Une mise en route : Inégalités classiques

Exercice 1 (L'inégalité triangulaire) *Montrer que pour tous réels a, b, on a*

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

Exercice 2 (Inégalités de Cauchy–Schwarz et de Minkowski) *On se donne un entier $n \geq 2$ et des réels strictement positifs $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. On désigne par φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k y_k,$$

et on associe à cette fonction φ la fonction q définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \varphi(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k^2.$$

(a) Exprimer, pour tout réel t et tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^n$, la quantité $q(x+ty)$ en fonction de t, $\varphi(x, y)$, $q(x)$ et $q(y)$.

(b) Rappeler à quelle condition portant sur les réels a, b, c, le réel a étant non nul, le polynôme de degré 2, $P(t) = at^2 + 2bt + c$ est à valeurs positives ou nulles.

(c) En remarquant que pour x, y fixés dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction $P : t \mapsto q(x+ty)$ est polynômiale de degré 2, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Préciser dans quels cas, l'égalité est réalisée.

(d) En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k (x_k + y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Préciser dans quels cas, l'égalité est réalisée.

Exercice 3 (Inégalités de Hölder et de Minkowski) *Soit* $n \geq 2$ *et soient* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *et* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *des réels strictement positifs. Pour* $1 < p < \infty$*, on note* q *son exposant conjugué, c'est-à-dire l'unique réel tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Notons

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \quad et \quad B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Supposons que $A \neq 0$, $B \neq 0$ *et, pour chaque* $1 \leq i \leq n$*, notons* $\tilde{a}_i = a_i/A$ *et* $\tilde{b}_i = b_i/B$*. Montrer que*

$$\tilde{a}_i \tilde{b}_i \leq \frac{1}{p}\tilde{a}_i^p + \frac{1}{q}\tilde{b}_i^q.$$

Indication : *on pourra considérer les deux réels* s, t *tels que* $\tilde{a}_i = \exp(s/p)$ *et* $\tilde{b}_i = \exp(t/q)$ *et utiliser la convexité de la fonction exponentielle.*

(b) En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Pour $p = q = 2$*, quelle inégalité retrouve-t-on ?*

(c) En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$

Indication : *on pourra écrire* $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$ *et appliquer l'inégalité de Hölder.*

Exercice 4 *On se donne un entier* $n \geq 1$ *et des réels* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *tous non nuls.*

(a) Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}\right) \geq n^2.$$

Indication : *on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

(b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 5 (Inégalité de Bernouilli) *(a) Pour* $n \geq 2$*, on note* P_n *la fonction polynômiale définie par*

$$P_n(x) = x^n - 1 - n(x - 1).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $P_n(x) \geq 0$.

Indication : *on pourra soit raisonner par récurrence, soit faire une étude de fonctions.*

(b) *En déduire que pour tout réel $a > -1$ et tout entier naturel n, on a*

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

(c) *Dans le cas où $a \geq 0$, retrouver cette inégalité, en utilisant la formule du binôme de Newton.*

Exercice 6 (Moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques.) *Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on note respectivement*

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad G_n(x) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}, \quad H_n(x) = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}},$$

les moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(a) *Etablir une relation entre $H_n(x)$ et $A_n(y)$ où $y = (1/x_k)_{1 \leq k \leq n}$.*

(b) *En utilisant la stricte concavité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que $G_n(x) \leq A_n(x)$. Dans quels cas, a-t-on égalité ?*

(c) *En déduire finalement que*

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Montrer que l'une des deux inégalités est réalisée si et seulement si tous les x_i sont égaux.

Bornes supérieures et inférieures.
Suites numériques I.

1 Bornes supérieures et inférieures

Exercice 1.1 *(a) Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Rappeler les définitions suivantes :*

(i) majorants/minorants de X.

(ii) borne supérieure/borne inférieure de X.

(iii) plus grand/plus petit élément (ou maximum/minimum) de X.

(b) Déterminer s'ils existent la borne supérieure et le maximum de X dans les cas suivants :

(i) $X = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $X = [0, 1[\cap \mathbb{Q}$.

(iii) $X = \{(-1)^n + 1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

(c) Même question avec la borne inférieure et le minimum.

Exercice 1.2 *Montrer que pour tous réels a et b, on a*

$$\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|b-a|}{2} \quad \textit{et} \quad \min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|b-a|}{2}.$$

En déduire que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $\max(f, g)$ *et* $\min(f, g)$ *sont aussi continues sur I.*

Exercice 1.3 *Soient A, B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que*

(i) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

(ii) $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.

(iii) Si $A \subset B$, alors $\inf(B) \leq \inf(A)$ *et* $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 1.4 *Soient A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble*

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

Montrer que $A + B$ est majorée et

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Exercice 1.5 *Montrer que si A est une partie fermée, non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors* $\sup(A) \in A$.

Exercice 1.6 (Existence de la racine carrée) *En n'utilisant que le théorème de la borne supérieure et inférieure, montrer l'existence et l'unicité d'une racine carrée dans $\mathbb{R}_+$.*

Indication : *poser $A := \{y \in \mathbb{R}_+ : y^2 \leq x\}$ et $B := \{y \in \mathbb{R}_+ : y^2 \geq x\}$. En justifiant leur existence, on considérera alors $M = \sup A$ et $m = \inf B$ et on montrera que $M^2 = m^2 = x$.*

Exercice 1.7 (Une utilisation de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) *On désigne par f une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

(a) Montrer que f est impaire.

(b) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a $f(na) = nf(a)$.

(c) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(ra) = rf(a)$.

(d) Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$, pour tout réel x.
Indication : *étant donné un réel x, on considéra deux suites de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers x avec $r_n < x < s_n$, pour tout n.*

(e) Montrer que l'identité est l'unique fonction non identiquement nulle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$, pour tous réels x, y.
Indication : *on montrera que $f(1) = 1$, que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et que f est croissante.*

2 Suites convergentes ou divergentes

Exercice 2.1 *(a) Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

(b) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0, \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

(c) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > |\lambda|$. Montrer que

$$0 \leq \left|\frac{\lambda^n}{n!}\right| \leq \left|\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\right| \frac{|\lambda|}{n},$$

pour tout $n > n_0$. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 0.$$

Exercice 2.2 *Montrer que si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$. *Que pensez-vous de la réciproque ?*

Indication : *pour la réciproque, on pourra séparer le cas* $\ell = 0$ *et* $\ell \neq 0$. *Pour* $\ell \neq 0$, *on pourra étudier le cas de la suite* $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.3 *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par*

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx],$$

où $[\cdot]$ *désigne la partie entière.*

(a) Montrer que

$$0 \leq \frac{n+1}{2n}x - u_n < \frac{1}{n}.$$

Indication : *on utilisera que* $[u] \leq u < [u]+1$, *pour tout* $u \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}.$$

Exercice 2.4 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{Z}$. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si elle est stationnaire.*

Indication : *utiliser la définition de la convergence avec* $\varepsilon = 1/2$.

Exercice 2.5 *(a) Montrer que si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, *alors* $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

(b) En considérant la suite $u_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, *étudier la réciproque.*

Exercice 2.6 *Soit* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe.*

(a) On suppose dans cette question qu'il existe un réel $\lambda \in [0,1[$ *tel que*

$$|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|,$$

à partir d'un certain rang n_0.

(i) Montrer par récurrence que

$$|u_n| \leq |u_{n_0}|\lambda^{n-n_0},$$

pour tout $n \geq n_0$.

(ii) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(b) On suppose dans cette question qu'il existe un indice n_0 *tel que* $u_{n_0} \neq 0$ *et qu'il existe un réel* $\lambda > 1$ *tel que*

$$|u_{n+1}| \geq \lambda |u_n|,$$

pour tout $n \geq n_0$.

(i) Montrer par récurrence que $u_n \neq 0$*, pour tout* $n \geq n_0$.

(ii) En appliquant le résultat de la question (a), en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.

(c) Montrer que si $u_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lambda \in [0,1[,$$

alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Indication : *étant donné* β *tel que* $\lambda < \beta < 1$*, on pourra montrer que* $|u_{n+1}| \leq \beta|u_n|$*, à partir d'un certain rang et appliquer le résultat de la question (a).*

(d) Montrer que si $u_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lambda > 1,$$

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

(e) Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

(f) Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

(g) Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 10.$$

Exercice 2.7 *En utilisant l'exercice 2.6 (c), montrer que la suite* $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $n \geq 1$*, est convergente vers* 0.

Suites numériques II

1 Suites de Cauchy

Exercice 1.1 (Une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ non convergente) *(a) Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $|r_{n+1}-r_n| \leq \lambda^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où λ est un réel strictement compris entre 0 et 1. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.*

Indication : *on pourra écrire, pour $m > n$, $r_m - r_n = \sum_{k=n}^{m-1}(r_{k+1} - r_k)$.*

(b) Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $r_0 = 2$ et $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$, $n \geq 0$. Montrer que $(r_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Conclusion ?

Exercice 1.2 (Irrationalité de e) *Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(a) Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

(b) Montrer que, pour tout $m > n > 2$, on a

$$|r_m - r_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right).$$

(c) En déduire que, pour tout $m > n > 2$, on a

$$|r_m - r_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Indication : *on pourra utiliser que $\frac{n+2}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{2}$.*

(d) En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc qu'elle converge dans $\mathbb{R}$. On notera e sa limite.

(e) Supposons que $e \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe p, q deux entiers premiers entre eux (strictement positifs) tels que $e = p/q$.

(i) Montrer que pour tout $n > q$, le nombre $p_n = n!(e - r_n)$ est un entier strictement positif.

(ii) Montrer que $0 < p_n < 1$.

Indication : *on pourra écrire que* $p_n = \lim_{m\to+\infty} (n!(r_m - r_n))$.

(f) Conclure que e *est irrationnel.*

Exercice 1.3 *Pour tout nombre complexe* z *et tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$*, on définit*

$$u_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \quad \textit{et} \quad v_n(z) := \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}.$$

(i) Montrer que, pour tout nombre complexe z*, la suite* $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente. La limite de cette suite est (par définition) l'exponentielle complexe de* z*, notée* $\exp(z)$.

(ii) Montrer que, pour tout nombre complexe z *tel que* $|z| < 1$*, la suite* $(v_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

2 Valeurs d'adhérence

On rappelle qu'un réel ℓ est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ. Rappelons le

Théorème 2.1 (Bolzano–Weierstrass) *De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente. Autrement dit, toute suite bornée de nombres réels possède (au moins) une valeur d'adhérence.*

Exercice 2.1 *Montrer que si*

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell_1 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell_2,$$

alors les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont* ℓ_1 *et* ℓ_2.

Exercice 2.2 *Calculer les valeurs d'adhérence de*

$$u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2.3 *Soit* $u_n := n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) En considérant u_{2n+1}*, montrer que* 0 *est une valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Soit ℓ *une valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Montrer que* $\ell = 0$.

Indication : *on pourra raisonner par l'absurde et considérer* $\ln(u_{\varphi(n)})$.

(iii) En déduire que 0 *est l'unique valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iv) Peut-on conclure à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *?*

Indication : *considérer* u_{2n}.

Exercice 2.4 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe telles que les deux suites extraites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes. A quelle condition la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est-elle convergente ?*

Exercice 2.5 *Montrer que si* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite complexe telle que les trois suites extraites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes, alors* u *est convergente.*

Exercice 2.6 *Le but de l'exercice est de montrer que si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *(i) La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*
- *(ii) La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.*

(a) Montrer que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

(b) On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et admet* ℓ *pour seule valeur d'adhérence. On suppose de plus que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* ℓ.

- *(b1) Montrer qu'il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *et une suite strictement croissante d'entiers* $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$|u_{\varphi(n)} - \ell| \geq \varepsilon, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

- *(b2) En utilisant le théorème de Bolzano–Weierstrass, conclure que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une deuxième valeur d'adhérence, distincte de* ℓ.
- *(b3) En déduire que* $(ii) \Longrightarrow (i)$.

3 Suites monotones

Exercice 3.1 *Soit* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n), \qquad n \geq 1.$$

(i) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*

Indication : *on pourra calculer l'intégrale*

$$\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt,$$

et l'exprimer en fonction de $u_{n+1} - u_n$.

(ii) *Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par* 0.

Indication : *on montrera d'abord que, pour tout $k \geq 1$, on a*

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k},$$

puis que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log(n+1).$$

(iii) *En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On note γ sa limite qui s'appelle* la constante d'Euler.

Exercice 3.2 *On désigne par $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites respectivement définies par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \quad \textit{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

(i) *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{2n} = u_{2n} - u_n + \log(2)$.*

(ii) *En utilisant l'exercice 3.1, montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \log(2)$, et en déduire que*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \log(2).$$

4 Suites adjacentes

Exercice 4.1 *Soient*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \textit{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

(i) *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

(ii) *Conclure que les deux suites sont adjacentes.*

(iii) *Soit e la limite commune de ces deux suites. En calculant u_{10} et v_{10}, donner une valeur approchée de e, en précisant l'erreur d'approximation.*

Exercice 4.2 *Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n), \quad \textit{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1),$$

convergent vers la même limite γ.

Indication : *on pourra utiliser et s'inspirer de l'exercice 3.1.*

Exercice 4.3 *Soient* $0 < a < b$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par* $u_0 = a$, $v_0 = b$ *et*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}} & \textit{(moyenne harmonique)} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} & \textit{(moyenne arithmétique).} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites adjacentes, de limite* $\sqrt{ab}$.

(i) Montrer, par récurrence que $u_n > 0$ *et* $v_n > 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Montrer que $u_n - v_n \leq 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et en déduire que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

(iii) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

(iv) Vérifier, par récurrence que

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{b-a}{2^n},$$

et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites adjacentes.*

(v) Montrer qu'elles convergent vers $\sqrt{ab}$.

(vi) Donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$ *à* 10^{-4} *près.*

Exercice 4.4 *Le but de l'exercice est de donner une démonstration de la non dénombrabilité de* $\mathbb{R}$. *On raisonne par l'absurde, en supposant que* $[0,1]$ *est dénombrable. Autrement dit, il existe une bijection* $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$.

(i) Construire, par récurrence une suite de segments emboîtés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, I_n *ne contient pas* $\varphi(n)$ *et* I_n *est de longueur* 3^{-n}.

(ii) En déduire qu'il existe $x \in [0,1]$ *tel que*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\},$$

et $x \neq \varphi(n)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Conclure que $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

5 Le théorème de Césaro

Exercice 5.1 (Le théorème de Césaro) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle (ou complexe) qui converge vers un nombre réel (ou complexe)* ℓ. *Soit* $(v_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par*

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k, \qquad n \geq 1.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\geq 1}$ *converge aussi vers* ℓ *(on dit dans ce cas que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge au sens de Césaro vers* ℓ*). Que pensez-vous de la réciproque ?*

Indication : *pour la réciproque, on pourra étudier la suite* $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$.

Exercice 5.2 *Montrer que si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle ou complexe telle que* $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\ell$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\ell.$$

Indication : *on pourra calculer* $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$ *et appliquer le théorème de Césaro.*

Exercice 5.3 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique convergente au sens de Césaro vers* ℓ. *Supposons de plus que* $\lim_{n\to+\infty}(n(u_n-u_{n-1}))=0$. *Montrer alors que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ.

Indication : *on montrera que*

$$\sum_{k=1}^{n}k(u_k-u_{k-1})=nu_n-\sum_{k=0}^{n-1}u_k,$$

et on appliquera le théorème de Césaro à la suite $(n(u_n-u_{n-1}))_{n\geq 1}$.

Université Claude Bernard Lyon 1 **Préparation Agrégation Interne**
Feuille 4 (analyse) **Année 2011-12**

Autour du théorème de Rolle et des formules de Taylor

Exercice 1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes [1] :

(i) la fonction f est injective ;

(ii) la fonction f est strictement monotone.

Indication : on pourra considérer l'ensemble

$$K = \{(x,y) \in I^2 : x < y\}$$

et $g : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = (x-y)(f(x)-f(y))$.

Exercice 2 (Théorème de Darboux) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Le but de l'exercice [2] est de montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

(a) Montrer $f'(I)$ est un intervalle si et seulement si pour tous éléments a et b de I et pour tout réel λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe un réel $c \in I$ tel que $f'(c) = \lambda$.

(b) On fixe maintenant a et b deux éléments de I tels que $a < b$ et soit λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On veut montrer qu'il existe un réel $c \in I$ tel que $f'(c) = \lambda$.

  (i) Montrer qu'on peut supposer que $f'(a) \neq f'(b)$.

  (ii) On définit alors $g(x) = f(x) - \lambda x$. Montrer que g n'est pas monotone sur $[a,b]$ et en déduire que g n'est pas injective.

  (iii) En déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

  (iv) Conclure.

Exercice 3 (Inégalités de Kolmogorov) Soient n un entier, $n \geq 2$, et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^n. Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, on note

$$M_k := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(t)|.$$

On remarque que $M_k \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On suppose que M_0 et M_n ont des valeurs **finies**.

---

1. On trouvera d'autres démonstrations dans J.E. Rombaldi, page 61
2. On trouvera deux autres méthodes dans X. Gourdon, page 47 et 78.

(a) Montrer que, pour tout entier k, $0 < k < n$, M_k a une valeur finie.
Indication : fixer $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n, à la fonction f sur l'intervalle $[x, x+i]$. Introduire alors le vecteur $Y(x)$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ de coordonnées $Y_k(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$, $1 \leq k \leq n-1$ et réecrire les n équations obtenues comme un système matriciel dont on montrera qu'il est inversible.

(b) Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f^{(n)}(t) = 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} f^{(k)}(t) = 0$, pour tout entier k tel que $0 < k < n$.

(c) Montrer que pour tout entier m, $1 \leq m \leq n$ et pour tout entier k, $0 \leq k \leq m$, on a
$$M_k \leq 2^{k(m-k)/2} M_0^{1-k/m} M_m^{k/m}.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$ puis effectuer une récurrence sur l'entier m.

Exercice 4 (Un principe des zéros isolés) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur I.

(a) Montrer que si a est un zéro de f d'ordre fini, alors il est isolé, autrement dit, il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in V(a) \setminus \{a\}$.
Indication : considérer l'ordre du zéro et appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur un voisinage bien choisi de a.

(b) On suppose que I est un intervalle compact. Montrer que si f possède une infinité de zéros dans I, alors f possède au moins un zéro d'ordre infini.

(c) Pouvez-vous donner un exemple d'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, non indentiquement nulle et qui possède un zéro d'ordre infini en 0 ?

Exercice 5 (Théorème de Bernstein) Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur $]-a, a[$. On suppose que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in]-a, a[$, on a
$$f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est développable en série entière sur $]-a, a[$.

(a) Montrer qu'il suffit de prouver que, pour tout $b \in]0, a[$, la fonction f est développable en série entière sur $]-b, b[$. Fixons maintenant $b \in]0, a[$.

(b) Soit $F(x) := f(x) + f(-x)$, $x \in [0, b]$, et
$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)\, dt.$$

 (i) Montrer que $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} F(b)$ pour tout $x \in [0, b]$.

(ii) En déduire que, pour tout $x \in]-b, b[$, on a

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}.$$

(iii) Soit

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t)\, dt.$$

Montrer que $|r_n(x)| \leq R_n(|x|)$.

(iv) Soit $p \in \mathbb{N}$ et

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p.$$

Montrer que, pour tout $x \in]-b, b[$, on a $\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1}(x) = f(x)$.

(v) Montrer que pour tout $x \in]-b, b[$, on a $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = f(x)$ et en déduire que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad (x \in]-b, b[).$$

Exercice 6 (Théorème de Sunyer et Balaguer) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞.

Première partie :

On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n_0)}(x) = 0$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus $n_0 - 1$.

Deuxième partie :

On suppose maintenant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n = n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que f est encore un polynôme. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe un voisinage $V(x)$ de x et un entier $n = n(x)$ tel que $f^{(n)}(t) = 0$ pour tout $t \in V(x)$.

1. Soit I un intervalle ouvert non vide (borné ou non) contenu dans $\mathcal{O}$ et soit $x_0 \in I$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier n et un intervalle ouvert contenant x_0 sur lequel $f^{(n)}$ s'annule.
   (b) Soit $J =]\alpha, \beta[$ le plus grand intervalle ouvert contenant x_0 et contenu dans I sur lequel $f^{(n)}$ s'annule. Montrer que $J = I$.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde et supposer par exemple que $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer alors, en utilisant la formule de Taylor-Young appliquée en β à un ordre suffisamment grand, que f est un polynôme de degré $n-1$ au voisinage de β. Conclure à une absurdité.

(c) En déduire que si $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, alors il existe un entier n tel que $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Conclure.

2. On suppose alors que $\mathcal{O} \neq \mathbb{R}$ et on va aboutir à une contradiction. Posons $F = \mathbb{R} \setminus \mathcal{O}$.

   (a) Supposons que F possède un point isolé x_0 et soit $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ intersecte l'ensemble $F \setminus \{x_0\}$.

      (i) Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \varepsilon[$.
      Indication : on pourra appliquer la question 1.b).

      (ii) En déduire que $x_0 \in \mathcal{O}$ et que F n'a pas de points isolés.

   (b) Soit $F_n = \{x \in F : f^{(n)}(x) = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

      (i) Montrer que F_n est fermé et que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

      (ii) En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que $F_{n_0}^{\circ} \neq \emptyset$.
      Indication : on pourra appliquer le théorème de Baire.

      (iii) En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in F_{n_0}$ tel que si $H =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap F$, alors $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in H$.

   (c) Soit $y \in H$.

      (i) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(y_n)_n$ de H qui converge vers y.

      (ii) Montrer alors qu'il existe une suite infinie de points qui converge vers y et sur lesquels $f^{(n_0+1)}$ s'annule.

      (iii) En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, il existe une suite infinie de points qui converge vers y et sur lesquels $f^{(n_0+p)}$ s'annule.

      (iv) En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, on a $f^{(n_0+p)}(y) = 0$.

   (d) Montrer que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus H$ est une réunion d'intervalles ouverts $I_n =]a_n, b_n[$, $n \geq 0$.

   (e) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, il existe un entier $m_n \geq 0$ tel que $f^{(m_n)}$ est nulle sur I_n.

   (f) En déduire que f est un polynôme de degré $n_0 - 1$ sur I_n.
   Indication : on pourra appliquer la formule de Taylor en a_n, à un ordre suffisamment élevé.

   (g) Montrer que $f^{(n_0)}(x) = 0$ pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.

   (h) En déduire que $x_0 \in F$ et conclure.

Commentaire : les références utilisées pour cette feuille sont :

1. X. Gourdon, *Les maths en tête*, 2ème édition, Ellipses : **Exercice 3**, p. 83. **Exercice 5**, p. 250. **Exercice 6**, p. 402.
2. A. Dufetel, *Analyse, Cours et exercices corrigés, Capes externe, agrégation interne Mathématiques*, Vuibert-CNED : **Exercice 2**, p.195.
3. J.E. Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle, Capes et Agrégation de mathématiques*, EDP Sciences : **Exercice 1**, p. 61.
4. A. Pommellet, *Agrégation de mathématiques : cours d'analyse*, Ellipses : **Exercice 4**, p. 105.

Séries numériques et séries de fonctions.

Exercice 1 (Approximation de π)

(a) Etablir que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(b) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(c) En déduire que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

(d) Combien faut-il de termes pour obtenir une approximation de π à 10^{-6} près ?

(e) Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

Indication : en posant $a = \arctan 1/5$ *et* $b = \arctan 1/239$*, on pourra montrer que* $\tan(2a) = 5/12$ *puis* $\tan(4a) = \tan(\frac{\pi}{4} + b)$.

(f) Montrer que si $S = \frac{4}{239} + 16\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)}$, on a

$$-3 \times 10^{-8} \leq \pi - S \leq 10^{-7}.$$

Indication : on utilisera que $11 \times 5^{11} \geq 16 \times 10^8/3$ *et* $3 \times 239^3 \geq 4 \times 10^7$.

(g) Comparer avec le résultat de (d).

Exercice 2 (Un théorème d'Abel) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. Pour $|z| < 1$, on pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On suppose aussi que la série $\sum_n a_n$ converge et on note S sa somme.

(a) Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que, pour $|x| < 1$, la série de terme général $S_n x^n$ est convergente et que l'on a

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \quad \text{et} \quad f(x) - S = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n - S)x^n.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in [0,1[$, on ait

$$|f(x) - S| \leq (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N_0}(S_n - S)x^n\right| + \varepsilon x^{N_0+1}.$$

(c) Démontrer que $f(x)$ tend vers S quand $x \to 1^-$.

(d) En utilisant ce qui précède, prouver que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

Exercice 3 (Equivalent du reste d'une série convergente) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1 vérifiant

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

(a) Soit $A > 0$.

(i) Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 1$, on ait

$$f(n+p) \leq f(n)e^{-pA}.$$

(ii) En déduire que la série $\sum_n f(n)$ converge et que si $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ est le reste d'ordre n de la série, on a

$$0 \leq R_{n+1} \leq \frac{e^{-A}}{1 - e^{-A}} f(n).$$

(iii) En déduire que $R_{n+1} = o(f(n))$, $n \to +\infty$, puis que $R_n \sim_{+\infty} f(n)$.

(b) En utilisant ce qui précède, montrer que la série $\sum_n e^{-n^2}$ converge et

$$\sum_{p=n}^{+\infty} e^{-p^2} \sim_\infty e^{-n^2}.$$

Exercice 4 (Autour de la fonction zéta de Riemann) On rappelle que la fonction zéta de Riemann est définie pour $\Re(s) > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\zeta(k) - 1 \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{(k+1)2^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

(b) En déduire que la série $\sum_{k\geq 2}(\zeta(k)-1)$ est convergente et que

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k)-1) = 1.$$

(c) On rappelle que la suite $(a_n)_n$ définie par

$$a_n = -\log(n) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \qquad n \geq 1,$$

est convergente et sa limite, notée γ, est appelée constante d'Euler. Soit $\delta_n = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 2$.

(i) Montrer que

$$\delta_n = -\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{kn^k}.$$

(ii) Montrer que la série $\sum_n \delta_n$ converge et que sa somme est $\gamma - 1$.

(iii) En déduire que

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\zeta(k)-1}{k} = 1 - \gamma.$$

Exercice 5 (Un résultat d'équation diophantienne) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des entiers naturels non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation

$$\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \ldots \alpha_p n_p = n.$$

Montrer que $S_n \sim \frac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$.
On pourra interpréter S_n comme le coefficient d'une série entière qui s'exprime simplement en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

Commentaire : les références utilisées pour cette feuille sont :

1. X. Gourdon, *Les maths en tête*, 2ème édition, Ellipses : **Exercice 2**, p. 252. **Exercice 3**, p. 212. **Exercice 4**, p. 211. **Exercice 5**, p. 249.
2. A. Dufetel, *Analyse, Cours et exercices corrigés, Capes externe, agrégation interne Mathématiques*, Vuibert-CNED : **Exercice 2**, p. 310-311.

Université Claude Bernard Lyon 1 **Préparation Agrégation Interne**
Feuille 6 (analyse) **Année 2011-12**

Séries de Fourier.

Exercice 1 (Développement en série de Fourier et formule de Parseval)
Soit f la fonction paire, 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in]1,\pi]. \end{cases}$$

1. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction f et préciser sa convergence.
2. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi-1}{2}.$$
3. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n)}{n} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Exercice 2 (L'inégalité de Wirtinger) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt. \qquad (1)$$

1. Rappelons que si g est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux, on note $c_n(g)$ son n-ième coefficient de Fourier défini par
$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int}\,dt \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$
Montrer que $c_n(f') = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.
2. En utilisant la formule de Parseval, en déduire (1).

Exercice 3 (Le développement eulérien du sinus) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. On désigne par f_α la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in]-\pi,\pi], \qquad f_\alpha(t) = \cos(\alpha t).$$

1. Calculer la série de Fourier de f_α. En déduire que
$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \qquad \operatorname{cotan}(t) = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

2. Fixons $x \in]0, \pi[$ et soit $f : [0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{cotan}(t) - \frac{1}{t} & \text{si } 0 < t \leq x \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$
Vérifier que f est continue sur $[0, x]$ et montrer que
$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

3. En déduire que
$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \qquad \sin(t) = t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right),$$
où l'égalité ci-dessus signifie que la suite $t \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$ converge vers $\sin(t)$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 4 (Equations différentielles et séries de Fourier) On considère l'équation différentielle
$$(E_{a,b}) \qquad y''(t) + (a + be^{2it})y(t) = 0,$$
avec a, b deux nombres complexes.

1. On suppose dans cette question que a est réel et $b = 0$. Résoudre $(E_{a,0})$. L'équation $(E_{a,0})$ admet-elle des solutions non nulles 2π-périodiques ?
2. Soit f une fonction indéfiniment dérivable et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout entier k strictement positif, on a lorsque n tend vers $+\infty$:
$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$
3. (a) Montrer que toute solution de $(E_{a,b})$, 2π-périodique, est indéfiniment dérivable, développable en série de Fourier ainsi que ses dérivées.
   (b) Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $g(t) = (a + be^{2it})f(t)$. Pour tout entier n, calculer $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$.
4. Montrer que les coefficients de Fourier $c_n(f)$ d'une solution 2π-périodique de l'équation $(E_{a,b})$ vérifient la relation :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad (n^2 - a)c_n(f) = bc_{n-2}(f).$$

5. Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} \gamma_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma_n = \frac{b\gamma_{n-1}}{4n^2}, \end{cases}$$

et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n e^{2int}$. Montrer que la fonction φ est une solution 2π-périodique de l'équation $(E_{0,b})$.

Exercice 5 (Le théorème de Féjer) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $e_k(x) = e^{ikx}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k, \qquad C_n(f) = \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1},$$

où les $c_k(f)$ sont les coefficients de Fourier de f et

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k, \qquad \tilde{C}_n = \frac{\tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 + \cdots + \tilde{S}_n}{n+1}.$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{C}_n(t)\,dt = 1.$$

2. Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,\pi]$, la suite de fonction $(\tilde{C}_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi,\pi] \setminus [-\alpha,\alpha]$.
3. Montrer, que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$C_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\tilde{C}_n(t)\,dt.$$

4. En déduire le théorème de Féjer : la suite de fonction $(C_n(f))$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.