Algèbre linéaire numérique et fonctions de matrices

Cours fondamental du Master 2 de Mathématiques Appliquées, Lille–Littoral–Valenciennes
par Bernhard Beckermann, http ://math.univ-lille1.fr/∼bbecker
Septembre 2010

Table des matières

1 Fonctions de matrices

Dans des nombreux applications, on est amené à évaluer $f(A)$ ou $f(A)b$ avec $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de spectre $\sigma(A)$, et $b \in \mathbb{C}^n$. A titre d'exemple, pour $f(z) = 1/z$ on résout un système d'équations linéaires, mais $f(z) = \exp(z)$, $f(z) = \log(z)$ et d'autres fonctions jouent un rôle essentiel dans des nombreux applications comme par exemple la résolution d'une EDO obtenue après discrétisation en espace d'une équation aux dérivées partielles.
Commençons d'abord à définir proprement cet objet, avant de voir des applications.
Ce cours suit de plus près le livre [3]. Le lecteur trouvera aussi des compléments dans les livres [5], [6] et [8] sur l'algèbre linéaire numérique en général, [2] sur les méthodes de Krylov en particulier, [4] sur l'approximation rationnelle, [1] sur le contrôle linéaire, et enfin [7] sur la notion du pseudo-spectre.

1.1 Définitions de base

1.1.1 Rappel de la forme de Jordan : *Tout $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est similaire à une matrice sous forme de Jordan : $\exists Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible de sorte que $Z^{-1}AZ = J = \mathrm{diag}(J_1, ..., J_p)$ diagonale* *par blocs, avec*

$$J_k = J_{m_k}(\lambda_k) = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_k & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}$$

dit **bloc de Jordan** *et* $m_1 + ... + m_p = n$. *Donc* $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ *(pas forcement distincts). On appellera* **indice** $m(\lambda)$ *d'une valeur propre* λ *la taille du plus grand bloc de Jordan associé à* λ. *Le nombre de blocs et leur taille est un invariant de* A.
Cas particulier : *si l'indice de toutes les valeurs vaut* 1 *(*$m_1 = ... = m_n = 1$*) on dit que* A *est* **diagonalisable***, ici les colonnes de* Z *sont des vecteurs propres associés.*
Cas particulier : *si* A *est hermitienne (*$A = A^*$*) ou normale (*$AA^* = A^*A$*) alors elle est diagonalisable, et on peut choisir* Z *unitaire (*$Z^*Z = I_n$*, c'est–à–dire, base orthonormée de vecteurs propres).*

1.1.2 Définition d'une fonction d'une matrice : *Soit* f *une fonction définie sur le spectre de* A*, c'est–à–dire,* $\forall \lambda \in \sigma(A)$ *d'indice* $m(\lambda)$ *on connait* $f^{(j)}(\lambda)$ *pour* $j = 0, 1, ..., m(\lambda) - 1$. *Alors*

$$f(A) = Z \operatorname{diag}(f(J_1), ..., f(J_p)) Z^{-1}, \quad f(J_m(\lambda)) = \begin{bmatrix} \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!} \\ 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} \end{bmatrix}.$$

On remarque vite que $f(A)$ ne dépend pas de la forme particulière de la décomposition de Jordan choisie. En particulier, si A est diagonalisable, $Z^{-1}AZ = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ alors $A = Z \operatorname{diag}(f(\lambda_1), ..., f(\lambda_n)) Z^{-1}$.

1.1.3 Lemme sur calcul élémentaire :

(a) $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$.
(b) $(f * g)(A) = f(A) * g(A) = g(A) * f(A)$.
(c) Pour $f(z) = \alpha \in \mathbb{C}$ *nous avons* $f(A) = \alpha I_n$.
(d) Si $f(z) = \frac{1}{\alpha - z}$ *pour un* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ *alors* $f(z) = (\alpha I_n - A)^{-1}$*, la resolvente (en* α*).*

Il découle de 1.1.3 que

$$A^0 = I_n, \quad \text{et pour un entier } \ell > 0 : \quad A^\ell = AA^{\ell-1} = \underbrace{A * A * ... * A}_{p \text{ fois.}}$$

Donc pour une fonction rationnelle avec pôles $\notin \sigma(A)$

$$r(z) = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_j z^j}{b_0 + b_1 z + ... + b_k z^k} = c \frac{(z - x_1)...(z - x_j)}{(z - y_1)...(z - y_k)}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} r(A) &= (a_0 I_n + a_1 A + ... + a_j A^j)(b_0 I_n + b_1 A + ... + b_k A^k)^{-1} \\ &= c(A - x_1 I_n)...(A - x_j I_n)(A - y_1 I_n)^{-1}...(A - y_k I_n)^{-1} \end{aligned}$$

et on remarque que deux facteurs permutent.

1.1.4 Exercice :

(a) *Pour le polynôme caractéristique* $\chi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, *montrer que* $\chi(A) = 0 (\in \mathbb{C}^{n\times n})$.

(b) *M.q. il existe un unique polynôme unitaire* ψ *de degré minimum (dit* **polynôme minimal***) de sorte que* $\psi(A) = 0$. *Vérifier la formule* $\psi(z) = \prod_{j=1}^{s}(z - \lambda_{k_j})^{m(\lambda_{k_j})}$ *avec* $\lambda_{k_1}, ..., \lambda_{k_s}$ *les valeurs propres distincts de* A.

Il est rassurant de savoir qu'il suffit de savoir $f(A)$ pour f polynôme.

1.1.5 Corollaire : *Si le polynôme* p *interpole* f *sur* $\sigma(A)$ *(au sens d'Hermite)*

$$\forall \lambda(A) \quad \forall j = 0, 1, ..., m(\lambda) - 1 : \quad f^{(j)}(\lambda) = p^{(j)}(\lambda)$$

alors $f(A) = p(A)$. *Il existe un unique tel* p *avec* $\deg p < \deg \psi$ *avec* ψ *polynôme minimal de* A, *dit polynôme d'interpolation de* (f, A).

1.1.6 Exercice :

(a) *M.q.* $f(A^*) = (f(A))^*$ *si* $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

(b) *M.q.* $f(XAX^{-1}) = Xf(A))X^{-1}$.

(c) *M.q. si* X *permute avec* A *alors aussi avec* $f(A)$.

(d) *M.q.* $f(\operatorname{diag}(A, B)) = \operatorname{diag}(f(A), f(B))$.

(e) *Soient* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A *inversible. Montrer que* AB *et* BA *admettent les mêmes blocs de Jordan. En déduire que* $Af(BA) = f(AB)A$ (d'abord pour f polynôme).

(f)* *Soit* g *défini sur le spectre de* A, *et supposons que* $f^{(j)}(g(\lambda))$ *existe pour tout* $\lambda \in \sigma(A)$ *et* $j = 0, 1, ..., m(\lambda) - 1$. *Montrer que* $(f \circ g)(A) = f(g(A))$ *(*en comparant la taille des blocs de Jordan de A et $g(A)$, remplacer f par un polynôme approprié.*)*.

1.1.7 Exercice : *La matrice DFT d'ordre* n *est définie par* $F_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(\exp(-2\pi i \frac{jk}{n}))_{j,k=0,1,...,n-1}$. *Vérifier que* F_n *est unitaire, symétrique complexe, et que* $F_n^4 = I_n$. *En déduire explicitement* $\exp(\pi F_n)$.

1.1.8 Exercice : *Vérifier que la matrice triangulaire par blocs est diagonalisable par blocs sous la forme*

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

si et seulement si X *est solution de l'équation de Sylvester* $AX - XB = C$. *Dans ce cas, montrer que*

$$f(M) = \begin{bmatrix} f(A) & f(A)X - Xf(B) \\ 0 & f(B) \end{bmatrix}.$$

1.1.9 Exercice : *Soit M une matrice bidiagonale non dégénerée*

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & d_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

avec $d_j \neq 0$, et $D = \mathrm{diag}(1, d_1, d_1 d_2, ..., d_1 ... d_{n-1})$. M.q.

$$f(M) = D^{-1} \begin{bmatrix} f[\lambda_1] & f[\lambda_1, \lambda_2] & \cdots & f[\lambda_1, ..., \lambda_n] \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f[\lambda_{n-1}] & f[\lambda_{n-1}, \lambda_n] \\ 0 & \cdots & 0 & f[\lambda_n] \end{bmatrix} D$$

avec $f[\lambda_j, ..., \lambda_k]$ une différence divisée.

1.1.10 Exercice : *Pour $X \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $Y \in \mathbb{C}^{r\times n}$, YX de rang r, $\alpha \in \mathbb{C}$, utiliser l'identité*

$$\begin{bmatrix} \alpha I_n & X \\ 0 & \alpha I_r + YX \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha I_n + XY & X \\ 0 & \alpha I_r \end{bmatrix}$$

pour montrer que

$$f(\alpha I_n + XY) = f(\alpha) I_n + X(YX)^{-1}[f(\alpha I_r + YX) - f(\alpha) I_r]Y,$$

et $(I_n + XY)^{-1} = I_n - X(I_r + YX)^{-1}Y$.

Pour terminer, donnons une dernière formule pour $f(A)$ basée sur la formule de Cauchy, également généralisable pour des opérateurs sur les espaces de Hilbert.

1.1.11 Theorème, formule de Cauchy : *Soit f analytique dans un ouvert Ω, et $\Gamma \subset \Omega$ un ensemble de courbes de Jordan encerclant tout $\lambda \in \sigma(A)$ une seule fois au sens positif. Alors*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta)(\zeta I_n - A)^{-1}\, d\zeta.$$

1.1.12 Corollaire, developpement en serie : *Si $f(z) = \sum_{j=0}^\infty a_j z^j$ admet un rayon de convergence $R > \rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ rayon spectral de A, alors $f(A) = \sum_{j=0}^\infty a_j A^j$ (*convergence en norme, $\|f(A) = \sum_{j=0}^k a_j A^j\| \to 0$ pour $k \to \infty$*).*

En remplaçant A par $A - z_0 I_n$, on peut également considérer des résultats similaires pour des développements autour d'un $z_0 \neq 0$.
L'approche 1.1.12 nous donne une manière "facile" de calculer $\exp(A), \cos(A), \cos(\sqrt{A})$, mais voir TP et [Moler & Van Loan]. Si on veut définir $\log(A)$, $\sqrt{A}$, etc, il faudra choisir d'abord dans 1.1.11 l'ensemble Ω correct, pour obtenir une fonction univoque. Généralement, $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, et donc il faut exclure des matrices avec valeurs propres < 0. Aussi, il faudra choisir correctement le contour Γ...
Pourtant, **aucune** méthode exposée en §1.1 n'est conseillée comme boite noire de calcul de fonctions de matrices

— une forme de Jordan n'est pas stable sous perturbations (la taille des blocs peut changer) ;
— évaluer $P(A)$ avec P polynôme d'interpolation de (f, A), au moins pour A diagonalisable (disons, de valeurs propres simples) ? Ceci est coûteux (produit de matrices), en plus mathématiquement on revient à la définition de départ : en notant $A = Z\,\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)Z^{-1}$, $Z = (y_1, ..., y_n)$, $Z^{-*} = (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n)$, alors

$$P(z) = \sum_{j=1}^{n} \ell_j(z) f_j(\lambda_j), \quad \ell_j(z) = \prod_{k \neq j} \frac{z - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k},$$

et donc $\ell_j(A) = Z\,\mathrm{diag}(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)Z^{-1} = y_j \tilde{y}_j^*$, ce qui donne la formule $p(A) = \sum_j p(\lambda_j) y_j \tilde{y}_j^*$ vue déjà dans la première définition 1.1.2 ;
— la formule de Cauchy nous donne une intégrale difficile à évaluer, il faudra penser à une approximation par une formule de quadrature. Quel est l'erreur commise, et comment choisir le contour ?

1.2 Quelques applications

Nous conseillons en lecture le chapitre

1.3 Equations différentielles ordinaires raides

1.4 Estimations d'erreur pour fonctions de matrices

1.5 Approximation polynomiale et rationnelle

1.6 Meilleure approximation

Soit $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}$ un convexe compact et f analytique dans un voisinage de $\mathbb{E}$. Dans ce chapitre on cherche à minimiser $\|f - p\|_{\mathbb{E}}$ pour un polynôme de degré $\leq n$ (ou une fonction rationnelle à pôles fixes). On note par $\phi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{E} \mapsto \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ l'application de Riemann (l'unique bijection analytique conforme vérifiant $\phi(\infty) = \infty, \phi'(\infty) > 0$ et $\forall\, z : \phi'(z) \neq 0$), et $\psi = \phi^{-1}$. L'ensemble de niveau $\mathbb{E}_R$ pour $R > 1$ est défini par son complément $\mathbb{E}_R^c = \{z \notin \mathbb{E} : |\phi(z)| > R\}$.

1.6.1 Définition : On définit $F_j(z)$ pour $z \in \mathrm{int}(\mathbb{E})$, $|w| \geq 1$ (ou $z \in \mathbb{E}$, $|w| > 1$) par la fonction génératrice

$$\frac{w\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(z)}{w^j}.$$

Pour l'exemple $\mathbb{E} = \mathbb{D}$, nous avons $\psi(w) = w$, et $F_j(z) = z^j$. Pour l'exemple $\mathbb{E} = [-1, 1]$, $\psi(w) = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w})$, et $F_0(z) = 1$ et pour $j \geq 1$: $F_j(\psi(w)) = w^j + \frac{1}{w^j} = 2T_j(\psi(w))$.

1.6.2 Lemme : F_j est un polynôme de degré j, $F_0(z) = 1$, et pour $j \geq 1$: $F_j(\psi(w)) - w^j$ est analytique dans $|w| > 1$ inclus ∞ et s'annule en ∞.
Preuve : La série génératrice étant absolument convergente pour $|w| = 1 + \epsilon > 1$, on obtient pour $k \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{E}$

$$(*) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} w^k \frac{w\psi'(w)}{\psi(w) - z} \frac{dw}{w}$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} F_j(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1+\epsilon} w^{k-j} \frac{dw}{w} = \begin{cases} F_k(z) & k \geq 0, \\ 0 & k < 0. \end{cases}$$

en particulier en écrivant $\phi(\zeta)^j - P(\zeta)$ analytique en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{E}$ et s'annulant en ∞ avec P un polynôme de degré j

$$F_j(z) - P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{E}} (\phi(\zeta)^j - P(\zeta))\frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

d'après le théorème de Cauchy.

Voici un résultat utilisant la convexité de $\mathbb{E}$.

1.6.3 Définition et Théorème : Pour P polynôme et $z \in \mathrm{int}(\mathbb{E})$, soit

$$\mathcal{F}(P)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} P(w)\, 2\mathrm{Re}\Big(\frac{w\psi'(w)}{\psi(w)-z}\Big)\frac{dw}{w}.$$

(a) $\mathcal{F}(1)(z) = 2$, et pour $j \geq 1$: $\mathcal{F}(w^j)(z) = F_j(z)$.
(b) $\|\mathcal{F}(P)\|_{\mathbb{E}} \leq 2\,\|P\|_{\mathbb{D}}$, en particulier $\|F_j\|_{\mathbb{E}} \leq 2$.
(c) $\mathcal{F}(P)(\psi(w)) - P(w)$ est analytique dans $|w| > 1$ inclus ∞.
Preuve : Pour $j \geq 0$

$$\mathcal{F}(w^j)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} w^j\frac{w\psi'(w)}{\psi(w)-z}\frac{dw}{iw} + \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} w^{-j}\frac{w\psi'(w)}{\psi(w)-z}\frac{dw}{iw}}$$

ce qui d'après $(*)$ vaut 2 si $j = 0$, et $F_j(z)$ pour $j > 0$, ce qui démontre (a). Pour une preuve de la partie (b), notons d'abord que pour $w = e^{it}$ nous avons $\frac{dw}{iw} = dt > 0$. Aussi, on montre que $w\psi'(w)/|w\psi'(w)|$ nous donne la normale extérieure de $\mathbb{E}$ au point $z = \psi(w)$. Donc par convexité pour $z \in \mathrm{int}(\mathbb{E})$

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{w\psi'(w)}{\psi(w)-z}\Big) > 0,$$

ce qui permet d'estimer

$$|\mathcal{F}(P)(z)| \leq \frac{\|P\|_{\mathbb{D}}}{2\pi}\int_{|w|=1}\Big|2\mathrm{Re}\Big(\frac{w\psi'(w)}{\psi(w)-z}\Big)\frac{dw}{iw}\Big| = \|P\|_{\mathbb{D}}\mathcal{F}(1) = 2\,\|P\|_{\mathbb{D}}.$$

1.6.4 Exercice : En suivant le raisonnement de la preuve du théorème de Neumann, montrer que $W(A) \subset \mathbb{E}$ et $p = \mathcal{F}(P)$ pour un polynôme P implique que $\|p(A)\| \leq 2\,\|P\|_{\mathbb{D}}$, et en particulier $\|F_j(A)\| \leq 2$.

1.6.5 Exercice : Soit f analytique dans un voisinage de $\mathbb{E}_R$ pour $R > 1$, alors avec

$$f_j := \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f(\psi(w))}{w^j}\frac{dw}{w}$$

dits coefficients de Faber montrer que $f_j = \mathcal{O}(R^{-j})_{j\to\infty}$, et que les sommes partielles de la somme de Faber $\sum_{j=0}^{\infty} f_j F_j(z)$ convergent vers f uniformément dans $\mathbb{E}$.

L'exo 1.6.5 nous permet d'étendre la définition de $\mathcal{F}$ à tout P analytique dans un voisinage de $\mathbb{D}$, tout en gardant les propriétés 1.6.3(b),(c), et

$$\mathcal{F}\Big(\frac{f_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} f_j w^j\Big)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j F_j(z).$$

On a le résultat suivant concernant la meilleure approximation polynômiale.

1.6.6 Corollaire : Soit f analytique dans un voisinage de $\mathbb{E}$, alors

$$|f_{m+1}| \leq \sqrt{\sum_{j=m+1}^{\infty} |f_j|^2} \leq \min_{P \in \mathcal{P}_m} \|f - P\|_{\mathbb{E}} \leq \|f - \sum_{j=0}^{m} f_j F_j\|_{\mathbb{E}} \leq 2 \sum_{j=m+1}^{\infty} |f_j|.$$

Ce corollaire 1.6.6 nous donne un encadrement précis et un "bon" approximant explicite si les f_j décroissent rapidement, voir l'exemple suivant. Notons que la première et troisième inégalité sont évidentes, et la quatrième découle de l'estimation de $\|F_j\|_{\mathbb{E}}$ donnée dans 1.6.3(b). Une preuve de la deuxième inégalité va nous demander un peu d'effort, elle découlera comme cas particulier du théorème 1.6.8 ci-dessous.

1.6.7 Corollaire : Soit $\mathbb{E}$ symétrique par rapport à l'axe réelle, et $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à gauche de $\mathbb{E}$ (c'est-à-dire, $b < \min\{\mathrm{Re}(z) : z \in \mathbb{E}\}$), alors pour la fonction de Markov

$$f(z) = \int_a^b \frac{d\mu(x)}{z - x},$$

pour $j \geq m + 1$ nous avons

$$|f_j| \leq |\phi(b)|^{m+1-j}| \, |f_{m+1}|, \qquad \sum_{j=m+1}^{\infty} |f_j| \leq \frac{2}{|\phi(b)|^{m+1}} \, \|f\|_{\mathbb{E}}$$

($\Longrightarrow$ l'estimation du 1.6.6 est précise à un facteur $2/(1 - |\phi(b)|^{-1})$ près).
Preuve : D'après le théorème de Fubini nous avons

$$f_j \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \int_a^b \frac{d\mu(x)}{\psi(w) - x} \frac{dw}{w^{j+1}} = \int_a^b \int_a^b d\mu(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{1}{\psi(w) - x} \frac{dw}{w^{j+1}}.$$

L'intégrant de l'intégrale en w admet une seule singularité dans $\mathbb{D}^c \cup \{\infty\}$, au point $w = \phi(x)$. Donc, par le théorème des résidus en analyse complexe (ou tout simplement par le théorème de Cauchy après changement de variables $\zeta = \psi(w)$ et changement d'orientation de la courbe d'intégration),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{1}{\psi(w) - x} \frac{dw}{w^{j+1}} = -\frac{1}{\psi'(\phi(x))} \frac{1}{\phi(x)^{j+1}} = -\frac{\phi'(x)}{\phi(x)^{j+1}}.$$

Par unicité de l'application de Riemann et symétrie de $\mathbb{E}$, nous avons $\phi(\overline{z}) = \overline{\phi(z)}$ pour tout $z \notin \mathbb{E}$, en particulier, $\phi(x)$ et $\phi'(x) \neq 0$ sont réels pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{E} \supset [a, b]$. Comme de plus $\phi'(\infty) > 0$, $\phi(\infty) = \infty$, nous déduisons que $\phi' > 0$ dans $\mathbb{R} \setminus [a, b]$, et donc ϕ est croissant et négatif sur $[a, b]$, et $1/|\phi|$ croit sur $[a, b]$. Donc

$$|f_j| \;=\; \Big| \int_a^b \frac{\phi'(x)}{\phi(x)^{j+1}} d\mu(x) \Big| = \int_a^b \frac{|\phi'(x)|}{|\phi(x)|^{j+1}} d\mu(x) \leq |\phi(b)|^{m+1-j}| \, |f_{m+1}|.$$

Du théorème 3.1 de l'article [K. C. Toh and L. N. Trefethen, The Kreiss matrix theorem on a general complex domain, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 21 (1999), pp. 145–165] on sait que, pour tout domaine $\mathbb{E}$ simplement connexe pas forcement convexe,

$$\forall z \notin \mathbb{E} : \quad \mathrm{dist}(z, \mathbb{E}) \frac{|\phi'(z)|}{|\phi(z)| - 1} \in [\frac{1}{2}, 2].$$

Par conséquent,

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} |f_j| = \int_a^b \frac{|\phi'(x)|\, d\mu(x)}{(1-|\phi(x)|^{-1})|\phi(x)|^{m+2}} \leq \frac{2}{|\phi(b)|^{m+1}} \int_a^b \frac{d\mu(x)}{\mathrm{dist}(x,\mathbb{E})} = \frac{2}{|\phi(b)|^{m+1}} \|f\|_{\mathbb{E}}.$$

Nous allons maintenant démontrer un résultat similaire à 1.6.6 pour les fonctions rationnelles à pôles prescrits. Pour $w_1, ..., w_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ soit $Q(w) = \prod_{j=1}^m (1 - w/w_j)$, et $q(z) = \prod_{j=1}^m (z - \psi(w_j))$. On va supposer dans la suite que les w_j (et donc les $z_j = \psi(w)$) soient distincts. Néanmoins, les idées de preuve restent valables après des passages à la limite, par exemple $w_1 \to w_2$, mais aussi $w_1 \to \infty$ (et donc $1 - w/w_1 \to 1$, ce qui veut dire que Q sera de degré $< m$). En particulier, on aura la situation du théorème 1.6.6 en faisant tendre tous les w_j vers ∞.
Rappelons quelques petites éléments de la théorie des espaces de Hardy : on note

$$\|F\|_2 := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} |F(w)|^2\, |dw|}$$

pour une fonction F de carré intégrable sur le cercle d'unité. L'identité $\frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} w^{j-k} |dw| = \delta_{j,k}$ plus la théorie des espaces H^2 montre que

$$\|F\|_2 = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |F_j|^2}$$

si F est analytique dans la couronne $1 < |w| < 1 + \epsilon$ et y admet alors un développement de Laurent $F(w) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} F_j w^j$.

1.6.8 Théorème : Soit f analytique dans un voisinage de $\mathbb{E}$. Notons $R_m = P_m/Q$ l'interpolant de $F(w) = f_0/2 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j w^j$ aux points 0 et $1/\overline{w}_1, ..., 1/\overline{w}_m$, et

$$B(w) := w \prod_{j=1}^{m} \frac{w - 1/\overline{w}_j}{1 - w/w_j}, \quad \frac{p_m}{q} := \mathcal{F}(\frac{P_m}{Q}), \quad b_j := \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \frac{f(\psi(w))}{B(u)} \frac{du}{u^j}.$$

Alors

$$|b_1| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2} \leq \min_{p \in \mathcal{P}_m} \|f - \frac{p}{q}\|_{\mathbb{E}} \leq \|f - \frac{p_m}{q}\|_{\mathbb{E}} \leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|.$$

Avant de se lancer dans la preuve, notons que pour $w_1, ..., w_m \to \infty$, B devient w^{m+1} et donc $b_j = f_{j+m}$. Aussi, $P_m/Q = P_m$ devient la somme partielle de F d'ordre m, donc le corollaire 1.6.6 est en effet un cas limite du théorème 1.6.8.
Preuve : Dans un premier temps, montrons que $p_m \in \mathcal{P}_m$, c'est-à-dire, p_m/q est effectivement un candidat pour notre problème de minimisation. En écrivant la décomposition en termes simples et en utilisant la fonction génératrice des polynômes de Faber nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big(\frac{P_m(w)}{Q(w)}\Big)(z) &= \mathcal{F}\Big(c_0 + \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{w - w_j}\Big)(z) = \mathcal{F}\Big(c_0 - \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{w_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{w_j^k}\Big)(z) \\
&= c_0 \mathcal{F}(1)(z) - \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{w_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(w^k)(z)}{w_j^k} \\
&= c_0 + \frac{P_m}{Q}(0) - \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{w_j} \frac{w_j \psi'(w_j)}{\psi(w_j) - z} = c_0 + \frac{P_m}{Q}(0) - \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j \psi'(w_j)}{z - \psi(w_j)}
\end{aligned}$$

étant clairement un élément de $\mathcal{P}_m/q$. D'ailleurs, cette formule très explicite permet de construire sur ordinateur p_m/q sachant la décomposition en termes simples de P_m/Q.
On passe maintenant à une preuve de la troisième inégalité sachant que la deuxième est triviale. Observons d'abord que $F - P_m/Q$ est analytique dans un voisinage de $|w| \leq 1+\epsilon$ pour un $\epsilon > 0$. D'après la formule d'Hermite 1.5.4, nous obtenons pour $|w| = 1$ sachant que $|B(w)| = 1$

$$\begin{aligned} \Big| F(w) - \frac{P_m}{Q}(w) \Big| &= |B(w)| \Big| \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1+\epsilon} \frac{F(u)}{B(u)} \frac{du}{u-w} \Big| \\ &= \Big| \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1+\epsilon} \frac{f(\psi(u))}{B(u)} \frac{du}{u-w} \Big| = \Big| \sum_{j=1}^{\infty} b_j w^{j-1} \Big| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|, \end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité on a utilisé le fait que

$$u \mapsto \frac{F(u) - f(\psi(u))}{B(u)} \frac{1}{u-w}$$

est analytique dans $|u| \geq 1+\epsilon$ inclus ∞, voire 1.6.3(c), avec un double zéro en ∞. En utilisant 1.6.3(b), on en déduit que

$$\|f - \frac{p_m}{q}\|_{\mathbb{E}} = \|\mathcal{F}(F - \frac{P_m}{Q})\|_{\mathbb{E}} \leq 2\, \|F - \frac{P_m}{Q}\|_{\mathbb{D}} \leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|,$$

c'est-à-dire, il reste seulement la première inégalité à établir.
Pour tout $p \in \mathcal{P}_m$ nous pouvons écrire

$$(f - \frac{p}{q})(\psi(w)) = w(\widetilde{F}(w) - \frac{P}{Q}(w)) + H(w), \quad \widetilde{F}(w) = \sum_{j=1}^{\infty} F_j w^j = \frac{F(w) - F(0)}{w},$$

avec $P \in \mathcal{P}_{m-1}$, et H analytique dans $|u| > 1$ d'après 1.6.3(c) (développer $f - p/q$ en série de Faber). Comme le terme à gauche du second membre est analytique dans un voisinage du disque, et s'annule en 0, nous obtenons alors

$$\|f - \frac{p}{q}\|_{\mathbb{E}}^2 = \|(f - \frac{p}{q}) \circ \psi\|_{\partial\mathbb{D}}^2 \geq \|(f - \frac{p}{q}) \circ \psi\|_2^2 = \|\widetilde{F} - \frac{P}{Q}\|_2^2 + \|H\|_2^2.$$

Notons qu'il existe un polynôme $\widetilde{P} \in \mathcal{P}_{m-1}$ de sorte que

$$\frac{P_m}{Q} - F(0) = \frac{P_m}{Q} - \frac{P_m}{Q}(0) = w\,\frac{\widetilde{P}}{Q} \quad \text{et alors} \quad \|\widetilde{F} - \frac{\widetilde{P}}{Q}\|_2^2 = \|F - \frac{P_m}{Q}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2,$$

la dernière égalité découlant de la représentation intégrale de $|F - P/Q|$ donnée ci-dessus. En effet, le lecteur vérifie aisément que $\widetilde{P}/Q$ n'est rien que l'interpolant $\in \mathcal{P}_{m-1}/Q$ de $\widetilde{F}$ aux points $1/\overline{w}_1, ..., 1/\overline{w}_m$. En combinant ces deux chaînes d'inégalités, il est suffisant de démontrer que

$$\|\widetilde{F} - \frac{\widetilde{P}}{Q}\|_2 = \min_{P \in \mathcal{P}_{m-1}} \|\widetilde{F} - \frac{P}{Q}\|_2,$$

autrement dit, on connaît le meilleur approximant par rapport à la norme $\|\cdot\|_2$ induite par un produit scalaire

$$\langle G, H \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} F(w)\overline{G(w)}|dw| = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} F(w)\overline{G(w)}\frac{dw}{w},$$

défini, disons, sur l'espace vectoriel des fonctions analytiques dans un voisinage fixe de $\mathbb{D}$ (c'est en effet le produit scalaire de l'espace plus grand H^2 de Hardy). Ceux qui étaient en M315 en L3 avec moi savent qu'il est bien plus "sympa" de minimiser au sens des moindres carrés :

$$\frac{\widetilde{P}}{Q}(w) = \sum_{j=1}^{m} \frac{e_j}{w - w_j}$$

est meilleur approximant par rapport à $\|\cdot\|_2$ de $\widetilde{F}$ si et seulement si l'erreur $\widetilde{F} - \frac{\widetilde{P}}{Q}$ est orthogonal à toute fonction dans $\mathcal{P}_{m-1}/Q$, avec base $1/(w - w_\ell)$, $\ell = 1, ..., m$. Il faut et il suffit alors que

$$\left[\ \langle \widetilde{F}, \tfrac{1}{w-w_\ell} \rangle \ \right]_{\ell=1,\ldots,m} = \left[\ \langle \tfrac{1}{w-w_j}, \tfrac{1}{w-w_\ell} \rangle \ \right]_{\ell,j=1,\ldots,m} \left[\ c_j \ \right]_{j=1,\ldots,m}.$$

Un petit calcul de résidus montre que

$$\langle \widetilde{F}, \frac{1}{w - w_\ell} \rangle = -F(1/\overline{w}_\ell)/\overline{w}_\ell, \qquad \langle \frac{1}{w - w_j}, \frac{1}{w - w_\ell} \rangle = -\frac{1}{1/\overline{w}_\ell - w_j}/\overline{w}_\ell$$

et donc notre système est équivalent au fait que $\widetilde{P}/Q$ interpole $\widetilde{F}$ aux points $1/\overline{w}_1, ..., 1/\overline{w}_m$, comme désiré ci-dessus.

1.6.9 Exercice : Avec les notations de 1.6.8, si $W(A) \subset \mathbb{E}$ alors

$$\|f(A) - p_m(A)q(A)^{-1}\| \leq \|F - P_m/Q\|_{\mathbb{D}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|.$$

2 La méthode de Parlett

2.1 Calculer la forme de Schur

2.2 Résolution des équations de Sylvester

2.3 Comment partitionner ?

3 Méthodes itératives pour le calcul de $f(A)$ ou $f(A)b$

3.1 Approximation d'Arnoldi pour $f(A)b$

3.2 Estimation d'erreur pour l'approximation d'Arnoldi

3.3 Méthodes itératives de type Newton

Références

[1] Claude Brezinski. *Computational Aspects of Linear Control.* Kluwer, Dordrecht, 2002.

[2] Anne Greenbaum. *Iterative Methods for Solving Linear Systems.* SIAM, Philadelphia, Baltimore, Maryland, USA, 1997.

[3] Nicholas J. Higham. *Functions of Matrices : Theory and Computation.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2008.

[4] George A. Baker Jr. and Peter Graves-Morris. *Padé Approximants*, volume 59 of *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications.* Cambridge University Press, second edition, 1996.

[5] Youcef Saad. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems.* Manchester University Press, Manchester, and Halsted Press, New York, 1992.

[6] Yousef Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, second edition, 2003.

[7] Lloyd N. Trefethen and Mark Embree. *Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Non-normal Matrices and Operators*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2005.

[8] Lloyd N. Trefethen and David Bau III. *Numerical Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1997.