varepsilon > 0$, posons

$$O_\varepsilon = \{ x \in E : \exists\, V \text{ voisinage ouvert de } x \text{ tel que } y, z \in V \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon \}$$

Par définition, chaque ensemble O_ε est ouvert dans E et on vérifie facilement que :

$$\mathrm{Cont}(f) = \bigcap_{n\geq 1} O_{\frac{1}{n}}.$$

D'après le théorème de Baire, il suffit donc de montrer que chaque ouvert O_ε est dense dans E.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$F_n = \left\{x \in E : \forall\, p,q \geq n : |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

Comme les fonctions f_n sont continues, les ensembles F_n sont des fermés de E. De plus, comme la suite $(f_n)_n$ converge simplement, elle est de Cauchy et donc on a :

$$E = \bigcup_{n\geq 1} F_n$$

D'après le théorème de Baire, on en déduit que $\Omega = \bigcup_n \mathring{F}_n$ est dense dans E.

Pour montrer que O_ε est dense dans E, il suffit donc de montrer que $\Omega \subset O_\varepsilon$.

Soit $x \in \Omega$. Par définition, il existe un entier n_0 et un voisinage ouvert V_1 de x tels que $V_1 \subset F_{n_0}$.

Pour $y, z \in V_1$, on a alors pour $p \geq n_0$:

$$|f_p(y) - f_p(z)| \leq |f_p(y) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_p(z)|$$

$$\Longrightarrow \left| f_p(y) - f_p(z) \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left| f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z) \right|$$

En faisant tendre $p \longrightarrow +\infty$, on en déduit que

$$\left| f(y) - f(z) \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left| f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z) \right| \quad , \forall (y,z) \in V_1 \times V_1 .$$

Mais la fonction f_{n_0} étant continue, on peut trouver un voisinage ouvert V_2 de x tel que

$$\left| f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad , \forall (y,z) \in V_2 \times V_2 .$$

Si on pose $V = V_1 \cap V_2$, l'ensemble V est un voisinage ouvert de x qui satisfait la propriété que si $(y,z) \in V \times V$ alors $\left| f(y) - f(z) \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Ainsi $x \in O_\varepsilon$ ce qui achève la preuve. ∎

§ 2.2. Théorème de Banach - Steinhaus

2.2.1. Applications linéaires continues.

Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Rappelons le résultat suivant concernant la continuité des applications linéaires.

Théorème 8 : Soit $T : E \longrightarrow F$ linéaire.

LASSE :
(i) T est continue
(ii) T est continue en 0
(iii) T est bornée sur la boule $\overline{B(0,\delta)}$

pour un certain $\delta > 0$.

(iv) $\exists\, c > 0$ tq

$$(*) \qquad \|Tx\|_F \leq c\, \|x\|_E\,,\ \forall x \in E.$$

On notera $\mathcal{L}(E,F) = \{T : E \longrightarrow F \text{ linéaire et continue}\}$ et si $E = F$, pour simplifier, on notera $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$.

Pour $T \in \mathcal{L}(E,F)$, la plus petite constante $c > 0$ vérifiant $(*)$ sera notée $\|T\|$. Autrement dit,

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}\,,\ x \in E,\ x \neq 0 \right\}$$

et on montre facilement que

$$\|T\| = \sup\left\{ \|Tx\|_F : \|x\|_E = 1 \right\}$$
$$= \sup\left\{ \|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1 \right\}.$$

Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(a) si $S \in \mathcal{L}(E,F)$, $T \in \mathcal{L}(F,G)$, alors

$$TS \in \mathcal{L}(E,G) \text{ et } \|TS\| \leq \|T\|\,\|S\|$$

(b) si $T \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$, on a

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n\,, \quad n \geq 0$$

(c) L'application $(S,T) \longmapsto TS$ est continue de $\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$.

Enfin, on rappelle le résultat important suivant :

Théorème 9 Soient E, F deux e.v.n. et supposons que F soit complet. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est complet

Exemple d'application :

(a) Si E est un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{n!}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$.

En effet, la série converge absolument car

$$\frac{\|T^n\|}{n!} \leq \frac{\|T\|^n}{n!}$$

et $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Comme $\mathcal{L}(E)$ est complet, toute série, qui converge absolument, converge.

On note (par analogie avec le cas scalaire)

$$e^T := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{n!} .$$

(b) Si $\|T\| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ (même raison que l'exemple précédent).

D'autre part, remarquons que

$$(I-T)\sum_{n=0}^{N} T^n = \sum_{n=0}^{N} T^n (I-T) = I - T^{N+1}.$$

Comme $\|T^{N+1}\| \leq \|T\|^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, on en déduit par passage à la limite que

$$(I-T)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} T^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} T^n\right)(I-T) = I$$

D'où $I-T$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et on a

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n .$$

2.2.2. Exemples d'applications linéaires continues.

Exemple 1 : cas où l'espace de départ est de dimension finie.

Soit E un e.v.n de dimension finie et F un e.v.n. quelconque. Alors toute application linéaire $T : E \longrightarrow F$ est automatiquement continue. En effet, soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Alors si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :

$$\|Tx\|_F = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i Te_i\right\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|Te_i\|_F$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \sum_{i=1}^{n} \|Te_i\| = C \, \|x\|_\infty ,$$

où $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ et $C = \sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|$.

Comme $\|x\|_\infty$ est une norme sur E et que toutes les normes sont équivalentes (car $\dim E < +\infty$), il existe $c_1 > 0$ telle que $\|x\|_\infty \leq c_1 \|x\|_E$, $\forall x \in E$.

Ainsi $$\|Tx\|_F \leq C\, c_1 \|x\|_E$$

et donc T est continue.

<u>Exemple 2:</u> <u>Opérateurs à noyaux.</u>

Dans ce qui suit, (Ω, μ) est un espace mesuré et on suppose que μ est σ-finie (pour pouvoir appliquer le théorème de Fubini), i.e. $\exists\ (E_i)_{i\geq 1}$ ensembles mesurables tel que $\Omega = \bigcup_{i\geq 1} E_i$ et $\mu(E_i) < +\infty$. On fixe <u>un noyau</u> K sur Ω, c'est-à-dire une fonction mesurable
$$K : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}).$$

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction mesurable, on pose
$$T_K f(x) = \int_\Omega f(y) K(x,y)\, d\mu(y)$$

pour tout point $x \in \Omega$ tel que la fonction
$$y \longmapsto f(y) K(x,y) \text{ est intégrable sur } \Omega.$$

On dit alors que la fonction $T_K f$ est définie au point x.

Soient $p_1, p_2 \in [1, \infty]$. On dira que le noyau K définit un opérateur borné de L^{p_2} dans L^{p_1} si les deux propriétés

suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall f \in L^{p_2} = L^{p_2}(\Omega)$, $T_K f$ est définie en presque tout point $x \in \Omega$.

(ii) si $f \in L^{p_2}(\Omega)$ alors $T_K f \in L^{p_1}(\Omega)$ et $f \longmapsto T_K f$ est continue de $L^{p_2}(\Omega)$ dans $L^{p_1}(\Omega)$.

On a le résultat suivant

__Lemme 10__ : Soient $p_1 \in [1, \infty]$, $p_2 \in [1, \infty]$.

LASSE (Les assertions suivantes sont équivalentes) :

(i) K définit un opérateur borné de L^{p_2} dans L^{p_1}.

(ii) Il existe $c > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^{p_2}(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y) \right)^{p_1} d\mu(x) \leq c \, \|f\|_{p_2}^{p_1}.$$

Dans ce cas, on a $\|T_K\| \leq c^{\frac{1}{p_1}}$.

__preuve__ : application du théorème de Fubini.

Laissée en exercice. ∎

On va maintenant donner deux moyens efficaces de vérifier qu'un noyau K définit un opérateur borné.

Proposition 11 : Soit $p \in [1,+\infty]$ et q l'exposant conjugué de p $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. On suppose que le noyau $K \in L^p(\Omega\times\Omega)$. Alors K définit un opérateur borné de L^q dans L^p et

$$\|T_K\| \leq \|K\|_p$$

preuve : 1er cas : $1 \leq p < +\infty$: Soit $f \in L^q(\Omega)$.

D'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\left(\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y)\right)^p \leq \left(\int_\Omega |K(x,y)|^p\,d\mu(y)\right)\|f\|_q^p$$

pour presque tout $x \in \Omega$.

En intégrant cette inégalité par rapport à x, on en déduit que

$$\int_\Omega\left(\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y)\right)^p d\mu(x) \leq \|f\|_q^p \int_\Omega\left(\int_\Omega |K(x,y)|^p d\mu(y)\right) d\mu(x)$$

$$= \|f\|_q^p\ \|K\|_p^p$$

Le lemme 10 implique alors que T_K est borné de L^q dans L^p et $\|T_K\| \leq \left(\|K\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|K\|_p$

2ième cas : $p=\infty$. Pour presque tout $(x,y) \in \Omega\times\Omega$, on a : $|K(x,y)| \leq \|K\|_\infty$.

Si $f \in L^1(\Omega)$, on a pour presque tout $x \in \Omega$

$$\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y) \leq \|K\|_\infty \|f\|_1$$

Ainsi $T_K f(x)$ est bien défini presque partout, appartient à L^∞ et $\|T_K f\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|f\|_1$. ∎

Exemple d'application : opérateur de Volterra (voir TD).

Pour $p \in [1, \infty]$ et $f \in L^q([0,1], dt)$,

on pose $\quad V_p f(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)\,dy$.

Alors $V_p \in \mathcal{L}(L^q, L^p)$ et $\|V_p\| \leq 2^{-1/p}$.

Le deuxième moyen pour traiter ces opérateurs intégraux est le résultat suivant:

Théorème (12): (Test de Schur): Soit $p \in [1, +\infty]$, q l'exposant conjugué de p. On suppose qu'il existe $\omega : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement positive, mesurable et une constante $c > 0$ telles que les 2 propriétés suivantes soient vérifiées :

(a) $\displaystyle\int_\Omega |K(x,y)|\,\omega(y)^{\frac{1}{p}}\,d\mu(y) \leq c\,\omega(x)^{\frac{1}{p}}$, pour presque tout $x \in \Omega$.

(b) $\displaystyle\int_\Omega |K(x,y)|\,\omega(x)^{\frac{1}{q}}\,d\mu(x) \leq C\,\omega(y)^{\frac{1}{q}}$,

pour presque tout $y \in \Omega$.

Alors K définit un opérateur borné de L^p dans L^p et on a $\|T_K\| \leq C$.

preuve: soit $f \in L^p(\Omega)$. Pour presque tout $x \in \Omega$, on a d'après Hölder :

$$\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y) = \int_\Omega |K(x,y)|^{\frac{1}{q}}\omega(y)^{\frac{1}{pq}} \cdot |K(x,y)|^{\frac{1}{p}}\frac{|f(y)|}{\omega(y)^{1/pq}}\,d\mu(y)$$

$$\leq \left(\int_\Omega |K(x,y)|\,\omega(y)^{\frac{1}{p}}\,d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_\Omega |K(x,y)|\,\frac{|f(y)|^p}{\omega(y)^{1/q}}\,d\mu(y)\right)^{1/p}$$

$$\underset{\text{en utilisant (a)}}{\leq} C^{\frac{1}{q}}\,\omega(x)^{\frac{1}{pq}}\left(\int_\Omega |K(x,y)|\,\frac{|f(y)|^p}{\omega(y)}\,d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En élevant à la puissance p, en intégrant par rapport à x et en utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\int_\Omega\left(\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y)\right)^p d\mu(x) \leq C^{p/q}\int_\Omega \frac{|f(y)|^p}{\omega(y)}\left[\int_\Omega \omega(x)^{\frac{1}{q}}\,|K(x,y)|\,d\mu(x)\right]d\mu(y)$$

On utilise maintenant la propriété (b) qui implique

$$\int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)||f(y)|\,d\mu(y) \right)^p d\mu(x) \leq C^{1+p/q} \int_\Omega \frac{|f(y)|^p}{\cancel{\omega(y)}} \cancel{\omega(y)}\, d\mu(y)$$ 20

$$= C^{1+\frac{p}{q}} \int_\Omega |f(y)|^p d\mu(y)$$

$$= C^{1+\frac{p}{q}} \|f\|_p^p .$$

Le lemme 10 implique alors que K définit un opérateur borné de L^p dans L^p et $\|T_K\| \leq \left(C^{p/q+1}\right)^{\frac{1}{p}} = C^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = C$. ■

<u>Exemple d'application:</u> (<u>matrice de Hilbert</u>) (voir TD) :

Pour $x \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$, posons

$$(Tx)_i := \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{i+j} x_j .$$

Autrement dit, T est associé à la matrice $\left(\frac{1}{i+j}\right)_{i,j\geq 1}$

(relativement à la base canonique $(e_i)_{i\geq 1}$, $e_i = (0,0,..,0,1,0,..)$)

Alors, en utilisant le test de Schur, on montre que

$$T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}^*)) \text{ et } \|T\| \leq \pi .$$

<u>2.2.3. Prolongement par densité:</u>

Le résultat suivant est simple mais très utile.

Théorème 13: Soient X un e.v.n, Y un espace de Banach et E un s.e.v. dense de X.

Si $T : E \longrightarrow Y$ est une application

linéaire continue, alors T se prolonge de manière
unique en une application linéaire continue $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$.
De plus, on a : $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

preuve : L'unicité du prolongement découle immédiatement de la densité de E dans X. Pour l'existence, soit $x \in X$. On peut alors trouver une suite $x_n \in E$ telle que
$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \text{ dans } X.$$

Comme $\|Tx_n - Tx_p\| \leq \|T\| \, \|x_n - x_p\|$, la suite $(Tx_n)_n$ est de Cauchy dans Y - complet, donc elle converge. Remarquons que si $(x'_n)_n$ est une autre suite de E qui converge vers x, la suite $(Tx'_n)_n$ est aussi convergente et on a :
$$\|Tx_n - Tx'_n\| \leq \|T\| \, \|x_n - x'_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} Tx_n = \lim\limits_{n\to+\infty} Tx'_n$.

On peut donc poser
$$\tilde{T}x := \lim_{n\to+\infty} Tx_n, \quad x \in X,$$
où $(x_n)_n$ est une suite de points de E convergente vers x.

On vérifie (exercice !) que $\tilde{T}$ est linéaire.

D'autre part, comme $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$,

par passage à la limite, on a

$$\|\tilde{T}x\| \leq \|T\| \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

D'où $\tilde{T}$ est continue et $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.

Il reste à remarquer que si $x \in E$, on a :

$$\tilde{T}x = \lim_{n \to +\infty} Tx = Tx$$

et donc $\quad \tilde{T}|_E = T$

En particulier, on a:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|\tilde{T}x\| \leq \|\tilde{T}\|,$$

ce qui prouve que $\|T\| = \|\tilde{T}\|$. ∎

<u>Exemple d'application</u>: <u>intégrale vectorielle</u>.

Soit (K, d) un espace métrique compact, X un espace de Banach. Notons $\mathcal{E}(K, X)$ l'e.v des fonctions boréliennes étagées $\varphi : K \longrightarrow X$, i.e

$$(*) \quad \varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{A_i},$$

où les A_i sont des boréliens de K et $a_i \in X$

$(\mathbb{1}_{A_i}(x) = 1$ si $x \in A_i$, 0 si $x \notin A_i)$

Si μ est une mesure borélienne finie sur X, alors on (23)
montre que le vecteur $x = \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) a_i$ ne dépend pas
de la décomposition de φ sous la forme $(*)$
(La preuve est identique au cas scalaire, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On peut donc poser
$$\int_K \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \mu(a_i) a_i$$
On montre alors (exercice) que l'application
$L_\mu : \varphi \longmapsto \int_K \varphi \, d\mu$ est linéaire continue de
$(\mathcal{E}(K, X), \|\cdot\|_\infty)$ dans X, de norme égale à $\mu(K)$.

D'après le théorème (13), on peut donc prolonger L_μ à
$\overline{\mathcal{E}(K, X)}$. En utilisant le théorème de Heine
(une fonction continue sur un compact est uniformément continue)
il n'est pas difficile de montrer que $\overline{\mathcal{E}(K, X)}$
contient toutes les fonctions continues de $K \longrightarrow X$.
Ainsi, on peut définir $\int_K f \, d\mu$ pour toute fonction
$f \in \mathcal{C}(K, X)$. On en déduit donc le résultat
suivant :

Théorème 14 (a) L'application $f \longmapsto \int_K f\,d\mu$ est linéaire continue de $(\mathcal{C}(K,X), \|\cdot\|_\infty)$ dans X.

(b) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K,X)$, on a :

$$\left\| \int_K f(t)\,d\mu(t) \right\| \leq \int_K \|f(t)\|\,d\mu(t)$$

(c) Si x^* est une forme linéaire continue sur X, alors

$$< x^*, \int_K f\,d\mu > = \int_K < x^*, f(t) > d\mu(t)$$

preuve : (a) découle du théorème 13.

On montre (b) et (c) pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}(K,X)$ puis on conclut par approximation. ■

2.2.4. Famille bornée d'applications linéaires continues

Le résultat suivant est simple mais extrêmement utile.

Lemme 15 : Soient E, F deux e.v.n, $T_i \in \mathcal{L}(E,F)$, $i \geq 0$. On suppose que (a) $\exists\, c > 0$, $\|T_i\| \leq c$, $\forall i \geq 0$

(b) $\exists\, D$ dense dans E

tel que $\forall z \in D$, $T_i z \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$

Alors, $\forall x \in E$, $T_i(x) \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$.

preuve : fixons $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Comme D est dense dans E, on peut trouver $z \in D$ tel que $\|x - z\| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$

On a alors
$$\begin{aligned}\|T_i(x)\| &\leq \|T_i(x-z)\| + \|T_i z\| \\ &\leq \|T_i\| \|x-z\| + \|T_i z\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|T_i z\|.\end{aligned}$$

D'après (b), il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tq $i \geq i_0 \Rightarrow \|T_i z\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'où pour $i \geq i_0$, on a $\|T_i x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui prouve que $T_i x \longrightarrow 0$, $i \to +\infty$ ∎

Rq : Attention, ce lemme n'affirme pas que $\|T_i\| \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$!

Par exemple, il est facile de vérifier que si
$$U : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$$
$$(a_n)_{n \geq 0} \longmapsto (a_1, a_2, \dots)$$

est l'opérateur de décalage à gauche sur ℓ^2 (qu'on appelle aussi "backward shift operator") alors on a
$$\|U^n\| = 1, \ \forall n \geq 1 \quad \text{et} \quad \|U^n(a)\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0, \ \forall a \in \ell^2.$$

Théorème 16 (Banach-Steinhaus) :

Soit X un espace de Banach, Y un e.v.n, $T_i \in \mathcal{L}(X, Y)$, $i \in I$ (I non nécessairement dénombrable). On a l'alternative suivante : (i) soit $\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty$

(ii) soit $\{x \in X : \sup_{i \in I} \|T_i x\| = +\infty\}$ est dense dans X.

<u>Remarque:</u> L'hypothèse que X est un espace de Banach est essentielle. Le résultat peut être faux sinon. Par exemple, considérons $c_{00} = \{u = (u_n)_{n \geq 0} : \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n = 0\}$ muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|$, et définissons

$$T_n(u) = \sum_{p=0}^{n} u_p .$$

On vérifie sans peine que $T_n : c_{00} \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire et continue et $\|T_n\| = n$. D'où $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| = +\infty$

D'autre part, pour $u \in c_{00}$, on a :

$$|T_n(u)| \leq \sum_{p=0}^{n} |u_p| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |u_p|$$

Ainsi $\forall u \in c_{00}$, $\sup_{n \geq 1} |T_n(u)| < +\infty$

et $\{u \in c_{00} : \sup_{n \geq 1} |T_n(u)| = +\infty\} = \emptyset$.

<u>preuve du théorème de Banach Steinhaus :</u>

Supposons que (ii) n'est pas vérifiée, c'est à dire que

$\Omega = \{x \in X : \sup_{i \in I} \|T_i x\| = +\infty\}$ n'est pas dense dans X. Par conséquent, son complémentaire

$F = \{x \in X : \sup_{i \in I} \|T_i x\| < +\infty\}$ n'est pas d'intérieur vide.

Noton $F_n = \{x \in X : \forall i \in I, \|T_i x\| \leq n\}$.

On a $$F_n = \bigcap_{i \in I} T_i^{-1}\left(\overline{B}_Y(0,n)\right).$$

où $\overline{B}_Y(0,n)$ est la boule fermée dans Y de centre 0 et de rayon n.

Chaque F_n est fermé car chaque T_i est continue et

on a $$F = \bigcup_{n \geq 0} F_n.$$

Donc le théorème de Baire (corollaire 3) implique qu'il

existe $n_0 \geq 0$, $x_0 \in X$, $r > 0$ tq

$$(*) \quad \overline{B}_X(x_0, r) \subset F_{n_0}.$$

Si $x \in X$, $\|x\| \leq r$, écrivons $x = \frac{1}{2}\left((x+x_0) + (x - x_0)\right)$

Par linéarité de T_i, on a :

$$T_i x = \frac{1}{2}\left(T_i(x+x_0) + T_i(x-x_0)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(T_i(x+x_0) - T_i(-x+x_0)\right)$$

Comme $x + x_0$ et $-x + x_0$ sont dans $\overline{B}_X(x_0, r)$,

on en déduit d'après $(*)$ que

$$(**) \quad \|T_i x\| \leq \frac{1}{2}(n_0 + n_0) = n_0, \ \forall x \in X, \ \|x\| \leq r.$$

Maintenant pour $u \in X$, $u \neq 0$, posons $x = r\frac{u}{\|u\|}$.

Alors, avec (**), on a :

$$\|T_i u\| = \left\|T_i\left(\frac{\|u\|}{r}x\right)\right\|$$

$$= \frac{\|u\|}{r}\|T_i x\| \leq \frac{n_0}{r}\|u\|.$$

D'où $\quad \|T_i\| \leq \frac{n_0}{r}, \quad \forall i \in I$

Autrement dit, $\quad \sup_{i\in I}\|T_i\| < +\infty$,

et donc (i) est vérifié. ∎

<u>Corollaire (17)</u> (<u>Banach-Steinhaus</u>) : X un Banach, Y un e.v.n.

$T_i \in \mathcal{L}(X,Y)$, $i \in I$.

On suppose que $\forall x \in X$, on a : $\sup_{i\in I}\|T_i x\| < +\infty$.

Alors $\sup_{i\in I}\|T_i\| < +\infty$.

<u>preuve</u>: par hypothèse, l'ensemble $\{x \in X : \sup_{i\in I}\|T_i x\| = +\infty\}$ est vide, donc la condition (ii) dans l'alternative du théorème (16) n'est pas vérifiée. Donc la condition (i) est vérifiée, ce qui donne exactement que $\sup_{i\in I}\|T_i\| < +\infty$. ∎

Corollaire 18 : X Banach, Y un e.v.n, $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $n \geq 0$ et soit $\mathcal{D}$ un sous espace vectoriel dense de X.

LASSE :

(i) $\forall x \in X$, $(T_n x)_{n\geq 0}$ converge dans Y

(ii) $\forall x \in \mathcal{D}$, $(T_n x)_{n\geq 0}$ converge dans Y et

$$\sup_{n\geq 1} \|T_n\| < +\infty$$

De plus dans ce cas, si $Tx := \lim_{n\to+\infty} T_n x$, $x \in X$,

alors $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ et

$$\|T\| \leq \varliminf_{n\longrightarrow+\infty} \|T_n\|.$$

preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii) par hypothèse, on a $\sup_{n\geq 1} \|T_n x\| < +\infty$ pour tout $x \in X$ et donc (ii) découle du corollaire 17.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : notons pour $x \in \mathcal{D}$, $Tx := \lim_{n\to+\infty} T_n x$

Il est clair que T est linéaire. D'autre part, comme

$$(*) \quad \|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq M \|x\|,$$

où $M = \sup_{n\geq 1} \|T_n\|$, on obtient en passant à la limite que $\|Tx\| \leq M\|x\|$, $x \in \mathcal{D}$.

Ainsi $T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, Y)$. Comme $\mathcal{D}$ est dense dans X, il existe une unique $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle que

$$\tilde{T}|_{\mathcal{D}} = T \quad \text{et} \quad \|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

Notons que $(*)$ implique en fait que

$$\|Tx\| \leq \left(\varliminf_{n \to +\infty} \|T_n\|\right) \|x\| \quad , \; x \in \mathcal{D}$$

et donc $\|\tilde{T}\| = \|T\| \leq \varliminf_{n \to +\infty} \|T_n\|$.

Il reste à montrer que $\forall x \in X$, $\tilde{T}x = \lim_{n \to +\infty} T_n x$.

Pour cela remarquons que $\sup_{n \geq 1} \|T_n - \tilde{T}\| < +\infty$ et

$(T_n - \tilde{T})(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\forall x \in \mathcal{D}$. On peut donc appliquer le lemme 15 et en déduire que $\forall x \in X$, $(T_n - \tilde{T})(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. ∎

Il existe de nombreuses applications au théorème de Banach-Steinhaus. Parmi les plus connues, citons un résultat sur la convergence des séries de Fourier. Rappelons que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique, intégrable sur $[-\pi, \pi]$, on définit ses <u>coefficients de Fourier</u>

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et les <u>sommes partielles de Fourier</u> de f

$$(S_n f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}, \quad n \geq 0.$$

Une question fondamentale et classique dans l'analyse de Fourier est de savoir quand $S_n f \longrightarrow f$, $n \longrightarrow +\infty$?

Vous avez vu (et nous y reviendrons) que la convergence est vraie dans $L^2(-\pi, \pi)$.

Dans l'espace $C(-\pi, \pi)$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, cette convergence est fausse. Nous avons même le résultat suivant :

Théorème 19 : Soit $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques muni de la norme infinie.

L'ensemble

$$\left\{ f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}) : \sup_{n \geq 0} |S_n f(0)| = +\infty \right\}$$

est dense dans $C_{2\pi}(\mathbb{R})$. En particulier, il existe $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ telle que $(S_n f)(0)$ ne converge pas.

preuve : application de Banach Steinhaus ! voir TD ■

Remarquons qu'en 1873, le mathématicien français Paul du Bois Reymond a donné un exemple explicite d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0.

Néanmoins, on a le résultat suivant :

Théorème 20 (Carleson 1965) :

Soit $f \in L^p(-\pi, \pi)$, $p > 1$.

Alors $S_n f \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ presque partout.

Pour $p = 1$, le résultat de Carleson est faux et Kolmogorov a construit une fonction $f \in L^1(-\pi, \pi)$ dont la série de Fourier diverge partout.

Les résultats de Carleson et Kolmogorov vont bien au delà de ce cours, sont vraiment difficiles et ont été donné uniquement à titre culturel !

§2.3. Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé :

2.3.1. Théorème de l'application ouverte.

Théorème 21 (Thm de majoration automatique) : X, Y deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. On suppose que T est surjective. Alors il existe une constante $c > 0$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall y \in Y, \ \exists x \in X \text{ tel que } Tx = y \text{ et } \|x\| \leq c\|y\|.$$

Autrement dit, si T est une application linéaire continue surjective, ce résultat dit qu'on peut choisir un antécédent de y par T en contrôlant (uniformément) sa norme.

La démonstration du théorème 21 est basée sur deux lemmes.

Dans ce qui suit, on note B_E la <u>boule unité fermée</u> d'un espace vectoriel normé E.

<u>Lemme 22</u>: X un e.v.n, Y un Banach, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

> Si T est surjectif, alors $\overline{T(B_X)}$ est d'intérieur non vide dans Y.

<u>preuve</u>: Comme T est surjectif et $X = \bigcup\limits_{n \geq 0} n B_X$,

on a $$Y = TX = \bigcup_{n \geq 0} T(n B_X) = \bigcup_{n \geq 0} n\, T(B_X).$$

A fortiori, on a donc $$Y = \bigcup_{n \geq 0} n\, \overline{T(B_X)}.$$

Comme Y est un espace de Banach, le théorème de Baire assure que l'un des ensembles fermés $F_n = n\,\overline{T(B_X)}$ est d'intérieur non vide dans Y. Donc $\overline{T(B_X)}$ est aussi d'intérieur non vide dans Y. ∎

Lemme 23 : X un Banach, Y un e.v.n, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

$M>0$. On suppose que $B_Y \subset \overline{T(MB_X)}$.

Alors $\forall c > M$, $B_Y \subset T(cB_X)$.

preuve : Fixons $0 < \delta < 1$ et $y \in B_Y$. Par hypothèse,

$\exists x_0 \in X$, $\|x_0\| \leq M$ et $\|y - Tx_0\| \leq \delta$.

Alors $y_1 := \frac{1}{\delta}(y - Tx_0) \in B_Y$. Donc $\exists x_1 \in X$,

$\|x_1\| \leq M$ et $\|y_1 - T(x_1)\| \leq \delta$.

En multipliant par δ, on a :

$$\|y - T(x_0 + \delta x_1)\| \leq \delta^2.$$

On pose alors $y_2 = \frac{1}{\delta^2}(y - T(x_0 + \delta x_1))$ et on répète le raisonnement. On construit ainsi par récurrence une suite $(x_n) \subset X$, $\|x_n\| \leq M$ et

$$(*) \quad \|y - T(x_0 + \delta x_1 + \dots + \delta^n x_n)\| \leq \delta^{n+1}, \ n \geq 0.$$

Comme $\|\delta^n x_n\| = \delta^n \|x_n\| \leq M \delta^n$ et $0 < \delta < 1$,

la série $\sum_{n \geq 0} \delta^n x_n$ converge normalement,

donc converge car X est un Banach.

On peut donc définir $x := \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n x_n$.

Comme T est linéaire et continue, on a:

$$Tx = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n T(x_n)$$

et l'inégalité $(*)$ implique que $Tx = y$.

De plus, on a:

$$\|x\| \leq M \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n = \frac{M}{1-\delta}$$

Ainsi si $\frac{M}{1-\delta} = c$, on obtient le résultat.

Or ceci est équivalent à $1-\delta = \frac{M}{c}$, c'est-à-dire

$\delta = 1 - \frac{M}{c}$, ce qui possible $\forall c > M$. ■

<u>preuve du théorème (21)</u>: d'après le lemme (22), $\overline{T(B_X)}$ est d'intérieur non vide dans Y. Donc il existe $y_0 \in Y$, $r>0$

tq $\overline{B_Y(y_0,r)} \subset \overline{T(B_X)}$.

Comme T est linéaire, $\overline{T(B_X)}$ est un ensemble convexe et symétrique par rapport à l'origine 0.

Ainsi, $\overline{T(B_X)}$ contient l'ensemble

$$\frac{1}{2}\left(\overline{B_Y(y_0,r)} - \overline{B_Y(y_0,r)}\right) = \overline{B_Y(0,r)}$$

On obtient donc que
$$B_Y \subset \overline{T(MB_X)} \quad , \text{ où } \quad M = \frac{1}{r}.$$

Le lemme 23 implique alors que si $C > M = \frac{1}{r}$,

alors $\quad (*) \quad B_Y \subset T(c B_X)$.

Soit $y \in Y$, $y \neq 0$. D'après $(*)$, il existe $x_1 \in X$ $\|x_1\| \leq c$ tel que $\frac{y}{\|y\|} = Tx_1$.

D'où $\quad y = T(x_1 \|y\|) = Tx \quad$, où $x = x_1 \|y\|$.

On a donc $\|x\| = \|y\| \, \|x_1\| \leq c \, \|y\|$ ∎

Corollaire 24: (Théorème d'isomorphisme de Banach).

> Soit $T : X \longrightarrow Y$ linéaire, continue, X, Y - Banach.
> Si T est bijectif, alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

preuve: Si T est bijectif, il est facile de vérifier que T^{-1} est linéaire. De plus, la conclusion du théorème 21 s'écrit :

$$\forall y \in Y, \quad \|T^{-1}(y)\| = \|x\| \leq c \, \|y\|,$$

ce qui montre la continuité de T^{-1}! ∎

Corollaire 25 : X, Y deux Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

LASSE : (i) T est injectif et à image fermée

(ii) $\exists c > 0$: $c\|x\| \leq \|Tx\|$, $\forall x \in X$.

preuve : (ii) $\Rightarrow$ (i) : L'inégalité $c\|x\| \leq \|Tx\|$, $x \in X$ implique immédiatement l'injectivité de T.

D'autre part, si $y_n = Tx_n$ est une suite de $\mathrm{Im}\, T$ convergeante vers $y \in Y$ alors

$$\|x_n - x_p\| \leq c^{-1} \|Tx_n - Tx_p\|,$$

ce qui montre que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Comme X est un espace de Banach, la suite $(x_n)_n$ converge vers $x \in X$. La continuité de T implique alors

$$y = \lim_{n \to +\infty} Tx_n = Tx.$$

Donc $y \in \mathrm{Im}\, T$ et l'image de T est fermée.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : comme $\mathrm{Im}\, T$ est fermé dans Y Banach, $\mathrm{Im}\, T$ est lui même un espace de Banach. De plus, $T : X \longrightarrow \mathrm{Im}\, T$ est bijective, linéaire, continue. D'après le théorème d'isomorphisme de Banach (Corollaire 24),

$T^{-1} : \mathrm{Im}\, T \longrightarrow X$ est continue.

Autrement dit, $\exists\, c > 0$ tq $\forall x \in X$,

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq c\, \|Tx\|.$$

Le théorème (21) de majoration automatique porte également le nom de théorème de l'application ouverte. Cela tient au corollaire suivant :

Corollaire (26) : X, Y deux Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjective.

Alors T est une application ouverte, i.e
$\forall\, \mathcal{O}$ ouvert de X, $T(\mathcal{O})$ est un ouvert de Y.

preuve : soit $\mathcal{O}$ un ouvert de X et $y \in T(\mathcal{O})$.

On cherche $r > 0$ tq $B_Y(y, r) \subset T(\mathcal{O})$.

Soit $x \in \mathcal{O}$ tq $y = Tx$. Pour tout $r > 0$,

on a :
$$B_Y(y, r) = Tx + B_Y(0, r) = Tx + r\, \mathring{B}_Y$$

D'après le théorème (21), il existe $c > 0$ tq
$$\mathring{B}_Y \subset T(B_X(0, c)).$$

D'où
$$B_Y(y, r) \subset Tx + T(B_X(0, rc)) = T(B_X(x, rc))$$

Maintenant comme $x \in \mathcal{O}$ - ouvert, $\exists\, r > 0$ tq

$$B_X(x, rc) \subset \mathcal{O}.$$

Ainsi $B_Y(y, r) \subset T(\mathcal{O})$; ce qui prouve que

$T(\mathcal{O})$ est un ouvert. ∎

2.3.2. Caractérisation de la surjectivité :

Le théorème suivant donne plusieurs caractérisations de la surjectivité d'un opérateur linéaire.

Théorème 27 : X, Y Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

LASSE :

(i) T est surjectif.

(ii) $\exists\, c > 0$ tq $\forall y \in Y$, $\exists\, x \in X$ vérifiant

$$Tx = y \text{ et } \|x\| \leq c\|y\|.$$

(iii) $\exists\, c > 0$ tq $B_Y \subset \overline{T(cB_X)}$.

(iv) $\exists\, c > 0$, $\exists\, 0 < k < 1$ tq $\forall y \in B_Y$, $\exists\, x \in X$ vérifiant $\|x\| \leq c$ et $\|Tx - y\| \leq k$.

preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii) : c'est le théorème 21 !

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) : trivial !

(iv) $\Rightarrow$ (i) : en reprenant la preuve du lemme 23

on montre que (iv) $\Rightarrow$ $B_Y \subset T\left(\frac{c}{1-k} B_X\right)$.

La linéarité de T implique alors la surjectivité de T.

Exemple d'application : quotients de $\ell^1(\mathbb{N})$.

Comme exemple de la propriété (iii), on peut montrer que "tout espace de Banach séparable est un quotient de $\ell^1(\mathbb{N})$." Ainsi l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$ est en un sens "universel" parmi les espaces de Banach séparables.

Proposition 28 : Si X est un espace de Banach séparable. Alors il existe une surjection linéaire continue de $\ell^1(\mathbb{N})$ sur X.

Preuve : voir TD.

2.3.3. Théorème du graphe fermé :

Si E et F sont deux espaces métriques, le graphe d'une application $f : E \longrightarrow F$ est l'ensemble

$$G_f = \{(x,y) \in E \times F : \ y = f(x)\}$$

On peut munir $E \times F$ d'une structure d'espace métrique en posant, par exemple, pour $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E\times F$

$$d_\infty\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \max\big(d_E(x_1,x_2),\, d_F(y_1,y_2)\big),$$

où d_E (resp. d_F) est la distance sur E (resp. F).

Il est alors facile de voir que si f est continue alors G_f est fermé dans $E\times F$. La réciproque est fausse en général comme le montre le contre-exemple suivant :

soit
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 8 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors f n'est pas continue mais on vérifie facilement que son graphe est fermé dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Même dans le cas des applications linéaires, la fermeture du graphe n'entraîne pas la continuité !

Par exemple, soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ et pour $f\in E$, notons
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

Le graphe de $id : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ est fermé car $G_{id} = E\times E$. Mais cette application linéaire n'est pas continue car $\nexists\, c>0$ telle que
$$\|f\|_\infty \leq c\,\|f\|_1, \quad f\in E.$$

Par définition, π_X est une bijection linéaire continue de G_T sur X et $\pi_X^{-1}(x) = (x, T(x))$, $x \in X$.

Comme G_T et X sont des espaces de Banach, le théorème d'isomorphisme de Banach assure que π_X^{-1} est continue. Mais $T = \pi_Y \circ \pi_X^{-1}$, donc T est aussi continue. ■

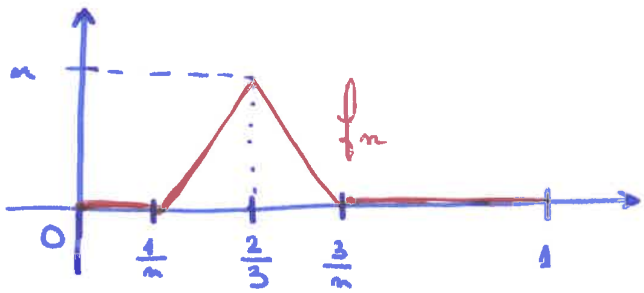
§2.4. Théorèmes de Hahn-Banach:

2.4.1. Formes linéaires et dual:

Définitions (a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une forme linéaire sur E est une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ satisfaisant $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$.

(b) Si E est un $\mathbb{K}$-e.v. normé, on note E^* (ou parfois E') l'ensemble des formes linéaires continues sur E, autrement dit, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

L'espace E^* s'appelle le dual de E et il est lui-même un e.v. normé avec la norme :



On a $\|f_n\|_1 = 1$ et

$\|f_n\|_\infty = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$!

Cependant, on a le résultat suivant valable pour des application linéaire entre espace de Banach.

Théorème (29) (théorème du graphe fermé) : X, Y deux espaces de Banach, $T : X \longrightarrow Y$ linéaire. On suppose que le graphe de T est fermé dans $X \times Y$. Alors T est continu.

preuve : on munit $X \times Y$ d'une norme produit quelconque, par exemple la norme définie par :

$$|||(x,y)||| = \max(\|x\|_X, \|y\|_Y).$$

Comme X et Y sont des espaces de Banach, il est facile de voir que $X \times Y$ est un espace de Banach et G_T qui est un s.e.v fermé de $X \times Y$ est aussi un espace de Banach. Définissons alors les projections

$$\pi_X : \begin{array}{rcl} G_T & \longrightarrow & X \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \pi_Y : \begin{array}{rcl} G_T & \longrightarrow & Y \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| \quad , \; f \in E^*.$$

Exemples: (1) si E est de dimension finie n et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors toute forme linéaire f sur E est de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad , \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$.

(2) Forme linéaire évaluation en un point:
Soit $t_0 \in [0,1]$ et $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme uniforme. L'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$
$f \longmapsto f(t_0)$

est évidemment un élément de E^* et $\|\varphi\| = 1$.

(3) Dual de L^p:
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et supposons que μ est σ-finie.

Théorème 30 (admis): Soit $1 \leq p \leq +\infty$, q l'exposant conjugué de p $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

(a) Pour $g \in L^q(\Omega, \mu)$, on pose

$$\phi_g(f) := \int_\Omega fg \, d\mu \quad , \quad f \in L^p(\Omega,\mu)$$

Alors $\phi_g \in \left(L^p(\Omega,\mu)\right)^*$ et $\|\phi_g\| = \|g\|_q$.

(b) Si $1 \leq p < +\infty$, toute forme linéaire continue sur $L^p(\Omega,\mu)$ est du type ϕ_g pour une unique fonction $g \in L^q(\Omega,\mu)$.

Preuve: voir Rudin par exemple. $\blacksquare$

Corollaire (31): Si $p \in [1, +\infty[$, q l'exposant conjugué de p.

Alors $\left(L^p(\Omega,\mu)\right)^* \simeq L^q(\Omega,\mu)$

(isométriquement isomorphe à)

Remarque: ce résultat est faux pour $p = \infty$. Voir TD.

Rappelons que si $\dim E < +\infty$, alors toute forme linéaire sur E a nécessairement continue. En revanche, si $\dim E = +\infty$, il n'en est rien!

Proposition (32): Tout espace vectoriel normé de dimension infinie admet au moins une forme linéaire discontinue.

<u>preuve</u>: La preuve est basée sur l'existence de <u>base algébrique</u> (ou base de Hamel) elle même basée sur le lemme de Zorn qu'on verra dans un instant. Les détails de la preuve de cette proposition seront vues en TD. ■

Rappelons que si F est un s.e.v d'un espace vectoriel E, on appelle <u>codimension</u> de F dans E la dimension de l'espace quotient E/F, i.e :

$$\operatorname{codim}(F) := \dim(E/F).$$

Un <u>hyperplan</u> de E est un sous-espace vectoriel F de codimension égale à 1.

Il se trouve qu'il existe une correspondance canonique entre les formes linéaires (continues) et les hyperplans (fermés) de E.

<u>Théorème 33</u>: Soit E un espace vectoriel.

(1) Si f est une forme linéaire sur E, $f \neq 0$, alors son noyau $\ker f$ est un hyperplan de E.

(2) Si $f, g \neq 0$ sont des formes linéaires sur E telles que $\ker f = \ker g$,

alors il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $f = a g$.

(3) Si H est un hyperplan de E, alors il existe une forme linéaire $f \neq 0$ tel que $H = \ker f$.

(4) Si E est un e.v. normé et H est un s.e.v de E, H est un hyperplan fermé si et seulement si il existe $f \in E^*$, $f \neq 0$, telle que $H = \ker f$.

(5) Si f est une forme linéaire, alors f est continue ssi $\ker f$ est fermé

(6) Si f est une forme linéaire, alors soit $\ker f$ est fermé soit $\ker f$ est dense.

Pour la preuve de ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme (34) : Soit H un hyperplan d'un e.v. E. Soit $\pi : E \longrightarrow E/H$ la surjection canonique et fixons $x_0 \in E \setminus H$.
Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ et $h \in H$ tels que :

$$x = \lambda x_0 + h.$$

preuve (du lemme) :

Existence : H étant un hyperplan, on a $\dim(E/H) = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\pi(x) = \lambda \pi(x_0) = \pi(\lambda x_0).$$

D'où $h := x - \lambda x_0 \in H = \ker \pi$ et

$$x = \lambda x_0 + h.$$

Unicité : supposons que $x = \lambda x_0 + h = \lambda' x_0 + h'$, où $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ et $h, h' \in H$.

Alors $(\lambda - \lambda') x_0 = h' - h \in H$.

D'où $\pi((\lambda - \lambda') x_0) = 0$, i.e $(\lambda - \lambda') \pi(x_0) = 0$.

Comme $\pi(x_0) \neq 0$, on a nécessairement $\lambda - \lambda' = 0$, i.e $\lambda = \lambda'$ et l'égalité $(\lambda - \lambda') x_0 = h' - h$ implique aussi $h = h'$.

preuve du théorème 33 :

(1) Il est facile de voir que comme $f \neq 0$, alors

$$f : E \longrightarrow \mathbb{C} \text{ est surjective.}$$

Ainsi si

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \\ E/\ker f \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

l'application $\tilde{f}$ est un isomorphisme de $E/\ker f$ sur $\mathbb{C}$. Ainsi $\dim(E/\ker f) = 1$ et $\ker f$ est bien un hyperplan de E.

(2) D'après (1) et le lemme 34, si $x_0 \in E$ et $x_0 \notin \ker f$ (un tel existe car $f \neq 0$) alors tout $x \in E$ s'écrit

de façon unique sous la forme

$$x = \lambda x_0 + h, \quad \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } h \in \ker f = \ker g.$$

Ainsi $f(x) = \lambda f(x_0)$ et $g(x) = \lambda g(x_0)$.

Remarquons que $f(x_0)$ et $g(x_0)$ sont non nuls car $x_0 \notin \ker f = \ker g$. On pose alors $a := \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} \neq 0$

et on a $$f(x) = \lambda f(x_0) = \lambda a g(x_0) = a g(x).$$

(3) D'après le lemme 36, si $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin H$, alors tout $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \lambda x_0 + h, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } h \in H.$$

On pose alors $$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

On vérifie alors sans peine que f est linéaire et $\ker f = H$.

(4) Supposons qu'il existe $f \in E^*$, $f \neq 0$, telle que $H = \ker f$. On sait d'après (1) que H est un hyperplan. De plus, comme $H = f^{-1}(\{0\})$ et f continue alors H est fermé.

Réciproquement, soit H un hyperplan fermé de E. D'après (3), il existe une forme linéaire f sur E, $f \neq 0$, telle que $H = \ker f$. Il reste à montrer que f est continue.

Remarquons que $\pi : E \longrightarrow E/H$ est continue

car $\|\pi(x)\|_{E/H} = \text{dist}(x, E) \leq \|x\|$.

De plus, si

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{K} \\ E/H \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

alors $\tilde{f}$ est aussi continue en tant qu'application linéaire entre espace de dimension finie. Ainsi $f = \tilde{f} \circ \pi$ est continue.

(Remarque : on utilise que H est fermé pour avoir que $\|\pi(x)\|_{E/H} = \text{dist}(x, H)$ définit bien une norme et donc que E/H est un espace vectoriel normé).

(5) découle facilement de (2) et (4).

(6) Soit f linéaire et notons $H = \ker f$. Si H n'est pas fermé alors $\exists\, x_0 \in \overline{H} \setminus H$. Le lemme (34) implique une nouvelle fois que $E = \mathbb{K} x_0 + H \subset \overline{H}$.

D'où $\overline{H} = E$ et donc $\ker f$ est dense dans E. ■

2.4.2. Fonctionnelles sous-linéaires :

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. Une fonctionnelle sous-linéaire sur E est une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $p(\lambda x) = \lambda\, p(x)$, pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \geq 0$, en particulier $p(0) = 0$. (51)

(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour tous $x, y \in E$.

<u>Exemple 0:</u> Une forme linéaire est une fonctionnelle sous-linéaire.

<u>Exemple 1:</u> Une norme est une fonctionnelle sous-linéaire.

<u>Exemple 2:</u> Soit E un e.v. normé et soit $C \subseteq E$ une partie convexe telle que $0 \in \mathring{C}$.

On pose
$$P_C(x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}, \quad x \in E.$$

Alors P_C est une fonctionnelle sous-linéaire appelée <u>la jauge</u> du convexe C ou <u>la fonctionnelle de Minkowski</u> de C.

<u>preuve:</u> comme $0 \in \mathring{C}$, $\exists\, r > 0$ tel que $\overline{B}(0,r) \subset C$.

Ainsi $\frac{r}{\|x\|} x \in C$ et donc pour tout $x \in E$, l'ensemble $\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$ est non vide et donc l'application p_C est bien définie!

On vérifie facilement que (1) est vérifié (exercice).

Montrons (2). Soient $x, y \in E$ et $\alpha, \beta > 0$

tels que $\frac{x}{\alpha} \in C$ et $\frac{y}{\beta} \in C$.

En écrivant que :

$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{y}{\beta}$, on voit que

$\frac{x+y}{\alpha+\beta} \in C$. Ainsi $P_C(x+y) \leq \alpha+\beta$,

pour tous $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tels que $\frac{x}{\alpha} \in C$ et $\frac{y}{\beta} \in C$.

En passant à la borne inférieure en α puis en β, on obtient que $P_C(x+y) \leq P_C(x) + P_C(y)$. ■

<u>Exercice</u>: vérifier que si $B = B(0,1)$ est la boule unité d'un e.v. normé E alors $P_B = \|\cdot\|_E$

2.4.3 Lemme de Zorn :

Le lemme de Zorn est une des formes équivalentes de l'axiome du choix. Il va intervenir de façon essentielle dans la preuve du théorème de Hahn-Banach.

Rappelons qu'une <u>relation d'ordre</u> sur un ensemble $\mathcal{E}$ est une relation binaire sur $\mathcal{E}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $x \leq x$, $\forall x \in \mathcal{E}$ (réflexivité)

(2) Si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (anti-symétrie)

(3) si $x \lesssim y$ et $y \lesssim z$ alors $x \lesssim z$ (transitivité)

<u>Définition</u>: Soit $(\mathcal{E}, \lesssim)$ un ensemble ordonné.

(1) On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est <u>totalement ordonnée</u> par $\lesssim$ si tous les éléments de $\mathcal{C}$ sont comparables pour $\lesssim$, autrement dit, $\forall x, y \in \mathcal{C}$ on a $x \lesssim y$ ou $y \lesssim x$.

(2) On dit que l'ordre est <u>inductif</u> si toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{E}$ possède un majorant dans $\mathcal{E}$.
autrement dit, si pour toute partie totalement ordonnée $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$, il existe un point $z \in \mathcal{E}$ tel que $\forall a \in \mathcal{C}$, on a: $a \lesssim z$.

(3) On dit qu'un point $z \in \mathcal{E}$ est un <u>élément maximal</u> de $\mathcal{E}$ s'il n'existe aucun point $x \in \mathcal{E}$ tel que

$$x \neq z \text{ et } z \lesssim x.$$

<u>Exemple</u>: Soit Ω un ensemble contenant au moins deux points et soit $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω. On ordonne $\mathcal{E}$ par l'inclusion:

$$A \lesssim B \text{ si } A \subseteq B.$$

Alors $\mathcal{E}$ n'est pas totalement ordonné mais il possède un plus grand élément à savoir Ω.

De ce fait, $\mathcal{E}$ possède un unique élément maximal et l'ordre $\leq$ est inductif.

Voici maintenant l'énoncé du lemme de Zorn.

<u>Lemme (de Zorn) 35</u> : Tout ensemble non vide, ordonné inductif possède un élément maximal.

Le lemme de Zorn intervient dans toutes les mathématiques. Il est équivalent à l'<u>axiome du choix</u> qui est un des axiomes de la théorie des ensembles communément accepté par la plupart des mathématiciens. L'axiome du choix affirme que pour chaque ensemble non vide X, il existe une <u>fonction de choix</u>, c'est à dire une application

$$c : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X \quad \text{telle que}$$

$$c(Y) \in Y, \ \forall\, Y \in \mathcal{P}(X),\ Y \neq \emptyset .$$

Voici deux applications classiques du lemme de Zorn dont nous laissons les détails en exercice.

<u>Exemple 1</u> : tout espace vectoriel possède une base algébrique.

Voir TD !

Exemple 2 : dans un anneau commutatif, tout idéal est contenu dans un idéal maximal.

2.4.4. Théorème de Hahn-Banach :

Théorème 36 (Hahn-Banach) : soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle sous-linéaire. Soit V un sous espace vectoriel de E et soit $\Phi : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $\Phi(x) \leq p(x)$, $\forall x \in V$.
Alors il existe une forme linéaire $\tilde{\Phi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur E qui prolonge Φ et qui reste majorée par p.

preuve : on dira qu'une forme linéaire $\psi : W \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un sous-espace vectoriel $W \subseteq E$ est un prolongement admissible de Φ si

(a) $V \subset W$

(b) $\psi|_V = \Phi$

(c) $\psi(x) \leq p(x)$, $\forall x \in W$.

Le point clé dans la preuve est le lemme suivant :

Lemme 37 : soit $\psi : W \longrightarrow \mathbb{R}$ un prolongement admissible de Φ et supposons $\exists e \in E \setminus W$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{\psi} : W \oplus \mathbb{R}e \longrightarrow \mathbb{R}$

qui prolonge ψ et qui est encore un prolongement admissible de Φ.

Admettons ce lemme pour le moment et achevons la preuve du théorème de Hahn-Banach. On notera $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les prolongements admissibles de Φ qu'on ordonne de la manière suivante : si $\psi_1 : W_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi_2 : W_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des éléments de $\mathcal{E}$, on dit que

$$\psi_1 \lesssim \psi_2 \text{ si } \begin{cases} \cdot\; W_1 \subseteq W_2 \\ \text{et } \cdot\; \psi_2|_{W_1} = \psi_1 . \end{cases}$$

Notons que $\mathcal{E} \neq \emptyset$ car $\Phi \in \mathcal{E}$.

On veut appliquer le lemme de Zorn à $\mathcal{E}$. Il faut donc montrer que $(\mathcal{E}, \lesssim)$ est inductif.

Soit $(\psi_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée de $\mathcal{E}$

$\psi_i : W_i \longrightarrow \mathbb{R}$ prolongement admissibles de Φ.

On vérifie sans peine que $W = \bigcup_{i\in I} W_i$ est un s.e.v de E

et on définit

$$\psi : W \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \psi(x) = \psi_i(x) \text{ si } x \in W_i .$$

Comme la famille $(\psi_i)_{i\in I}$ est totalement ordonné, ψ est bien définie et ψ est linéaire.

De plus, ψ est un prolongement admissible de Φ qui majore tous les ψ_i.

Ainsi $(\mathcal{E}, \leq)$ est inductif et on peut appliquer le lemme de Zorn, qui affirme l'existence d'un élément maximal ψ_0 pour $\mathcal{E}$. Si $\psi_0 : W_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, montrons que $W_0 = E$. Par l'absurde supposons que $W_0 \neq E$. Le lemme 37 fournit alors un prolongement admissible $\tilde{\psi}_0$ strictement supérieur à ψ_0 au sens de $\leq$, ce qui contredit la maximalité de ψ_0.

Ainsi $W_0 = E$ et $\tilde{\Phi} = \psi_0$ est la forme linéaire recherchée. ∎

<u>Il reste la preuve du lemme 37 :</u>

Si $\tilde{\psi}$ est une forme linéaire sur $W \oplus \mathbb{R}e$ prolongeant ψ alors pour $x = w + \lambda e \in W \oplus \mathbb{R}e$, on a :

$$\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(w) + \lambda\alpha = \psi(w) + \lambda\alpha,$$

où $\alpha = \tilde{\psi}(e)$.

Il s'agit donc de montrer qu'on peut choisir α tels que

$$\psi(w) + \alpha\lambda \leq p(w + \lambda e),$$

pour tout couple $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{R}$.

Pour $\lambda = 0$, l'inégalité est vérifiée par hypothèse car

$$\psi(w) \leq p(w), \ \forall\, w \in W.$$

On cherche donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$\forall \lambda > 0, \ \forall\, w \in W,$

$$\psi(w) \pm \alpha\lambda \leq p(w \pm \lambda e),$$

ce qui s'écrit encore :

$\forall (\lambda, w) \in \,]0, +\infty[\, \times W,$

$$\psi\left(\frac{w}{\lambda}\right) - p\left(\frac{w}{\lambda} - e\right) \leq \alpha \leq p\left(\frac{w}{\lambda} + e\right) - \psi\left(\frac{w}{\lambda}\right).$$

Pour montrer l'existence d'un tel α, il suffit de prouver que

$$\sup\left\{ \psi(u) - p(u-e) : u \in W \right\} \leq \inf\left\{ p(v+e) - \psi(v) : v \in W \right\}$$

Il reste alors à remarquer que :

$\forall (u,v) \in W \times W$, on a :

$$\psi(u) + \psi(v) = \psi(u+v) \leq p(u+v) \leq p(u-e) + p(v+e)$$

et donc

$$\psi(u) - p(u-e) \leq p(v+e) - \psi(v) \qquad \blacksquare$$

Nous allons maintenant donner plusieurs corollaires importants du théorème de Hahn-Banach, qu'il faut aussi absolument connaître.

Corollaire 38 (Hahn-Banach):

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), soit V un s.e.v de E et $\phi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors il existe une forme linéaire continue $\tilde{\phi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\tilde{\phi}|_V = \phi$ et $\|\tilde{\phi}\| = \|\phi\|$.

preuve: cas 1 : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Posons $C = \|\phi\|$. En appliquant le théorème 36 avec $p(x) = C\|x\| = \|\phi\|\|x\|$, on obtient une forme linéaire $\tilde{\phi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge ϕ et telle que $\tilde{\phi}(x) \leq C\|x\|$, $\forall x \in E$.

On a bien sûr

$$-\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(-x) \leq C\|-x\| = C\|x\|$$

D'où

$$|\tilde{\phi}(x)| \leq C\|x\|, \ \forall x \in E.$$

Ainsi $\|\tilde{\phi}\| \leq C = \|\phi\|$.

Mais comme $\tilde{\phi}$ prolonge ϕ, on a aussi $\|\tilde{\phi}\| \geq \|\phi\|$, ce qui achève la preuve du cas réel.

cas 2 : $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Posons $\phi_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}\phi$.

Alors $\phi_{\mathbb{R}} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue, et on a :

$$\|\phi_{\mathbb{R}}\| \leq \|\phi\|,$$

car $\quad |\phi_{\mathbb{R}}(x)| = |\mathrm{Re}\, \phi(x)| \leq |\phi(x)|, \ \forall x \in V.$

D'après le cas 1, il existe donc une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue $\tilde{\phi}_{\mathbb{R}} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge $\phi_{\mathbb{R}}$ et vérifie

$$\|\tilde{\phi}_{\mathbb{R}}\| \leq \|\phi\|.$$

On définit alors $\tilde{\phi} : E \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(x) - i\, \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(ix).$$

Il est clair que $\tilde{\phi}$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue.

De plus, on a:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(ix) &= \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(ix) - i\, \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(-x) \\
&= \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(ix) + i\, \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(x) \\
&= i\left(\tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(x) - i\, \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(ix)\right) \\
&= i\, \tilde{\phi}(x).
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{\Phi}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

De plus, si $x \in V$, on a:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(x) &= \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(x) - i\, \tilde{\phi}_{\mathbb{R}}(ix) \\
&= \mathrm{Re}\, \phi(x) - i\, \mathrm{Re}\left(\phi(ix)\right) \\
&= \mathrm{Re}\, \phi(x) - i\, \mathrm{Re}\left(i\phi(x)\right) \quad \text{car } \phi \text{ est } \mathbb{C}\text{ linéaire.}
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}\, z$, on en déduit que

$$\tilde{\Phi}(x) = \mathrm{Re}\, \phi(x) + i\, \mathrm{Im}\, \phi(x) = \phi(x).$$

Autrement dit, $\tilde{\Phi}$ prolonge ϕ.

Il reste à voir que $\|\tilde{\Phi}\| = \|\phi\|$.

Comme $\tilde{\Phi}$ prolonge ϕ, on a bien sûr $\|\phi\| \leq \|\tilde{\Phi}\|$.

Pour l'inégalité inverse, soit $x \in E$. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ $|\lambda| = 1$ tel que $|\tilde{\Phi}(x)| = \lambda \tilde{\Phi}(x)$.

D'où
$$|\tilde{\Phi}(x)| = \tilde{\Phi}(\lambda x) = \mathrm{Re}(\tilde{\Phi}(\lambda x))$$
$\uparrow$ car $\tilde{\Phi}(\lambda x) \in \mathbb{R}$

Donc
$$|\tilde{\Phi}(x)| = \tilde{\Phi}_{\mathbb{R}}(\lambda x) \leq \|\tilde{\Phi}_{\mathbb{R}}\| \, \|\lambda x\|$$
$$\leq \|\phi\| \, \|x\|$$

et donc $\|\tilde{\Phi}\| \leq \|\phi\|$,

ce qui achève la preuve. ∎

2.4.5. Conséquences du théorème de Hahn-Banach.

Corollaire 39 Soit E un e.v. normé. Pour tout $x \in E$, il existe une forme linéaire continue $x^* \in E^*$ telle que

$$\|x^*\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle x^*, x \rangle = \|x\|.$$

preuve : On applique le théorème de Hahn Banach à

$V = \mathbb{K}x$ et $\phi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$\phi(\lambda x) = \lambda \|x\|$.

On obtient ainsi une forme linéaire continue $x^* \in E^*$

telle que $\langle x^*, x \rangle = \phi(x) = \|x\|$

et $\|x^*\| = \|\phi\|$.

Or ϕ est continue et

$$\|\phi\| = \sup_{\lambda : \|\lambda x\| = 1} |\phi(\lambda x)| = \sup_{\lambda : \|\lambda x\| = 1} \|\lambda x\| = 1$$

$\Longrightarrow \|x^*\| = 1$. ∎

Le résultat suivant montre que le dual sépare les points.

Corollaire (40) Soit E un e.v. normé. Alors E^* sépare les points de E, c'est-à-dire : si $a, b \in E$, $a \neq b$ alors $\exists\, x^* \in E^*$ tq $\langle x^*, a \rangle \neq \langle x^*, b \rangle$.

preuve : On applique le corollaire (39) à $x = b - a$. ∎

Corollaire 41: Pour tout $x \in E$, on a :

$$\boxed{\|x\| = \sup\left\{ |\langle x^*, x\rangle| : x^* \in E, \|x^*\| \leq 1 \right\}}$$

preuve : L'inégalité $\geq$ est évidente et l'autre inégalité provient directement du corollaire 39 qui montre en plus que le sup est un max !

On peut généraliser un peu le corollaire 40.

Corollaire 42: Soit E un e.v.n, F un s.e.v. fermé de E. Pour tout $a \notin F$, il existe $x^* \in E^*$ tel que $\langle x^*, a\rangle \neq 0$ et $x^* \equiv 0$ sur F.

preuve : Posons $V = F \oplus \mathbb{K}a$ et définissons une forme linéaire $\phi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant

$$\phi(a) = 1 \quad \text{et} \quad \phi(x) = 0, \ \forall x \in F.$$

La forme linéaire ϕ est continue car $\ker \phi = F$ et F est fermé dans E donc dans V (Théorème 33).

Le théorème de Hahn-Banach permet alors de prolonger ϕ en une forme linéaire $x^* \in E^*$ qui répond à la question. ∎

Le corollaire précédent permet de donner un critère de densité très utile.

Corollaire 43 : Soit E un espace vectoriel normé, V un sous-espace vectoriel. LASSE :

(i) V est dense dans E.

(ii) $V^{\perp} = \{0\}$ où

$$V^{\perp} = \{x^* \in E^* : x^*|_V = 0\}.$$

preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii) : découle de la continuité !

(ii) $\Rightarrow$ (i) : supposons que $\overline{V} \neq E$.

Alors $\exists\, a \in E$, $a \notin \overline{V}$. D'après le corollaire 42, il existe $x^* \in E^*$ tq $x^* \equiv 0$ sur $\overline{V}$ et $\langle x^*, a \rangle \neq 0$. D'où $x^* \in V^{\perp}$ et $x^* \neq 0$, ce qui contredit (ii) ∎

Ce critère est extrêmement utile dans les applications. Donnons un exemple d'application.

Application : Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| > 1$. Notons

$f_a : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f_a(t) = \frac{1}{a - t}, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Si $(a_n)_n$ est une suite de nbres complexes telle que $|a_n| > 1$, pour tout n et $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \infty$, alors $\mathrm{Vect}\{f_{a_n} : n \geq 1\}$ est dense dans $\mathcal{C}([-1,1])$.

preuve : d'après le corollaire 43, il suffit de montrer que si $\mu \in \mathcal{C}([-1,1])^*$ et $\langle \mu, f_{a_n} \rangle = 0, \forall n \geq 1$ alors $\mu \equiv 0$.

Remarquons que $\forall t \in [-1,1]$, on a

$$f_a(t) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{a}}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{a^{k+1}}$$

et la série converge normalement sur $[-1,1]$ donc dans $(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Comme μ est linéaire et continue, on a

$$\mu(f_a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{k+1}} \mu(e_k),$$

où $e_k(t) = t^k$.

Notons $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(e_k) z^{k+1}$, $z \in \mathbb{D} = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| < 1\}$

Comme $|\mu(e_k)| \leq \|\mu\| \, \|e_k\|_\infty = \|\mu\|$,

la fonction φ est analytique dans $\mathbb{D}$.

De +, on a : $\varphi\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(e_k) \frac{1}{a_n^{k+1}}$

$$= \mu(f_{a_n}) = 0, \; n \geq 1$$

Par le principe des zéros isolés, comme $\frac{1}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \in \mathbb{D}$,

on a $\varphi \equiv 0$, i.e $\mu(e_k) = 0$.

Par linéarité, $\mu(P) = 0$, $\forall$ P polynôme.

Comme $\mathbb{C}[X]$ est dense dans $C([-1,1])$

(Théorème de Weierstrass), on en déduit que $\mu \equiv 0$ ∎

Ceci conclut le chapitre 2 !

Chapitre 3. Espaces de Hilbert.

3.1. Rappels sur les espaces préhilbertiens.

3.1.1. Définition et exemples.

Définition 1: Un espace préhilbertien est la donnée d'un espace vectoriel H sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et d'une application

$$\begin{aligned} H \times H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,y) &\longmapsto \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

appelée produit scalaire, vérifiant les propriétés suivantes :

(I1) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$, $\forall (x,y) \in H \times H$

(I2) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\forall (x,y,z) \in H \times H \times H$

(I3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\forall (x,y) \in H \times H$, $\alpha \in \mathbb{C}$

(I4) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$, $\forall x \in H$.

(I5) $\langle x, x \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Remarques: 1 Une application qui vérifie (I1), (I2) et (I3) est appelée une forme hermitienne.

2 Si, de plus, elle vérifie (I4), on dit que

c'est une <u>forme hermitienne positive</u>.

3 Enfin, si elle vérifie (I1), (I2), (I3), (I4) et (I5), on dit que c'est une <u>forme hermitienne positive non dégénérée</u>, ou tout simplement un produit scalaire.

Il découle immédiatement de la définition que :

* un produit scalaire est linéaire par rapport à la première variable et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ antilinéaire par rapport à la seconde variable : $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

et $\langle x, \lambda y + z \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,

pour tous $(x, y, z) \in H^3$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

* $(0, y) = (x, 0) = 0$, $\forall (x, y) \in H^2$.

Rappelons qu'une forme hermitienne positive vérifie l'inégalité de <u>Cauchy-Schwarz</u> :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}, \quad \forall (x,y) \in H^2.$$

Si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien, alors

$p(x) = \langle x, x \rangle^{1/2}$ définit une norme sur H,

notée $\|x\| = \|x\|_H = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

Dans ce cas, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\boxed{|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \quad , \quad \forall (x,y) \in H^2.}$$

Exemples : (1) L'espace $\mathbb{R}^n$ est un espace préhilbertien <u>réel</u>, où le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est donné par la formule suivante :

$$\langle x,y\rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

et

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

(2) L'espace $\mathbb{C}^n$ est un espace préhilbertien <u>complexe</u>, où le produit scalaire est donné par

$$\langle x,y\rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

et

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

est la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$.

(3) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice <u>hermitienne</u>, i.e $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $1 \leq i,j \leq n$.

Alors l'application $f_A : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

défini par $f_A(x,y) = \langle Ax, y\rangle_2$

est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$.

On montre (exercice) que :

* f_A est positive si et seulement si les valeurs propres de A sont positives
* f_A est un produit scalaire si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement positives.

(4) Soit $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \left\{ u = (u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty \right\}$

Comme $|u_n \overline{v_n}| \leq \frac{1}{2}(|u_n|^2 + |v_n|^2)$, on voit que si $u, v \in \ell^2$, la série $\sum_n u_n \overline{v_n}$ converge et on pose

$$\langle u, v\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}.$$

On vérifie alors que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2}$ est un produit scalaire et ℓ^2 est un espace préhilbertien.

(5) Soit I un pavé de $\mathbb{R}^n$ et

$$\mathcal{L}^2(I) = \left\{ f \in C(I) : \int_I |f(x)|^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n < +\infty \right\}$$

Pour $f, g \in \mathcal{L}^2(I)$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g} \, dx_1 \dots dx_n$$

On vérifie (exercice) que $\mathcal{C}^2(I)$ est un espace préhilbertien.

3.1.2 Identités du parallélogramme et polarisation.

Théorème 1: Soit H un espace préhilbertien, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Alors pour tous $x, y \in H$, on a:

(a) l'identité du parallélogramme:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

(b) l'identité de polarisation:

si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$.

preuve : exercice. $\blacksquare$

L'identité du parallélogramme caractérise les espaces préhilbertiens ainsi que le montre le résultat suivant:

Théorème 2 (von Neumann) :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

LASSE : (i) Il existe sur $E \times E$ une application $\langle \cdot,\cdot \rangle$ telle que $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ soit un espace préhilbertien et $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, $x \in E$;

(ii) la norme de E vérifie l'identité du parallélogramme.

preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i) dans le cas réel :

notons pour $(x,y) \in E^2$, $B(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

et montrons que B vérifie (I_1) - (I_5).

B vérifie (I_1) : $\forall (x,y) \in E^2$, on a

$$B(y,x) = \frac{1}{4}\left(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = B(x,y)$$

B vérifie (I_2) : soient $(x_1, x_2, y) \in E^3$.

D'après l'identité du parallélogramme, on a :

$$(1) \quad \|x_1+x_2+2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2 = 2\left(\|x_1+y\|^2 + \|x_2+y\|^2\right)$$

et

$$(2) \quad \|x_1+x_2-2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2 = 2\left(\|x_1-y\|^2 + \|x_2-y\|^2\right).$$

D'où

$$B(x_1+x_2, 2y) = \frac{1}{4}\left(\|x_1+x_2+2y\|^2 - \|x_1+x_2-2y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\|x_1+x_2+2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2 - \left(\|x_1+x_2-2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2\right)\right]$$

et avec (1) et (2), on en déduit que

$$B(x_1+x_2, 2y) = \frac{1}{2}\left(\|x_1+y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \|x_1-y\|^2 - \|x_2-y\|^2 \right)$$

i.e

(3) $\underline{B(x_1+x_2, 2y) = 2\left(B(x_1,y) + B(x_2,y)\right)}$, $\forall (x_1,x_2,y) \in E^3$.

Remarquons que $B(0,y) = \frac{1}{4}\left(\|y\|^2 - \|-y\|^2\right) = 0$

et si dans (3), on remplace $x_2 = 0$, $x_1 = x$, on a :

$$B(x, 2y) = 2\left(B(x,y) + B(0,y)\right) = 2\,B(x,y)$$

D'où

(4) $\underline{B(x, 2y) = 2\,B(x,y).}$

En utilisant cette relation dans (3), on obtient

$$2\,B(x_1+x_2, y) = B(x_1+x_2, 2y) = 2\left(B(x_1,y) + B(x_2,y)\right)$$

D'où $\quad B(x_1+x_2, y) = B(x_1,y) + B(x_2,y)$

ce qui prouve que B satisfait (I2).

B vérifie (I3) : En utilisant (I2), on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x,y) \in E^2$, on a :

$$B(nx, y) = n\,B(x,y).$$

De plus, comme $B(-x,y) + B(x,y) \overset{(I2)}{=} B(0,y) = 0$, on a $\qquad B(-x,y) = -B(x,y)$

et on en déduit que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall (x,y) \in E^2$, on a

$$B(nx,y) = n\,B(x,y).$$

Si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a:

$$q\,B(\alpha x,y) = B(\alpha q x, y) = B(px,y) = p\,B(x,y)$$

D'où $\qquad B(\alpha x,y) = \frac{p}{q} B(x,y) = \alpha\,B(x,y).$

Ainsi $\underline{\forall \alpha \in \mathbb{Q}}$, on a:

(5) $\qquad \underline{B(\alpha x,y) = \alpha\,B(x,y).}$

Il reste à remarquer que si $y \in E$, l'application $x \longmapsto B(x,y)$ est continue sur E : en effet, si $x_n \in E$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ alors $\|x_n+y\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|x+y\|^2$ et $\|x_n-y\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|x-y\|^2$.

D'où $\qquad B(x_n,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = B(x,y),$

ce qui prouve la continuité de $x \longmapsto B(x,y)$.

Combiné avec (5) et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\quad B(\alpha x,y) = \alpha\,B(x,y).$

Donc B vérifie (I3).

B vérifie (I4) :

$$B(x,x) = \frac{1}{4}\left(\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2\right) = \frac{1}{4} \times 4\|x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0.$$

B vérifie (I5) :

On a $B(x,x) = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$.

De +, $B(x,x) = \|x\|^2$, $x \in E$. ∎

Théorème 3 : Soit H un espace préhilbertien. Si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites de H qui convergent respectivement vers $x \in H$ et $y \in H$.

Alors $\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle x, y \rangle$.

Autrement dit, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue sur $H \times H$.

preuve : D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle|$$

$$\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\|.$$

On conclut en utilisant que (y_n) est bornée et

$\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, $\|y_n - y\| \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$ ∎

3.1.3. Orthogonalité :

Définition : Soit H un espace préhilbertien.

(a) Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dits orthogonaux, et on note $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$

(b) Si A est une partie de H et $x \in H$, on dit que x est orthogonal à A si $x \perp y$, $\forall y \in A$.

On note alors $x \perp A$

et $A^{\perp} = \{x \in H : x \perp A\} = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A\}$

(c) Si M et N sont deux parties de H, on dit que M et N sont orthogonales si $\forall x \in M$, $\forall y \in N$, on a : $x \perp y$.

On note dans ce cas : $M \perp N$.

Proposition ④ : Soit H un espace préhilbertien et $A \subset H$.

Alors :

(a) Pour tous $x, y \in H$,

$$x \perp y \iff \begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \|x+y\|^2 = \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

(b) $0 \in A^{\perp}$

(c) $$A \cap A^{\perp} = \begin{cases} \{0\} & \text{si } 0 \in A \\ \emptyset & \text{si } 0 \notin A. \end{cases}$$

(d) $\{0\}^{\perp} = H$, $H^{\perp} = \{0\}$

(e) S'il existe $a \in H$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$ alors $A^{\perp} = \{0\}$

(f) si $B \subset A$ alors $A^{\perp} \subset B^{\perp}$

(g) Si $\overline{A} = H$ alors $A^{\perp} = \{0\}$

(h) $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé de H

(i) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

preuve: (a): Remarquons que :

si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x,y >$

si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(< x,y >)$

et $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(< x, iy >)$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re}(i < x,y >)$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Im} < x,y >$.

L'équivalence du (a) est alors immédiate.

(b) est évident car $< 0, x > = 0$, $\forall x \in H$.

(c) : Soit $x \in A \cap A^{\perp}$, on a :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0$$

d'où $x = 0$ et ainsi $A \cap A^{\perp} \subset \{0\}$,

ce qui donne le résultat avec (b).

(d) : l'égalité $\{0\}^{\perp} = H$ est claire.

Pour la seconde égalité, remarquons que

$$H^{\perp} = H^{\perp} \cap H \underset{\uparrow}{=} \{0\}$$

d'après (c).

(e) Soit $x \in A^{\perp}$, $x \neq 0$. On a $a + \frac{r}{2\|x\|} x \in B(a, r) \subset A$

D'où $0 = \langle x, a + \frac{r}{2\|x\|} x \rangle = \underbrace{\langle x, a \rangle}_{= 0} + \frac{r}{2\|x\|} \|x\|^2$

$$= \frac{r}{2} \|x\|.$$

D'où $x = 0$, ce qui est absurde.

Ainsi $A^{\perp} = \{0\}$.

(f) Soit $x \in A^{\perp}$ et $b \in B$.

Comme $B \subset A$, on a : $\langle x, b \rangle = 0$ et

comme ceci est vrai pour tout élément $b \in B$, on en

déduit que $x \in B^{\perp}$. Ainsi $A^{\perp} \subset B^{\perp}$.

(g) Soit $x \in A^\perp$. On a :

$(*)$ $\quad 0 = \langle x, a \rangle, \ \forall a \in A.$

Comme $\overline{A} = H$, il existe $(a_n)_n \subset A$ telle que $a_n \longrightarrow x$.

D'après $(*)$ et la continuité du produit scalaire, on en déduit que $\quad 0 = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$

Ainsi $x = 0$ et $A^\perp = \{0\}$.

(h) Il est facile de vérifier que $A^\perp$ est un s.e.v.

Montrons que $A^\perp$ est fermé.

On a $\quad A^\perp = \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0, \forall a \in A\}$

$$= \bigcap_{a \in A} \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0\}$$

$$= \bigcap_{a \in A} \varphi_a^{-1}(\{0\}),$$

où $\quad \varphi_a : H \longrightarrow \mathbb{K}$

$\qquad\qquad x \longmapsto \langle x, a \rangle$

Or φ_a est une forme linéaire continue et donc $\varphi_a^{-1}(\{0\})$ est fermé et $A^\perp$ est fermé comme intersection de fermés.

(i) Soit $a \in A$. On a

$$0 = \langle a, x \rangle, \quad \forall x \in A^{\perp},$$

ce qui prouve que $a \in (A^{\perp})^{\perp}$. $\blacksquare$

3.1.4. Systèmes orthonormés :

Définition : (a) Un système $\{x_i\}_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien H est un système orthogonal si

$$\forall i, j \in I, \; i \neq j, \text{ on a : } \quad \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

(b) Si de plus, on a $\|x_i\| = 1$, $\forall i \in I$, on dit que $\{x_i\}_{i \in I}$ est un système orthonormal (ou orthonormé).

Exemples : (1) Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire euclidien, si $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ $1 \leq i \leq n$,

i-ème position

alors $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est un système orthonormé.

(2) Si on considère $L^2([-\pi, \pi])$ l'espace des classes d'équivalences de fonctions mesurables

$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ par la relation

d'équivalence d'égalité presque partout

et telle que $\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$

muni du produit scalaire

$$<f, g> = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} \frac{dt}{2\pi},$$

alors le système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormé,

où $e_n(t) = e^{int}$, $t \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{Z}$.

On appelle $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ le <u>système trigonométrique</u>.

<u>Théorème 5</u> (<u>Identité de Pythagore et inégalité de Bessel</u>):

Soit H un espace préhilbertien.

(i) Soit $\{x_1, \dots, x_N\}$ un système orthogonal de vecteurs. Alors, on a <u>l'identité de Pythagore</u>:

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_N\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_N\|^2.$$

(ii) Soit $\{e_n\}_{n\geq 0}$ une suite orthonormée de H. Alors, on a:

(a) $\forall x \in H$, $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\|x\|^2 = \left\| x - \sum_{k=0}^{N} <x, e_k> e_k \right\|^2 + \sum_{k=0}^{N} |<x, e_k>|^2$$

(b) <u>l'inégalité de Bessel</u>:

$$\sum_{n\geq 0} |<x, e_n>|^2 \leq \|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

preuve: (i) se démontre par récurrence en utilisant la proposition 4 (a)

(ii)(a): posons $u = \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k \rangle e_k$ et $v = x - u$

On a $x = u + v$.

De plus, $\langle u, v \rangle = \langle u, x - u \rangle$

$$= \langle u, x \rangle - \|u\|^2$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle - \|u\|^2$$

$$= \sum_{k=0}^{N} |\langle x, e_k \rangle|^2 - \|u\|^2$$

Comme les $\{e_k\}_k$ forment un système orthonormé, on en déduit que $\|u\|^2 = \left\|\sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k \rangle e_k\right\|^2$

$$= \sum_{k=0}^{N} |\langle x, e_k \rangle|^2 \text{ d'après (i)}$$

D'où $\langle u, v \rangle = 0$.

Ainsi $\|x\|^2 = \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, ce qui donne l'identité annoncée.

(ii)(b) : d'après (ii)(a), on a pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{N} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Ceci prouve que la série $\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2$ converge (la suite des sommes partielles étant croissante et majorée) et par passage à la limite dans $(*)$, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 . \qquad \blacksquare$$

3.2. Espace de Hilbert et complétion.

Définition : Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ tel que H est complet pour la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Exemples : (1) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

(2) L'espace $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est un espace de Hilbert

(3) L'espace $L^2([a,b])$, $-\infty < a < b < +\infty$ est un espace de Hilbert.

(4) L'espace $\mathcal{L}^2([-1,1]) = \{ f \in C([-1,1]) :$ ⑱

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt < +\infty \}$$

est un espace préhilbertien pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

mais il n'est pas complet ! Donc ce n'est pas un espace de Hilbert. Pour voir qu'il n'est pas complet, on peut considérer

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On montre alors que $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}^2([-1,1])$. De plus, si $(f_n)_n$ convergeait vers f dans $\mathcal{L}^2([-1,1])$ alors nécessairement

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq 1 \end{cases},$$

ce qui interdit à f d'être continue en 0 !

On obtient ainsi une contradiction et donc $(f_n)_n$ ne converge pas dans $\mathcal{L}^2([-1,1])$.

Nous allons montrer que tout espace préhilbertien peut se plonger de façon isométrique dans un espace de Hilbert.

Théorème ⑥ : (complété d'un e.v.n) : Soit X un e.v.n.
Alors il existe un espace de Banach $\hat{X}$, appelé complété de X, avec la propriété suivante :
il existe une application linéaire $i : X \longrightarrow \hat{X}$ isométrique et d'image dense.
De plus, le complété de X est unique à un unitaire près : autrement dit si Y est un autre complété de X, alors il existe un isomorphisme isométrique (i.e un unitaire) $T : \hat{X} \longrightarrow Y$.

preuve : On considère $\tilde{X}$ l'ensemble de toutes les suites de Cauchy de X. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\tilde{X}$ en posant :

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad \text{si} \quad x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On note alors $\hat{X} = \tilde{X}/\sim$.

Il est clair que $\tilde{X}$ et $\hat{X}$ sont des espaces vectoriels.

Remarquons que si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de X, alors $(\|x_n\|)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|$ existe.

On peut donc poser :

$$\|[(x_n)]\|_0 = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| ,$$

où $[(x_n)]$ représente la classe d'équivalence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $\widehat{X}$.

Remarquons que $\|\cdot\|_0$ est bien définie sur $\widehat{X}$ car si

$$[(x_n)] = [(y_n)] \text{ alors } x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 ,$$

ce qui assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|y_n\|$.

On vérifie que $\|\cdot\|_0$ est une norme sur $\widehat{X}$ et que $(\widehat{X}, \|\cdot\|_0)$ est complet. (Exercice).

On définit alors

$$i : X \longrightarrow \widehat{X}$$
$$x \longmapsto [x]$$

où $[x]$ est la classe d'équivalence des suite qui convergent vers x.

L'application i est évidemment linéaire. De plus, par définition

$$\| i(x) \|_0 = \|x\| \quad , \; x \in X .$$

Donc i est isométrique.

<u>Montrons que $\mathrm{Im}\, i$ est dense dans $\hat{X}$</u>

Soit $u = [(x_n)] \in \hat{X}$, où $(x_n)_n \in \tilde{X}$.

Autrement dit, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy et donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$(*) \quad n, p \geq N_0 \longrightarrow \|x_n - x_p\| \leq \varepsilon .$$

Posons alors $v_n^p = x_p$, $n \geq 0$ et $u_p = [(v_n^p)_n]$

On a $i(x_p) = u_p$ et

$$\| i(x_p) - u \|_0 = \| [(v_n^p - x_n)_n] \|_0 = \| [(x_p - x_n)_n] \|_0$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \|x_p - x_n\| .$$

Ainsi pour $p \geq N_0$, on obtient avec $(*)$ que

$$\| i(x_p) - u \|_0 \leq \varepsilon .$$

Ceci prouve que $u = \lim_{p \to +\infty} i(x_p)$ et donc

$\operatorname{Im} i$ est dense dans $\hat{X}$.

Il reste à montrer l'unicité à un unitaire près :

Supposons qu'il existe Y espace de Banach et $\exists\, i_1 : X \longrightarrow Y$ isométrie linéaire et à images denses.

Posons $T(i(x)) = i_1(x)$, $x \in X$.

Remarquons que T est bien défini car

$$i(x) = i(y) \xrightarrow{\quad} x = y \Longrightarrow i_1(x) = i_1(y).$$

(i isométrie donc injective !)

On vérifie aisément que T est linéaire.

. T est isométrique : pour tout $x \in X$, on a :

$$\|T(i(x))\|_Y = \|i_1(x)\|_Y \underset{\text{car } i_1 \text{ isométrique}}{=} \|x\|_X = \|i(x)\|_0$$

Comme $\operatorname{Im} i$ est dense dans $\hat{X}$, l'application T s'étend en une isométrie $T : \hat{X} \longrightarrow Y$.

Il reste à vérifier que T est surjective.

Mais comme $\hat{X}$ et Y sont des espaces de Banach, $\operatorname{Im} T$ est fermée dans Y (T est une isométrie !).

Il suffit donc de prouver que $\operatorname{Im} T$ est dense dans Y. Cela découle aisément des inclusions :

$$\operatorname{Im}(i_1) \subset \operatorname{Im} T \subset Y$$

et du fait que $\operatorname{Im}(i_1)$ est dense dans Y. ∎

Corollaire ⑦ : (complété d'un espace préhilbertien) :

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espace préhilbertien. Alors il existe un espace de Hilbert $(\hat{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{H}})$ et une isométrie linéaire $\phi : H \longrightarrow \hat{H}$ telle que $\operatorname{Im} \phi$ est dense dans $\hat{H}$.

De plus, ce complété est unique à un unitaire près.

preuve : d'après le théorème ⑥, il existe un espace de Banach $\hat{H}$ et une isométrie linéaire $\phi : H \longrightarrow \hat{H}$ telle que $\operatorname{Im} \phi$ est dense dans $\hat{H}$.

Il reste à montrer que $\|\cdot\|_{\hat{H}}$ découle d'un produit scalaire. Pour cela, on peut remarquer que $\|\cdot\|_{\hat{H}}$ vérifie l'identité du parallélogramme :

en effet, pour tous $x, y \in H$, on a :

$$\|\phi(x)+\phi(y)\|_{\hat{H}}^2+\|\phi(x)-\phi(y)\|_{\hat{H}}^2=\|\phi(x+y)\|_{\hat{H}}^2+\|\phi(x-y)\|_{\hat{H}}^2$$

$$=\|x+y\|_H^2+\|x-y\|_H^2$$

$$=2\left(\|x\|_H^2+\|y\|_H^2\right)$$

$$=2\left(\|\phi(x)\|_{\hat{H}}^2+\|\hat{\phi}(y)\|_{\hat{H}}^2\right).$$

Comme $\operatorname{Im}\phi$ est dense dans $\hat{H}$, on en déduit que $\forall\, X, Y \in \hat{H}$, on a :

$$\|X+Y\|_{\hat{H}}^2+\|X-Y\|_{\hat{H}}^2=2\left(\|X\|_{\hat{H}}^2+\|Y\|_{\hat{H}}^2\right).$$

Il reste à appliquer le théorème de von-Neumann pour conclure que $\hat{H}$ est un espace de Hilbert.

L'unicité du complété découle immédiatement du théorème ⑥. ∎

3.3. Théorèmes de projection :

Théorème ⑧ (Théorème de projection sur un convexe fermé) :

Soit H un espace de Hilbert et $K \subset H$ un convexe fermé, non vide. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $u \in K$ tel que

$$(*) \quad \|x-u\| = \operatorname{dist}(x,K) = \inf_{v\in K}\|x-v\|.$$

De plus, u est caractérisé par les propriétés

$$(**)\quad \begin{cases} u \in K \\ \text{et} \\ \mathrm{Re}(\langle x-u, v-u\rangle) \leq 0 \ , \ \forall\, v \in K. \end{cases}$$

On note $u = P_K x$ et u s'appelle la projection de x sur K.

preuve: (a) Existence de u : d'après les propriétés de la borne inférieure, on sait qu'il existe une suite $(v_n)_n \subset K$ telle que

$$d_n := \|x - v_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} d := \mathrm{dist}(x, K).$$

L'idée est de montrer que $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy.

En appliquant l'identité du parallélogramme à $a := x - v_n$ et $b := x - v_m$, on a :

$$\|2x - (v_n + v_m)\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2\left(\|x - v_n\|^2 + \|x - v_m\|^2\right)$$

i.e

$$4\left\|x - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2\left(d_n^2 + d_m^2\right)$$

Or K étant convexe, on a $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$ et

donc $$\left\|x - \frac{v_n + v_m}{2}\right\| \geq \mathrm{dist}(x, K) = d.$$

D'où $$\|v_n - v_m\|^2 \leq 2\left(d_n^2 + d_m^2\right) - 4d^2.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} d_n^2 = d^2$, on en déduit que

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|v_n - v_m\| = 0$$ et donc $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans H, qui est complet. Ainsi, $(v_n)_n$ converge vers $u \in H$.

Mais comme K est fermé, $u \in K$.

Ainsi $d := \lim_{n\to+\infty} \|x - v_n\| = \|x - u\|$

i.e $\|x-u\| = \mathrm{dist}(x, K)$.

(b) Unicité de u : supposons $\exists\, w \in K$ tq $\|x - w\| = d$

Alors $\frac{u+w}{2} \in K$ et donc $d \leq \left\|x - \frac{u+w}{2}\right\|$.

L'identité du parallélogramme donne alors :

$$2\left(\|x-u\|^2 + \|x-w\|^2\right) = \|2x - (u+w)\|^2 + \|u-w\|^2$$

et donc

$$\|u-w\|^2 = 2\left(\|x-u\|^2 + \|x-w\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{u+w}{2}\right\|^2$$
$$\leq 2\left(d^2 + d^2\right) - 4d^2 = 0$$

D'où $w = u$.

(c) Caractérisation de u par $(**)$:

il s'agit de mq $(*)$ et $(**)$ sont équivalents.

Soit $u \in K$ vérifiant $(*)$ et soit $v \in K$.

On a $w = (1-t)u + tv \in K$, $\forall t \in [0,1]$.

Donc $\|x-u\| \leq \|x-w\| = \|(x-u) - t(v-u)\|$

Ainsi $\|x-u\|^2 \leq \|(x-u) - t(v-u)\|^2$

$$= \|x-u\|^2 + t^2\|v-u\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}(\langle x-u, v-u\rangle)$$

D'où $2t\,\mathrm{Re}(\langle x-u, v-u\rangle) \leq t^2\|v-u\|^2$.

Simplifions par t et faisons tendre t vers 0, ce qui donne

$\mathrm{Re}(\langle x-u, v-u\rangle) \leq 0$.

Réciproquement si $u \in K$ vérifie $(**)$, on a :

$$\|v-x\|^2 = \|v-u+u-x\|^2$$

$$= \|v-u\|^2 + \|u-x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle v-u, u-x\rangle)$$

$$= \|v-u\|^2 + \|u-x\|^2 \underbrace{- 2\,\mathrm{Re}(\langle x-u, v-u\rangle)}_{\leq 0 \text{ d'après } (**)}$$

$$\geq \|u-x\|^2$$

D'où $\forall v \in K$, $\|u-x\| \leq \|v-x\|$

ce qui donne $\mathrm{dist}(x,K) = \|u-x\|$

Proposition 9 : Sous les hypothèses du théorème 8, on a :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in H \times H : \quad \|P_K x_1 - P_K x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|.}$$

preuve : posons $u_1 = P_K x_1$, $u_2 = P_K x_2$. D'après le théorème 8, on a :

(1) $\mathrm{Re}(\langle x_1 - u_1, v - u_1 \rangle) \leq 0 \quad , \forall v \in K$

et

(2) $\mathrm{Re}(\langle x_2 - u_2, v - u_2 \rangle) \leq 0 \quad , \forall v \in K.$

En reportant $v = u_2$ dans (1) et $v = u_1$ dans (2) on obtient après addition :

$$\mathrm{Re}\left(\langle x_1 - u_1, u_2 - u_1 \rangle + \langle x_2 - u_2, u_1 - u_2 \rangle\right) \leq 0$$

i.e $\quad \mathrm{Re}(\langle x_1 - u_1 - x_2 + u_2, u_2 - u_1 \rangle) \leq 0.$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}(\langle x_1 - u_1 - x_2 + u_2, u_2 - u_1 \rangle) \\ &= \mathrm{Re}(\langle x_1 - x_2 + u_2 - u_1, u_2 - u_1 \rangle) \\ &= \mathrm{Re}(\langle x_1 - x_2, u_2 - u_1 \rangle) + \|u_2 - u_1\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi $\quad \|u_2 - u_1\|^2 \leq \mathrm{Re}(\langle x_2 - x_1, u_2 - u_1 \rangle).$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\|u_2 - u_1\|^2 \leq \|x_1 - x_2\| \, \|u_2 - u_1\| .$$

Si $u_2 = u_1$, l'inégalité est triviale et sinon on simplifie par $\|u_2 - u_1\|$, ce qui donne le résultat. ∎

Corollaire (10) (Théorème de la projection orthogonale) :

Soit $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé. Soit $x \in H$.
Alors, il existe un unique $u \in M$ tel que

$$\|x - u\| = \text{dist}\,(x, M) .$$

De plus, $u = P_M x$ est caractérisée par les propriétés suivantes :

$$u \in M \text{ et } \langle x - u, v \rangle = 0, \ \forall v \in M .$$

L'élément $u = P_M x$ s'appelle la projection orthogonale de x sur M.

preuve : L'existence et l'unicité de u résulte immédiatement du théorème (8), puisqu'un s.e.v. est évidemment convexe !
Il reste à prouver la caractérisation. D'après le théorème (8), on sait que $u = P_M x$ satisfait

$$\text{Re}\left(\langle x - u, v - u \rangle\right) \leq 0 \quad , \forall v \in M .$$

En écrivant que

$$\text{Re}\left(\langle x - u, v \rangle\right) = \text{Re}\left(\langle x - u, (v+u) - u \rangle\right) \text{ et}$$

en remarquant que $v + u \in M$ (car M est un s.e.v.), on en déduit que $\mathrm{Re}(\langle x-u, v\rangle) \leq 0$, $\forall v \in M$

C'est aussi vrai en remplaçant v par $-v \in M$, ce qui

donne $\mathrm{Re}(\langle x-u, v\rangle) = 0$, $\forall v \in M$.

Dans le cas complexe, si on applique cette égalité à $iv \in M$,

on en déduit aussi que $\mathrm{Im}(\langle x-u, v\rangle) = 0$,

d'où $\langle x-u, v\rangle = 0$, $\forall v \in M$.

Réciproquement, si $u \in M$ et satisfait $\langle x-u, v\rangle = 0$, $\forall v \in M$,

on a en particulier (comme $v-u \in M$),

$\mathrm{Re}(\langle x-u, v-u\rangle) \leq 0$ et donc d'après le Thm 8,

on a $u = P_M x$.

Théorème 11 : Soit F un sous espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. On a les propriétés suivantes :

(a) $H = F \oplus F^{\perp}$ et pour tout $x \in H$,

$$x = P_F(x) + P_{F^{\perp}}(x).$$

(b) $$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_{F^{\perp}}(x)\|^2$$

(c) L'application $P_F : H \longrightarrow F$ est linéaire continue et pour tout $x \in H$, $\|P_F x\| \leq \|x\|$.

De plus, si $F \neq \{0\}$, on a $\|P_F\| = 1$

(d) $P_F^2 = P_F$ (on dit que P_F est idempotent).

(e) Pour tout $x, y \in H$, on a:

$$(P_F x, P_F y) = (P_F x, y) = (x, P_F y)$$

L'application P_F s'appelle la projection orthogonale de H sur F.

preuve: (a) D'après le corollaire 10, on a:

$$< x - P_F(x), y > = 0, \ \forall y \in F$$

Autrement dit, $x - P_F(x) \in F^\perp$, ce qui prouve que

$$H = F + F^\perp.$$

La somme est directe car si $x \in F \cap F^\perp$, on a:

$$\|x\|^2 = < x, x > = 0 \quad \text{donc} \quad F \cap F^\perp = \{0\},$$

ce qui achève de prouver que $H = F \oplus F^\perp$.

Il reste à montrer que $P_{F^\perp} = I - P_F$.

Tout d'abord, $(I - P_F)(x) \in F^\perp$ car

$$< (I - P_F)(x), y > = < x - P_F(x), y > = 0, \ \forall y \in F.$$

Donc d'après le corollaire 10, il reste à vérifier que

$$< x - (I - P_F)(x), y > = 0, \ \forall y \in F^\perp.$$

Mais $< x-(I-P_F)(x), y > = < P_F(x), y > = 0, \forall y \in F^{\perp}$. (32)

D'où, on conclut que $P_{F^\perp}(x) = (I-P_F)(x)$.

(b) Cela découle immédiatement du théorème de Pythagore.

(c) Soient $x, y \in H$ et $z \in F$. On a :

$$< x+y-(P_F(x)+P_F(y)), z > = < x-P_F(x), z > + < y-P_F(y), z >$$
$$= 0$$

D'où d'après la caractérisation et l'unicité de la projection orthogonale (corollaire (10)), on en déduit que :

$$P_F(x+y) = P_F(x) + P_F(y).$$

De même, on montre que $P_F(\lambda x) = \lambda P_F(x)$

Ainsi P_F est linéaire.

L'inégalité $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ découle trivialement de (b).

Cette inégalité dit que P_F est continue et $\|P_F\| \leq 1$.

Enfin, remarquons que si $x \in F$, on a : $P_F(x) = x$.

Donc si $x \in F \setminus \{0\}$, on a : $\|x\| = \|P_F(x)\| \leq \|P_F\| \|x\|$.

et après simplification par $\|x\|$, on obtient $1 \leq \|P_F\|$.

D'où $\|P_F\| = 1$.

(d) $P_F^2 = P_F$ est évident car $P_F(x) = x, \forall x \in F$.

(e) Soient $x, y \in H$. En utilisant une nouvelle fois, le corollaire 10, on a :

$$< x - P_F(x), P_F(y) > = 0 ,$$

i.e $\quad < x, P_F(y) > \; = \; < P_F(x), P_F(y) >$

De même, $\quad < P_F(x), P_F(y) > = \overline{< P_F(y), P_F(x) >}$

$$= \overline{< y , P_F(x) >}$$

$$= < P_F(x), y > .$$

■

Corollaire 12 : Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H.

On a $\quad F^{\perp\perp} = F.$

preuve : d'après le (i) de la proposition 4, on a $F \subset F^{\perp\perp}$.

Soit maintenant $x \in F^{\perp\perp}$. D'après le théorème 11, il existe un unique $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$ tel que

$$x = x_F + x_{F^\perp}$$

Or $\quad \|x_{F^\perp}\|^2 = < x_{F^\perp}, x_{F^\perp} >$

$$= < x - x_F , x_{F^\perp} > = 0$$

D'où $\quad x_{F^\perp} = 0 \quad$ et $\quad x = x_F \in F.$ ■

Corollaire 13 : Soit F un s.e.v. d'un espace de Hilbert H.

(a) $F^{\perp\perp} = \overline{F}$

(b) F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

preuve : (a) On a $F \subset \overline{F}$. D'où d'après le (g) de la proposition 4, on a

$$\overline{F}^{\perp} \subset F^{\perp}$$

et $$F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp}.$$

Le corollaire 12 implique que $\overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}$.

D'où $$F^{\perp\perp} \subset \overline{F}.$$

D'autre part, d'après le (i) de la proposition 4, on a :

$F \subset F^{\perp\perp}$ et comme $F^{\perp\perp}$ est fermé,

on a $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$, ce qui prouve que $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

(b) En utilisant le (a), on a :

F dense dans H ssi $F^{\perp\perp} = H$.

Si $F^{\perp} = \{0\}$, le (d) de la proposition 4 implique que $F^{\perp\perp} = H$ et donc F est dense dans H.

Réciproquement, si F est dense dans H, et $x \in F^{\perp}$, on a :

$$\langle x, y \rangle = 0, \ \forall y \in F$$

et comme $\overline{F} = H$, on en déduit que $\langle x, z \rangle = 0$, $\forall z \in H$. Ainsi $x \in H^\perp = \{0\}$. ∎

Définition: Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$.

(a) On dit que A est totale si $\mathrm{Vect}(A)$ est dense dans H

(b) Si $(x_n)_n$ est une suite de vecteurs de H, on dit que $(x_n)_n$ est complète si $A = \{x_n : n \geq 1\}$ est totale, i.e

$$\overline{\mathrm{Vect}\{x_n : n \geq 1\}} = H.$$

Corollaire 14: Soit $A \subset H$. On a:

A est totale ssi $A^\perp = \{0\}$.

En particulier, $(x_n)_n$ est complète dans H ssi

$$\langle x, x_n \rangle = 0, \ n \geq 1 \implies x = 0.$$

preuve: d'après le corollaire 13, (b), A est totale ssi $(\mathrm{Vect}(A))^\perp = \{0\}$.

Mais par linéarité du produit scalaire, il est clair que

$$(\mathrm{Vect}(A))^\perp = A^\perp.$$ ∎

3.4. Bases hilbertiennes.

Définition: Soit H un espace de Hilbert. Une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs de H est une <u>base hilbertienne</u> de H si

- $(e_n)_{n\geq 1}$ est une suite orthonormée.
- $(e_n)_{n\geq 1}$ est complète dans H.

Théorème (15): Soit H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite orthonormée de vecteurs de H.

LASSE: (i) $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne

(ii) $\forall x \in H, \quad x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$

(iii) $\forall x \in H, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$

L'identité (iii) s'appelle l'<u>identité de Parseval</u>.

<u>preuve:</u> <u>(i) ⇒ (ii)</u>: remarquons que d'après l'identité de Pythagore, pour $m > n$, on a:

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 =$$

$$= \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 .$$

D'autre part, l'inégalité de Bessel implique que la série $\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2$ converge. On en déduit

donc que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2 = 0$.

Ainsi la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\right)_n$ est une suite de Cauchy

dans H - complet donc elle converge.

De plus, on a :

$$\langle x - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle e_k , e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle \langle e_k, e_j\rangle$$

$$= \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0$$

Ceci étant vrai pour tout j et la suite $(e_j)_j$ étant

complète, on en déduit que $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : En utilisant le théorème 5 (ii), on a :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_k\rangle|^2 + \left\| x - \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2$$

En faisant tendre $N \longrightarrow +\infty$, on obtient l'identité de Parseval.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : si pour tout $n \geqslant 1$, $\langle x, e_n\rangle = 0$, l'identité

de Parseval implique que $x = 0$ et donc $(e_n)_n$ est

complète. Comme elle est aussi orthonormée, on en déduit

que $(e_n)_n$ est une base hilbertienne.

Corollaire 16 : Soit H un espace de Hilbert et supposons qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de H.

Alors si on définit $\phi(x) = (\langle x, e_n\rangle)_{n\geq 1}$, $x \in H$, l'application ϕ est un isomorphisme isométrique de H sur $l^2(\mathbb{N}^*)$.

preuve : le fait que $\phi(x) \in l^2$ et $\|\phi(x)\|_{l^2} = \|x\|$, $\forall x \in H$ découle immédiatement du théorème 15.

La linéarité de ϕ est évidente. Il reste à montrer la surjectivité. Supposons que $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^2$. Il est facile de voir en utilisant l'identité de Pythagore que la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n\right)_{N\geq 1}$ est une suite de Cauchy et donc converge dans H. Notons $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$

On a alors
$$\phi(x) = (\langle x, e_p\rangle)_{p\geq 1}$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \langle e_n, e_p\rangle\right)_{p\geq 1}$$
$$= (\alpha_p)_{p\geq 1} = \alpha,$$

ce qui prouve la surjectivité de ϕ. ∎

Le résultat précédent soulève la question de l'existence d'une base hilbertienne. Si H admet une base hilbertienne, comme $H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_n : n \geq 1\}}$, il est facile de voir que nécessairement H est séparable. En fait, la réciproque est vraie ! Pour le montrer, rappelons d'abord le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

soient H un espace de Hilbert de dimension infinie, $(f_n)_n$ une suite de vecteurs libres de H et pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons $V_p = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$. Si on définit par récurrence

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} \quad \text{et} \quad e_p = \frac{f_p - P_{V_{p-1}}(f_p)}{\|f_p - P_{V_{p-1}}(f_p)\|}, \quad p \geq 2,$$

alors $(e_n)_{n \geq 1}$ est une suite orthonormée telle que

$$\mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_p\} = V_p.$$

Théorème 17 : Soit H un espace de Hilbert séparable. Alors il existe une base hilbertienne de H.

preuve : La séparabilité de H assure l'existence d'une partie dénombrable dense $(a_n)_{n \geq 1}$ de H et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(a_n)_{n \geq 1}$ est libre. On applique alors le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour construire une suite $(e_n)_{n \geq 1}$ orthonormale telle que pour tout $p \geq 1$

$$\mathrm{Vect}\{a_1,\dots,a_p\} = \mathrm{Vect}\{e_1,\dots,e_p\}.$$

Il reste à montrer que $(e_n)_{n\geq 1}$ est totale.

Pour cela, fixons $x\in H$ et $\varepsilon>0$. Par densité de $(a_n)_{n\geq 1}$ dans H, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\|x-a_N\|\leq\varepsilon$

Or $a_N\in\mathrm{Vect}\{a_1,\dots,a_N\} = \mathrm{Vect}\{e_1,\dots,e_N\}$

donc il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ tels que

$$a_N = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i e_i .$$

Donc $$\|x-a_N\| = \left\|x-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i e_i\right\|\leq\varepsilon ,$$

ce qui prouve que $\mathrm{Vect}\{e_i : i\geq 1\}$ est dense dans H

et donc $(e_n)_{n\geq 1}$ est complète. ∎

Application : séries de Fourier.

Soit $\mathbb{T} = \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$. Si F est une fonction définie sur $\mathbb{T}$ et si f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = F(e^{it}) \qquad , (1)$$

alors f est périodique de période 2π.

Inversement, si f est une fonction périodique sur $\mathbb{R}$, de période 2π, il existe une fonction F sur $\mathbb{T}$

vérifiant (1). On peut ainsi identifier les fonctions définies sur $\mathbb{T}$ et les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques.

On écrira parfois $F(t)$ à la place de $f(t) = F(e^{it})$ même si on pense à F comme étant définie sur $\mathbb{T}$.

Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit les <u>coefficients de Fourier</u> de f par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

La <u>série de Fourier</u> de f est la série

$$Sf = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n,$$

où $e_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$

Théorème (18) : La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Preuve : il est clair que

$$<e_n, e_p> = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-ipt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}dt$$

$$= \delta_{np} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il reste à montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est totale.

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Comme $C(\mathbb{T})$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C(\mathbb{T})$ telle que

$$\|f-g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Remarquons maintenant que, d'après le corollaire 8 du chapitre 1, il existe $P \in \mathcal{L}in(e_n : n \in \mathbb{Z})$ tel que

$$\|P-g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où $\quad \|g-P\|_2 \leq \|g-P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$,

et l'inégalité triangulaire implique que

$$\|f-P\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-P\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(e_n : n \in \mathbb{Z})$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne. ∎

Corollaire 19 : Pour toute $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a :

(a) $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{int}$,

où la série converge dans $L^2(\mathbb{T})$

(b) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2$

(c) Pour toute $f, g \in L^2(\mathbb{T})$,

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\,\overline{\hat{g}(n)}.$$

preuve: découle des théorèmes 18 et 15. ∎

3.5. Dualité et théorème de Riesz:

Soit H un espace de Hilbert, $x_0 \in H$ et

$$\phi_{x_0} : H \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \langle x, x_0 \rangle$$

Il est clair que ϕ_{x_0} est linéaire et

$$|\phi_{x_0}(x)| \leq \|x\|\,\|x_0\|.$$

Donc $\phi_{x_0} \in H^*$ et $\|\phi_{x_0}\| \leq \|x_0\|$.

De plus, $\phi_{x_0}(x_0) = \langle x_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$ et

donc $\|\phi_{x_0}\| = \|x_0\|$ $(*)$.

Le résultat suivant montre que toute forme linéaire sur H est de la forme ϕ_x, $x \in H$.

Théorème 10 (Thm de représentation de Riesz) :

Soit H un espace de Hilbert et $\phi \in H^*$.
Alors il existe un unique $x_0 \in H$ tel que $\phi = \phi_{x_0}$.

preuve : si $\phi = 0$, on peut prendre $x_0 = 0$. Sinon, si $\phi \neq 0$, comme ϕ est continue, le sous espace $F = \ker \phi$ est un sous espace vectoriel fermé et comme $F \neq H$, d'après le corollaire 13, on a $F^\perp \neq \{0\}$.
Soit donc $y_0 \in F^\perp \setminus \{0\}$. Alors $\phi(y_0) \neq 0$ car sinon $y_0 \in F \cap F^\perp = \{0\}$. Donc quitte à diviser y_0 par $\phi(y_0)$, on peut supposer que $\phi(y_0) = 1$.

Ainsi pour tout $x \in H$, $x - \phi(x) y_0 \in \ker \phi = F$

D'où $0 = \langle x - \phi(x) y_0, y_0 \rangle = \langle x, y_0 \rangle - \phi(x) \|y_0\|^2$

i.e $\phi(x) = \langle x, \frac{y_0}{\|y_0\|^2} \rangle$.

On en déduit que $\phi = \phi_{x_0}$, avec $x_0 = \frac{y_0}{\|y_0\|^2}$.

L'unicité de x_0 découle de (*). ∎

Application : adjoint d'un opérateur.

Corollaire 21 : Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Il existe une unique application linéaire continue $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ telle que, pour tout $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$, on a :

$$\langle Th_1, h_2 \rangle_{H_2} = \langle h_1, T^* h_2 \rangle_{H_1} .$$

De plus, l'application
$$\mathcal{L}(H_1, H_2) \longrightarrow \mathcal{L}(H_2, H_1)$$
$$T \longmapsto T^*$$
est anti-linéaire, isométrique. On a aussi

(a) $T^{**} = T$

(b) $\|TT^*\| = \|T\|^2$

L'application T^*, associée à T et donnée par le corollaire 21, s'appelle l'adjoint de T. C'est un objet important dans l'étude d'un opérateur....

preuve (du corollaire 21) : fixons $h_2 \in H_2$.

L'application $h_1 \longmapsto \langle Th_1, h_2 \rangle_{H_2}$ est une forme linéaire continue sur H_1 (exercice !).

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément noté $T^*h_2 \in H_1$ tel que

$$\langle Th_1, h_2 \rangle_{H_2} = \langle h_1, T^*h_2 \rangle_{H_1}$$

On vérifie facilement la linéarité de T^*.

De plus, ce qui précède montre aussi que

$$\|T^*h_2\| = \sup_{\substack{h_1 \in H_1 \\ \|h_1\| \leq 1}} |\langle Th_1, h_2 \rangle|$$

$$\leq \sup_{\substack{h_1 \in H_1 \\ \|h_1\| \leq 1}} \|Th_1\| \, \|h_2\| \quad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

$$= \|T\| \, \|h_2\|$$

D'où $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ et $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Il est clair, par unicité, que $T^{**} = T$.

D'où $\|T\| = \|T^{**}\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$,

ce qui donne $\|T\| = \|T^*\|$.

Il reste à prouver (b). On a :

$$\|TT^*\| \leq \|T\|\,\|T^*\| = \|T\|^2.$$

D'autre part, si $h_2 \in H_2$, on a :

$$\langle T\,T^*h_2, h_2 \rangle_{H_2} = \langle T^*h_2, T^*h_2 \rangle_{H_1}$$

$$= \|T^*h_2\|^2$$

D'où $\quad \|T^*h_2\|^2 \leq \|TT^*\|\,\|h_2\|^2$

Ainsi $\quad \|T^*\|^2 = \|T\|^2 \leq \|T\,T^*\|,$

ce qui donne l'égalité $\quad \|TT^*\| = \|T\|^2.$ $\blacksquare$

Chapitre 4 : Transformation de Fourier

4.1. Rappels sur les espaces L^p.

Soit $(X, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré. Pour $1 \leq p < +\infty$, on note $\mathcal{L}^p(m)$ l'espace de toutes les fonctions mesurables $f : X \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que :

$$\int_X |f(t)|^p \, dm(t) < +\infty,$$

et on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(t)|^p \, dm(t) \right)^{1/p}.$$

Notons que $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ m-presque partout.

Théorème 1 (Inégalité de Minkowski): soit $1 \leq p < +\infty$.

Pour $f, g \in \mathcal{L}^p(m)$, on a :

$$(1) \quad \left(\int_X |f+g|^p \, dm \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p \, dm \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \, dm \right)^{1/p}.$$

En particulier, $\mathcal{L}^p(m)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions mesurables et $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(m)$.

preuve: Dans le cas $p = 1$, cela résulte trivialement de

$$|f+g| \leq |f| + |g|.$$

Supposons donc maintenant que $p > 1$. L'application $t \longmapsto t^p$ est convexe sur $[0, +\infty[$ et donc on a :

$\forall \alpha \in [0,1]$, $\forall u, v \geq 0$.

$$(*) \qquad (\alpha u + (1-\alpha) v)^p \leq \alpha u^p + (1-\alpha) v^p .$$

Pour montrer (1), on peut supposer que $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_p > 0$

(car sinon $f = 0$ m-p.p. et alors $f+g = g$ m-p.p et l'inégalité (1) est triviale, ou $g = 0$ m-p.p. et alors $f+g = f$ m-p.p et l'inégalité est aussi trivialement vérifiée).

On applique alors $(*)$ à $u = \dfrac{|f(t)|}{\|f\|_p}$, $v = \dfrac{|g(t)|}{\|g\|_p}$

et $\alpha = \dfrac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}$. On obtient alors

$$\left(\frac{|f(t)| + |g(t)|}{\|f\|_p + \|g\|_p}\right)^p \leq \frac{\alpha}{\|f\|_p^p} |f(t)|^p + \frac{(1-\alpha)}{\|g\|_p^p} |g(t)|^p$$

et en intégrant :

$$\int_X \left(\frac{|f(t)| + |g(t)|}{\|f\|_p + \|g\|_p}\right)^p dm(t) \leq \frac{\alpha}{\|f\|_p^p} \int_X |f(t)|^p dm(t) +$$

$$+ \frac{1-\alpha}{\|g\|_p^p} \int_X |g(t)|^p dm(t) .$$

D'où $$\int_X \left(\frac{|f(t)| + |g(t)|}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right)^p d\mu(t) \leq \alpha + (1-\alpha) = 1,$$

ce qui donne le résultat. $\blacksquare$

On a vu que $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme en général, puisque $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ m-presque partout. Pour obtenir une norme, il faut "quotienter" ! Avant d'expliquer cela, faisons une petite parenthèse sur les espaces quotients.

Petite parenthèse sur les espaces quotients :

Soit E un espace vectoriel, N un sous espace vectoriel de E, alors la relation définie par

$$x \sim y \iff x - y \in N$$

est une relation d'équivalence sur E.

En désignant par $\tilde{x} = x + N$ la classe d'équivalence de x, on peut définir sur E/N une addition par

$$\tilde{x} + \tilde{y} = \widetilde{x+y}$$ et une multiplication par les scalaires en posant $\alpha \cdot \tilde{x} = \widetilde{\alpha x}$, faisant de E/N un espace vectoriel, appelé espace vectoriel quotient de E par N.

Lemme 2 : Soit $E = (E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et N un sous espace vectoriel fermé de E.

Posons $$\|\tilde{x}\|_{E/N} := \mathrm{dist}(x, N) = \inf\{\|x-y\| : y \in N\}$$

Alors a) $\|\cdot\|_{E/N}$ est une norme sur E/N et la surjection canonique $\pi : E \longrightarrow E/N$ est continue.

b) Si E est complet, alors E/N est complet.

preuve: (a) Vérifions tout d'abord que $\|\tilde{x}\|_{E/N}$ est bien définie et ne dépend pas du représentant choisi : soient $x_0, x_1 \in E$ tels que $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1$, i.e. tels que $x_0 - x_1 \in N$.

Alors en écrivant $x_0 = x_1 + (x_0 - x_1)$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(x_0, N) &= \mathrm{dist}(x_1 + (x_0 - x_1), N) \\ &= \mathrm{dist}(x_1, N + x_1 - x_0) \\ &= \mathrm{dist}(x_1, N),\end{aligned}$$

car N étant un sous espace vectoriel, on a $N + x_1 - x_0 = N$.

Donc l'application $\|\cdot\|_{E/N} : E/N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie.

De plus, on a : $$\begin{aligned}\|\tilde{x}\|_{E/N} = 0 &\iff \mathrm{dist}(x, N) = 0 \\ &\iff x \in \overline{N} = N \text{ car } N \text{ fermé} \\ &\iff \tilde{x} = \tilde{0}.\end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $x \in E$, on a.

$$\|\lambda \tilde{x}\|_{E/N} = \|\widetilde{\lambda x}\|_{E/N} = \mathrm{dist}(\lambda x, N)$$
$$= \inf_{y \in N} \|\lambda x - y\|$$
$$= |\lambda| \inf_{y \in N} \left\|x - \frac{y}{\lambda}\right\|$$
$$= |\lambda| \inf_{y \in N} \|x - y\| \quad , \text{ car } \frac{1}{\lambda} N = N$$
$$= |\lambda| \,\mathrm{dist}(x, N) = |\lambda| \, \|\tilde{x}\|_{E/N}.$$

Enfin, si $\tilde{x}, \tilde{y} \in E/N$, on a:

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{E/N} = \|\widetilde{x+y}\|_{E/N} = \mathrm{dist}(x+y, N).$$

Choisissons une suite $(x_n)_n$ et une suite $(y_n)_n$ de vecteurs de N telles que $\|x - x_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{dist}(x, N) = \|\tilde{x}\|_{E/N}$

et $\|y - y_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{dist}(y, N) = \|\tilde{y}\|_{E/N}$

Comme $x_n + y_n \in N$, on a:

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{E/N} \leq \|x + y - (x_n + y_n)\| \leq \|x - x_n\| + \|y - y_n\| ,$$

et en faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{E/N} \leq \|\tilde{x}\|_{E/N} + \|\tilde{y}\|_{E/N}.$$

Ainsi $\|\cdot\|_{E/N}$ vérifie bien les axiomes d'une norme.

Montrons que π est continue.

Il est clair que π est linéaire. De plus, pour $x \in E$, on a :

$$\|\pi(x)\|_{E/N} = \|\tilde{x}\|_{E/N} = \mathrm{dist}(x, N) \underset{\text{car } 0 \in N}{\leq} \|x\| .$$

Donc π est continue et $\|\pi\| \leq 1$, ce qui achève la preuve de (a).

(b) Vérifions que si $\sum_n \|\tilde{x}_n\|_{E/N}$ converge, alors $\sum_n \tilde{x}_n$ converge dans E/N.

Pour tout $n \geqslant 1$, $\exists\, y_n \in N$ tel que

$$\|x_n - y_n\| \leq \|\tilde{x}_n\| + \frac{1}{2^n} .$$

On obtient donc que $\sum_n (x_n - y_n)$ converge normalement dans E complet. Ainsi $\sum_n (x_n - y_n)$ converge dans E. Comme $\pi : E \longrightarrow E/N$ est continue, on en déduit que la série $\sum_n \pi(x_n - y_n)$ converge. Mais comme $\pi(x_n - y_n) = \pi(x_n)$ car $y_n \in N = \ker \pi$, on obtient finalement que la série $\sum_n \pi(x_n)$ converge.

Ainsi, on a montré que toute série normalement convergente (7)

dans E/N est convergente, ce qui montre que E/N est un espace de Banach. $\blacksquare$

Revenons maintenant aux espaces $\mathcal{L}^p(m)$.

Introduisons $\mathcal{N} = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable tq $f = 0$ m-p.p. $\}$

Il est clair que $\mathcal{N}$ est un s.e.v de $\mathcal{L}^p(m)$, et on peut définir l'espace vectoriel quotient

$$\boxed{L^p(m) = \mathcal{L}^p(m) / \mathcal{N}}$$

De plus, on pose pour $\tilde{f} \in L^p(m)$,

$$\|\tilde{f}\|_p := \operatorname{dist}(f, \mathcal{N}).$$

Remarquons que $\|\tilde{f}\|_p = \inf\limits_{g \in \mathcal{N}} \|f - g\|_p$,

et comme g est nulle presque partout, on a :

$\|f - g\|_p = \|f\|_p$, ainsi

$\|\tilde{f}\|_p = \|f\|_p$ et cela ne dépend pas du représentant choisi.

Même si on ne peut pas appliquer le lemme 2 (car $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p(m)$), il s'avère que les conclusions du lemme 2 vont être vraies dans $L^p(m)$.

$$\boxed{\text{Lemme 3 : Pour } 1 \leq p < +\infty, \ (L^p(m), \|\cdot\|_p) \text{ est un espace vectoriel normé.}}$$

preuve : Pour $\tilde{f} \in L^p(m)$, on a

$$\|\tilde{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ m\text{-p.p.} \Leftrightarrow f \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \tilde{f} = \tilde{0}.$$

D'autre part, si $\tilde{f} \in L^p(m)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\|\lambda \cdot \tilde{f}\|_p = \|\widetilde{\lambda f}\|_p = \|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p = |\lambda| \, \|\tilde{f}\|_p.$$

Enfin, si $\tilde{f}, \tilde{g} \in L^p(m)$, on a :

$$\|\tilde{f} + \tilde{g}\|_p = \|\widetilde{f+g}\|_p = \|f+g\|_p$$

et avec le théorème 1, on en déduit que

$$\|\tilde{f} + \tilde{g}\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p = \|\tilde{f}\|_p + \|\tilde{g}\|_p.$$

Ceci achève de prouver que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(m)$. ■

Dans la pratique, pour ne pas alourdir les notations, on ne fera pas de distinctions entre la fonction f et sa classe d'équivalence m-presque partout $\tilde{f}$ et on écrira donc

$f \in L^p(m)$ au lieu de $f \in \mathcal{L}^p(m)$. Toutefois, il (9)
faut parfois faire attention notamment lorsqu'on manipule des quantités non dénombrable de fonctions. On peut par exemple le voir dans l'exemple suivant :

<u>Exemple:</u> si $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble de toutes les parties finies de $[0,1]$, pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a :

$$\chi_A = 0 \quad \text{pp relativement à la mesure de Lebesgue}$$

(mesure pour laquelle les singletons sont de mesure nulle) et donc $\widetilde{\chi_A} = \tilde{0}$. Mais d'un autre côté, pour tout $x \in [0,1]$, on a $\sup_{A \in \mathcal{F}} \chi_A(x) = 1$ et donc $\widetilde{\sup_{A \in \mathcal{F}} \chi_A} = \widetilde{\chi}_{[0,1]}$

Ainsi $\quad \sup_{A \in \mathcal{F}} \widetilde{\chi}_A \neq \widetilde{\sup_{A \in \mathcal{F}} \chi_A}$! ■

En dehors de l'inégalité de Minkowski, l'autre inégalité fondamentale est l'inégalité de Hölder :

<u>Théorème (4) (Inégalité de Hölder)</u>: Si $1 < p < +\infty$ et si q est l'exposant conjugué de p $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, pour $f \in \mathcal{L}^p(m)$, $g \in \mathcal{L}^q(m)$, on a :

$$fg \in \mathcal{L}^1(m) \text{ et}$$

$$\int_X |fg|\,dm \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

preuve : on peut supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$ car sinon

$f = 0$ m-p.p. ou $g = 0$ m-pp et alors $fg = 0$ m-pp.

L'inégalité de Hölder est basée sur l'inégalité de convexité suivante que l'on admettra dans un premier temps :

$$(*) \qquad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b > 0.$$

On applique cette inégalité à $a = \dfrac{|f(t)|}{\|f\|_p}$ et $b = \dfrac{|g(t)|}{\|g\|_q}$, et on intègre, ce qui donne :

$$\int_X \frac{|f(t)|\,|g(t)|}{\|f\|_p \|g\|_q}\,dm(t) \leq \frac{1}{p}\int_X \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p}\,dm(t) + \frac{1}{q}\int_X \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}\,dm(t)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

d'où le résultat.

Montrons maintenant $(*)$: la fonction logarithme étant concave, on a $\forall \theta \in [0,1]$ et $\forall x, y > 0$:

$$\theta \log x + (1-\theta)\log y \leq \log(\theta x + (1-\theta) y).$$

La fonction exp étant croissante, cela donne

$$x^{\theta} y^{1-\theta} \leq \theta x + (1-\theta) y .$$

On applique alors ceci à $\theta = \frac{1}{p}$, $1-\theta = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ et $x = a^p$, $y = b^q$. On obtient :

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q . \qquad \blacksquare$$

Comme application, on a le résultat suivant.

Corollaire 5 : Soit $(X, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré de mesure finie.
Alors, pour tout $1 \leq p_1 \leq p_2 < +\infty$, on a :

$$\mathcal{L}^{p_2}(m) \subset \mathcal{L}^{p_1}(m) \subset \mathcal{L}^{1}(m) .$$

De plus, si $m(X) = 1$ (i.e m est une mesure de probabilité) alors

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2} , \quad \forall f \in \mathcal{L}^{p_2}(m) .$$

preuve : on peut supposer $p_1 < p_2$. Posons $p = \frac{p_2}{p_1}$. Comme $p > 1$, on peut utiliser l'inégalité de Hölder, ce qui donne :

$$\int_X |f|^{p_1} dm \leq \left(\int_X 1^q dm \right)^{1/q} \left(\int_X |f|^{p p_1} dm \right)^{1/p}$$

$$= \left(m(X)\right)^{1/q} \|f\|_{p_2}^{p_2/p} = \left(m(X)\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p_2}^{p_1}$$

12

Ainsi $\|f\|_{p_1} \leq (m(X))^{\frac{1}{q p_1}} \|f\|_{p_2}$,

ce qui donne $\mathcal{L}^{p_2}(m) \subset \mathcal{L}^{p_1}(m)$ et dans le cas où $m(X) = 1$, l'inclusion est contractive.

La seconde inclusion s'obtient en remplaçant p_2 par p_1 et p_1 par 1. ■

Il faut faire attention que dans le cas $m(X) = +\infty$, il n'est pas toujours possible d'avoir des inclusions entre les espaces $\mathcal{L}^p(m)$.

<u>Exemple</u>: pour tout $p_1 \neq p_2$, on a $\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R})$

En effet, si $p_1 < p_2$, considérons la fonction :

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{t^{1/p_2}} & , 0 < t \leq 1 \\ 0 & , \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, on vérifie que $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R})$ car $\frac{p_1}{p_2} < 1$

et $f \notin \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R})$ car $t \longmapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0.

Si $p_1 > p_2$, considérons la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{1/p_2}} & , t \geq 1 \\ 0 & , \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R})$ et $f \notin \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R})$. ■

Il se trouve que les espaces $L^p(m)$ ont le bon goût d'être des espaces complets. C'est l'objet du résultat suivant :

Théorème 6 (Théorème de Riesz-Fisher) :

Soit $(X, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré, $1 \leq p < +\infty$.

Alors l'espace $L^p(m)$ est un espace de Banach.

En particulier, pour $p = 2$, $L^2(m)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :

$$< f, g >_2 = \int_X f(t)\overline{g(t)}\, dm(t).$$

preuve : Soit $(F_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^p(m)$.

Choisissons un représentant $f_n \in \mathcal{L}^p(m)$ de F_n.

Comme la suite est de Cauchy, on peut construire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ (avec $n_1 < n_2 < \dots$) telle que

$$\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_p \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Posons
$$g_k := \sum_{j=1}^{k} | f_{n_{j+1}} - f_{n_j} |$$

et
$$g := \sum_{j=1}^{+\infty} | f_{n_{j+1}} - f_{n_j} |$$

Ces fonctions sont mesurables (une limite simple de fonctions mesurables est mesurable) et on a :

$$\|g_k\|_p \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left\| \left| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \right| \right\|_p = \sum_{j=1}^{k} \| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \|_p$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} \leqslant 1 .$$

D'autre part, la suite $(g_k)_k$ est croissante, positive et converge simplement vers g. Le théorème de convergence monotone s'applique et donne :

$$\int_X g^p \, dm = \lim_{k \to +\infty} \int_X g_k^p \, dm \leqslant 1 .$$

Ainsi g^p est intégrable et donc elle est finie presque partout. Donc g aussi. Cela signifie que la série

$$\sum_k \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t) \right)$$

converge absolument pour presque tout $t \in X$.

Posons alors

$$f(t) = \begin{cases} f_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t) \right) & \text{si } g(t) < +\infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors f est mesurable et

$$f(t) = \lim_{k \to +\infty} f_{n_k}(t) \quad \text{pour presque tout } t \in X.$$

<u>Montrons que</u> $f \in \mathcal{L}^p(m)$ et $\|f - f_k\|_p \longrightarrow 0$, $k \to +\infty$:

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy, il existe un entier $N \geq 1$ tel que

$$n, k \geq N \Longrightarrow \|f_n - f_k\|_p \leq \varepsilon.$$

Pour $k \geq N$, le lemme de Fatou donne :

$$\int_X |f - f_k|^p dm \leq \liminf_{j \to +\infty} \int_X |f_{n_j} - f_k|^p dm \leq \varepsilon^p.$$

Ainsi $f - f_k \in \mathcal{L}^p(m)$ et donc $f = (f - f_k) + f_k \in \mathcal{L}^p(m)$

De plus, $\lim_{k \to +\infty} \|f - f_k\|_p = 0$.

Finalement, si $F \in L^p(m)$ est la classe d'équivalence m-pp de f, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \|F - F_k\|_p = \lim_{k \to +\infty} \|f - f_k\|_p = 0.$$

■

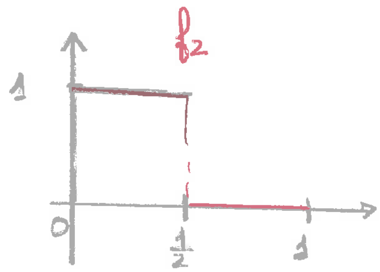
<u>Remarque</u>: notons au passage qu'on a prouvé le

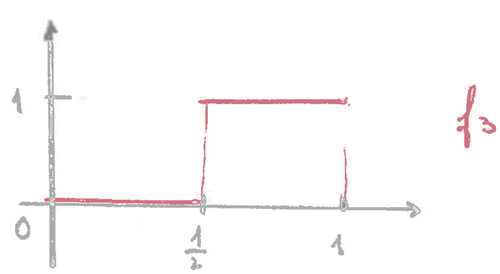
résultat suivant qui est très utile.

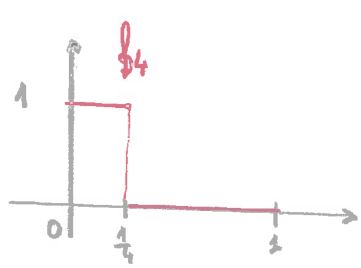
Théorème 7: Si $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^p(m)$, $1 \leq p < +\infty$ alors on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge presque partout vers f.

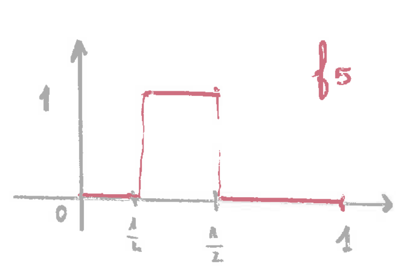
Preuve: c'est la preuve du théorème 6 plus l'unicité de la limite. ∎

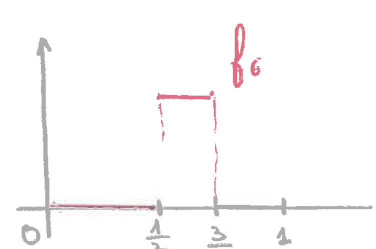
Remarque: il faut faire attention au fait que dans le théorème 7, la suite (f_n) peut très bien ne pas converger ponctuellement et que le passage à une sous suite est absolument nécessaire: Par exemple, si $X =]0,1]$, $\mathcal{T}$ - tribu des boréliens de $]0,1]$ et m est la mesure de Lebesgue, considérons $f_n = \chi_{]\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$ lorsque $n = 2^k + l$, $0 \leq l \leq 2^k - 1$, $k \geq 1$.











On a $\|f_n\|_p = \frac{1}{2^{k/p}}$, pour $2^k \leq n \leq 2^{k+1}-1$

et donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ dans $L^p([0,1])$,

mais pour aucun $t \in]0,1]$, la suite $(f_n(t))_n$ n'est convergente.

Toutefois, la sous-suite $(f_{2^k})_k$ converge ponctuellement vers 0. ∎

Définissons maintenant l'espace L^∞.

On dit que l'application mesurable $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est essentiellement bornée s'il existe un nombre $M < +\infty$ tel que

$$|f(t)| \leq M \quad \text{pour presque tout } t \in X.$$

On appelle borne supérieure essentielle de f le nombre

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{supess}_{t \in X} |f(t)| := \inf\{M \geq 0 : |f| \leq M \quad m\text{-pp}\}.$$

Remarque: si $m = \lambda_d$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, $X \subset \mathbb{R}^d$ une partie mesurable telle que $\Omega \subseteq X \subseteq \overline{\Omega}$, où Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière est de mesure nulle. Alors, pour toute fonction continue et bornée $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a :

$$\operatorname*{supess}_{t \in X} |f(t)| = \sup_{t \in X} |f(t)|.$$

En effet, on a :

$$\operatorname{supp\,ess}_{t\in X} |f(t)| = \operatorname{supp\,ess}_{t\in\Omega} |f(t)| ,$$

car $\lambda_d(X\setminus\Omega) \leq \lambda_d(\overline{\Omega}\setminus\Omega) = \lambda_d(Fr(\Omega)) = 0$

et par continuité, on a : $\sup_{t\in X} |f(t)| = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$

Il est clair que $\operatorname{supp\,ess}_{t\in\Omega} |f(t)| \leq \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$.

D'autre part, pour tout $M < \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$,

l'ensemble $\{t\in\Omega : |f(t)| > M\}$ est un ouvert non vide. Il est donc de mesure non nulle, de sorte que $M \leq \operatorname{supp\,ess}_{t\in\Omega} |f(t)|$,

et donc $\sup_{t\in\Omega} |f(t)| \leq \operatorname{supp\,ess}_{t\in\Omega} |f(t)|$.

Ainsi la notation $\|f\|_\infty$ n'offrira en général pas d'ambiguïté. ∎

Proposition (8) : On a $|f| \leq \|f\|_\infty$ m-p.p.

preuve : L'ensemble $N_n = \{t\in X : |f(t)| \geq \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\}$

est m-négligeable ; donc $\bigcup_{n\geq 1} N_n = \{t\in X : |f(t)| > \|f\|_\infty\}$

est aussi m-négligeable. Autrement dit, on a

$$|f(t)| \leq \|f\|_\infty \quad m-p.p. \quad \blacksquare$$

On note $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{T}, m) = \mathcal{L}^\infty(m)$ l'espace de toutes les fonctions mesurables $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ qui sont essentiellement bornées.

On voit que $\|\cdot\|_\infty$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty(m)$

(i.e $\|\cdot\|_\infty$ vérifie les axiomes d'une norme sauf le premier car $\|f\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow f(t) = 0 \quad m-pp.$)

Comme pour $1 \leq p < +\infty$, on quotiente alors $\mathcal{L}^\infty(m)$ par le sous-espace $\mathcal{N}$ et on note

$$L^\infty(m) = \mathcal{L}^\infty(m)/\mathcal{N}.$$

Pour $\tilde{f} = f + \mathcal{N} \in L^\infty(m)$, on note

$$\|\tilde{f}\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

On vérifie alors que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(m)$.

Théorème 9 : L'espace $(L^\infty(m), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

preuve: Soit $(\tilde{f}_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(m)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \geq 1$ tel que

$$n, k \geq n(\varepsilon) \Longrightarrow \|f_n - f_k\|_\infty \leq \varepsilon .$$

Soit $N_{n,k}(\varepsilon) = \{ t \in X : |f_n(t) - f_k(t)| > \varepsilon \}$

Pour tout $n, k \geq n(\varepsilon)$, on a $m(N_{n,k}(\varepsilon)) = 0$

Alors si $N = \bigcup_{j \geq 1} \bigcup_{n,k \geq n(\frac{1}{j})} N_{n,k}\left(\frac{1}{j}\right)$. on a $m(N) = 0$.

De plus, $\forall t \in X \setminus N$, on a : $|f_n(t) - f_k(t)| < \frac{1}{j}$,

pour $n, k \geq n\left(\frac{1}{j}\right)$

Ainsi $(f_n)_n$ est uniformément de Cauchy sur $X \setminus N$.

Donc elle converge uniformément sur $X \setminus N$. Si on note

f la limite prolongée par 0 sur N, f est mesurable

et bornée sur $X \setminus N$ donc essentiellement bornée sur X.

Autrement dit, $f \in \mathcal{L}^\infty(m)$.

De plus, on a : $\|f_n - f\|_\infty = \sup\text{ess}_{t \in X} |f_n(t) - f(t)|$

$$\leq \sup_{t \in X \setminus N} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

■

Enfin, l'inégalité de Hölder se généralise au cas $p=1$, $q=\infty$: si $f \in L^1(m)$ et $g \in L^\infty(m)$, on a :

$$\int_X |f(t)g(t)|\,dm(t) \leq \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Finissons ce rappel par des résultats de densité et un résultat de continuité particulièrement important.

Lemme (10) : Soit $(X, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et supposons que m est σ-finie (i.e il existe une suite $(K_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telles que $m(K_n) < +\infty$ et $X = \bigcup_n K_n$).
Si $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble $L^1(m) \cap L^\infty(m)$ est dense dans $L^p(m)$.

preuve : notons d'abord que $L^1(m) \cap L^\infty(m) \subset L^p(m)$.
c'est clair si $p=1$ et si $p>1$ et $f \in L^1(m) \cap L^\infty(m)$,

comme $|f| \leq \|f\|_\infty$ m-pp, on a

$$|f|^{p-1} \leq \|f\|_\infty^{p-1} \quad m\text{-pp}$$

et donc $|f|^p \leq \|f\|_\infty^{p-1} |f|$ m-pp.

En intégrant, on obtient que $\int_X |f|^p\,dm \leq \|f\|_\infty^{p-1} \|f\|_1 < +\infty$.

Quitte à remplacer K_n par $\bigcup_{j=1}^{n} K_j$, on peut supposer que la suite $(K_n)_n$ est croissante (au sens de l'inclusion)

Fixons $f \in L^p(m)$ et définissons

$$f_n = f \chi_{K_n \cap \{t \in X : |f(t)| < n\}}$$

On a $$\int_X |f_n| \, dm = \int_{K_n \cap \{t \in X : |f(t)| < n\}} |f| \, dm$$

$$\leq n \; m(K_n) < +\infty$$

Donc $f_n \in L^1(m)$.

De plus, pour tout $t \in X$, on a $|f_n(t)| < n$ et donc

$f_n \in L^\infty(m)$.

Comme $f \in L^p(m)$, f est finie m-pp : il existe $A \in \mathcal{T}$, $m(A) = 0$ tel que $|f(t)| < +\infty$, $\forall t \in X \setminus A$.

Si $t \in X \setminus A$, $\exists n_0 \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow t \in K_n$ et $|f(t)| \leq n$

D'où $f_n(t) = f(t)$, $\forall n \geq n_0$, ce qui prouve que

$$f_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(t) \quad m\text{-p.p.}$$

De plus, on a $|f_n(t) - f(t)|^p \leq 2^p |f(t)|^p$, $\forall t \in X$.

Le théorème de convergence dominée implique donc que

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\blacksquare$

Rappelons qu'une <u>fonction étagée</u> $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ est une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques χ_A, $A \in \mathcal{T}$.
Autrement dit, f est étagée s'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$ tel que $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$.

Notons qu'il existe une unique décomposition telle que $\alpha_i \neq \alpha_j$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
Une telle décomposition sera dite <u>canonique</u> et on supposera dans la suite avoir écrit f sous cette forme.

On notera pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{E}t_p(X)$ l'ensemble des fonctions étagées qui sont dans $L^p(m)$. Notons que
$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}t_p(X)$ si et seulement si

$$\alpha_i \neq 0 \Rightarrow m(A_i) < +\infty .$$

<u>Proposition 11 :</u> Si $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{E}t_p(X)$ est dense dans $L^p(m)$.

<u>preuve :</u> D'après le lemme 10, il suffit de montrer que si $f \in L^1(m) \cap L^\infty(m)$, alors il existe une suite $f_n \in \mathcal{E}t_p(X)$

tq $\quad \|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$.

Quitte à séparer partie réelle et partie imaginaire, on peut supposer que f est à valeurs réelles.

En séparant partie positive et négative, on peut aussi supposer que $f \geq 0$.

Considérons alors $f_n = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{n+1} \chi_{f^{-1}([\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1}[)}$

Il est clair que pour tout $x \in X$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et
$$0 \leq f_n(x) \leq f(x) \qquad (*)$$

Comme $f \in L^1(m) \cap L^\infty(m) \subset L^p(m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée qui implique que

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

Vérifions maintenant que $f_n \in \mathcal{E}t_p(X)$.

Tout d'abord d'après $(*)$, $f_n \in L^p(m)$.

D'autre part, comme $f \in L^\infty(m)$, il existe $M > 0$ tq $0 \leq f(t) \leq M$ pour presque tout t.

Donc si $j \in \mathbb{N}$ est tq $\frac{j}{n+1} > M$,

alors $m\left(f^{-1}\left(\left[\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1}\right[\right)\right) = 0$

et donc f_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs, ce qui prouve que $f_n \in \mathcal{E}t_p(X)$. ■

Dans la suite, on considère $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ - tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, $dm(t) = d\lambda(t) = dt$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p = L^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}, \mathcal{T}, dm)$.

Pour $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$, on définit le support de f, noté $\text{supp}(f)$, comme le complémentaire du plus grand ouvert U tel que $f|_U = 0$ presque partout.

Dans le cas d'une fonction continue, cela revient à dire que $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$ ↑ adhérence.

On notera dans la suite $C_{c}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact.

Théorème 12 : Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

preuve : on a vu que l'espace $\mathcal{E}t_p(\mathbb{R})$ des fonctions étagées qui sont dans $L^p(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer que si $\lambda(A) < +\infty$ alors χ_A peut être approché en $\|\cdot\|_p$ par des fonctions de $C_c(\mathbb{R})$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par régularité de la mesure de Lebesgue, il existe un compact K et un ouvert Ω tels que :

$$K \subset A \subset \Omega \quad \text{et} \quad \lambda(\Omega \setminus K) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Soit N assez grand pour que $K \subset [-N, N]$. Alors les fermés K et $F = \left(\Omega \cap]-N, N[\right)^c$ sont disjoints et la fonction φ, définie par

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{dist}(t, F)}{\operatorname{dist}(t, F) + \operatorname{dist}(t, K)},$$

est continue, à support compact $(\subset [-N, N])$ et vérifie

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi(t) \leq 1 \\ \varphi(t) = 1 & \text{si } t \in K \\ \varphi(t) = 0 & \text{si } t \notin \Omega \end{cases}$$

On a donc

$$\|\chi_A - \varphi\|_p^p = \int_X |\chi_A(t) - \varphi(t)|^p \, d\lambda(t)$$

Si $t \in K$: on a : $\chi_A(t) = 1$ car $t \in K \subset A$

et $\varphi(t) = 1$

d'où $\chi_A(t) - \varphi(t) = 0$.

Si $t \in \Omega \setminus K$: $|\chi_A(t) - \varphi(t)| \leq 2$.

Si $t \notin \Omega$: $\chi_A(t) = \varphi(t) = 0$.

D'où $$\|\chi_A - \varphi\|_p^p = \int_{\Omega \setminus K} |\chi_A(t) - \varphi(t)|^p \, d\lambda(t)$$

$$\leq 2^p \lambda(\Omega \setminus K) \leq 2^p \frac{\varepsilon^p}{2^p} = \varepsilon^p$$

i.e $$\|\chi_A - \varphi\|_p \leq \varepsilon.$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi \in C_{cc}(\mathbb{R})$ tel que $\|\chi_A - \varphi\|_p \leq \varepsilon$,

ce qui prouve que $C_{cc}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. ■

Remarque: Soit $C_{cc}^{(n)}(\mathbb{R}) = \{ f \in C_{cc}(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} f \subset [-n, n] \}$

muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

L'application :
$$\begin{aligned} C_{cc}^{(n)}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}([-n,n]) \\ f &\longmapsto f|_{[-n,n]} \end{aligned}$$

est une isométrie (non surjective). Puisque $\mathcal{C}([-n,n])$ est séparable (voir chapitre 1), l'espace $C_{cc}^{(n)}(\mathbb{R})$ est aussi séparable. On en déduit le :

Corollaire 13 : Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est séparable.

preuve: Pour tout $N \geq 1$, choisissons une partie dénombrable (28)

Δ_N dense dans $C_{cc}^{(N)}(\mathbb{R})$. Montrons alors que l'ensemble dénombrable $\Delta = \bigcup_{N \geq 1} \Delta_N$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème (12), il existe $g \in C_{cc}(\mathbb{R})$ telle que $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme supp g est compact, il existe $N \geq 1$ tel que supp $g \subset [-N, N]$ et donc $g \in C_{cc}^{(N)}(\mathbb{R})$.

Il existe alors $\varphi \in \Delta_N \subset \Delta$ telle que

$$\|g-\varphi\|_\infty = \sup_{t \in [-N,N]} |g(t)-\varphi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(2N)^{1/p}}.$$

D'où :

$$\|g-\varphi\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)-\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p} = \left[\int_{-N}^{N} |g(t)-\varphi(t)|^p dt\right]^{1/p}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(2N)^{1/p}} (2N)^{1/p} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi
$$\|f-\varphi\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g-\varphi\|_p$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

Nous allons maintenant voir un résultat particulièrement important sur les translations.

Théorème (14) : Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$.

On pose $f_x(t) = f(t-x)$.

Alors l'application $\tau_f : \mathbb{R} \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$
$$x \longmapsto f_x$$
est uniformément continue.

preuve : On doit montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que
$$|x-y| \leq \delta \Longrightarrow \|f_x - f_y\|_p \leq \varepsilon.$$

(a) Montrons d'abord ce résultat lorsque $f = g \in C_c(\mathbb{R})$.

Soit $N > 0$ / $\operatorname{supp} g \subseteq [-N, N]$. D'après le théorème de Heine, toute fonction continue sur un compact est uniformément continue. Ainsi g est uniformément continue.

Donc $\exists \delta > 0$ tq
$$|x-y| < \delta \Longrightarrow |g(x) - g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3(4N)^{1/p}}.$$

On peut bien sûr supposer que $\delta \leq N$.

Alors pour $x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| < \delta$, on a :

$$\|g_x - g_y\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |g(t-x) - g(t-y)|^p \, dt = \int_{\mathbb{R}} |g(u) - g(u+x-y)|^p \, du$$

$u = t - x$

Si $u \leq -N-\delta$, on a $g(u)=0$ car $\operatorname{supp} g \subset [-N,N]$ (30)

et $g(u+x-y)=0$ car $u+x-y < u+\delta \leq -N$

De même si $u \geq N+\delta$, on a $g(u)=0$ et $g(u+x-y)=0$

car $u+x-y > u-\delta \geq N$.

D'où
$$\int_{\mathbb{R}} |g(u)-g(u+x-y)|^p du = \int_{-N-\delta}^{N+\delta} |g(u)-g(u+x-y)|^p du.$$

Ainsi

$$\|g_x-g_y\|_p^p = \int_{-N-\delta}^{N+\delta} |g(u)-g(u+x-y)|^p du$$

$$\leq \frac{\varepsilon^p}{3^p\, 4N}(2N+2\delta) \leq \frac{\varepsilon^p}{3^p},$$

et $\|g_x-g_y\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

(b) <u>Montrons maintenant le résultat lorsque $f \in L^p(\mathbb{R})$.</u>

D'après le théorème (12), il existe $g \in C_{cc}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f-g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation,

on a $f \in L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow f_x \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f_x\|_p = \|f\|_p$.

Ainsi si δ est le module d'uniforme continuité de g introduit au a), on a pour $|x-y| < \delta$:

$$\|f_x - f_y\|_p \leq \|f_x - g_x\|_p + \|g_x - g_y\|_p + \|g_y - f_y\|_p$$

$$= \|(f-g)_x\|_p + \|g_x - g_y\|_p + \|(g-f)_y\|_p$$

$$= 2\|f-g\|_p + \|g_x - g_y\|_p$$

$$\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

4.2. Produit de convolution :

La convolution permet de <u>régulariser</u> les fonctions : la convolée de deux fonctions hérite des bonnes propriétés de chacune des deux fonctions dont on est parti ; elle peut même en avoir de meilleures !

Si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on dit que <u>la convolée</u> (ou le <u>produit de convolution</u>) de f et g en $x \in \mathbb{R}$ existe si la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f(x-t)g(t) \end{aligned}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue).

On pose alors :

$$\boxed{(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt}$$

En faisant le changement de variable $u = x - t$, on a grâce à l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\, g(x-u)\, du \; ;$$

donc $(f*g)(x)$ existe si et seulement si $(g*f)(x)$ existe, et on a l'égalité :

$$(f*g)(x) = (g*f)(x) .$$

Pour obtenir une nouvelle fonction $f*g$, on va chercher des conditions sur f et g pour que $(f*g)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou au moins pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 15 : Soient $1 \leqslant p < +\infty$ et q l'exposant conjugué de p.

a) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ alors $(f*g)(x)$ existe pour <u>tout</u> $x \in \mathbb{R}$ et de plus $f*g \in C_b(\mathbb{R})$ - l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$.

b) Si de plus, $1 < p < +\infty$, on a

$$\lim_{|x| \to +\infty} (f * g)(x) = 0 \; ;$$

autrement dit, dans le cas $1 < p < +\infty$, $f * g \in C_0(\mathbb{R})$ - l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini.

preuve : a) $1 < p < +\infty$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'après l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||g(t)|\,dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^q dt \right)^{1/q}$$

$$= \|f\|_p \, \|g\|_q < +\infty$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f * g)(x)$ existe, et bornée et on a

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

Autrement dit, $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$.

si $p = 1$: alors $q = +\infty$. On a alors pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t)| \leq \|g\|_\infty \, .$$

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||g(t)|dt \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|dt = \|g\|_\infty \|f\|_1 < +\infty.$

On a donc de même que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f*g)(x)$ existe,

$f*g$ est bornée et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Montrons maintenant que pour $1 \leq p < +\infty$, $f*g$ est continue :

Notons $\phi_g : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$h \longmapsto \phi_g(h) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\, g(t)\, dt$$

et $\tilde{f}(t) = f(-t)$.

On sait que ϕ_g est une forme linéaire continue (cela découle immédiatement de l'inégalité de Hölder).

De plus, $f(x-t) = \tilde{f}(t-x) = (\tilde{f})_x(t)$

D'où

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} (\tilde{f})_x(t)\, g(t)\, dt$$

$$= \phi_g\left((\tilde{f})_x\right) = \left(\phi_g \circ \tau_{\tilde{f}}\right)(x).$$

Ainsi la continuité de $f*g$ découle de celle de ϕ_g et $\tau_{\tilde{f}}$ (Théorème 14).

(b) Il reste à voir que si $1 < p < +\infty$, alors

$$(f * g)(x) \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0 .$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 12, il existe $\varphi \in \mathcal{C}_{c}(\mathbb{R})$

telle que $\begin{cases} \|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon \\ \text{et} \quad \|f - \varphi\|_p \, \|g\|_q \leq \frac{\varepsilon}{2} . \end{cases}$

Toujours d'après le théorème 12, il existe $\psi \in \mathcal{C}_{c}(\mathbb{R})$

telle que $\quad \|g - \psi\|_q \left(\|f\|_p + \varepsilon \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\|f * g - \varphi * \psi\|_\infty &\leq \|f * g - \varphi * g\|_\infty + \|\varphi * g - \varphi * \psi\|_\infty \\
&= \|(f - \varphi) * g\|_\infty + \|\varphi * (g - \psi)\|_\infty \\
&\leq \|f - \varphi\|_p \, \|g\|_q + \|\varphi\|_p \, \|g - \psi\|_q \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\|f\|_p + \varepsilon \right) \|g - \psi\|_q \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .
\end{aligned}$$

Comme $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_{c}(\mathbb{R})$, il existe $A > 0$ tel que

$\varphi(t) = 0$ et $\psi(t) = 0$ pour $|t| \geq A$.

Ainsi pour $|x| \geqslant 2A$, on a si $|t| \geqslant A$, $\psi(t) = 0$ et si $|t| \leqslant A$ alors $|x-t| \geqslant 2A - A = A$ et donc $\varphi(x-t) = 0$. Ainsi $(\varphi * \psi)(x) = 0$.

Par conséquent pour $|x| \geqslant 2A$, on a :

$$|(f*g)(x)| = |(f*g)(x) - (\varphi * \psi)(x)| \leqslant \|f*g - \varphi * \psi\|_\infty \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (f*g)(x) = 0$ ∎

__Remarque :__ pour montrer que si $1 < p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ alors $f*g$ tend vers 0 à l'infini, nous avons utilisé la densité de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ <u>et</u> dans $L^q(\mathbb{R})$.

On ne peut pas étendre le b) du théorème précédent au cas $p = 1$ (ou $p = +\infty$) comme le montre l'exemple suivant : prenons $g = \mathbb{1}$, la fonction identiquement égale à 1, qui est donc dans $L^\infty(\mathbb{R})$; pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt .$$

Ainsi $f*g$ est donc constante et non nulle si l'intégrale de f n'est pas nulle. ■

Examinons ce qui se passe quand on convole $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.

<u>Théorème 16</u> : Soit $1 \leq p < +\infty$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ alors $(f * g)(x)$ existe <u>pour presque tout</u> $x \in \mathbb{R}$.

De plus, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p$$

<u>preuve</u>: il suffit d'appliquer le test de Schur avec $K(x,y) = f(x-y)$, et $\omega(x) \equiv 1$ (voir chapitre 2, théorème 12).

Ce résultat étant néanmoins tellement important que nous allons donner une preuve directe (qui reprend essentiellement les mêmes calculs que la preuve du test de Schur !).

<u>Supposons d'abord que $1 < p < +\infty$</u> et notons q l'exposant conjugué de p.

On écrit alors

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \, |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} dy ,$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\,dy \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

et en élevant à la puissance p, on obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\,dy\right)^p \le \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p\,dy .$$

En intégrant maintenant par rapport à x, et utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right)^p dx \le \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dx\right) dy$$

$$= \|f\|_1^{\frac{p}{q}+1} \|g\|_p^p < +\infty .$$

D'une part, on en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\,dy < +\infty$$

et donc $(f * g)(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

D'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)|^p dx \leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}+1} \|g\|_p^p ,$$

et donc $f*g \in L^p(\mathbb{R})$ et

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \|g\|_p = \|f\|_1 \|g\|_p .$$

<u>Supposons maintenant $p=1$:</u>

En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)| dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dx \right) dy$$

$$= \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$$

D'une part, on en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)| dy < +\infty ,$$

et donc $(f*g)(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

D'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)| dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1 ,$$

et donc $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

■

Proposition (17): $L^1(\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach commutative pour la convolution.

Une algèbre $\mathcal{A}$, équipée d'une norme est dite <u>algèbre de Banach</u> si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach

(ii) pour tous $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, on a

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|.$$

<u>preuve de la proposition (17)</u>: on sait déjà que $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach (Théorème de Riesz Fischer). On a aussi vu que si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ (Théorème 16) et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

On a aussi vu que $f * g = g * f$.

La seule propriété non évidente à démontrer est l'associativité.

Pour cela, soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

on a :

$$\big((|f| * |g|) * |h|\big)(x) < +\infty .$$

Pour ces $x \in \mathbb{R}$, $((f*g)*h)(x)$ existe et

$$\big((f*g)*h\big)(x) = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x-t)\, h(t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t-u) g(u) du \right) h(t) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-v) g(v-t) dv \right) h(t) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x-v) \left(\int_{\mathbb{R}} g(v-t) h(t) dt \right) dv ,$$

en utilisant le théorème de Fubini, ce qui est possible

car $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x-v) g(v-t) h(t)| \, dt\, dv = \big((|f| * |g|) * |h|\big)(x) < +\infty$.

Donc $\displaystyle\big((f*g)*h\big)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-v) (g*h)(v) dv = \big(f*(g*h)\big)(x)$.

Ainsi $(f*g)*h = f*(g*h)$ pp ce qui montre que la loi $*$ est associative.

Ainsi $(L^1(\mathbb{R}), *)$ est une algèbre de Banach commutative. ∎

On verra que cette algèbre n'a pas d'unité. Il existe néanmoins un palliatif à cette absence d'unité, celle d'unité approchée.

4.3. Approximations de l'unité et partitions de l'unité.

On dira qu'une famille $(k_a)_{a>0} \subset L^1(\mathbb{R})$ est une unité approchée si elle vérifie les propriétés suivantes :

(a) La famille $(k_a)_{a>0}$ est bornée en norme L^1 : $\exists C > 0$ telle que $\forall a > 0$, $\|k_a\|_1 \leq C$.

(b) On a : $\forall a > 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} k_a(u)\,du = 1$.

(c) Pour tout $\delta > 0$, on a

$$\lim_{a \to 0} \int_{|u| \geq \delta} |k_a(u)|\,du = 0.$$

Parfois, on ne considérera que les valeurs $a = \frac{1}{n}$; l'unité approchée sera alors notée $(k_n)_{n\geq 1}$ (au lieu de $(k_{\frac{1}{n}})_{n\geq 1}$).

<u>Exemple:</u> Soit $k \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} k(t)dt = 1$

Posons, pour tout $a > 0$,

$$k_a(t) = \frac{1}{a} k\left(\frac{t}{a}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Alors $(k_a)_{a>0}$ est une unité approchée de $L^1(\mathbb{R})$.

<u>preuve:</u> on a :

(a) $\int_{\mathbb{R}} |k_a(u)|du = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} \left|k\left(\frac{u}{a}\right)\right|du$

Faisons le changement de variable $t = \frac{u}{a}$.

Alors $\int_{\mathbb{R}} |k_a(u)|du = \int_{\mathbb{R}} |k(t)|\,dt = \|k\|_1$

Donc, $\forall a > 0$, $k_a \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|k_a\|_1 = \|k\|_1$

(b) On montre de même que

$$\forall a > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} k_a(u)du = \int_{\mathbb{R}} k(u)du = 1.$$

(c) Si $\delta > 0$, on a :

$$\int_{|u|\geq\delta} |k_a(u)|\,du = \int_{|u|\geq\delta} \frac{1}{a}\left|k\left(\frac{u}{a}\right)\right|du$$

En effectuant le changement de variable $t = \frac{u}{a}$, comme

$|u| \geq \delta \iff |t| \geq \frac{\delta}{a}$, on en déduit que

$$\int_{|u|\geq\delta} |k_a(u)|\,du = \int_{|t|\geq \frac{\delta}{a}} |k(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t)\,|k(t)|\,dt,$$

où $A = \{t : |t| \geq \frac{\delta}{a}\}$.

On a $\quad * \ |\chi_A(t)||k(t)| \leq |k(t)|$ et $k \in L^1(\mathbb{R})$

$* \ \lim\limits_{a\to 0} \chi_A(t)|k(t)| = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

D'où le théorème de convergence dominée implique que

$$\lim_{a\to 0} \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t)\,|k(t)|\,dt = 0,$$

ce qui montre que $(k_a)_{a>0}$ satisfait la condition (c). ■

La terminologie d'unité approchée provient du résultat suivant:

Théorème (18): Soit $(k_a)_{a>0}$ une unité approchée de $L^1(\mathbb{R})$.

(1) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue à support compact, alors $k_a * f \in C_b(\mathbb{R})$ et

$$\lim_{a\to 0} \|k_a * f - f\|_\infty = 0$$

(2) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, alors

$k_a * f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\lim_{a \to 0} \|k_a * f - f\|_p = 0$.

preuve: (1) Comme f est continue, à support compact, alors $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et donc d'après le théorème 15, comme $k_a \in L^1(\mathbb{R})$, alors $(k_a * f)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k_a * f \in C_b(\mathbb{R})$.

En utilisant maintenant que $\int_{\mathbb{R}} k_a(u)\,du = 1$, on peut écrire que

$$(k_a * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u) k_a(u)\,du - f(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \big(f(x-u) - f(x)\big) k_a(u)\,du .$$

D'où

$$|(f * k_a)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-u) - f(x)|\,|k_a(u)|\,du .$$

Comme f est continue à support compact, elle est en particulier bornée et uniformément continue. Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tq

$$|u - v| \leq \delta \Longrightarrow |f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}, \text{ où } C = \sup_{a>0} \|k_a\|_1 .$$

On découpe alors l'intégrale précédente en deux morceaux, ce qui donne :

$$|(f * k_a)(x) - f(x)| \leq \int_{|u|<\delta} |f(x-u) - f(x)|\,|k_a(u)|\,du + \int_{|u|\geq\delta} |f(x-u) - f(x)|\,|k_a(u)|\,du$$

et donc :

$$|(f*k_a)(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}\int_{|u|<\delta}|k_a(u)|\,du + 2\|f\|_\infty \int_{|u|\geq\delta}|k_a(u)|\,du$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \int_{|u|\geq\delta}|k_a(u)|\,du .$$

Or $\lim\limits_{a\to 0}\int_{|u|\geq\delta}|k_a(u)|\,du = 0$ donc il existe $a_0>0$ tel que

$$0<a<a_0 \Longrightarrow \int_{|u|\geq\delta}|k_a(u)|\,du \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}.$$

D'où pour $0<a<a_0$, on a

$$|(f*k_a)(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $x\in\mathbb{R}$, on en déduit que

$$0<a<a_0 \Longrightarrow \|f*k_a - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve la partie (1).

Pour prouver (2), on aura besoin du lemme suivant

Lemme (19) : Si $u, v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions convolables, alors

$$\operatorname{supp}(u*v) \subset \overline{\operatorname{supp}(u)+\operatorname{supp}(v)}$$

En particulier, si u et v sont à support compact alors $u * v$ est aussi à support compact.

preuve du lemme 19 : Soit $x \notin \mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}(v)$.

Comme $v(t) = 0$ pour $t \notin \mathrm{supp}(v)$, on a :

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-t)v(t)\,dt = \int_{\mathrm{supp}(v)} u(x-t)v(t)\,dt$$

Mais si $t \in \mathrm{supp}(v)$, on a forcément $x - t \notin \mathrm{supp}(u)$ (car sinon $x = (x-t)+t$ serait dans $\mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}(v)$).

Donc $u(x-t) = 0$ et ainsi $(u*v)(x) = 0$.

Donc $\forall x \in \overset{\circ}{\overbrace{{}^c(\mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}(v))}}$, $(u * v)(x) = 0$.

Ainsi $\quad {}^c\left(\overline{\mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}(v)}\right) \subset {}^c\mathrm{supp}(u * v)$,

ce qui prouve la première partie du lemme.

Pour la seconde partie, si $\mathrm{supp}(u)$ et $\mathrm{supp}(v)$ sont compacts alors la somme $\mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}(v)$ est aussi compact et donc $\mathrm{supp}(u * v)$ est un fermé contenu dans un compact et aussi un compact. ∎

<u>Remarque</u>: la somme de deux fermés n'est pas toujours fermée : $A = \{n : n \geq 1\}$, $B = \{-n + \frac{1}{n} : n \geq 1\}$

Alors $0 \in \overline{A+B}$ et $0 \notin A+B$!

<u>preuve du théorème (18), partie (2)</u>:

<u>1er cas</u>: <u>supposons tout d'abord que $\mathrm{supp}(k_a) \subset [-1, 1]$.</u>

Fixons $1 \leq p < +\infty$ et considérons

$$T_a : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto T_a(f) = k_a * f - f$$

D'après le théorème 16, les opérateurs T_a sont bien définis, linéaires et l'inégalité

$$\|k_a * f\|_p \leq \|k_a\|_1 \|f\|_p \leq C \|f\|_p$$

montre de plus que T_a est continue et $\forall a > 0$, on a

$$\|T_a\| \leq 1 + C.$$

D'autre part, si f est continue, à support compact, alors on sait, d'après le lemme 15 que $k_a * f$ est aussi à support compact K_a contenu dans $\mathrm{supp}(k_a) + \mathrm{supp}(f) \subset [-1, 1] + \mathrm{supp}(f)$.

De plus, d'après le (1), on sait que $\|k_a * f - f\|_\infty \longrightarrow 0, a \to 0$

Or si $x \notin [-1,1] + \operatorname{supp}(f)$ alors $(k_a * f)(x) = f(x) = 0$

et donc

$$\|T_a f\|_p^p = \|k_a * f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |(k_a * f)(x) - f(x)|^p dx$$

$$= \int_{[-1,1]+\operatorname{supp} f} |k_a * f(x) - f(x)|^p dx$$

$$\leq \|k_a * f - f\|_\infty^p \, m([-1,1] + \operatorname{supp}(f))$$

D'où $\quad \|T_a f\|_p \leq C \, \|k_a * f - f\|_\infty \xrightarrow[a \to 0]{} 0$

On a donc $*$ $T_a : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$ linéaire,

continue et $\sup\limits_{a>0} \|T_a\| < +\infty$

$*$ $\forall f \in C_{cc}(\mathbb{R})$, $\|T_a f\|_p \longrightarrow 0, a \to 0$.

Alors, comme $C_{cc}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$,

on en déduit que $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\|T_a f\|_p \longrightarrow 0, a \to 0$,

ce qui prouve que $\lim\limits_{a \to 0} \|k_a * f - f\|_p = 0$.

2$^{\text{ie}}$ cas : cas général : remarquons que

$$m_a := \int_{]-1,1[} k_a(u)\,du = 1 - \int_{|u|\geq 1} k_a(u)\,du \xrightarrow[a\to 0]{} 1$$

Donc $\exists\, a_0 > 0 \;/\; 0 < a \leq a_0 \Longrightarrow m_a > \frac{1}{2}$.

Posons alors pour $a \in]0, a_0]$, $\tilde{k}_a = \frac{1}{m_a} \chi_{]-1,1[}\, k_a$.

On a $\tilde{k}_a - k_a = \frac{1}{m_a}\left(\chi_{]-1,1[}\, k_a - k_a\right) + \left(\frac{1}{m_a} - 1\right) k_a$

D'où :

$$\|\tilde{k}_a - k_a\|_1 \leq \frac{1}{m_a}\|\chi_{]-1,1[}\, k_a - k_a\|_1 + \left|\frac{1}{m_a} - 1\right| \|k_a\|_1$$

$$\leq 2\,\|\chi_{]-1,1[}\, k_a - k_a\|_1 + C\left|\frac{1}{m_a} - 1\right|.$$

Or $\|\chi_{]-1,1[}\, k_a - k_a\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |k_a(u)|\,|\chi_{]-1,1[}(u) - 1|\,du$

$$= \int_{|u|\geq 1} |k_a(u)|\,du \xrightarrow[a\to 0]{} 0.$$

Comme on a aussi $\frac{1}{m_a} \xrightarrow[a\to 0]{} 1$, on en déduit

que $\|\tilde{k}_a - k_a\|_1 \xrightarrow[a\to 0]{} 0$. (*)

On en déduit d'une part que $(\tilde{k}_a)_{a>0}$ est borné en norme L^1. D'autre part, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{k}_a(u)\,du = \frac{1}{m_a}\int_{]-1,1[} k_a(u)\,du = 1 \text{ par définition de } m_a.$$

Enfin, $$\int_{|u|\geq\delta} |\tilde{k}_a(u)|\,du = \frac{1}{m_a}\int_{\substack{|u|\geq\delta\\|u|<1}} |k_a(u)|\,du$$

$$\leq \frac{1}{m_a}\int_{|u|\geq\delta} |k_a(u)|\,du \xrightarrow[a\to 0]{} 0.$$

Par conséquent $(\tilde{k}_a)_{a\in]0,a_0]}$ est une unité approchée de L^1 telle que $\operatorname{supp}(\tilde{k}_a)\subset[-1,1]$.

D'après le cas 1, on en déduit que pour toute fonction $f\in L^p$, on a : $\|\tilde{k}_a * f - f\|_p \longrightarrow 0$, $a\to 0$ $(**)$

En utilisant $(*)$ et $(**)$, on en déduit donc :

$$\|k_a * f - f\|_p \leq \|(k_a-\tilde{k}_a)*f\|_p + \|\tilde{k}_a * f - f\|_p$$

$$\leq \|k_a-\tilde{k}_a\|_1\|f\|_p + \|\tilde{k}_a * f - f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$

Nous allons voir que la convolution offre des possibilités de régularité intéressantes.

On notera $\mathcal{D}^k(\mathbb{R})$ $(0 \leq k \leq +\infty)$ l'espace des fonctions k fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ à support compact.

Autrement dit, $\mathcal{D}^0(\mathbb{R}) = C_{cc}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{D}^k(\mathbb{R}) = C_{cc}(\mathbb{R}) \cap C^k(\mathbb{R})$$

Pour simplifier les notations, quand $k = \infty$, on notera

$\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Théorème 20 : Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$ et $\varphi \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R})$, $0 \leq k \leq +\infty$. Alors $f * \varphi$ est k fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(f * \varphi)^{(l)} = f * \varphi^{(l)}, \quad 0 \leq l \leq k.$$

preuve : cela découle du théorème de continuité et de dérivabilité sous le signe intégral : supposons que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-A, A]$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On a alors pour $|x - x_0| \leq 1$,

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-t) f(t)\,dt = \int_{-A+x_0-1}^{A+x_0+1} \varphi(x-t) f(t)\,dt$$

soit

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t)\, \varphi(x-t)\,dt,$$

où $\tilde{f}(t) = \chi_{[-A+x_0-1,\, A+x_0+1]}(t)\; f(t)$.

- L'application $t \longmapsto \tilde{f}(t)\,\varphi(x-t) \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}$
- L'application $x \longmapsto \tilde{f}(t)\,\varphi(x-t)$ est dérivable pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.
- On a $\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{f}(t)\,\varphi(x-t)\right) = \tilde{f}(t)\,\varphi'(x-t)$

et $\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{f}(t)\,\varphi(x-t)\right)\right| \leq c\,|\tilde{f}(t)|$,

car φ' est bornée.

Remarquons alors que pour $p > 1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(t)|\,dt = \int_{-A+x_0-1}^{A+x_0+1} |f(t)|\,dt$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_{-A+x_0-1}^{A+x_0+1} dt\right)^{1/q}$$

$$\leq c\,\|f\|_p < +\infty.$$

Pour $p=1$, c'est encore + simple, car on peut raisonner directement avec f (sans passer par $\tilde{f}$).

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ qui affirme que $f * \varphi$ est dérivable en x_0 et
$$(f*\varphi)'(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t)\, \varphi'(x_0 - t)\, dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(x_0 - t)\, dt$$
$$= (f * \varphi')(x_0).$$

Il suffit ensuite d'appliquer une récurrence sur k.
(Le cas $k=0$ est encore + simple et laissé au lecteur). $\blacksquare$

<u>Exemple</u> : soit
$$\sigma(u) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-u^2}} & , |u| < 1 \\ 0 & , |u| \geqslant 1. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Soit $A = \int_{\mathbb{R}} \sigma(u)\, du$.

clairement $A>0$. Posons

$$k(t)=\sigma(At)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-A^2t^2}}, & |t|<\frac{1}{A}, \\ 0, & |t|\geq \frac{1}{A}. \end{cases}$$

On a $*$ $0\leq k(t)\leq 1$

$*$ $$\int_{\mathbb{R}} k(t)dt=\int_{\mathbb{R}}\sigma(At)dt=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sigma(u)}{A}du$$

$$=\frac{1}{A}\times A=1.$$

$*$ La fonction $k\in C^\infty(\mathbb{R})$ et $supp(k)\subset[-\frac{1}{A},\frac{1}{A}]$.

Posons alors $k_a(t)=\frac{1}{a}k\left(\frac{t}{a}\right)$, $a>0$, $t\in\mathbb{R}$.

D'après ce qui précède (voir page 43-44), on sait que $(k_a)_{a>0}$ est une unité approchée.

De plus, $k_a\in C^\infty(\mathbb{R})$ et $supp(k_a)\subset\left[-\frac{a}{A},\frac{a}{A}\right]$.

Ainsi $k_a\in\mathcal{D}(\mathbb{R})=\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$.

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 21 : Soit $1\leq p<+\infty$. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

preuve : considérons $(k_a)_{a>0}$ une unité approchée telle que $k_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 12, il existe

$\varphi \in C_{cc}(\mathbb{R})$ tel que $\|f - \varphi\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2C}$,

où $C = \sup_{a>0} \|k_a\|_1$.

D'autre part, d'après le théorème 18, il existe $a_0 > 0$ tel que $0 < a \leq a_0 \Longrightarrow \|f * k_a - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$

D'où

$$\begin{aligned}
\|f - \varphi * k_a\|_p &= \|f - f * k_a + (f - \varphi) * k_a\|_p \\
&\leq \|f - f * k_a\|_p + \|(f - \varphi) * k_a\|_p \\
&\leq \|f - f * k_a\|_p + \|f - \varphi\|_p \|k_a\|_1 \\
&\leq \|f - f * k_a\|_p + C \|f - \varphi\|_p ,
\end{aligned}$$

l'avant dernière inégalité découlant du théorème 16.

D'où pour $0 < a \leq a_0$, on a :

$$\|f - \varphi * k_a\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Il reste à remarquer que comme $k_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C_{cc}(\mathbb{R})$, le théorème 20 implique que

$\varphi * k_a \in C^\infty(\mathbb{R})$ et le lemme 19 implique que $\varphi * k_a$ est à support compact. Ainsi $\varphi * k_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ce qui achève de prouver la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$. ■

Partition de l'unité C^∞.

Les partitions de l'unité permettent de "découper" des fonctions en morceaux, de raisonner localement puis d'en déduire des résultats globaux...

Pour simplifier nous nous placerons sur un compact mais il existe des énoncés plus généraux.

Théorème 22: Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $(\Omega_k)_{1 \le k \le n}$ un recouvrement ouvert fini de K. Il existe des fonctions positives $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subset \Omega_k$, $1 \le k \le n$, $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \le 1$ et

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = 1, \quad \forall x \in K.$$

On dit que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une partition de l'unité de K subordonnée au recouvrement $(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$.

La preuve est basée sur le lemme suivant :

Lemme 23 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, K un compact contenu dans Ω. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega$ et $\varphi(x) = 1$ sur un voisinage de K

preuve : rappelons que si $\sigma(u) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-u^2}\right), & |u| < 1 \\ 0 & , |u| \geq 1 \end{cases}$

$$A = \int_{\mathbb{R}} \sigma(u)\,du > 0 \quad \text{et } k(t) = \sigma(At) \quad \text{alors}$$

$$\int_{\mathbb{R}} k(t)\,dt = 1 \quad , \quad 0 \leq k(t) \leq 1 \quad \text{et } \operatorname{supp}(k) \subset \left[-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right].$$

Ainsi, si $k_a(t) = \frac{1}{a} k\left(\frac{t}{a}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$, alors

$$k_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ et } \operatorname{supp}(k_a) \subset \left[-\frac{a}{A}, \frac{a}{A}\right] \quad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$ tq $K_\varepsilon := K + [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \Omega$.

D'après $(*)$, pour a assez petit, on a

$$\operatorname{supp}(k_a) \subset \left]-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right[$$

Posons alors $\varphi := \mathbb{1}_{K_{\frac{\varepsilon}{2}}} * k_a$ et vérifions que φ est la fonction cherchée.

Comme $h_a \in C^\infty(\mathbb{R})$, le théorème 20 implique que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

De plus, $\varphi(x) = \int_{K_{\varepsilon/2}} h_a(x-t)\,dt \geq 0$ et

$$\varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty \leq \|\chi_{K_{\varepsilon/2}}\|_\infty \|h_a\|_1 = 1$$

(d'après le théorème 15 ou 16).

Le lemme 19 assure que φ est à support compact

et $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \operatorname{supp} \chi_{K_{\varepsilon/2}} + \operatorname{supp}(h_a)$

$$\subset K_{\varepsilon/2} + \left]-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right[\subset K + \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right] + \left[-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right]$$

$$\subset K + [-\varepsilon, \varepsilon] = K_\varepsilon \subset \Omega.$$

Enfin, pour $x \in K_{\varepsilon/4}$, on a :

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{K_{\varepsilon/2}}(x-t) h_a(t)\,dt = \int_{[-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}]} \chi_{K_{\varepsilon/2}}(x-t) h_a(t)\,dt$$

car $\operatorname{supp}(h_a) \subset \left[-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right]$

Remarquons alors que pour $x \in K_{\varepsilon/4}$ et $|t| \leq \frac{\varepsilon}{4}$,

on a $x - t \in K_{\varepsilon/2}$ ce qui donne :

$$\varphi(x) = \int_{[-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}]} h_a(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} h_a(t)\,dt = 1.$$

Ceci prouve que $\varphi \equiv 1$ sur un voisinage de K. $\blacksquare$

<u>preuve du théorème (22)</u> : Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, soit K_k un compact contenu dans Ω_k tel que $K \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n} K_k$. D'après le lemme (23), il existe des fonctions $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $0 \leq \psi_k \leq 1$, $\operatorname{supp}(\psi_k) \subset \Omega_k$ et $\psi_k \equiv 1$ sur un voisinage (ouvert) V_k de K_k. Posons alors $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2(1-\psi_1)$, ...

$$\dots \quad \varphi_n = \psi_n(1-\psi_1)(1-\psi_2)\dots(1-\psi_{n-1}).$$

Il est facile de voir que $\varphi_k \geq 0$ et

$$1-(\varphi_1+\varphi_2) = (1-\psi_1)(1-\psi_2)$$

d'où en itérant, on voit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k = 1-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_n)$

En particulier, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \leq 1$.

De plus, on a $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset \operatorname{supp}(\psi_k) \subset \Omega_k$

$$\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

et pour $x \in V_1 \cup \dots V_n$ qui est un voisinage ouvert de K

on a $$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1-\psi_i(x))$$
$$= 1 \quad \text{car } \exists\, l \in [\![1,n]\!] \text{ tq } x \in V_l$$
et $\psi_l(x) = 1$

■

4.4 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$:

4.4.1. Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$.

Définition : (1) On appelle transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ la fonction $\mathcal{F}f = \hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi xy}\, dx \quad , \quad y \in \mathbb{R}.$$

(2) La transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ est l'application linéaire

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$$
$$f \longmapsto \mathcal{F}f = \hat{f}$$

(où $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$).

Notons qu'en particulier $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

Théorème 24 : On a $f \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R})$,

où on rappelle que $C_0(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

preuve : La continuité résulte immédiatement du théorème de convergence dominée car $\left| f(x) e^{-2i\pi xy} \right| = |f(x)|$

est intégrable et indépendante de y.

Il s'agit maintenant de voir que $\lim_{|y| \to +\infty} \hat{f}(y) = 0$.

Ecrivons
$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi xy}\,dx \qquad (1)$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\left(x + \frac{1}{2y}\right)y}\,dx \quad \text{car } e^{-i\pi} = -1$$

et posons $t = x + \frac{1}{2y}$; on obtient

$$\hat{f}(y) = -\int_{\mathbb{R}} f\left(t - \frac{1}{2y}\right) e^{-2i\pi ty}\,dt. \qquad (2).$$

En additionnant (1) et (2), on obtient :

$$2\,\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(f(t) - f\left(t - \tfrac{1}{2y}\right)\right) e^{-2i\pi t y}\, dt,$$

ce qui donne $\displaystyle 2\left|\hat{f}(y)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|f(t) - f\left(t - \tfrac{1}{2y}\right)\right| dt$

$$= \left\| f - f_{\frac{1}{2y}} \right\|_1 .$$

Le théorème 14 implique alors que $\displaystyle \lim_{|y| \to +\infty} \left\| f - f_{\frac{1}{2y}} \right\|_1 = 0$, ce qui donne le résultat. ∎

<u>Théorème 25</u>: Pour toutes fonctions $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F} f) . (\mathcal{F} g).}$$

Autrement dit, le théorème 15 dit que la transformation de Fourier est un homomorphisme d'algèbres.
C'est l'un des grands intérêts de la transformée de Fourier.
En effet, la convolution régularise les fonctions mais n'est pas facile à calculer ; un passage du "côté Fourier" simplifie souvent la situation, d'autant plus que comme on le verra, on a des résultats pour ensuite revenir en "arrière" (= "inverse" de la transformation de Fourier).

preuve du théorème 25 : On a

$$\widehat{f*g}(y) = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\, e^{-2i\pi xy}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, e^{-2i\pi xy}\, dt\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, e^{-2i\pi(x-t)y}\, g(t)\, e^{-2i\pi ty}\, dt\, dx$$

Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left| f(x-t)\, e^{-2i\pi(x-t)y}\, g(t)\, e^{-2i\pi ty}\right| dt\, dx =$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\, g(t)|\, dt\right) dx = \| |f| * |g| \|_1$$

$$\leq \|f\|_1 \, \|g\|_1 < +\infty,$$

le théorème de Fubini s'applique et on obtient :

$$\widehat{(f*g)}(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, e^{-2i\pi(x-t)y}\, dx \right) g(t)\, e^{-2i\pi ty}\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u)\, e^{-2i\pi uy}\, du \right) g(t)\, e^{-2i\pi ty}\, dt$$

$$= \hat{f}(y)\, \hat{g}(y).$$

Corollaire 26 : L'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour la convolution.

preuve : raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe $e \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $e * f = f$, $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$

On a donc alors $\hat{e}\,\hat{f} = \hat{f}$, $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$.

Considérons $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$.

Alors
$$\hat{f}(y) = \int_0^1 e^{-2i\pi t y}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 0 \\ \dfrac{e^{-2i\pi y} - 1}{-2\pi i y} = e^{-i\pi y}\dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y}, & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

Comme $\hat{f}(y) \neq 0$, $\forall y \notin \mathbb{Z}^*$, on devrait avoir

$$\hat{e}(y) = 1, \ \forall y \in \mathbb{Z}^*.$$

Mais $\hat{e}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on aurait $\hat{e}(y) = 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$, ce qui contredit le fait que $\lim_{|y| \to +\infty} \hat{e}(y) = 0$.

Remarque : il existe en fait bien une unité pour la convolution, mais elle n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$: on peut étendre la définition de la convolution à l'espace de toutes les mesures complexes sur $\mathbb{R}$: dans cette algèbre $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ qui contient $L^1(\mathbb{R})$ (via l'application $f \longmapsto f(t)dt$), il y a unité qui est la mesure de Dirac δ_0 en 0.

Mais tout ceci est une autre histoire et nous entrainerait trop loin.....

Corollaire (27) : L'application linéaire $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est continue et de norme 1.

preuve : il est clair que $\mathcal{F}$ est linéaire et on a

$$|(\mathcal{F}f)(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi xy} dx \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-2i\pi xy}| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx ,$$

d'où $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$, ce qui prouve que

$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est continue et $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.

Pour montrer que $\|\mathcal{F}\| = 1$, on va utiliser une unité approchée $(k_a)_{a>0}$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

D'après le théorème 18, on a $k_a * f \xrightarrow[a \to 0]{} f$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

Comme $\mathcal{F}$ est continue, on a

$$\widehat{k_a * f} \xrightarrow[a \to 0]{} \hat{f} \quad \text{dans} \quad (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

Mais d'après le théorème 25, on a $\widehat{k_a * f} = \hat{k_a} \cdot \hat{f}$.

Ainsi
$$\|\hat{f}\|_\infty = \lim_{a \to 0} \|\hat{k_a} \cdot \hat{f}\|_\infty$$

$$\leq \|\hat{f}\|_\infty \varlimsup_{a \to 0} \|\hat{k_a}\|_\infty$$

$$\leq \|\hat{f}\|_\infty \sup_{a > 0} \|\hat{k_a}\|_\infty$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}$ ne soit pas identiquement nulle (par exemple $f = \chi_{[0,1]}$). En simplifiant alors l'inégalité précédente par $\|\hat{f}\|_\infty$, on obtient que

$$1 \leq \sup_{a > 0} \|\hat{k_a}\|_\infty .$$

Choisissons l'unité approchée telle que $\|k_a\|_1 = 1$, $\forall a > 0$.

On a alors
$$1 \leq \sup_{a>0} \|\hat{k_a}\|_\infty \leq \sup_{a>0} \|\mathcal{F}\| \|k_a\|_1$$
$$= \|\mathcal{F}\|.$$

D'où $\|\mathcal{F}\| = 1$.

4.4.2 Le théorème d'inversion :

Nous allons voir que, sous certaines conditions, on peut retrouver f à partir de sa transformée de Fourier.

Définition : Pour $u \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle co-transformée de Fourier de u la fonction définie par :

$$(\overline{\mathcal{F}}\, u)(y) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{2i\pi xy}\, dx \;, \quad y \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire que $(\overline{\mathcal{F}}\, u)(y) = (\mathcal{F}\, u)(-y) = \overline{\mathcal{F}\bar{u}(y)}$, $y \in \mathbb{R}$.

On note parfois $\check{u} = \overline{\mathcal{F}}\, u$.

Lemme (28) : Soit $K \in L^1(\mathbb{R})$, $k = \overline{\mathcal{F}} K$ et $k_a(x) = \frac{1}{a} k\left(\frac{x}{a}\right)$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Alors pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$(f * k_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{2i\pi xy}\, K(ay)\, dy \;, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

preuve : Comme $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ (voir théorème 24) et que $k(y) = (\mathcal{F} K)(-y)$, on en déduit que $k \in C_0(\mathbb{R})$.

Cela implique bien sûr que $\forall a > 0$, $k_a \in C_0(\mathbb{R})$ et donc en particulier $\forall a > 0$, $k_a \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Le théorème 15 a) implique alors que $(f * k_a)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors par définition

$$k(y) = \int_{\mathbb{R}} K(x) e^{2i\pi x y} dx \text{ , et donc}$$

$$k_a(y) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} K(x) e^{2i\pi x \frac{y}{a}} dx .$$

En effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{a}$, on obtient

alors $k_a(y) = \frac{1}{\cancel{a}} \int_{\mathbb{R}} K(at) e^{2i\pi t y} \cancel{a}\, dt$

et donc

$$\boxed{k_a(y) = \int_{\mathbb{R}} K(at) e^{2i\pi t y} dt}$$

Notons maintenant que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \left| e^{2i\pi t y} \right| |K(at)| \, dt \, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |K(at)| dt \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dy$$

En effectuant le changement de variable $v = at$ dans la première intégrale et $s = x - y$ dans la deuxième, on obtient

$$\iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|e^{2i\pi ty}|\,|K(at)|\,dt\,dy = \frac{1}{a}\|K\|_1 \|f\|_1 < +\infty . \quad (10)$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini qui donne :

$$(f * k_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,k_a(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \int_{\mathbb{R}} K(at)\,e^{2i\pi ty}\,dt\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,e^{2i\pi ty}\,dy \right) K(at)\,dt$$

En effectuant le changement de variable $u = x-y$,

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,e^{2i\pi ty}\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(u)\,e^{+2i\pi t(x-u)}\,du$$

$$= e^{2i\pi tx} \int_{\mathbb{R}} f(u)\,e^{-2i\pi tu}\,du$$

$$= e^{2i\pi tx}\,\hat{f}(t)$$

Donc
$$(f*k_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, e^{2i\pi t x}\, K(at)\, dt \qquad \blacksquare$$

Théorème 29: (théorème d'inversion de Fourier):

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si sa transformée de Fourier $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{2i\pi xy}\, dy.$$

De façon plus condensée, le théorème d'inversion dit que:
$$f \ \& \ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F} f) \ pp.$$

preuve: Etape 1: Soit $K(y) = e^{-2\pi|y|}$. Alors $K \in L^1(\mathbb{R})$ et si $k = \overline{\mathcal{F}} K$ et $k_a(x) = \frac{1}{a} k\left(\frac{x}{a}\right)$, $a>0$ alors $(k_a)_{a>0}$ est une unité approchée de $L^1(\mathbb{R})$.

La fonction K est évidemment continue et paire sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a
$$\int_0^a |K(y)|\, dy = \int_0^a e^{-2\pi y}\, dy = \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-2\pi a}\right)$$

et donc quand $a \longrightarrow +\infty$, on obtient:
$$\int_0^{+\infty} |K(y)|\, dy = \frac{1}{2\pi}.$$

Ainsi $K \in L^1(\mathbb{R})$.

D'autre part,

$$k(y) = \overline{\mathcal{F}} K(y) = \int_{\mathbb{R}} K(x)\, e^{2i\pi xy}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|x| + 2i\pi xy}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi(1+iy)x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{+2\pi(-1+iy)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+iy)} \left[e^{2\pi(1+iy)x} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi(-1+iy)} \left[e^{2\pi(-1+iy)x} \right]_{0}^{+\infty}$$

Or $\quad \left| e^{2\pi(1+iy)x} \right| = e^{2\pi x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

et $\quad \left| e^{2\pi(-1+iy)x} \right| = e^{-2\pi x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

D'où :

$$k(y) = \frac{1}{2\pi(1+iy)} - \frac{1}{2\pi(-1+iy)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1+iy} + \frac{1}{1-iy} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \, \frac{2}{1+y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

Remarquons que $k \in L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} k(y)\,dy = 1$.

On a alors déjà vu (voir exemple page 43) que dans ce cas $(k_a)_{a>0}$ est une unité approchée de $L^1(\mathbb{R})$.

Etape 2 : d'après le lemme (28), on a

$$(f * k_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{2i\pi xy} K(ay)\,dy \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Or
$$K(ay) = e^{-2\pi a|y|} \xrightarrow[a \to 0]{} 1$$

et
$$0 \leq K(ay) \leq 1 \quad , \ \forall a > 0, y \in \mathbb{R}$$

D'où

* $\hat{f}(y)\, e^{2i\pi xy} K(ay) \xrightarrow[a \to 0]{} \hat{f}(y)\, e^{2i\pi xy}$

et

* $\left| \hat{f}(y)\, e^{2i\pi xy} K(ay) \right| \leq |\hat{f}(y)| \in L^1(\mathbb{R})$

Le théorème de convergence dominée s'applique et donne que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{2i\pi xy} K(ay)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{2i\pi xy}\,dy$$

Ainsi
$$\lim_{a \to 0} (f * k_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{2i\pi xy}\,dy \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il reste à utiliser le théorème (18) qui affirme

que $\lim\limits_{a \to 0} \| f * k_a - f \|_1 = 0$.

Le théorème (7) implique alors qu'on peut trouver une suite

$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ telle que $(f * k_{a_n})_n$ converge presque partout

vers f. Mais comme d'autre part,

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (f * k_{a_n})(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2i\pi xy} dy$,

on en déduit que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2i\pi xy} dy \quad \text{pp tout } x \in \mathbb{R}.$$

■

Voyons tout de suite une conséquence très importante

<u>Théorème (30)</u>: La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ est injective.

<u>preuve</u>: $\mathcal{F}$ étant linéaire, il suffit de voir que $\ker \mathcal{F} = \{0\}$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f = 0$. Comme $0 \in L^1(\mathbb{R})$,

la théorème d'inversion nous dit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2i\pi xy} dy = 0$$

Ainsi $f = 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$

■

4.5 Formule sommatoire de Poisson :

Théorème 31 (Formule sommatoire de Poisson) :

Soit $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. On suppose que

(1) $\exists M > 0$, $\exists \alpha > 1$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|F(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$$

(2) $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{F}(n)| < +\infty$$

Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n)$ converge et on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n).$$

preuve : introduisons la fonction

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(x+n) \quad , \; x \in \mathbb{R}.$$

La série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$: en effet, si $A > 0$ et $|x| \leq A$, on a d'après 1)

pour $|n| \geq 2A$, $|x+n| \geq |n| - |x| \geq |n| - A \geq \frac{|n|}{2}$

D'où

$$|F(x+n)| \leq \frac{M}{\left(1+\frac{|n|}{2}\right)^\alpha}$$

Comme $\alpha > 1$, on sait que $\sum_n \frac{1}{\left(1+\frac{|n|}{2}\right)^\alpha}$ converge, ce qui prouve la convergence normale de la série sur $[-A, A]$, $\forall A > 0$.

Comme $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$ et de plus $f(x+1) = f(x)$. Autrement dit, f est 1-périodique. Calculons son coefficient de Fourier d'indice n. On a :

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t)\, e^{-2i\pi n t}\, dt = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(t+k)\, e^{-2i\pi n t}\, dt$$

Comme la série converge normalement pour $t \in [0,1]$, on peut intervertir série et intégrale, ce qui donne :

$$c_n(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 F(t+k)\, e^{-2i\pi n t}\, dt .$$

Faisons le changement de variable $u = t+k$, et comme

$$e^{-2i\pi n t} = e^{-2i\pi n(u-k)} = e^{-2i\pi n u}\, e^{2i\pi n k} = e^{-2i\pi n u},$$

on obtient :

$$c_n(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} F(u)\, e^{-2i\pi n u}\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{-2i\pi n u}\, du ,$$

où la dernière égalité est justifiée car $F \in L^1(\mathbb{R})$.

On obtient donc que

$$c_n(f) = \hat{F}(n).$$

D'après (2), on sait que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{F}(n)| < +\infty$

D'après la théorie des séries de Fourier, on en déduit que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{2i\pi n x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

i.e $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n)\, e^{2i\pi n x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il suffit alors de prendre $x=0$ dans l'inégalité précédente. $\blacksquare$

4.6. Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$:

Comme $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, la définition de la transformée de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ ne peut pas se faire simplement en reprenant celle des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.

On va utiliser ici un passage à la limite en utilisant la densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (on notera que $C_{cc}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $C_{cc}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$). L'inconvénient d'une telle définition indirecte est compensée par le fait que, d'une part $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert et d'autre part la transformation de Fourier ainsi définie (appelée aussi <u>transformation de Fourier-Plancherel</u>) va envoyer $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, (alors que rappelons le $\mathcal{F}$ envoie $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$) et réaliser un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même : en particulier, cette transformation va conserver le produit scalaire.

Commençons d'abord par un lemme :

<u>Lemme 32</u> Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\,g(y)\,dy$$

<u>preuve</u> : remarquons que $\hat{g} \in C_0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ donc $f\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ et bien évidemment $\hat{f} g \in L^1(\mathbb{R})$.

On a :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)||g(y)||e^{-2i\pi xy}|\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy < +\infty$$

Ainsi on peut appliquer le théorème de Fubini qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left[\int_{\mathbb{R}} g(y)\, e^{-2i\pi xy}\,dy\right]dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y)\left[\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi xy}\,dx\right]dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\hat{f}(y)\,dy \qquad \blacksquare$$

Nous avons déjà vu avec le théorème d'inversion que l'espace

$$A(\mathbb{R}) = \{ f \in L^1(\mathbb{R}) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \}$$

est important. Voici d'autres propriétés de cet espace.

Proposition 33 : On a :

(a) $f \in A(\mathbb{R}) \Longrightarrow \hat{f} \in A(\mathbb{R})$

(b) $f \in A(\mathbb{R}) \longrightarrow f$ et $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

(c) $A(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

(d) $f \in A(\mathbb{R}) \Longrightarrow \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$

(e) $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$

(f) $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

preuve :

(a) D'après le théorème d'inversion, si $f \in A(\mathbb{R})$, on a :

$$(*) \qquad f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Or $\hat{f} \in A(\mathbb{R}) \iff \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{\hat{f}} \in L^1(\mathbb{R})$.

La première condition "$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$" est assurée par le fait que $f \in A(\mathbb{R})$. Pour la deuxième condition, on a d'après $(*)$ que $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $\hat{\hat{f}} \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Soit $f \in A(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et comme $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$, le théorème d'inversion implique une nouvelle fois que $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$ pp et donc en particulier $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Rappelons (voir Lemme 10) que $\forall\, 1 \leq p < +\infty$,

$$L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}).$$

Donc $\quad f \in A(\mathbb{R}) \Longrightarrow f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$.

Le fait que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ résulte alors de (a).

(c) résulte immédiatement de (b)

(d) si $f \in A(\mathbb{R})$ alors f et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et on peut appliquer le lemme 32 à f et $g(x) := \overline{\hat{f}(x)}$

ce qui donne :

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\,\overline{\hat{f}(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\,g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx$$

Or $\quad \mathcal{F}(\overline{h})(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{h(t)}\,e^{-2i\pi xt}\,dt = \overline{\int_{\mathbb{R}} h(t)\,e^{2i\pi xt}\,dt}$

$$= \overline{\hat{h}(-x)}$$

D'où $\quad \hat{g}(x) = \mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}f}\right)(x)$

$$= \overline{(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(-x)}\,.$$

Le théorème d'inversion implique alors que

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(-x) = f(x) \quad \text{p.p. tout } x \in \mathbb{R},$$

ce qui donne donc $\hat{g}(x) = \overline{f(x)}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

D'où
$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{f(x)}\,dx = \|f\|_2^2\,.$$

(e) Pour prouver que $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on va utiliser les mêmes arguments que pour le théorème d'inversion.

Soit $K(y) = e^{-2\pi|y|}$, $k = \overline{\mathcal{F}} K$ et $k_a(x) = \frac{1}{a} k\left(\frac{x}{a}\right)$, $a > 0$. 82

Alors, $(k_a)_{a>0}$ est une unité approchée.

Fixons $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors d'après le théorème 18,

on a
$$\lim_{a \to 0} \| f * k_a - f \|_2 = 0.$$

Il reste à vérifier que $f * k_a \in A(\mathbb{R})$.

On a : $f \in L^1(\mathbb{R})$, $k_a \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f * k_a \in L^1(\mathbb{R})$

D'autre part, $\widehat{f * k_a} = \hat{f} \cdot \hat{k_a}$.

Comme $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$, on a $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.

D'autre part, remarquons que si $g \in L^1(\mathbb{R})$, et

si $(H_\lambda g)(x) := g(\lambda x)$, $\lambda > 0$, alors par un

calcul élémentaire (changement de variable), on a
$$\widehat{H_\lambda g}(x) = \frac{1}{\lambda} \hat{g}\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

D'où comme $k_a = \frac{1}{a} H_{\frac{1}{a}} k$, on a :
$$\hat{k_a}(x) = \frac{1}{a} \widehat{H_{\frac{1}{a}} k}(x) = \frac{1}{a} a \, \hat{k}(ax) = \hat{k}(ax)$$

Comme $k = \overline{\mathcal{F}} K = \overline{\mathcal{F} K}$, on a :
$$\hat{k}(ax) = \mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F} K}\right)(ax)$$
$$= \overline{\mathcal{F}\mathcal{F} K(ax)}$$ (voir page 81)
$$= K(-ax) \quad pp.$$

Or $K(-ax) = K(ax)$, d'où finalement

$$\hat{k}_a(x) = K(ax) \quad \text{et} \quad \hat{k}_a \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ainsi $\hat{f}.\hat{k}_a \in L^1(\mathbb{R})$, ce qui achève de prouver que $f * k_a \in A(\mathbb{R})$.

(f) Rappelons que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tel que $\|f - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'après le (e), il existe alors $h \in A(\mathbb{R})$ tel que

$$\|g - h\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où $\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ ∎

Théorème 34 (Théorème de Plancherel, 1910) :

> La transformation de Fourier $\mathcal{F}$, définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique, en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même, qu'on notera encore $\mathcal{F}$ et qui s'appelle la transformation de Fourier-Plancherel.

preuve : l'unicité vient de la densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Pour l'existence, remarquons que
$$\mathcal{F} : A(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$
est une isométrie qui se prolonge par densité en une isométrie $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$.

Il reste à remarquer que $\mathcal{F}$ est surjective : en effet, d'après le théorème d'inversion, si $f \in A(\mathbb{R})$, on a
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2i\pi xy} dy \qquad \text{pp tout } x \in \mathbb{R}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-y) e^{-2i\pi xy} dy$$
$$= \mathcal{F}h(x) \quad , \quad h(y) = \hat{f}(-y).$$

Donc $f = \mathcal{F}h$ et comme d'après la proposition 33 (b), on a $f \in A(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, on a $h \in L^2(\mathbb{R})$.

Ainsi $A(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$.

Il reste alors à remarquer que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ étant une isométrie, son image est fermée.

Ainsi $\overline{A(\mathbb{R})}^{L^2(\mathbb{R})} \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$.

Comme $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, on en déduit donc que $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ ce qui conclut la surjectivité de la transformation de Fourier-Plancherel. ■

<u>Remarque ①</u>: La transformation de Fourier-Plancherel coïncide sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ avec la transformation de Fourier ! Notons pour un instant $\mathcal{F}_p$ la transformation de Fourier-Plancherel. Alors si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $K(y) = e^{-2\pi|y|}$, $k = \overline{\mathcal{F}} K$, $k_a(x) = \frac{1}{a} k\left(\frac{x}{a}\right)$ alors

$f * k_a \in A(\mathbb{R})$ et $\|f * k_a - f\|_2 \longrightarrow 0$, $a \to 0$

et $\|f * k_a - f\|_1 \longrightarrow 0$, $a \to 0$.

Par construction, on a $\mathcal{F}_p f = \lim\limits_{a \to 0} \widehat{f * k_a}$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Donc il existe une suite $a_n \to 0$ telle que

$$\widehat{f * k_{a_n}}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (\mathcal{F}_p f)(x) \quad \text{pp tout } x \in \mathbb{R}.$$

De +, comme $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est continue

on a $$\widehat{f * k_{a_n}}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \hat{f}(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $\hat{f}(x) = (\mathcal{F}_p f)(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

ce qui prouve que $\hat{f} = \mathcal{F}_p f$, $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ■

Remarque (2) : La co-transformation de Fourier $\overline{\mathcal{F}}$ se prolonge aussi en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même :

en effet, notons

$$\sigma : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$
$$h \longmapsto \sigma h,$$

où $(\sigma h)(x) = h(-x)$; alors σ est un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui même. D'autre part, comme pour $f \in A(\mathbb{R})$,

on a :
$$\overline{\mathcal{F}}(f) = (\sigma \circ \mathcal{F})(f),$$

alors $\overline{\mathcal{F}}$ se prolonge aussi en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui même.

De plus, comme pour $f \in A(\mathbb{R})$, on a d'après le théorème d'inversion,
$$f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} f,$$

on en déduit par densité de $A(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ que

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathrm{Id}.$$

Comme $\mathcal{F}$ est un isomorphisme, cela donne $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.

Corollaire (35) : La transformée de Fourier-Plancherel

$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ est un opérateur unitaire et

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$$

Rappelons que si $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur (application linéaire continue) sur un espace de Hilbert, alors on dit que U est <u>unitaire</u> si U est inversible et $U^{-1} = U^*$.

<u>preuve du corollaire (35)</u> : on sait déjà que $\mathcal{F}$ est inversible et $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ (voir remarque (2) ci-dessous). La seule chose à vérifier est donc que $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$.

Le lemme (32) dit que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$< \mathcal{F} f, g >_2 = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{\overline{g}}(x)\, dx$$

$$= < f, \overline{\mathcal{F} \overline{g}} >_2$$

Or $\overline{\mathcal{F} \overline{g}} = \overline{\mathcal{F}}\, g$ (voir page 68)

D'où $< \mathcal{F} f, g >_2 = < f, \overline{\mathcal{F}} g >_2$

Comme $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, l'égalité précédente est vraie pour toute fonction $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Ainsi par définition $\mathcal{F}^* = \overline{\mathcal{F}}$ et on a déjà vu que $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$. ■

La question naturelle qui se pose est : comment exprimer la transformée de Fourier d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$?

Comme $\mathcal{F}$ a été défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par densité, le calcul de $\mathcal{F}f$, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, fait intervenir une limite.

On peut par exemple utiliser le résultat suivant :

Proposition 36 : Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, posons

$$\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-2\pi i x y} \, dx$$

On a $\lim_{A \to +\infty} \|\varphi_A - \mathcal{F}f\|_2 = 0$.

preuve : Notons $f_A := f \chi_{[-A,A]}$.

On a $f_A \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et

$\varphi_A = \mathcal{F}(f_A)$.

Le théorème de Plancherel implique que

$$\|\varphi_A - \mathcal{F}f\|_2 = \|\mathcal{F}(f_A) - \mathcal{F}(f)\|_2 = \|f_A - f\|_2 .$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on a $\lim_{A \to +\infty} \|f_A - f\|_2 = 0$, ce qui permet de conclure. $\blacksquare$

De même, on a :

Proposition 37 : Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, posons

$$\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} (\mathcal{F}f)(y)\, e^{2i\pi xy}\, dy .$$

On a
$$\lim_{A \to +\infty} \| \psi_A - f \|_2 = 0 .$$

preuve : on a $\psi_A = \overline{\mathcal{F}}\big((\mathcal{F}f) \cdot \chi_{[-A,A]}\big)$

et comme $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)$,

on a :
$$\| \psi_A - f \|_2 = \| \overline{\mathcal{F}}\big((\mathcal{F}f) \cdot \chi_{[-A,A]} - \mathcal{F}f\big) \|_2$$
$$= \| (\mathcal{F}f) \cdot \chi_{[-A,A]} - \mathcal{F}f \|_2$$

et en appliquant le théorème de convergence dominée, on a $\lim_{A \to +\infty} \| (\mathcal{F}f) \cdot \chi_{[-A,A]} - \mathcal{F}f \|_2 = 0$, ce qui donne le résultat. ∎

Corollaire 38 : Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(y)\, e^{2\pi i xy}\, dy,$$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

<u>preuve</u>: puisque $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, le théorème de convergence dominée implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{A \to +\infty} \psi_A(x) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(y)\, e^{2i\pi xy}\, dy$$

D'autre part, comme $\|\psi_A - f\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$, il existe une suite $(A_n)_n$ tendant vers $+\infty$ et telle que

$\psi_{A_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\, e^{2i\pi xy}\, dy$ pour presque tout x. ∎

Chapitre 5. Distribution tempérées.

Une quantité physique est en général modélisée par une fonction : par exemple, l'amplitude $s(t)$ d'un signal en fonction du temps $t \in \mathbb{R}$. Ce signal sera connu si ses valeurs $s(t)$ sont spécifiées à tout instant t. Néanmoins, il n'est pas aisé de décrire effectivement la valeur $s(t)$ à chaque instant t, que ce soit pour des raisons pratiques ou des raisons liées à la mécanique quantique qui explique la rétroaction de l'instrument de mesure sur la mesure.
Si le signal s est continu, l'échantillonnage (i.e la donnée des valeurs $s(t_i)$ pour une suite de temps discrets $(t_i)_{i\in I}$) permet de calculer approximativement des intégrales de s par des moyennes pondérées des valeurs $s(t_i)$, $i \in I$:

$$\int s(t)dt \simeq \sum_{i\in I} h_i s(t_i),$$

intégrales permettant à leur tour de retrouver, sous des hypothèses convenables, les valeurs $s(t)$:

$$s(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} s(u)du.$$

Soit Θ la fonction définie par $\Theta(v) = \frac{1}{2}$ si $|v| \leq 1$
et $\Theta(v) = 0$, si $|v| > 1$

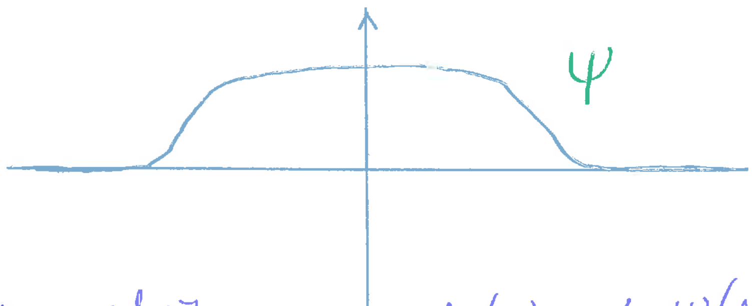
et $\Theta_\varepsilon(v) = \varepsilon^{-1}\,\Theta(\varepsilon^{-1}v) = \frac{1}{\varepsilon}\,\Theta\left(\frac{v}{\varepsilon}\right)$.

La formule précédente se réécrit suivant

$$s(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{|u-t|\le\varepsilon} s(u)\,du = \int_{\mathbb{R}} \Theta_\varepsilon(t-u)\,s(u)\,du$$

Si on remplace Θ par une fonction ψ "lisse" telle que

$\int_{\mathbb{R}} \psi(v)\,dv = 1$ et à support borné



et qu'on définit de même $\psi_\varepsilon(v) = \frac{1}{\varepsilon}\,\psi\left(\frac{v}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$,

on a de manière analogue

$$s(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(t-u)\,s(u)\,du.$$

Ainsi, la connaissance des moyennes

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(v)\,s(v)\,dv$$

pour une classe de fonctions φ suffisamment large permet de retrouver le signal s ; décrire un phénomène physique (ici le signal s) passe par la donnée, pour chaque fonction test φ d'un nombre $\int_{\mathbb{R}} \varphi(v) s(v)\, dv$.

c'est le point de vue des distributions.

L'ensemble des fonctions tests avec lequel nous allons travailler dans ce cours est l'espace de Schwartz, ce qui nous conduira à la notion de distributions tempérées.

5.1. L'espace de Schwartz:

<u>Définition (fonction à décroissance rapide)</u>:

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que φ est à <u>décroissance rapide</u> si pour tout entier $m \geq 0$, on a:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^m \varphi(t)| < +\infty$$

<u>Exemples</u>: (a) La fonction $t \longmapsto e^{-|t|}$ est à décroissance rapide. De même $t \longmapsto e^{-t^2}$.

En revanche, $t \longmapsto e^{-t}$ n'est pas à décroissance rapide car $\lim_{t \to -\infty} e^{-t} = +\infty$!

(b) La fonction $t \longmapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas à décroissance rapide : par exemple

$$t \longmapsto t^2 \frac{\sin t}{t} = t \sin t \quad \text{n'est pas bornée.}$$

Définition (Espace de Schwartz):

Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite de Schwartz, et on note $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si elle est indéfiniment dérivable et si φ ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.

Autrement dit:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : \forall (\ell, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ P_{\ell,m}(\varphi) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^m \varphi^{(\ell)}(t) \right| < +\infty \right\}$$

On voit facilement que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur lequel les $P_{\ell,m}$ forment une famille dénombrable de semi-normes (rappel: $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une semi-norme si (i) $p(0_E) = 0$ (ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ et (iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall (x,y) \in E \times E$.)

Exemples: (1) La gaussienne γ définie par $\gamma(t) = e^{-t^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En effet, pour tout entier n, on a

$$t^n e^{-t^2} \longrightarrow 0, \quad |t| \longrightarrow +\infty.$$

Donc $t^n \gamma(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et γ est à décroissance rapide.

D'autre part, γ est indéfiniment dérivable et pour tout entier k, sa dérivée $\gamma^{(k)}$ d'ordre k est de la forme $p_k \cdot \gamma$ où p_k est un polynôme : on en déduit donc que $\gamma^{(k)}$ est à décroissance rapide et donc $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. ⑤

(2) Toute fonction C^∞ à support compact est de Schwartz. Autrement dit :

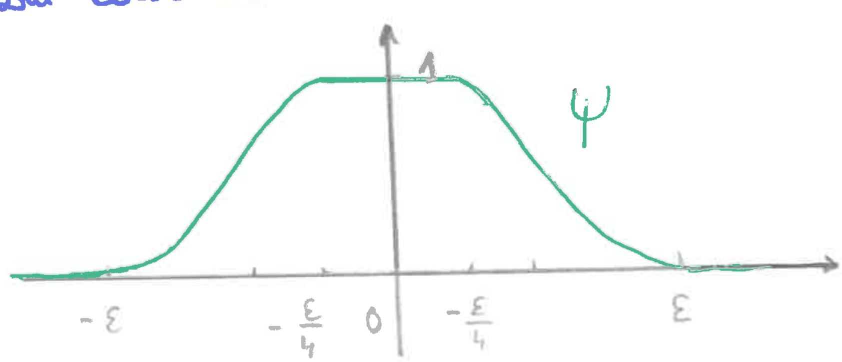
$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Ainsi par exemple

$$\sigma(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & , |t| < 1 \\ 0 & , |t| \geqslant 1 \end{cases}$$

est dans la classe de Schwartz.

(3) <u>Construction d'une fonction plateau</u> : c'est-à-dire $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(\psi) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\psi \equiv 1$ sur $[-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}]$.



Posons $A = \int_{\mathbb{R}} \sigma(t)\,dt$, $k(t) = \sigma(At)$, $t \in \mathbb{R}$ ⑥

On a $\int_{\mathbb{R}} k(t)\,dt = 1$, $0 \leq k(t) \leq 1$ et

$\operatorname{supp} k \subset [-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}]$.

Posons alors pour $a > 0$, $k_a(t) = \frac{1}{a} k(\frac{t}{a})$.

Alors clairement $k_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp} k_a \subset [-\frac{a}{A}, \frac{a}{A}]$.

Ainsi, si a est suffisamment petit $\left(\frac{a}{A} \leq \frac{\varepsilon}{4}\right)$, on a

$\operatorname{supp} k_a \subset [-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}]$.

Posons finalement $\psi := \chi_{[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]} * k_a$.

Comme $k_a \in C^\infty(\mathbb{R})$, le théorème 20 implique que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et le lemme 19 assure que ψ est à support compact avec $\operatorname{supp} \psi \subset [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}] + [-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}] \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$.

De plus,

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} k_a(x-t)\chi_{[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]}(t)\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} k_a(x-t)\,dt \geq 0$$

⑦

et $$\psi(x) \leq \int_{\mathbb{R}} h_a(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} h_a(u)\,du = 1$$

Enfin pour $x \in \left[-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right]$, on a

. si $t < -\frac{\varepsilon}{2}$, $x - t > x + \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}$

donc $h_a(x-t) = 0$

. si $t > \frac{\varepsilon}{2}$, $x - t < x - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} = -\frac{\varepsilon}{4}$

et donc $h_a(x-t) = 0$.

Ainsi $\forall t \notin \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$, $h_a(x-t) = 0$, d'où

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} h_a(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} h_a(u)\,du = 1$$

Ceci achève de prouver que ψ est une fonction plateau. ∎

Définition: Une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si

$$\forall (l,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad P_{l,m}(\varphi_n - \varphi) \longrightarrow 0, \; n \to +\infty.$$

Autrement dit, $\forall (l,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^m \left(\varphi_n^{(l)}(t) - \varphi^{(l)}(t) \right) \right| = 0.$$

<u>Remarque 1</u> : La même "topologie" est induite par la famille de semi-normes $q_{r,m}$, $(r,m)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, définies par :

$$q_{r,m}(\varphi) = \sup_{\ell\leq r}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left((1+|t|)^m|\varphi^{(\ell)}(t)|\right).$$

En effet, pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\exists\, c_m>0$ tel que

$$\forall t>0, \qquad (1+t)^m \leq c_m\,(1+t^m)$$

D'où

$$q_{r,m}(\varphi) \leq c_m \sup_{\ell\leq r}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left(1+|t|^m\right)|\varphi^{(\ell)}(t)|$$

$$\leq c_m \sup_{\ell\leq r}\left(P_{\ell,0}(\varphi)+P_{\ell,m}(\varphi)\right).$$

D'autre part, on a $\quad |t|^m \leq (1+|t|)^m$ et donc

$$P_{\ell,m}(\varphi) \leq q_{\ell,m}(\varphi).$$

Ainsi, on en déduit que

$$\left(\forall(\ell,m)\in\mathbb{N}^2,\ P_{\ell,m}(\varphi_n-\varphi)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right) \iff \left(\forall(r,m)\in\mathbb{N}^2,\ q_{r,m}(\varphi_n-\varphi)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$$

ce qui signifie que $(P_{\ell,m})_{(\ell,m)\in\mathbb{N}^2}$ et $(q_{r,m})_{(r,m)\in\mathbb{N}^2}$ induisent la même topologie.

<u>Remarque ②</u> : il n'existe pas de norme N sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $(\varphi_n)_n$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si $N(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

<u>Proposition ①</u> : Pour tout p, $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R})$, autrement dit, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

est continue. De plus, pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

<u>preuve</u> : • pour $p = +\infty$: on a

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| = P_{0,0}(\varphi)$$

• pour $p < +\infty$, on écrit :

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^p dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|t|)^{mp}} (1+|t|)^{mp} |\varphi(t)|^p dt$$

$$\leq \left(q_{0,m}(\varphi)\right)^p \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+|t|)^{mp}},$$

et donc si m est choisit tel que $mp > 1$,

on obtient que $C := \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+|t|)^{mp}} < +\infty$

et $$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^p \, dt \le C \left(q_{0,m}(\varphi)\right)^p < +\infty$$

Donc $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|\varphi\|_p \le C \, q_{0,m}(\varphi)$.

Ceci prouve que l'injection $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$ est continue.

Montrons enfin que pour $1 \le p < +\infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Il suffit pour cela de remarquer que $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et d'utiliser le théorème (21) du chapitre 4.

<u>Proposition (2)</u> : L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

<u>preuve</u>: Soit ψ une fonction plateau telle que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \psi \subset [-1, 1]$, $0 \le \psi(x) \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\psi \equiv 1$ sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. (Voir l'exemple (3) page 5-7 pour la construction d'une telle fonction).

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et définissons pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_k(x) = \varphi(x) \, \psi\left(\frac{x}{k}\right).$$

Il est clair que $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrons que

$\varphi_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Soit $(l, m) \in \mathbb{N}^2$. Alors :

$$P_{\ell,m}(\varphi_k - \varphi) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^m \left(\varphi_k^{(\ell)}(t) - \varphi^{(\ell)}(t) \right) \right|$$ (11)

et la formule de Leibnicz implique que

$$\varphi_k^{(\ell)}(t) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \frac{\varphi^{(j)}(t)}{k^{\ell-j}} \psi^{(\ell-j)}\left(\frac{t}{k}\right)$$

$$= \varphi^{(\ell)}(t)\,\psi\left(\frac{t}{k}\right) + \sum_{j=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{j} \frac{\varphi^{(j)}(t)}{k^{\ell-j}} \psi^{(\ell-j)}\left(\frac{t}{k}\right)$$

D'où

$$\left| t^m \left(\varphi_k^{(\ell)}(t) - \varphi^{(\ell)}(t) \right) \right| \leq |t|^m \left|\varphi^{(\ell)}(t)\right| \left| \psi\left(\frac{t}{k}\right) - 1 \right| +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{j} \frac{\left| t^m \varphi^{(j)}(t) \right|}{k^{\ell-j}} \left| \psi^{(\ell-j)}\left(\frac{t}{k}\right) \right|$$

$$\leq |t|^m \left|\varphi^{(\ell)}(t)\right| \left| \psi\left(\frac{t}{k}\right) - 1 \right| +$$

$$+ \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{j} P_{j,m}(\varphi)\, P_{\ell-j,0}(\psi)$$

$$\leq |t|^m \left|\varphi^{(\ell)}(t)\right| \left| \psi\left(\frac{t}{k}\right) - 1 \right| + \frac{C_1}{k},$$

où $$C_1 = \sum_{j=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{j} P_{j,m}(\varphi)\, P_{\ell-j,0}(\psi)$$

Si $\frac{|t|}{k} \leq 1/4$, alors $|t|^m \left|\varphi^{(\ell)}(t)\right| \left| \psi\left(\frac{t}{k}\right) - 1 \right| = 0.$

En écrivant que $\quad |\varphi^{(\ell)}(t)| \leq \dfrac{P_{\ell,m+1}(\varphi)}{|t|^{m+1}}$,

on obtint que si $|t| > \frac{k}{4}$, on a :

$$|t|^m |\varphi^{(\ell)}(t)| \left|\psi\left(\frac{t}{k}\right)-1\right| \leq \frac{2\, P_{\ell,m+1}(\varphi)}{|t|} \leq 8\, \frac{P_{\ell,m+1}(\varphi)}{k}$$

D'où

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left(|t|^m |\varphi^{(\ell)}(t)| \left|\psi\left(\frac{t}{k}\right)-1\right|\right) \leq \frac{c_2}{k},$$

$$c_2 = 8\, P_{\ell,m+1}(\varphi).$$

Ainsi, on en déduit que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|t^m\left(\varphi_k^{(\ell)}(t) - \varphi^{(\ell)}(t)\right)\right| \leq \frac{c_1+c_2}{k} = \frac{c}{k},$$

où $\quad c = c_1 + c_2$.

Autrement dit, $\quad P_{\ell,m}(\varphi_k - \varphi) \leq \dfrac{c}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Ceci achève de prouver que $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{\underline{Définition}: On dit qu'une fonction } f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C} \text{ est à} \\ \text{\underline{croissance modérée} (ou \underline{tempérée}) s'il existe } N \text{ tq} \\ \qquad\qquad \displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{(1+|t|)^N} < +\infty\end{array}}$$

<u>Notation</u> : $\mathscr{C}^\infty_m(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ telle que $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $f^{(\ell)}$ est à croissance modérée $\}$

<u>Exemple</u> : (a) Soit $p \in \mathbb{C}[X]$. Alors $p \in \mathscr{C}^\infty_m(\mathbb{R})$

(b) $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^\infty_m(\mathbb{R})$.

<u>Proposition ③</u> : Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^\infty_m(\mathbb{R})$.

On a : (a) $\varphi^{(k)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $\begin{array}{rcl} \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi^{(k)} \end{array}$

est continue.

(b) $f\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $\begin{array}{rcl} \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & f\varphi \end{array}$ est continue.

<u>preuve</u> : (a) On a $\forall (\ell, m) \in \mathbb{N}^2$, $P_{\ell,m}(\varphi^{(k)}) = P_{\ell+k,m}(\varphi)$.

Ainsi $P_{\ell,m}(\varphi^{(k)}) < +\infty$, ce qui prouve que $\varphi^{(k)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

De plus, si $\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors

$$\forall (\ell, m) \in \mathbb{N}^2, \quad P_{\ell+k,m}(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

i.e
$$P_{\ell,m}(\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Autrement dit, $\varphi_n^{(k)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi^{(k)}$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(b) Il est clair que $f\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et la formule de Leibniz implique que
$$(f\varphi)^{(\ell)}(t) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} f^{(k)}(t)\, \varphi^{(\ell-k)}(t)$$

Comme $f^{(k)}$ est à croissance modérée, $\exists\, c_k > 0,\ N_k \in \mathbb{N}$ tq
$$|f^{(k)}(t)| \leq c_k (1+|t|)^{N_k} \leq \tilde{c}_k \left(1+|t|^{N_k}\right).$$

D'où
$$|t|^m \, |(f\varphi)^{(\ell)}(t)| \leq \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \tilde{c}_k \left(|t|^m + |t|^{N_k+m}\right) |\varphi^{(\ell-k)}(t)|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \tilde{c}_k \left(P_{\ell-k,m}(\varphi) + P_{\ell-k,m+N_k}(\varphi)\right)$$
$$< +\infty$$

Ceci prouve que $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

De plus, comme
$$P_{\ell,m}(f\varphi) \leq \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \tilde{c}_k \left(P_{\ell-k,m}(\varphi) + P_{\ell-k,m+N_k}(\varphi)\right)$$

on voit facilement que cette inégalité implique que si $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $f\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f\varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Autrement dit, $\varphi \longmapsto f\varphi$ est continue comme application de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui même.

Théorème 4 : L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformation de Fourier et
$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$ est linéaire et continue. De plus, $\mathcal{F}$ est bijective et $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.

preuve : pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a
$$\hat{\varphi}(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2i\pi xy} dx$$

L'application : • $x \longmapsto \varphi(x) e^{-2i\pi xy}$ est intégrable, pour tout $y \in \mathbb{R}$

• $y \longmapsto \varphi(x) e^{-2i\pi xy}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a : • $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varphi(x) e^{-2i\pi xy}\right) = -2i\pi x \varphi(x) e^{-2i\pi xy}$

et donc
$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi(x) e^{-2i\pi xy}\right)\right| = 2\pi |x\varphi(x)|$$

Or d'après la proposition 3 (b), l'application $x \longmapsto x\varphi(x)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc dans $L^1(\mathbb{R})$ d'après la proposition 1.

Ainsi, le théorème de dérivation sous le signe $\int$

s'applique : $\hat{\varphi}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\hat{\varphi}'(y) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x\,\varphi(x)\, e^{-2i\pi xy}\, dx ,$$

ce qu'on peut réécrire succintement sous la forme :

$$\hat{\varphi}'(y) = -2i\pi\, \widehat{x\varphi}(y) ,$$

où par abus de notation $x\varphi$ désigne la fonction

$(x\varphi)(t) = t\,\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Par récurrence, on en déduit que $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$

et
$$\boxed{\hat{\varphi}^{(\ell)}(y) = (-2i\pi)^\ell\, \widehat{x^\ell \varphi}(y), \ \forall \ell \in \mathbb{N}.}$$

D'autre part, on a $\varphi' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$

et
$$\widehat{\varphi'}(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\, e^{-2i\pi xy}\, dx$$

En utilisant une intégration par partie, on a, $\forall -\infty < a < b < +\infty$

$$\int_a^b \varphi'(x) e^{-2i\pi xy} dx = \Big[\varphi(x)\, e^{-2i\pi xy}\Big]_a^b + 2i\pi y \int_a^b \varphi(x) e^{-2i\pi xy} dx$$

Or
$$\left| \left[\varphi(x) e^{-2i\pi xy} \right]_a^b \right| \leq |\varphi(b)| + |\varphi(a)|$$
$$\leq P_{0,1}(\varphi) \left[\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} \right]$$

Donc
$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left| \left[\varphi(x) e^{-2i\pi xy} \right]_a^b \right| = 0,$$

ce qui donne
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) e^{-2i\pi xy} dx = 2i\pi y \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2i\pi xy} dx.$$

Autrement dit :
$$\widehat{\varphi'}(y) = 2i\pi y \, \widehat{\varphi}(y).$$

Par récurrence, on en déduit que
$$\boxed{\widehat{\varphi^{(\ell)}}(y) = (2i\pi y)^\ell \, \widehat{\varphi}(y), \forall \ell \in \mathbb{N}.}$$

On en déduit donc que $\forall (\ell, m) \in \mathbb{N}^2$
$$y^m \widehat{\varphi}^{(\ell)}(y) = y^m (-2i\pi)^\ell \, \widehat{x^\ell \varphi}(y)$$

c'est à dire

$$y^m \widehat{\varphi}^{(\ell)}(y) = (-2i\pi)^\ell \cdot \frac{1}{(2i\pi)^m} \widehat{(x^\ell \varphi)^{(m)}}(y)$$

D'où

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| y^m \widehat{\varphi}^{(\ell)}(y) \right| \leq (2\pi)^{\ell - m} \left\| (x^\ell \varphi)^{(m)} \right\|_1 < +\infty$$

car $(x^\ell \varphi)^{(m)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$ et

$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est linéaire continue de norme 1.

Ainsi $\quad P_{\ell,m}(\widehat{\varphi}) \leq (2\pi)^{\ell-m} \left\| (x^\ell \varphi)^{(m)} \right\|_1$,

ce qui prouve que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

<u>Montrons que</u> : $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est continue

si $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

alors d'après ce qui précède, on a :

$$P_{\ell,m}(\widehat{\varphi_n} - \widehat{\varphi}) \leq (2\pi)^{\ell-m} \left\| \left(x^\ell (\varphi_n - \varphi)\right)^{(m)} \right\|_1$$

Comme $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. la proposition ③

implique que $\quad x^\ell(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

et une nouvelle application de la proposition ③ entraîne que $\left(x^{\ell}(\varphi_n - \varphi)\right)^{(m)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$\left(x^{\ell}(\varphi_n - \varphi)\right)^{m} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R})$$

Ainsi $P_{\ell,m}(\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\forall (\ell, m) \in \mathbb{N}^2$,

ce qui signifie que $\widehat{\varphi}_n \longrightarrow \widehat{\varphi}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On obtient donc que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est continue.

<u>Montrons que</u> : $\mathcal{F}$ est bijective comme application de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Remarquons que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$(\overline{\mathcal{F}}\varphi)(x) = \widehat{\varphi}(-x) = (\tau \circ \widehat{\varphi})(x),$$

où $\tau h(x) = h(-x)$.

Il est clair que $\tau(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et donc $\overline{\mathcal{F}}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

D'autre part, comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, ce qui précède montre que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et le théorème d'inversion implique que

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(x)\, e^{2i\pi xy}\, dx \ , \quad \text{pour presque tout } y \in \mathbb{R}.$$

Comme φ est continue, on en déduit que

$$(*) \quad \varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(x)\, e^{2i\pi xy}\, dx \ , \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

En effectuant le changement de variable $t = -x$

et en posant $h(t) = \hat{\varphi}(-t) = \overline{\mathcal{F}}\varphi(t)$,

on obtient que :

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\, e^{-2i\pi ty}\, dt \ , \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

i.e $\quad \varphi(y) = \hat{h}(y) = (\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi)(y) \ , \forall\, y \in \mathbb{R}.$

D'où $\quad (**) \quad \varphi = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi$,

ce qui montre que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est surjective. L'égalité $(*)$ montre aussi que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est injective donc elle est bijective.

L'égalité $(**)$ montre aussi que $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ ■

Proposition 5: (a) L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une algèbre pour le produit de fonctions et l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \varphi\psi \end{aligned}$$

est bilinéaire et continue

(b) L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une algèbre pour le produit de convolution et
$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \varphi * \psi \end{aligned}$$

est bilinéaire et continue.

preuve: (a) On a par la formule de Leibniz:

$$(\varphi\psi)^{(\ell)}(t) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \varphi^{(k)}(t)\, \psi^{(\ell-k)}(t)$$

et
$$|t^m (\varphi\psi)^{(\ell)}(t)| \leq \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} |t^m \varphi^{(k)}(t)|\, |\psi^{(\ell-k)}(t)|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} P_{k,m}(\varphi)\, P_{\ell-k,0}(\psi)$$

D'où

$$P_{\ell,m}(\varphi\psi) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^m (\varphi\psi)^{(\ell)}(t)| \leq \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} P_{k,m}(\varphi) P_{\ell-k,0}(\psi).$$

(b) Rappelons que si $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}(\varphi)\,\mathcal{F}(\psi).$$

Maintenant si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(\varphi), \mathcal{F}(\psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (d'après le théorème 4) et d'après le (a), on a

donc $\quad \mathcal{F}(\varphi)\,\mathcal{F}(\psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Donc en particulier, $\mathcal{F}(\varphi * \psi) \in L^1(\mathbb{R})$ et le théorème d'inversion implique alors que

$$(\varphi * \psi)(y) = \overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{F}(\varphi)\,\mathcal{F}(\psi)\big)(y), \text{ pour presque tout } y \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème 15 (chapitre 4), on sait que $\varphi * \psi$ est continue et le théorème 4 implique que $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc en particulier $\overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{F}(\varphi)\,\mathcal{F}(\psi)\big)$ est aussi continue.

Ainsi l'égalité $(\varphi * \psi)(y) = \overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi)\big)(y)$ est valable pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc

$$\varphi * \psi = \overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{F}(\varphi)\,\mathcal{F}(\psi)\big) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

La continuité de $(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi * \psi$ découle de la formule précédente, du (a) et de la continuité de $\mathcal{F}$.

5.2. Distributions tempérées :

Définition : Une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Autrement dit, une application linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est une distribution tempérée si pour toute suite $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ implique que $T(\varphi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans $\mathbb{C}$.

Etant donné une distribution tempérée T, on notera parfois $\langle T, \varphi \rangle$ l'image d'une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par T ; autrement dit, $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$.

Exemple ① : soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$.

L'application
$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\,dt$$

est une distribution tempérée.

Exemple ② : Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et supposons que f soit à croissance modérée.

Alors l'application $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(t)\, dt$$

est une distribution tempérée.

En effet, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq c\,(1 + |t|)^k \,, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

D'où pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)\varphi(t)|\, dt \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{(1+|t|)^k} (1+|t|)^k |\varphi(t)|\, dt$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}} (1+|t|)^k |\varphi(t)|\, dt$$

$$\leq c\, q_{k+2,0}(\varphi) \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+|t|)^2}$$

Ceci montre que T est continue. ∎

Dans les exemples 1 et 2, on dit que la distribution tempérée est <u>régulière</u>, c'est à dire qu'elle provient d'une fonction f.

Plus précisément, on dit que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est <u>régulière</u> s'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

telle que $T = T_f$, où

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(t)\, dt \quad , \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

La fonction f si elle existe est unique (bien évidemment à un ensemble de mesure nulle près).

Exemple ③ : La masse de Dirac

$$\delta_0 : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto \varphi(0)$$

est une distribution tempérée. Elle n'est pas régulière. En effet, supposons qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que

$$(*) \qquad \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, dx \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Considérons $\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$

et $\varphi_n(x) = \varphi(nx) = e^{-\frac{1}{1-n^2x^2}} \chi_{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[}(x)$,

pour $n \geq 1$.

On a $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{supp} \varphi_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_n(0) = \frac{1}{e}$$

En utilisant (*), on a :

$$\frac{1}{e} = \varphi_n(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) f(x)\, dx$$

De plus, on a : * $\left|f(x)\varphi_n(x)\right| \leq \frac{1}{e}|f(x)|\chi_{[-1,1]}(x)$

et $\chi_{[-1,1]} f \in L^1(\mathbb{R})$ (car $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$)

* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x)\varphi_n(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$

(car $\frac{1}{n} < |x|$ pour n assez grand).

Ainsi le théorème de convergence dominée implique

$$\frac{1}{e} = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) f(x)\right) dx$$

$= 0$, ce qui est absurde. ■

Exemple (4) : (Fonction de Heaviside) :

La fonction $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

induit une distribution T_H appelée distribution de Heaviside.

Notons que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$< T_H , \varphi > = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt .$$

Exemple 5 : (valeur principale de $\frac{1}{x}$) :

pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on pose

$$< Vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi > = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

Alors $Vp\left(\frac{1}{x}\right)$ définit une distribution tempérée, appelée valeur principale de $\frac{1}{x}$.

preuve : il s'agit d'abord de montrer que la limite existe.

Notons que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la fonction

$x \longmapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ est intégrable sur $]-\infty, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, +\infty[$.

De plus, si $\varepsilon' > \varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \int_{|x| > \varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon' \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

En écrivant la formule de Taylor (!) à l'ordre 1, on a :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt$$

D'où

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(0)}{x} + \int_0^1 \varphi'(tx)\,dt$$

Comme la fonction $x \longmapsto \dfrac{\varphi(0)}{x}$ est impaire, on a :

$$\int_{\varepsilon' \geq |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = 0 . \quad \text{D'où}$$

$$\left| \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \int_{|x|>\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right| = \left| \int_{\varepsilon' \geq |x| \geq \varepsilon} \left(\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt \right) dx \right|$$

$$\leq 2\,|\varepsilon' - \varepsilon|\, \|\varphi'\|_\infty .$$

La quantité à droite tend vers 0 quand $\varepsilon, \varepsilon' \longrightarrow 0$.

Ainsi le critère de Cauchy implique que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \quad \text{existe.}$$

Montrons maintenant que $Vp\left(\frac{1}{x}\right)$ définit une distribution tempérée.

Pour cela, on introduit une fonction plateau $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$ et on suppose en outre que χ est paire.

Ecrivons alors $\varphi = \chi\varphi + (1-\chi)\varphi$. D'où pour $\varepsilon \in]0,1[$,

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{|x|>\varepsilon} \chi(x)\,\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \varphi(0)\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\chi(x)}{x}\,dx + $$

$$+ \int_{|x|>\varepsilon} \big(1-\chi(x)\big)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

Or, en utilisant que $x \longmapsto \dfrac{\chi(x)}{x}$ est impaire, on a

$\displaystyle\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\chi(x)}{x}\,dx = 0$ et on obtient

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{|x|>\varepsilon} \chi(x)\,\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{|x|>\varepsilon} \big(1-\chi(x)\big)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Remarquons que pour $\varepsilon < |x| \leqslant 1$, on a : $1-\chi(x) = 0$

et donc
$$\int_{|x|>\varepsilon} \big(1-\chi(x)\big)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{|x|\geq 1} \big(1-\chi(x)\big)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

D'où
$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{|x|>\varepsilon} \chi(x)\,\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{|x|\geq 1} \big(1-\chi(x)\big)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

En écrivant que $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \int_0^1 \varphi'(tx)\,dt$,

on en déduit que :

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{|x|>\varepsilon} \chi(x)\left(\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt\right)dx + \int_{|x|\geq 1} (1-\chi(x))\,\frac{\varphi(x)}{x}\,dx .$$

En faisant tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient finalement

$$< Vp\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi > = \int_{\mathbb{R}} \chi(x)\left(\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt\right)dx + \int_{|x|\geq 1} \left(\frac{1-\chi(x)}{x}\right)\varphi(x)\,dx$$

Remarquons que pour $|x| \geq 1$, on a :

$$\left|\frac{1-\chi(x)}{x}\right| \leq 1-\chi(x) \leq 1 ,$$

d'où

$$\left|< Vp\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi >\right| \leq \|\varphi'\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |\chi(x)|\,dx + \int_{|x|\geq 1} |\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \|\chi\|_1 \, \|\varphi'\|_\infty + \|\varphi\|_1$$

$$= \|\chi\|_1 \, P_{1,0}(\varphi) + \|\varphi\|_1 .$$

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$, on en déduit que

$Vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. ■

5.3. Opérations sur les distributions :

5.3.1. Convergence d'une suite de distributions :

Définition (Convergence d'une suite). On dit qu'une suite de distributions tempérées $(T_n)_n$ converge vers une distribution tempérée T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi).$$

Théorème 5 : Si $(T_n)_n$ est une suite de distributions tempérées telles que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \to +\infty} T_n(\varphi) \text{ existe.}$$

Si on pose pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$T(\varphi) = \lim_{n \to +\infty} T_n(\varphi),$$

alors $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

preuve : admise. ∎

Exemple : Soit $k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} k(t)\,dt = 1$

Introduisons $k_n(t) = n\,k(nt)$, $n \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$.

On a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} k_n(t)\,dt = 1$ et $k_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

De plus, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$T_{k_n}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} k_n(t)\varphi(t)\,dt = n\int_{\mathbb{R}} k(nt)\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} k(v)\varphi\left(\frac{v}{n}\right)dv \quad \text{, en posant } v = nt$$

On a : * $k(v)\varphi\left(\frac{v}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} k(v)\varphi(0)$, $\forall v$

* $|k(v)|\left|\varphi\left(\frac{v}{n}\right)\right| \leq \|\varphi\|_\infty |k(v)| \in L^1(\mathbb{R})$

Le théorème de convergence dominée s'applique et on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} T_{k_n}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} k(v)\varphi(0)\,dv$$

$$= \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} k(v)\,dv$$

$$= \varphi(0)$$

$$= \delta_0(\varphi).$$

Ainsi $T_{k_n} \longrightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

5.3.2. Multiplication par une fonction :

Définition : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty_m(\mathbb{R})$

(f est C^∞ et $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $f^{(\ell)}$ est à croissance modérée).

Alors on définit

$$f.T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto (f.T)(\varphi) = T(f\varphi).$$

Remarquons que comme $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dès que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty_m(\mathbb{R})$, cette définition a bien un sens et définit une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 6 : si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty_m(\mathbb{R})$.

Alors $f.T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

preuve : si $\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors d'après la proposition 3 (b), $f\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f\varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Comme $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a donc

$$T(f\varphi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(f\varphi).$$

Ainsi $$(f \cdot T)(\varphi_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (f \cdot T)(\varphi),$$

ce qui prouve que $f \cdot T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. ∎

Exemple ①: on a $x \, Vp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

En effet, $$\langle x \, Vp\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \langle Vp\left(\tfrac{1}{x}\right), x\varphi \rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\cancel{x}\,\varphi(x)}{\cancel{x}} \, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx.$$

$$= T_1(\varphi).$$

Ceci étant vrai pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on en déduit

que $$x \, Vp\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Exemple ②: on a $x \, \delta_0 = 0$.

En effet, $\forall \, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $(x\,\delta_0)(\varphi) = \delta_0(x\varphi) = (x\varphi)(0) = 0$.

La réciproque est aussi vraie

Théorème 7 : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$$x T = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \; T = \lambda \delta_0$$

preuve : Si $xT = 0$ alors $T(x\varphi) = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Fixons $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_0(0) = 1$.

Montrons que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle

$$(*) \qquad \varphi = \varphi(0)\varphi_0 + x\psi.$$

Comme $\varphi_0(0) = 1$, la fonction $\varphi - \varphi(0)\varphi_0$ s'annule en 0 et la formule de Taylor avec reste intégrale s'écrit

$$\varphi(x) - \varphi(0)\varphi_0(x) = x\int_0^1 \left(\varphi'(tx) - \varphi(0)\,\varphi_0'(tx)\right)dt$$

Posons $\quad \psi(x) := \int_0^1 \left(\varphi'(tx) - \varphi(0)\,\varphi_0'(tx)\right)dt$.

Il est clair que ψ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

De plus, comme pour $x \neq 0$, on a

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\varphi_0(x)}{x} \quad \text{et que}$$

φ et φ_0 sont à support compact, on en déduit que ψ est aussi à support compact.

Ainsi $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On a alors

$$T(\varphi) = \varphi(0)\,T(\varphi_0) + T(x\psi)$$

$$= \varphi(0)\,T(\varphi_0)$$

$$= \lambda\,\delta(\varphi) \quad , \text{ où } \lambda = T(\varphi_0).$$

Ainsi T et $\lambda\delta$ coincide sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On en déduit donc que

$$T = \lambda\,\delta.$$

Exercice: Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Montrer que $xT = 1 \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$: $T = vp\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda\,\delta_0$

5.3.3. Dérivation :

La puissance de la théorie des distributions réside sans doute dans le fait que l'on puisse dériver n'importe quelle distribution à n'importe quel ordre.

La définition de la dérivée d'une distribution est simplement obtenue par une généralisation de l'intégration par partie.

<u>Définition</u> : Soit T une distribution tempérée. Alors on définit pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$T'(\varphi) = -T(\varphi').$$

<u>Théorème 8</u> : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Alors $T' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Autrement dit, si T est une distribution tempérée, alors T' est aussi une distribution tempérée.

<u>preuve</u> : Il est clair que $T' : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est linéaire.

D'autre part, si $\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

d'après la proposition 3, on a $\varphi'_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi'$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

d'où $T(\varphi'_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} T(\varphi')$ dans $\mathbb{C}$

et donc $T'(\varphi_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} T'(\varphi)$,

ce qui prouve que T' est continue et donc $T' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. ∎

Exemple ①: Au sens des distributions, on a

$$\left(\log|x|\right)' = Vp\left(\frac{1}{x}\right).$$

En effet, remarquons que $f(x) := \log|x|$, $x \neq 0$, est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

De plus, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)||\varphi(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|x||}{(1+|x|)^2} (1+|x|)^2 |\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq q_{0,2}(\varphi) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|x||}{(1+|x|)^2}}_{<+\infty}$$

Donc

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \end{aligned}$$

définit bien une distribution tempérée.

Nous devons montrer que: $T_f' = Vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a:

$$T_f'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \left(\ln|x|\right) \varphi'(x)\,dx$$

i.e $$T_f'(\varphi) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} (\ln|x|)\, \varphi'(x)\, dx$$

Or $$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(x) \ln|x|\, dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(x) \ln(-x)\, dx$$

En intégrant par partie, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(x) \ln|x|\, dx = \Big[\varphi(x) \ln(-x)\Big]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

Or $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc il existe $c > 0$ tq

$$|\varphi(x)| \leq \frac{c}{1+|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$|\varphi(A) \ln(-A)| \leq \frac{c\,|\ln(-A)|}{1+|A|} \xrightarrow[A \to -\infty]{} 0$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(x) \ln|x|\, dx = \varphi(-\varepsilon) \ln \varepsilon - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

De même, on obtient que

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi'(x) \ln|x|\, dx = -\varphi(\varepsilon) \ln \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

D'où

$$\int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\, \varphi'(x)\, dx = \big(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\big)\ln\varepsilon - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

Le théorème des accroissements finis implique que

$$|\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)| \leq 2\,\varepsilon\, \|\varphi'\|_\infty .$$

D'où $\quad \left|\big(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\big)\ln\varepsilon\right| \leq 2\,\|\varphi'\|_\infty\, |\varepsilon \ln\varepsilon| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Ainsi

$$T_f'(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \langle Vp\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle .$$

Ceci achève de prouver que $T_f' = Vp\left(\frac{1}{x}\right)$. ■

Il faut prendre garde à ce qu'en général, la dérivée d'une fonction au sens des distributions ne coïncide pas avec sa dérivée au sens classique, notamment pour les fonctions dérivables par morceaux.

<u>Exemple ②</u> Soit $H : x \longmapsto H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

la fonction de Heaviside.

Alors : pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$T_H'(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\,dt$$

$$= \varphi(0) - \lim_{t \to +\infty} \varphi(t)$$

$$= \varphi(0),$$

car $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$.

Ainsi $T_H'(\varphi) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

c'est à dire $T_H' = \delta$.

D'autre part, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $H'(t) = 0$ et donc

$$T_{H'} = 0.$$

On peut en fait généraliser cet exemple.

Théorème 9 (Formule des sauts) :

Soient n nombres réels $a_1 < a_2 < \dots < a_n$,

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

a) f est C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$, $i = 0, \dots, n$

(avec la convention $a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = +\infty$)

b) Pour tout $i = 1, \dots, n$, f admet une limite à gauche en a_i (notée $f(a_i^-)$) et une limite à droite en a_i (notée $f(a_i^+)$). (42)

c) f et f' sont à croissance modérée.

Alors :

$$T_f' = T_{\{f\}'} + \sum_{i=1}^{n} \left(f(a_i^+) - f(a_i^-)\right) \delta_{a_i},$$

où $\{f\}'$ est la dérivée par morceaux de f.

preuve : on a pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$(T_f)'(\varphi) = - T_f(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)\,dt$$

$$= -\sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Soit $a_i < \delta_i < \beta_i < a_{i+1}$, $i = 0, \dots, n$.

Alors
$$\int_{\delta_i}^{\beta_i} f(t)\varphi'(t)\,dt = \left[f(t)\varphi(t)\right]_{\delta_i}^{\beta_i} - \int_{\delta_i}^{\beta_i} f'(t)\varphi(t)\,dt$$

$$= f(\beta_i)\varphi(\beta_i) - f(\delta_i)\varphi(\delta_i) - \int_{\delta_i}^{\beta_i} f'(t)\varphi(t)\,dt.$$

Pour $1 \leq i \leq n-1$, on fait tendre $\delta_i \longrightarrow a_i$ et

$\beta_i \longrightarrow a_{i+1}$, ce qui donne :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\varphi'(t)\,dt = f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}) - f(a_i^+)\varphi(a_i) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\varphi(t)\,dt$$

Pour $i=0$, on fait tendre $\delta_0 \longrightarrow -\infty$ et $\beta_0 \longrightarrow a_1$,

ce qui donne :

$$\int_{-\infty}^{a_1} f(t)\varphi'(t) = +f(a_1^-)\varphi(a_1) - \int_{-\infty}^{a_1} f'(t)\varphi(t)\,dt.$$

De même pour $i=n$: on obtient

$$\int_{a_n}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = -f(a_n^+)\varphi(a_n) - \int_{a_n}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt.$$

D'où :

$$(T_f)'(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n-1}\left(f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}) - f(a_i^+)\varphi(a_i)\right)$$

$$+ f(a_n^+)\varphi(a_n) - f(a_1^-)\varphi(a_1)$$

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}) - f(a_i^+)\varphi(a_i)\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}) - \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i^+)\varphi(a_i)$$

i.e

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1})-f(a_i^+)\varphi(a_i)\right)=\sum_{i=2}^{n} f(a_i^-)\varphi(a_i)-\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i^+)\varphi(a_i)$$

$$=\sum_{i=2}^{n-1}\left(f(a_i^-)-f(a_i^+)\right)\varphi(a_i)+$$

$$+f(a_n^-)\varphi(a_n)-f(a_1^+)\varphi(a_1)$$

D'où

$$(T_f)'(\varphi)=\int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)\,dt+\sum_{i=2}^{n-1}\left(f(a_i^+)-f(a_i^-)\right)\varphi(a_i)$$

$$+\left(f(a_n^+)-f(a_n^-)\right)\varphi(a_n)+\left(f(a_1^+)-f(a_1^-)\right)\varphi(a_1)$$

$$=\int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)\,dt+\sum_{i=1}^{n}\left(f(a_i^+)-f(a_i^-)\right)\varphi(a_i).$$

$$=T_{f'}(\varphi)+\sum_{i=1}^{n}\left(f(a_i^+)-f(a_i^-)\right)\delta_{a_i}(\varphi).$$

Ceci étant vraie pour toute $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$T_f'=T_{f'}+\sum_{i=1}^{n}\left(f(a_i^+)-f(a_i^-)\right)\delta_{a_i}.$$

La formule de Leibniz s'étend aisément au produit (11)
d'une distribution par une fonction $f \in C_m^\infty(\mathbb{R})$.

Proposition (10) : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $f \in C_m^\infty(\mathbb{R})$.

Alors pour $l \in \mathbb{N}$, on a:

$$(fT)^{(l)} = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} f^{(k)} T^{(l-k)}.$$

preuve: on vérifie aisément que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a:

$$(fT)'(\varphi) = -(fT)(\varphi')$$

$$= -T(f\varphi')$$

Or $(f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi'$.

D'où $f\varphi' = (f\varphi)' - f'\varphi$

et $-T(f\varphi') = -T((f\varphi)') + T(f'\varphi)$

$$= T'(f\varphi) + T(f'\varphi)$$

Ainsi $(fT)'(\varphi) = T'(f\varphi) + T(f'\varphi)$

$$= (fT')(\varphi) + (f'T)(\varphi).$$

On obtient donc $(fT)' = fT' + f'T$.

La formule général s'obtient alors par récurrence. ∎

Il est clair que si $\lambda \in \mathbb{C}$ et T_λ est la distribution régulière associée à la fonction constante égale à λ, alors $T_\lambda' = 0$.

En effet, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a:

$$T_\lambda'(\varphi) = -T_\lambda(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \lambda \varphi'(t)\,dt$$

$$= \lambda\left(\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) - \lim_{t \to +\infty} \varphi(t)\right)$$

$= 0$ car φ est à décroissance rapide.

La réciproque est aussi vraie.

Théorème (11): Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

On a $T' = 0 \iff \exists \mu \in \mathbb{C} : T = T_\mu$.

La preuve est basée sur le lemme fondamental suivant

Lemme (12): Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 0 \iff \exists\, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ tq } \psi' = \varphi$$

<u>preuve du lemme:</u> $\boxed{\Longleftarrow}$ a déjà été utilisé plusieurs fois notamment dans la remarque précédant le Thm 11.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 0$ et posons

$$\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt .$$

Remarquons tout d'abord que ψ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

D'autre part, la fonction ψ est <u>bornée</u> car ψ est continue

et $\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 0$ par hypothèse

et $\lim_{x \to -\infty} \psi(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = 0$ car $\varphi \in L^1$.

Remarquons de plus que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a:

$$(*) \qquad |\psi(x)| \leq |x| \int_{1}^{+\infty} |\varphi(u\,x)|\,du$$

En effet, pour $x > 0$, écrivons

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = -\int_{x}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$$

et effectuons le changement de variable $u = \frac{t}{x}$,

ce qui donne:

$$\psi(x) = -x \int_1^{+\infty} \varphi(ux)\,du$$

d'où $\quad |\psi(x)| \leq |x| \int_1^{+\infty} |\varphi(ux)|\,du$

Si $x<0$, on effectue le changement de variable

$u = \frac{t}{x}$ dans $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$,

ce qui donne $\quad \psi(x) = x \displaystyle\int_{+\infty}^{1} \varphi(ux)\,du$

$$= -x \int_1^{+\infty} \varphi(ux)\,du$$

et donc $\quad |\psi(x)| \leq |x| \displaystyle\int_1^{+\infty} |\varphi(ux)|\,du$

Ceci prouve (*). On écrit alors pour $l \geq 1$,

$$|x^l \psi(x)| \leq |x^{l+1}| \int_1^{+\infty} |\varphi(ux)|\,du$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{|ux|^{l+1} |\varphi(ux)|}{u^{l+1}}\,du,$$

ce qui donne

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^{l}\,\psi(x)\right| \leq P_{0,l+1}(\varphi)\int_{1}^{+\infty}\frac{du}{u^{l+1}} < +\infty,$$

car $l+1 \geq 2$.

On a évidemment $\psi' = \varphi$ et comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on en déduit finalement que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. ■

<u>preuve du théorème (11)</u>: $\boxed{\Longleftarrow}$ a déjà été démontrée.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vérifie $T' = 0$.

Fixons $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(t)\,dt = 1$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt$.

L'application $\psi := \varphi - \lambda\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

et
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(t)\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt - \lambda = 0.$$

Ainsi si $\Theta(x) = \int_{-\infty}^{x}\psi(t)\,dt$, le lemme 12 implique que $\Theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\Theta' = \psi$.

D'où

$$\begin{aligned}T(\varphi) &= T(\lambda \varphi_0 + \psi) \\ &= \lambda T(\varphi_0) + T(\psi) \\ &= \lambda T(\varphi_0) + T(\Theta') \\ &= \lambda T(\varphi_0) - T'(\Theta)\end{aligned}$$

Comme $T' = 0$, on en déduit que $T(\varphi) = \lambda T(\varphi_0)$,

soit $T(\varphi) = T(\varphi_0) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$.

Pour $\mu = T(\varphi_0)$, on obtient que

$$T(\varphi) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = T_\mu(\varphi).$$

Ceci étant vraie pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, cela implique que $T = T_\mu$. ∎

Le résultat suivant montre que toute distribution tempérée admet une primitive.

Théorème (13) : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors $\exists\, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $S' = T$. De plus, S est unique à une constante près.

preuve : notons d'abord que si S et $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vérifie

$S' = U' = T$, alors $(S-U)' = 0$ et le théorème 11

implique qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que

$S = U + T_\lambda$.

Ainsi si S existe alors S est unique à une constante

près.

Montrons maintenant l'existence de S.

Analyse : Supposons dans un premier temps qu'il existe $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle

que $S' = T$.

On a alors $\forall\, \theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $S'(\theta) = -S(\theta') = T(\theta)$

i.e $\qquad S(\theta') = -T(\theta) \qquad (*)$

Fixons une fonction $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)\,dt = 1$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Posons $\lambda_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$.

On a vu dans la preuve du théorème 11 que

$\varphi = \lambda_\varphi \varphi_0 + \theta'$, où $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est

définie par $\qquad \theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi(t) - \lambda_\varphi \varphi_0(t)\right) dt$

Alors
$$S(\varphi) = \lambda_\varphi S(\varphi_0) + S(\theta')$$
$$= \lambda_\varphi S(\varphi_0) - T(\theta)$$
$$= \lambda_\varphi S(\varphi_0) - T\left(\int_{-\infty}^{x} (\varphi(t) - \lambda_\varphi \varphi_0(t))dt\right).$$

"Synthèse" : définissons pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
$$S(\varphi) := -T\left(\int_{-\infty}^{x} (\varphi(t) - \lambda_\varphi \varphi_0(t))dt\right).$$

Montrons que $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

Tout d'abord, on vérifie facilement que S est linéaire (remarquer que $\varphi \longmapsto \lambda_\varphi$ est linéaire)

Pour la continuité, soit $(\psi_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Il s'agit de montrer que $S(\psi_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Comme $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que $S(\psi_n) = -T(\theta_n)$,

où
$$\theta_n(x) = \int_{-\infty}^{x} (\psi_n(t) - \lambda_{\psi_n} \varphi_0(t))dt,$$

il suffit de vérifier que $\theta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On a $\Theta_n(x) = \int_{-\infty}^{x} (\psi_n(t)\,dt - \lambda_{\psi_n} \varphi_0(t))\,dt$

En utilisant les mêmes calculs que dans la preuve du lemme 12, on a, $\forall\, l \geq 1$

$$|x^l \Theta_n(x)| \leq c_l \left(P_{0,l+1}(\psi_n) + |\lambda_{\psi_n}| P_{0,l+1}(\varphi_0)\right)$$

Or $P_{0,l+1}(\psi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par hypothèse.

De plus, $\lambda_{\psi_n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t)\,dt$,

d'où
$$|\lambda_{\psi_n}| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(t)|\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)^2 |\psi_n(t)| \cdot \frac{1}{(1+|t|)^2}\,dt$$
$$\leq q_{0,2}(\psi_n)\, C,$$

où $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+|t|)^2} < +\infty$.

Ceci montre que $\lambda_{\psi_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $q_{0,2}(\psi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

On en déduit donc que $\forall\, l \geq 1$, $P_{0,l}(\Theta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Pour $l=0$, on a : $P_{0,0}(\psi_n) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\Theta_n(x)|$

Or $$|\Theta_n(x)| \leq \int_{-\infty}^{x} |\psi_n(t)|\,dt + |\lambda_{\psi_n}| \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_0(t)|\,dt$$

$$\leq \left(1 + \|\varphi_0\|_1\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(t)|\,dt .$$

D'où

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\Theta_n(x)| \leq c\left(1+\|\varphi_0\|_1\right) q_{0,2}(\psi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $$P_{0,0}(\Theta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

Finalement, $\forall\, l \in \mathbb{N}$, $P_{0,l}(\Theta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'autre part, $\forall\, k \geq 1$, on a :

$$\Theta_n^{(k)} = \psi_n^{(k-1)} - \lambda_{\psi_n} \varphi_0^{(k-1)}$$

D'où

$$P_{k,l}(\Theta_n) \leq \underbrace{P_{k-1,l}(\psi_n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{|\lambda_{\psi_n}|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} P_{k-1,l}(\varphi_0)$$

Ainsi $\forall (k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a

$$P_{k,l}(\theta_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

ce qui prouve que $\theta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On en déduit alors que

$$S(\psi_n) = -T(\theta_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par conséquent, $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

<u>Il reste à vérifier que</u> $S' = T$.

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a :

$$S'(\psi) = -S(\psi') = T\left(\int_{-\infty}^{x} (\psi'(t) - \lambda_{\psi'}\,\varphi_0(t))\,dt\right).$$

Or $\lambda_{\psi'} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(t)\,dt = 0$

et $\int_{-\infty}^{x} \psi'(t)\,dt = \psi(x)$

D'où $S'(\psi) = T(\psi)$, $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

ce qui achève la preuve du théorème.

5.3.4. Transformée de Fourier d'une distribution :

Définition : Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on pose

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi}).$$

Remarque : cette formule a bien un sens car si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème (14) : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

preuve : découle immédiatement du théorème (4). $\blacksquare$

Exemple : pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\widehat{\delta}(\varphi) = \delta(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt = T_1(\varphi).$$

Ainsi $\widehat{\delta} = 1$ au sens des distributions. $\blacksquare$

Les formules vues pour les fonctions s'étendent aux distributions tempérées.

Théorème (15) : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $l \in \mathbb{N}$. On a :

$$\text{(a)} \quad \widehat{T^{(l)}} = (-2i\pi)^l \, \widehat{x^l T}$$

$$\text{(b)} \quad \widehat{T}^{(l)} = (2i\pi x)^l \, \widehat{T}$$

preuve: (a) pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\widehat{T}'(\varphi) = -\widehat{T}(\varphi') = -T(\widehat{\varphi'})$$

Or d'après la formule vue page 17, on a :

$$\widehat{\varphi'} = 2i\pi x \widehat{\varphi}$$

D'où

$$\begin{aligned}\widehat{T}'(\varphi) &= -2i\pi \, T(x\widehat{\varphi}) \\ &= -2i\pi (xT)(\widehat{\varphi}) \\ &= -2i\pi \, \widehat{xT}(\varphi),\end{aligned}$$

ce qui donne $\widehat{T}' = -2i\pi \, \widehat{xT}$.

Par récurrence, on en déduit la formule du (a).

(b). On a, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\widehat{T'}(\varphi) = T'(\widehat{\varphi}) = -T(\widehat{\varphi}')$$

Or d'après la formule vue page 16, on a

$$\widehat{\varphi}' = -2i\pi \widehat{x\varphi}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\widehat{T'}(\varphi) &= 2i\pi \, T(\widehat{x\varphi}) = 2i\pi \, \widehat{T}(x\varphi) \\ &= (2i\pi x \widehat{T})(\varphi),\end{aligned}$$

ce qui donne $\widehat{T'} = 2i\pi x \widehat{T}$.

Une récurrence donne alors le résultat du b).

Exercice : montrer que si H est la fonction de Heaviside, on a :

$$\widehat{H} = \frac{1}{2i\pi} Vp\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\delta.$$

Indication : remarquer que $H' = \delta$ au sens des distributions

et donc $\widehat{H'} = \widehat{\delta} = 1$

De plus $\widehat{H'} = 2i\pi x \widehat{H}$

D'où $2i\pi x \widehat{H} = x\, Vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ensuite utiliser le théorème 7.

5.3.5. Convolution :

On généralise facilement la convolution de fonctions à la convolution d'une distribution tempérée avec une fonction de l'espace de Schwartz. Pour justifier la définition, remarquons que si $f, \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$,

on a :

$$\int_{\mathbb{R}} (f * \psi)(t)\,\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(t-u) f(u)\,du \right) \varphi(t)\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(u) \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(t-u)\varphi(t)\,dt \right) du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(u)\, (\tilde{\psi} * \varphi)(u)\,du \,,$$

où $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$.

On est donc conduit à la définition suivante :

<u>Définition</u> : soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On pose

$$(T * \psi)(\varphi) = T(\tilde{\psi} * \varphi)\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

<u>Théorème 16</u> : $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Alors $T * \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

<u>preuve</u> : découle directement de la proposition 5. ∎

Corollaire 17 : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Alors (a) $\widehat{T * \psi} = \widehat{\psi}\, \widehat{T}$

(b) $\widehat{\psi T} = \widehat{T} * \widehat{\psi}$

preuve : exercice.

Pour définir le produit de convolution de deux distributions tempérées, il est nécessaire d'avoir des conditions supplémentaires sur les distributions.

Un cas où on peut le faire est le cas où une des deux distributions est à support compact.

Définition : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On dit que T est nulle sur un ouvert Ω si $T(\varphi) = 0$,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \ \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega.$$

On définit alors le support de T comme le plus petit fermé tel que T est nulle dans son complémentaire. On le note $\operatorname{supp} T$.

Autrement dit, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et si $F_0 \subset \mathbb{R}$, alors $F_0 = \operatorname{supp} T$ si et seulement si :

(a) F_0 est fermé

(b) T est nulle sur $\mathbb{R} \setminus F_0$.

(c) si F est un fermé tel que T est nulle sur $\mathbb{R} \setminus F$ alors $F_0 \subset F$

Exemples: a) $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$

b) Si H est la fonction de Heaviside, alors $\operatorname{supp} T_H = [0, +\infty[$.

Théorème (18) : Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Si $\operatorname{supp} T_2$ est compact, la convolée $T_1 * T_2$, définie par :

$$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \langle T_2, \tau_{-t} \varphi \rangle \rangle,$$

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \text{ où } (\tau_{-t}\varphi)(x) = \varphi(x+t),$$

est une distribution tempérée.

De plus, si T_1 et T_2 sont à support compact, alors $T_1 * T_2$ est aussi à support compact et $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$.

<u>preuve</u> : admise. L'un des éléments de la preuve est de mq si T_2 est à support compact, la fonction

$$t \longmapsto U_2(\varphi)(t) = \langle T_2 , \tau_{-t}\varphi \rangle$$

est de Schwartz et l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longmapsto U_2(\varphi) \end{aligned}$$

est continue. ■

<u>Exemple</u> : $\forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a :

$$T * \delta = T$$