Matrices de Jacobi et Applications

Cours spécialisé en D.E.A. de Mathématiques Appliquées 2003-2004

Bernhard Beckermann & Franck Wielonsky, Laboratoire Painlevé, Université de Lille 1

Compléments d'Analyse complexe et d'Analyse fonctionnelle

2/2/2004

Table des matières

N.B. : Le lecteur intéressé est invité à résoudre les Exercices, de chercher à démontrer les Propriétés, et de chercher des démonstrations des Théorèmes...

1 Matrices de Jacobi et Approximants de Padé

Voici une petite table des matières du premier chapitre. Ces sujets sont très bien exposés dans [14], voir aussi [4]. Pour la capacité on peut consulter l'annexe de [14] et [15].

1. Définition, existence, unicité, d'un approximant de Padé d'une série formelle en 0, en ∞, déterminants de Hankel, indices normaux
2. Fonctions de Markov=transformée de Cauchy d'une mesure positive, polynômes orthogonaux par rapport à une mesure, une fonctionnelle ("régulière", c'est-à-dire, les déterminants de Hankel correspondants sont tous non nuls).
3. Les dénominateurs de Padé (en ∞) sont orthogonaux par rapport à une fonctionnelle et

vérifient une récurrence à trois termes. Les numérateurs vérifient la même récurrence à trois termes.

4. Caractérisation des fonctionnelles positives.
5. Définition d'une matrice de Jacobi.
6. Théorème de Favard : polynômes vérifiant une récurrence a trois termes sont orthonormaux par rapport à une fonctionnelle "régulière" (et donc approximants de Padé d'une série formelle).
7. Fractions continues, de type Jacobi (J-fractions) (attention, petite erreur de signe)
8. Formule de Christoffel-Darboux, quadratures de Gauss, localisation de zéros de polynômes orthogonaux pour une fonctionnelle positive.
9. Théorème de convergence de Markov
10. Théorème de convergence de Nuttall–Pommerenke, représentation de l'erreur par formule d'Hermite
11. La capacité (logarithmique) et la fonction de Green
12. Exemples : disque, intervalle, lemniscates, Lemme de Cartan.
13. La conjecture de Padé
14. Coefficients périodique (période 3) et le contre-exemple de Buslaev, voir ci-dessous.

1.1 Le contre-exemple de Buslaev

Rappelons la formulation de la conjecture de Padé autour d'infini : Si f est méromorphe dans $|z| \geq 1$ et analytique en ∞, alors il existe une sous-suite des approximants de Padé en infini $\pi_n = P_n/Q_n$, $n \geq 1$, qui converge uniformement vers f uniformement dans tout sous-ensemble compact de $|z| > 1$ ne contenant pas de pôle de f.

Buslaev propose dans [Math. Sbornik 193(2002)] le contre-exemple suivant pour la conjecture de Padé : La fonction ϕ admet autour d'infini un développement en J-fraction périodique de périodicité 3

$$\phi(z) \quad = \quad \frac{1|}{|z-\omega^2} - \frac{-\omega^4/9|}{|z-\omega^1} - \frac{-\omega^2/9|}{|z-\omega^0} - \frac{-\omega^0/9|}{|z-\omega^2} - ..., \qquad \omega = \exp(\frac{2\pi i}{3}).$$

Il suffit de montrer que ϕ est analytique dans $|z| \geq 1$, et qu'il existe un $m > 1$ de sorte que tout approximant de Padé en ∞ de f, au moins d'indice suffisamment grand, admet au moins un pôle dans $|z| \geq m$. Ici on présentera les grandes lignes de la preuve.

Par identification, on trouve la matrice de Jacobi de périodicité 3

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \cdots & \cdots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 & i\omega^2/3 & 0 & \cdots & \cdots & \\ i\omega^2/3 & \omega^1 & i\omega^1/3 & 0 & & \\ 0 & i\omega^1/3 & \omega^0 & i\omega^0/3 & \ddots & \\ 0 & 0 & i\omega^0/3 & \omega^2 & i\omega^2/3 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1}$$

La formule explicite pour la fraction continue (pourvu qu'il y a convergence qu'on montrera ultérieurement) peut être montrée comme suit : par récurrence sur n on montre que

$$\frac{1\,|}{|\,z-b_0} - \frac{a_0^2\,|}{|\,z-b_1} - \dots - \frac{a_{n-2}^2\,|}{|\,z-b_{n-1}} - \frac{a_{n-1}^2\,|}{|\,z-b_n+w} = \frac{wp_n(z)+a_np_{n+1}(z)}{wq_n(z)+a_nq_{n+1}(z)}.$$

Comme il y a périodicité, une limite $\phi(z)$ devrait vérifier

$$\phi(z) = \frac{-a_2^2\phi(z)p_2(z)+a_2p_3(z)}{-a_2^2\phi(z)q_2(z)+a_2q_3(z)}$$

ou alors (avec un choix approprié de la racine)

$$\phi = \frac{q_3+a_2p_2+\sqrt{(q_3+a_2p_2)^2-4a_2p_3q_2}}{2a_2q_2} = \frac{q_3+a_2p_2+\sqrt{(q_3-a_2p_2)^2-4}}{2a_2q_2}.$$

Comme il y a convergence dans un voisinage de ∞, la fonction ϕ devrait s'annuler en ∞, ce qui détermine (par prolongement analytique) la racine dans le plan complexe privé de

$$E := \{z : q_3(z)-a_2p_2(z) \in [-2,2]\}, \qquad q_3(z)-a_2p_2(z) = 27iz^3-27i-9i\omega, \qquad E \subset 0.952\mathbb{D}.$$

On peut montrer ((H1) non démontré, (H2) montré plus tard)

(H1) $q_2(z) = -9(z^2+z+1)-\omega$ admet deux zéros : γ de module < 0.946 étant un pôle de ϕ, et $\widetilde{\gamma}$ de module > 1.004 n'étant pas un pôle de ϕ.
N.B. : comme de plus $E \subset \{|z|<1\}$, on en déduit que ϕ est analytique dans un voisinage du plan privé du disque unité.

(H2) La suite (q_n/q_{n+1}) de fonctions meromorphes est normale par rapport à la métrique chordale dans Ω étant le plan complexe privé de E et de γ.

Notons par $\mathcal{A}^{(k)}$ la matrice de Jacobi obtenue en supprimant les premières k lignes et colonnes dans $\mathcal{A}$, et par $q_n^{(k)}$ le $n$ième polynôme orthonormé sous-jacent. On obtient clairement par périodicité (et par le fait que $\omega\mathcal{A}^{(k+1)} = \mathcal{A}^{(k)}$)

$$q_n^{(k)}(z) = q_n^{(k+3)}(z), \qquad q_n(z) = q_n^{(0)}(z), \qquad a_0p_n(z) = q_{n-1}^{(1)}(z), \qquad q_n^{(k)}(z) = q_n^{(k+1)}(\omega z).$$

En particulier, d'après (H2) et la symétrie de E par rapport à multiplication avec ω, la suite $(q_n^{(k)}/[a_{n+k}q_{n+1}^{(k)}])_n$ est aussi normale dans $\Omega^{(k)}$ défini comme $\mathbb{C}$ privé de $E \cup (\omega^{-k}\gamma)$. Comme ces fonctions rationnelles s'annulent tous en ∞, en utilisant l'équicontinuité on déduit qu'ils sont tous analytique dans un voisinage d'infini, et y forment une famille normale par rapport à la métrique euclidienne. Sachant que

$$\frac{q_n^{(k)}(z)}{a_{n+k}q_{n+1}^{(k)}(z)} = \frac{1\,|}{|\,z-b_{n+k}} - \frac{a_{n+k-1}^2\,|}{|\,z-b_{n+k-1}} - \dots - \frac{a_0^2\,|}{|\,z-b_0},$$

en comparant le développement en séries à l'infini et en utilisant la périodicité on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_{3n+j}^{(k)}}{a_{3n+j+k}q_{3n+j+1}^{(k)}} \to \psi_{j+k} \tag{2}$$

localement uniformément dans $\Omega^{(k)}$. La normalité de $(q_n^{(k)}/[a_{n+k}q_{n+1}^{(k)}])_n$ dans $\Omega^{(k)}$ et donc son équi-continuité impliquent aussi que les zéros de $q_n^{(k)}$ et $q_{n+1}^{(k)}$ dans tout sous-ensemble compact de $\Omega^{(k)}$ sont séparés par une constante ne dépendant pas de n. Sachant que[1]

$$q_{3n+2}^{(k)}(z) = q_2^{(k)}(z)\, U_n(\frac{q_3(z) - a_2 p_2(z)}{2}),$$

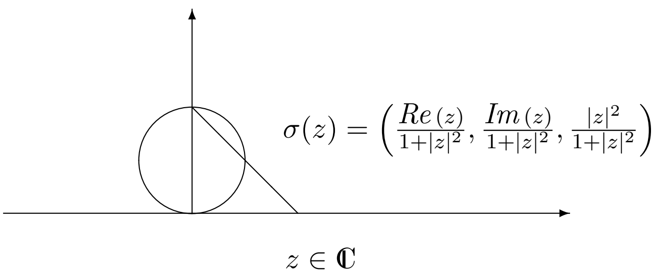
avec U_n le polynôme de Chebyshev de deuxième espèce, nous pouvons conclure que ψ_{k+1} admet un pôle simple en tout point dans $\Omega^{(k)}$ ou $q_2^{(k)}$ s'annule, et donc en $\omega^{-k}\widetilde{\gamma}$, de module > 1. Il découle de (2) que $q_{3n+k+2} = q_{3n+k+2}^{(0)}$ devrait posséder un zéro x_{3n+k+2} qui pour $n \to \infty$ tend vers $\omega^{-k}\widetilde{\gamma}$ (la même chose étant d'ailleurs aussi valable pour les numérateurs p_{3n+k+2}). Donc, pour n suffisamment grand, tout approximant de Padé admet un pôle de module $> (1+|\widetilde{\gamma}|)/2 > 1$, ce qui nous empêche d'extraire une sous-suite qui converge uniformément en déhors du disque d'unité vers ϕ. Donc la conjecture de Padé est fausse.

A La sphère de Riemann

Les résultats de ce chapitre sont exposés dans n'importe quel livre de base sur l'analyse complexe, voir par exemple [1, 5, 9, 10, 12, 13, 16].

A.1 La métrique chordale

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la sphère (dite **de Riemann**) S avec centre $(0,0,1/2)$ et rayon $1/2$. Une bijection $\sigma : \mathbb{C} \to S \setminus \{(0,0,1)\}$ est construite comme suit : pour $z \in \mathbb{C}$, soit $\sigma(z)$ le point d'intersection entre S et la droite qui passe par $(0,0,1)$ et $(Re(z), Im(z), 0)$



Soit $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le plan complexe étendu. En posant $\sigma(\infty) = (0,0,1)$, on trouve une extension

[1] Cette propriété découle du fait qu'il existe un polynôme h de sorte que, pour tout j, k, n,

$$q_{3n+j-3}^{(k)}(z) + q_{3n+j+3}^{(k)}(z) = h(z)\, q_{3n+j}^{(k)}(z).$$

Pour ce polynôme h nous avons les représentations

$$h(z) = q_3(z) - a_2 p_2(z) = \frac{q_5^{(k)}(z)}{q_2^{(k)}(z)}.$$

$\sigma : \overline{\mathbb{C}} \to S$ bijective, et on définit

$$\chi(z_1, z_2) = |\sigma(z_1) - \sigma(z_2)|, \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$$

($|\cdot|$ étant la distance euclidienne). L'interprétation géométrique nous permet de vérifier facilement que $\chi(\cdot)$ est une métrique sur $\overline{\mathbb{C}}$ (dite **métrique chordale**).

PROPRIÉTÉS A.1.

$$\chi(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

$$\chi(z_1, z_2) \leq 1, \quad et \quad \chi(z_1, z_2) = 1 \ ssi \ \frac{1}{z_1} = -\overline{z_2},$$

$$\chi(z_1, z_2) = \chi(\overline{z_1}, \overline{z_2}) = \chi(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}), \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}.$$

De plus, l'image d'un cercle ou d'une droite dans $\mathbb{C}$ est un cercle sur S (chercher l'équation).

Finalement, notons qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset \overline{\mathbb{C}}$ tend vers $f \in \overline{\mathbb{C}}$ (dans l'espace métrique complet $(\overline{\mathbb{C}}, \chi)$) ssi (c'est-à-dire, si et seulement si)

$$\begin{aligned} \text{cas } f \neq \infty : \quad & \exists N > 0 \text{ t.q. } (f_n)_{n\geq N} \subset \mathbb{C}, \text{ et } |f_n - f| \to 0, \\ \text{cas } f \neq 0 : \quad & \exists N > 0 \text{ t.q. } (1/f_n)_{n\geq N} \subset \mathbb{C}, \text{ et } |1/f_n - 1/f| \to 0. \end{aligned}$$

A.2 Transformations de Moebius

DÉFINITION A.2 (TRANSFORMATION DE MOEBIUS). *Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Si $ad - bc \neq 0$, alors*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

est dite **transformation de Moebius** *ou transformation fractionnaire linéaire (ou homographie).*

PROPRIÉTÉS A.3. *(a) Une transformation de Moebius $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ est bijective, et continue (par rapport à la métrique chordale).*
(b) Avec T, S, aussi T^{-1} et $T \circ S$ sont des transformations de Moebius.
(c) L'image d'un cercle/disque (dans $\overline{\mathbb{C}}$) d'une transformation de Moebius est aussi un cercle/disque.

Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$, avec $card(\{z_1, z_2, z_3, z_4\}) \geq 3$. Le **bi–rapport** des ces quantités est défini par

$$\mathcal{B}(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

Propriétés A.4. *(a) Soient $z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ deux à deux différents. La fonction $S(z) = \mathcal{B}(z, z_2; z_3, z_4)$ est l'unique transformation de Moebius avec $S(z_2) = 1$, $S(z_3) = 0$, et $S(z_4) = \infty$.*
(b) Si T est une transformation de Moebius, alors $\mathcal{B}(z_1, z_2; z_3, z_4) = \mathcal{B}(T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4))$, et

$$|\mathcal{B}(z_1, z_2; z_3, z_4)| = \frac{\chi(z_3, z_1)}{\chi(z_4, z_1)} \frac{\chi(z_4, z_2)}{\chi(z_3, z_2)}.$$

Exercice A.5. *(a) Chercher une transformation de Moebius T avec $T(\{z : |z| < 1\}) = \{z : \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$.*
(b) Chercher la forme générale d'une transformation de Moebius T avec $T(\{z : |z| < 1\}) = \{z : |z| < 1\}$.

B Familles normales

Une référence particulièrement intéressante est [17], mais on trouve aussi ces résultats dans [10, 7].

B.1 La topologie de la convergence localement uniforme

Soit (X, d) un espace métrique complet (ici soit $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, soit $(\overline{\mathbb{C}}, \chi(\cdot))$), et $D \subset \mathbb{C}$ un domaine (ouvert non–vide connexe). On note par $\mathcal{C}(D, X)$ l'ensemble des fonctions continues $f : D \to X$.

Définition B.1 (Convergence localement uniforme). *On dit que $(f_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{C}(D, X)$ converge localement uniformément vers $f : D \to X$ si*

$$\forall F \subset D, F \text{ compact :} \quad \lim_{n \to \infty} \sup_{z \in F} d(f_n(z), f(z)) = 0.$$

On montre facilement que cette notion de convergence est équivalente à une convergence dans $\mathcal{C}(D, X)$ par rapport à la métrique ρ définie par

$$\rho(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \frac{\sup_{z \in F_n} d(f(z), g(z))}{1 + \sup_{z \in F_n} d(f(z), g(z))}, \quad f, g \in \mathcal{C}(D, X),$$

où $F_n \subset D$ sont des ensembles compacts vérifiant $F_n \subset Int(F_{n+1})$, et $\cup Int(F_n) = D$.
NB : $\mathcal{C}(D, X)$ muni de cette métrique ρ est complet.

La notion de convergence d'après la Définition B.1 peut être généralisée, il suffit que $f_n \in \mathcal{C}(D_n, X)$, avec domaines $D_0 \subset D_1 \subset ... \subset D$, $\cup D_n = D$ (voir par exemple une généralisation du Théorème B.6 de Weierstrass).

Définition B.2 (Familles normales). *Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(D, X)$ est dite* **normale** *(dans D) si de toute suite $(f_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{F}$ on peut extraire une sous–suite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ qui converge localement uniformément.*

Exercice B.3. *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(D, X)$ une famille normale, et notons par $\mathcal{F}'$ sa fermeture (par rapport à la métrique ρ). Montrer que $\mathcal{F}'$ est une famille normale.*

Théorème B.4 (Arzela – Ascoli). *Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(D,X)$ est normale dans D ssi*
(a) $\mathcal{F}$ est équicontinue, c'est-à-dire, $\forall F \subset D$ compact $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ tel que $d(f(z_1), f(z_2)) < \epsilon$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et pour tout $z_1, z_2 \in F$ vérifiant $|z_1 - z_2| < \delta$.
(b) La fermeture de $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ est compact pour tout $z \in D$.

B.2 Fonctions holomorphes et méromorphes

Ici on ne donnera pas la définition d'une fonction holomorphe, rappelons seulement que

Propriétés B.5. *Soit $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ un domaine, et $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe en D.*
(a) Les dérivées successives de f sont aussi holomorphes en D.
(b) f est analytique dans D : sa série de Taylor en $z_0 \in D$ converge localement uniformément dans le disque ouvert avec centre z_0 et rayon donné par la distance entre z_0 et la frontière de D (la réciproque est aussi valable).
(c) Si une suite des zéros distincts de f admet un point d'accumulation dans D alors $f = 0$.

Soit $(X, d) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$. Bien sûr, l'ensemble $\mathcal{H}(D)$ des fonctions holomorphes en D est un sous–ensemble de $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$, il est même fermé :

Théorème B.6 (Weierstrass). *Si $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{H}(D)$ converge localement uniformément dans D vers f, alors $f \in \mathcal{H}(D)$. De plus, aussi les suites des dérivées successives $(f_n^{(k)})_{n\geq 0} \subset \mathcal{H}(D)$ convergent localement uniformément dans D vers $f^{(k)}$ pour $k \geq 1$.*

Il découle du Théorème de Weierstrass ensemble avec les propriétés B.5(b),(c) qu'une fonction f holomorphe dans D avec $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = ... = 0$ pour un $z_0 \in D$ est égale à la fonction zéro dans D. Ceci nous permet de définir la **multiplicité** $k \geq 1$ d'un zéro $z_0 \in D$ d'une fonction $f \in \mathcal{H}(D)$, $f \neq 0$ par la propriété $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Le Théorème de Rouché caractérise le nombre de zéros d'une fonction holomorphe.

Théorème B.7 (Rouché). *Soient $f, g \in \mathcal{H}(D)$, et $F \subset D$ un compact simplement connexe (c'est-à-dire, son complémentaire $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ est connexe). Si pour tout z appartenant à la frontière de F nous avons*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

alors g admet le même nombre de zéros dans F que f, comptant multiplicités.

Exercice B.8. *Montrer la propriété suivante : Si $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{H}(D)$ converge localement uniformément dans D vers $f \neq 0$ alors, pour tout $F \subset D$ compact, le nombre de zéros de f_n dans F est bornée indépendamment de n. Donner une borne explicite en fonction des zéros de f dans F.*

Dans le contexte des fractions continues ou fractions rationnelles, il est plus naturel de considérer $\overline{\mathbb{C}}$ au lieu de $\mathbb{C}$, et alors des fonctions méromorphes au lieu des fonctions holomorphes. Dans la suite, soit $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ un domaine, et $(X, d) = (\overline{\mathbb{C}}, \chi)$.

Une fonction $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ est dite **méromorphe** (en D) si $f \in \mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$, et si $f \in \mathcal{H}(D \setminus A)$, avec l'ensemble $A := \{z \in D : f(z) = \infty\}$ (les **pôles** de f) n'ayant pas de points d'accumulation dans D. On montre que pour tout pôle z_0 il existe un voisinage ouvert $V \subset D$ et un entier positif ν (la multiplicité du pôle) tels que $h(z) := (z - z_0)^\nu \cdot f(z)$ vérifie $h \in \mathcal{H}(V)$, et $h(z_0) \neq 0$.

Comme illustration, notons qu'une fraction rationnelle est méromorphe en $\overline{\mathbb{C}}$. Aussi, si $f \in \mathcal{H}(D)$ n'est pas la constante zéro, alors $1/f$ est méromorphe en D. Notons par $\mathcal{M}(D)$ l'ensemble des fonctions méromorphes en D.

En analogie avec le théorème de Weierstrass, la limite d'une suite localement uniformément convergente des fonctions méromorphes est soit méromorphe, soit la constante infinie. Plus exactement on montre

Exercice B.9. *Soit $(f_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{M}(D)$ localement uniformément convergente dans D (bien sûr, par rapport à la métrique chordale), avec limite f. On définit les ouverts $D_0 = \{z \in D : f(z) \neq 0\}$, et $D_\infty = \{z \in D : f(z) \neq \infty\}$.*

Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge localement uniformément dans D_∞ vers f par rapport à la métrique euclidienne, et que $(1/f_n)_{n \geq 0}$ converge localement uniformément dans D_0 vers $1/f$ par rapport à la métrique euclidienne. En déduire que f est soit la constante ∞ (cas D_∞ vide) soit une fonction méromorphe.

B.3 Familles normales de fonctions méromorphes

Comme $\mathcal{M}(D) \subset \mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$, on peut se poser la question de savoir s'il n'existe pas d'autres critères simples pour décider si une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ est normale.

Par exemple, le Théorème B.4 d'Arzela–Ascoli prend la forme plus simple : $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ est une famille normale dans D ssi $\mathcal{F}$ est équicontinue dans D. C'est Paul Montel qui a initié l'étude des familles normales des fonctions méromorphes. Effectivement, plusieurs critères portent son nom

Théorème B.10 (Critère de Montel). *Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D) \subset \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ est normale ssi elle est localement uniformément bornée, c'est-à-dire, pour tout $F \subset D$ fermé il existe une constante $M > 0$ telle que $|f(z)| \leq M$ pour $z \in F$ et pour $f \in \mathcal{F}$.*

Théorème B.11 (Critère de Marty). *Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D) \subset \mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$ est normale ssi la famille des dérives sphériques $\{\rho(f) : f \in \mathcal{F}\}$ est localement uniformément bornée. Ici, la dérivée sphérique d'une fonction méromorphe g est définie par $\rho(g)(z) = |g'(z)|/(1+|g(z)|^2) = \rho(1/g)(z)$.*

Théorème B.12 (de Montel). *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D) \subset \mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$. $\mathcal{F}$ est une famille normale dans D s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{C}}$ distincts tels que*

$$\forall f \in \mathcal{F} \, \forall z \in D : \quad f(z) \notin \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Si de plus $\infty \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, alors tout point d'accumulation est soit holomorphe dans D soit la constante ∞.

En général il est difficile d'établir la normalité d'une suite de fonctions méromorphes. Souvent, on peut déduire la convergence de la suite d'un des critères suivants

PROPRIÉTÉS B.13. *Soit $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{M}(D)$ une famille normale. Cette suite est convergente si une des conditions suivantes est valable :*
(a) $(f_n)_{n\geq 0}$ admet un seul point d'accumulation.
(b) Il existe un ensemble $F \subset D$ infini ayant des points d'accumulation dans D tel que $(f_n(z))_{n\geq 0}$ converge pour tout $z \in F$ (voir B.5(c)).
(c) Il existe un $z_0 \in D$ tel que $(f_n^{(k)}(z_0))_{n\geq 0}$ converge pour tout $k \geq 0$ (voir B.5(b)).

Le théorème de Stieltjes–Vitali portant sur la convergence d'une suite des fonctions méromorphes (voir [10, p.248-251]) est obtenu par une combinaison du Théorème B.12 avec la Propriété B.13(b).

EXERCICE B.14. *Soient $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$, et D_n, $n = 0, 1, 2, ...$ des sous–domaines de D, avec $D = \cup D_n$. Montrer que si $\mathcal{F}$ est une famille normale dans D_n pour tout $n \geq 0$, alors $\mathcal{F}$ est aussi une famille normale dans D.*

C Matrices infinies et opérateurs

Dans la suite de ce chapitre, on notera par $\ell^2 = \{(y_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C} : \sum_n |y_n|^2 < \infty\}$ l'ensemble des suites complexes de carré sommable. Rappelons que ℓ^2 est un espace de Hilbert, avec produit scalaire et norme induite donnés par

$$(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x_n} y_n, \quad ||x|| = \sqrt{(x, x)}.$$

$(e_j)_{j\geq 0}$ désigne la base canonique orthonormée, $e_j = (\delta_{j,k})_{k\geq 0}$. L'ensemble $\mathcal{C}_0 = \{\sum_{j=0}^n a_j e_j : a_j \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ est un sous–espace dense dans ℓ^2.

Pour un opérateur linéaire T de ℓ^2, on notera par $\mathcal{D}(T)$ son domaine de définition, par $\mathcal{R}(T) = T(\mathcal{D}(T))$ son image, et par $\mathcal{N}(T) = \{y \in \mathcal{D}(T) : Ty = 0\}$ son noyau. L'opérateur T_1 est dit une extension de T si $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T_1)$, et si $T_1 y = Ty$ pour tout $y \in \mathcal{D}(T)$. Bien sûr, une égalité entre deux opérateurs implique en particulier que les domaines de définition coïncident. La somme et la composition de deux opérateurs linéaires S et T de ℓ^2 est définie d'une manière canonique, avec $\mathcal{D}(S+T) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$, et $\mathcal{D}(ST) = \{y \in \mathcal{D}(T) : Ty \in \mathcal{D}(S)\}$. Rappelons également que T est inversible (avec inverse notée par T^{-1}) ssi $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, et que dans ce cas

$$\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T), \quad \mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{D}(T), \quad T^{-1}T = id_{\mathcal{D}(T)}, \quad TT^{-1} = id_{\mathcal{R}(T)}.$$

Le sujet de ce chapitre est exposé partiellement dans [2] (calcul matriciel) et dans [11]. Dans ce contexte, le lecteur peut également consulter [6, 8].

C.1 Passage d'une matrice à un opérateur

Etant donnée une matrice infinie $\mathcal{A} = (a_{j,k})_{j=0,1,\ldots}^{k=0,1,\ldots}$, est-ce qu'on peut définir proprement un opérateur linéaire par un calcul matriciel (en identifiant les éléments de ℓ^2 avec les vecteurs infinis) ? Cette question était posée (et résolue) au début du siècle par Hilbert et ses collaborateurs. Pour obtenir des propriétés intéressantes pour un opérateur associé à la matrice infinie $\mathcal{A}$, on va imposer dans la suite que les lignes et les colonnes de $\mathcal{A}$ sont éléments de ℓ^2. Dans ce cas, le **produit formel matriciel** $\mathcal{A} \cdot y$ est défini par composante pour tout $y \in \ell^2$, mais le résultat se ne trouve pas nécessairement dans ℓ^2.

Définition C.1. *Un opérateur linéaire T de ℓ^2 est dit* **compatible** *avec la matrice $\mathcal{A}$ si $Ty = \mathcal{A} \cdot y$ pour tout $y \in \mathcal{D}(T)$.*

On voit immédiatement que, pour une matrice infinie donnée, il existe un opérateur compatible **maximal** T, avec domaine de définition $\mathcal{D}(T) = \{y \in \ell^2 : \mathcal{A} \cdot y \in \ell^2\}$ (en particulier $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{D}(T)$ d'après notre hypothèse sur les colonnes de $\mathcal{A}$). Le but de ce chapitre est de mieux comprendre les propriétés des opérateurs compatibles. Discutons d'abord un exemple

Exemple C.2. *Supposons que*

$$\max\{\sup_{j\geq 0} a_j, \sup_{k\geq 0} a'_k\} = C < \infty, \text{ où } \quad a_j := \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}|, \quad a'_k := \sum_{j=0}^{\infty} |a_{j,k}|,$$

c'est-à-dire, les lignes et colonnes sont des éléments de ℓ^1 uniformément bornés. Montrons qu'ici l'opérateur compatible maximal T est défini sur ℓ^2, avec norme bornée par C. Soit $y = (y_k)_{k\geq 0} \in \ell^2$, avec $v = (v_j)_{j\geq 0} = \mathcal{A} \cdot y$. Nous avons pour tout $j \geq 0$

$$\frac{|v_j|}{a_j} = |\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{j,k}}{a_j} y_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{j,k}|}{a_j} |y_k|.$$

Comme $\phi(z) = z^2$ est une fonction convexe, on en déduit que

$$[\frac{|v_j|}{a_j}]^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{j,k}|}{a_j} |y_k|^2$$

pour tout $j \geq 0$, et alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} |v_j|^2 \leq C \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}||y_k|^2 \leq C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a'_k |y_k|^2 \leq C^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^2.$$

Par conséquent, $v \in \ell^2$, et alors $\mathcal{D}(T) = \ell^2$, avec $||T|| \leq C$.

Pour compléter Exemple C.2, notons que la condition sur $\mathcal{A}$ n'est que suffisante pour obtenir un opérateur compatible maximal qui est de plus borné, voire la fameuse **matrice de Hilbert** $\mathcal{A} = (1/(j+k+1))_{j=0,1,..}^{k=0,1,\ldots}$.

On peut s'imaginer autres opérateurs compatibles avec $\mathcal{A}$. Par exemple, définissons un opérateur linéaire A_0 avec $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{C}_0$ par

$$A_0 e_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} e_j, \quad k \geq 0$$

(k^{eme} colonne de $\mathcal{A}$). Cet opérateur A_0, évidemment compatible avec $\mathcal{A}$, sera identifié dans la suite avec la matrice $\mathcal{A}$.

Notre opérateur $\mathcal{A}$ n'est pas nécessairement fermé (une propriété de base pour pouvoir appliquer les grands théorèmes de la théorie des opérateurs). Pour la définition et les deux propriétés suivantes, le lecteur peut consulter [11, Chapitre III.5].

DÉFINITION C.3. *Un opérateur linéaire T est dit* **fermé** *si son graphe est fermé, c'est-à-dire, $(x_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}(T)$ et $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ pour $n \to \infty$ implique que $x \in \mathcal{D}(T)$, avec $y = Tx$.*

THÉORÈME C.4. *Soit T un opérateur linéaire fermé, avec $\mathcal{D}(T)$ dense dans ℓ^2. Alors T est borné si et seulement si $\mathcal{D}(T) = \ell^2$.*

Démonstration : D'après le théorème du graphe fermé [11, Theorem II.5.20], la propriété $\mathcal{D}(T) = \ell^2$ implique que T est borné. Réciproquement, soit T borné, et $x \in \ell^2$. Comme $\mathcal{D}(T)$ est dense dans ℓ^2, nous trouvons une suite $(x_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}(T)$ qui converge vers x. Par construction, $(Tx_n)_{n \geq 0} \subset \ell^2$ est une suite de Cauchy, notons sa limite par y. Comme T est fermé, nous pouvons conclure que $x \in \mathcal{D}(T)$, et alors $\mathcal{D}(T) = \ell^2$. $\square$

Nous pouvons effectivement associer à notre matrice $\mathcal{A}$ deux opérateurs fermés avec des propriétés intéressantes

THÉORÈME C.5. *(a) Il existe une extension minimale fermée A de $\mathcal{A}$, dite* **fermeture** *de $\mathcal{A}$, avec*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) = \{y \in \ell^2 : \exists \quad & (y_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{C}_0 \quad \textit{convergeant vers } y, \textit{ et} \\ & (\mathcal{A}y_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{C}_0 \quad \textit{convergeant (vers } Ay)\}. \end{aligned}$$

(b) Soit $\mathcal{A}^H := (\overline{a_{j,k}})_{k=0,1,\dots}^{j=0,1,\dots}$. **L'adjoint** *de la fermeture A de $\mathcal{A}$ (noté par A^*) coïncide avec l'opérateur compatible maximal de $\mathcal{A}^H$.*
(c) L'opérateur compatible maximal de $\mathcal{A}$ est fermé, et la fermeture de $\mathcal{A}$ est compatible avec $\mathcal{A}$.

Démonstration : (a) Montrons d'abord que l'opérateur A donné est bien défini, i.e., que la limite de $(\mathcal{A}y_n)_{n \geq 0}$ ne dépend pas du choix de la suite $(y_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{C}_0$ mais seulement de sa limite y. Ici il suffit de discuter le cas $y = 0$: nous devons montrer que la limite de $(\mathcal{A}y_n)_{n \geq 0}$ vaut zéro. Avec $y_n = (y_{n,k})_{k \geq 0}$ nous avons pour tout $j \geq 0$

$$|(e_j, \mathcal{A}y_n)| = |\sum_{k=0}^{\infty} (e_j, \mathcal{A}e_k) y_{n,k}| = |\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} y_{n,k}| \leq ||(a_{j,k})_{k \geq 0}|| \cdot ||y_n||$$

(toutes les sommes sont finies), et donc la limite de la suite des images vaut bien zéro.

En considérant les suites stationnaires dans $\mathcal{C}_0$, on montre que A est une extension de l'opérateur $\mathcal{A}$. De plus, on voit facilement que toute extension fermée de $\mathcal{A}$ doit aussi être une extension de A. Pour établir (a), il reste seulement à montrer que A est fermé (laissé à titre d'exercice).

(b) Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans ℓ^2, l'adjoint A^* de A peut être défini comme suit (voir [11, Chapitre III.5.5]) : $\mathcal{D}(A^*)$ est égal à l'ensemble des $y \in \ell^2$ tels qu'il existe un $y^* \in \ell^2$ avec

$$(y, Ax) = (y^*, x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

et $y^* = A^*y$. Le choix $x = e_k \in \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{D}(A)$ nous permet de déterminer la forme de y^* : Si $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$ alors

$$\overline{(y, Ae_k)} = (Ae_k, y) = (\sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j} e_j, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_{j,k}} y_j.$$

Par conséquent, pour tout $y \in \mathcal{D}(A^*)$, le k^{eme} composante de $y^* = A^*y$ doit coïncider avec celle de $\mathcal{A}^H \cdot y$, d'où la condition nécessaire $\mathcal{A}^H \cdot y \in \ell^2$. Réciproquement, soit $y \in \ell^2$ avec $\mathcal{A}^H \cdot y \in \ell^2$. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ nous trouvons $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{C}_0$ avec $x_n \to x$, $Ax_n \to Ax$. En utilisant la continuité du produit scalaire, on obtient

$$(\mathcal{A}^H \cdot y, x) = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{A}^H \cdot y, x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} (y, e_j)(e_k, x_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} (y, e_j)(e_k, x_n) = \lim_{n\to\infty} (y, \mathcal{A} \cdot x_n) = (y, Ax)$$

(on peut réordonner la sommation car la somme par rapport à k est finie pour tout n, et les sommes par rapport à j sont absolument convergentes pour tout k). Donc $y \in \mathcal{D}(A^*)$.

(c) D'après [11, Chapitre III.5.5], l'adjoint de tout opérateur T avec $\mathcal{D}(T)$ dense dans ℓ^2 est fermé. En choisissant comme T la fermeture de $\mathcal{A}^H$, la première assertion est une conséquence de la partie (b). Pour la deuxième assertion il suffit de noter qu'on vient de montrer que l'opérateur compatible maximal de $\mathcal{A}$ est une extension fermée de $\mathcal{A}$. □

Pour l'exercice suivante le lecteur peut consulter [11, Chapitre III.5.5]. On rappelle que l'annihilateur d'un ensemble $S \subset \ell^2$ est défini par $S^\perp = \{y \in \ell^2 : (y, x) = 0 \text{ pour tout } x \in S\}$.

Exercice C.6. *(a) Montrer que $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$.*
(b) Montrer que l'adjoint de l'opérateur $\mathcal{A}$ coïncide avec l'adjoint de la fermeture A de $\mathcal{A}$.
(c) Montrer que l'adjoint de A^* coïncide avec A.
(d) Soit $\mathcal{B}$ une matrice infinie, avec fermeture B bornée, et définie sur ℓ^2. Montrer que $A + B$ coïncide avec la fermeture de $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, et que $A^* + B^* = (A + B)^*$ (on discutera d'abord les domaines de définition).

D'après Théorème C.5(c) on peut associer à une matrice infinie $\mathcal{A}$ éventuellement plusieurs opérateurs fermés compatibles. D'où l'intérêt à savoir si la propriété suivante est valable

Définition C.7. *La matrice infinie $\mathcal{A}$ avec lignes et colonnes dans ℓ^2 est dite* **déterminante** *si la fermeture de $\mathcal{A}$ coïncide avec l'adjoint de $\mathcal{A}^H$ (c'est-à-dire, si il existe une et une seule extension fermée compatible de $\mathcal{A}$).*

Si de plus $\mathcal{A} = \mathcal{A}^H$ (matrice hermitienne), la matrice infinie $\mathcal{A}$ est déterminante ssi sa fermeture est auto–adjoint (c'est-à-dire, $A = A^*$). Il est en général très difficile de décider si une matrice infinie donnée est déterminante (on peut donner un lien avec le problème des moments [3, 18]).

Exercice C.8. *(a) Montrer que si A est bornée alors $\mathcal{A}$ est déterminante.*
(b) Montrer que toute matrice infinie diagonale est déterminante.
(c) Montrer que $\mathcal{A}$ est déterminante ssi $\mathcal{A}^H$ est déterminante.
(d) Soit $\mathcal{B}$ une matrice infinie comme dans Exercice C.6(d). M.q. $\mathcal{A}$ est déterminante ssi $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ est déterminante.
(e) Chercher une matrice infinie qui n'est pas déterminante.

Exemple C.9. *Le fait d'avoir une matrice déterminante nous n'empêche pas de trouver des extensions fermées de $\mathcal{A}$ différentes de A, mais ces extensions ne peuvent plus être compatibles avec $\mathcal{A}$. Comme illustration considérons une matrice infinie tridiagonale $\mathcal{A}$ avec fermeture vérifiant $\mathcal{D}(A) \neq \ell^2$ (des telles matrices – même déterminantes – existent). Comme $e_0, e_1 \in \mathcal{D}(A)$, on trouve un $v \in \ell^2 \setminus \mathcal{D}(A)$ vérifiant $(e_0, v) = (e_1, v) = 0$. On peut définir un opérateur linéaire B avec $\mathcal{D}(B) = \{y + \lambda v : y \in \mathcal{D}(A), \lambda \in \mathbb{C}\}$ par $B(y + \lambda v) = Ay + \lambda e_0$. Cet opérateur est une extension de A qui n'est plus compatible, car*

$$1 = (e_0, Bv) \neq (e_0, \mathcal{A} \cdot v) = 0.$$

On montre également que B est fermé : Soient $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{D}(A)$, $(\lambda_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ et $(x_n + \lambda_n v, B(x_n + \lambda_n v)) \to (x, y)$ pour $n \to \infty$. On voit d'abord que les suites de composantes $((e_0, x_n))_{n\geq 0}$ et $((e_1, x_n))_{n\geq 0}$ convergent. Prenant en compte la forme particulière de $\mathcal{A}$, on en déduit que la suite $((e_0, Ax_n))_{n\geq 0}$ converge, et donc aussi $(\lambda_n)_{n\geq 0}$, avec limite λ. Par conséquent, $(x_n, Bx_n) = (x_n, Ax_n) \to (x - \lambda v, y - \lambda e_0)$ pour $n \to \infty$, et la fermeture de A implique les relations $x \in \mathcal{D}(B)$ et $y = Bx$.

Cet exemple nous montre que la théorie des opérateurs est beaucoup plus riche que la théorie des matrices infinies. Néanmoins, on peut identifier l'ensemble des opérateurs linéaires bornés avec l'ensemble des matrices infinies bornées. On sait comment passer d'une matrice à un opérateur, reste la question comment retourner à une matrice

Propriétés C.10. *Soit T un opérateur fermé avec $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{D}(T)$. On considère les matrices*

$$\mathcal{A} = \big((e_j, Te_k)\big)_{j=0,1,2,\dots}^{k=0,1,2,\dots}, \quad \mathcal{A}_{m,n}\big((e_j, Te_k)\big)_{j=0,1,2,\dots,m}^{k=0,1,2,\dots,n}.$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\sup_{n\geq 0} ||\mathcal{A}_{n,n}|| < \infty$,

(b) $\sup_{m,n\geq 0} ||\mathcal{A}_{m,n}|| < \infty$,

(c) *la restriction de T sur $\mathcal{C}_0$ (notée par T_0) est bornée,*

(d) *T est borné.*

Si une de ces propriétés est satisfaite, alors les quantités de (a), (b) coïncident avec $||T||$, T coïncide avec la fermeture de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{D}(T) = \ell^2$.

Démonstration : L'équivalence entre (a) et (b) est évidente(?). Par la continuité du produit scalaire,

$$||T_0|| = \sup_{x\in\mathcal{C}_0} \frac{||T_0 x||}{||x||} = \sup_{x\in\mathcal{C}_0, y\in\ell^2} \frac{|(y,T_0x)|}{||y||\cdot||x||} = \sup_{x,y\in\mathcal{C}_0} \frac{|(y,T_0x)|}{||y||\cdot||x||} = \sup_{x,y\in\mathcal{C}_0} \frac{|(y,\mathcal{A}\cdot x)|}{||y||\cdot||x||} = \sup_{n\geq 0} ||\mathcal{A}_{n,n}||,$$

d'où l'équivalence entre (a) et (c). Si maintenant T_0 est borné, on utilise la caractérisation du Théorème C.5(a) pour montrer que sa fermeture, notée par T_1, est aussi bornée, avec $||T_1|| = ||T_0||$. Par construction, T est une extension fermée de T_0, et alors aussi une extension de T_1. D'autre part, $\mathcal{D}(T_1) = \ell^2$ d'après Théorème C.4, et donc $T = T_1$. □

EXERCICE C.11. *Soit $\mathcal{A}$ une matrice bande, c'est-à-dire, il existe un p tel que $(e_j, \mathcal{A}e_k) = 0$ pour tout $j, k \geq 0$ vérifiant $|j-k| > p$. Montrer que A est bornée ssi $\sup_{j,k\geq 0} |(e_j, Ae_k)| < \infty$.*

C.2 Le spectre et la résolvante

Dans la suite de ce chapitre, nous ne considérons que les opérateurs linéaires T de ℓ^2 qui sont fermés. Suivant [11, Chapitre III.6.1], nous avons la

DÉFINITION C.12. *On définit* **l'ensemble résolvant** $\Omega(T)$ *étant l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ vérifiant les trois conditions*

$$\begin{array}{ll} (V1) & \mathcal{N}(zI-T) = \{0\}, \\ (V2) & \mathcal{R}(zI-T) = \ell^2, \\ (V3) & \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } ||(zI-T)y|| \geq \alpha\cdot||y|| \text{ pour tout } y \in \mathcal{D}(T). \end{array}$$

L'opérateur $(zI-T)^{-1}$ est dit la **résolvante**, *et l'ensemble $\sigma(T) := \mathbb{C}\setminus\Omega(T)$ le* **spectre** *de T.*

Pour vérifier les conditions (V1)–(V3), voici quelques caractérisations équivalentes

PROPRIÉTÉS C.13. *(a) (V3) implique (V1).*
(b) Si $\mathcal{N}((zI-A)^*) = \{0\}$ ou si $\mathcal{R}(zI-A)$ est dense dans ℓ^2 alors (V3) implique (V2).

Démonstration : Partie (a) est évidente. Pour partie (b), notons d'abord que si $S \subset \ell^2$ est un espace vectoriel alors $(S^\perp)^\perp$ est sa fermeture. Utilisant Exercice C.6(a), nous pouvons déduire de $\mathcal{N}((zI-T)^*) = \{0\}$ que $\mathcal{R}(zI-T)$ est dense dans ℓ^2. Si de plus (V3) est valable, alors $(zI-T)^{-1}$ est un opérateur fermé et borné, avec domaine de définition dense dans ℓ^2. La propriété (V2) est maintenant une conséquence du Théorème C.4. □

EXERCICE C.14. *Soit A la fermeture d'une matrice infinie comme en Théorème C.5. M.q. si il existe un $\alpha > 0$ t.q. $||(zI-A)y|| \geq \alpha\cdot||y||$ pour tout $y \in \mathcal{C}_0$ alors (V3) est valable.*

Les **identités** de la résolvante sont données par

$$\begin{aligned} &(zI-T)(zI-T)^{-1} = I_{\ell^2}, \quad (zI-T)^{-1}(zI-T) = I_{\mathcal{D}(T)}, \quad z \in \Omega(T), \\ &(z_1I-T)^{-1} - (z_2I-T)^{-1} = (z_1-z_2)(z_1I-T)^{-1}(z_2I-T)^{-1}, \quad z_1, z_2 \in \Omega(T). \end{aligned}$$

Cette dernière permet d'établir la convergence (en norme) de la **série de Neumann**

$$(zI - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(z_0 - z)^n[(z_0 I - T)^{-1}]^{n+1}$$

dans le disque $\{|z - z_0| < 1/||(z_0 I - T)^{-1}||\} \subset \Omega(T)$, particulièrement (voir par exemple [11, Chapitre III.6.1])

PROPRIÉTÉS C.15. *L'ensemble $\Omega(T)$ est ouvert, et la résolvante est analytique dans $\Omega(T)$. Si T est de plus borné, alors la* **série de Neumann**

$$(zI - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}T^n$$

converge (en norme) dans le disque $\{|z| > 1/||T||\} \subset \Omega(T)$.

EXERCICE C.16. *Soit T borné. M.q. la fonction $z \to ||zI - T||$ est continue dans $\mathbb{C}$, et que $z \to ||zI - T|| \cdot ||(zI - T)^{-1}||$ est continue dans $\Omega(T)$ (inclus ∞).*

Terminons cet annexe avec un petit rappel sur les formes différentes de convergence : $(y_n)_{n\geq 0} \subset \ell^2$ converge vers $y \in \ell^2$ si $||y_n - y|| \to 0$; il converge **faiblement** vers $y \in \ell^2$ si $(v, y_n - y) \to 0$ pour tout $v \in \ell^2$. Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite des opérateurs bornés, définis dans ℓ^2. Ici la convergence "ordinaire" est convergence ponctuelle : $(T_n)_{n\geq 0}$ converge vers T $(T_n y)_{n\geq 0}$ converge vers Ty pour tout $y \in \ell^2$. On en déduit que

$$\sup_{n\geq 0} ||T_n|| < \infty, \quad ||T|| \leq \inf_{n\geq 0} ||T_n||.$$

Si de plus $||T_n - T|| \to 0$ alors on parle de la convergence **en norme**.

Références

[1] Ahlfors, Complex analysis, McGraw–Hill (1966). [BIBMATH, BU]

[2] N.I. Akhiezer & I.M. Glazman, Theory of linear operators in a Hilbert space, volume I,II, Pitman, Boston 1981. [BIBMATH]

[3] N.I. Akhiezer, Classical moment problems and some related questions in analysis Oliver & Boyd 1965. [BIBMATH, BU]

[4] G.A. Baker & P.R. Graves-Morris, *Padé Approximants* tome I (Addison-Wesley, Reading, MA, 1981). [BIBMATH] Aussi nouvelle edition dans : Cambridge University press.

[5] R. Courant, The Theory of Functions of a complex variable, New York University (1948). [BIBMATH]

[6] N. Dunford & J. Schwartz, Linear operators, Part II, Interscience, NY (1967). [BIBMATH, BU]

[7] Goluzin, Geometric theory of functions of a complexe variable AMS (1969).[BIBMATH]

[8] P.R. Halmos, A Hilbert space problem book, Van Nostrand, Princeton NJ (1967). [BIBMATH, BU]

[9] P. Henrici, Applied and computational complex analysis I,II,III, Wiley (1974) [BIBMATH, BU]

[10] Hille, Analytic Function Theory, Vol. 2, Ginn (1962) [BIBMATH]

[11] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag (1966). [BIBMATH, BU]

[12] S. Lang, Complex Analysis, Addison–Wesley (1977) [BIBMATH, BU]

[13] M. Lavrentiev & B. Chabat, Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Mir (1972) [BIBMATH, BU]

[14] E.M. Nikishin & V.N. Sorokin, Rational Approximations and Orthogonality, Nauka, Moscow, 1988. Engl. transl. in *Translations of Mathematical Monographs* **92**, Am. Math. Soc., Providence, R.I. (1991). [BIBMATH, BU]

[15] T. Ransford, Potential theory in the complex plane, *London Math. Soc.* Student Texts, **28**, 1995.

[16] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw–Hill (1970). [BIBMATH, BU]

[17] J.L. Schiff, Normal Families, Springer (1993). [BIBMATH]

[18] J. Shohat & J. Tamarkin, The problem of moments, Mathematical Surveys, n.1, Providence, R.I., Am. Math. Soc., 1950. [BIBMATH]

[19] J.L. Walsh, Approximation by polynomials in the complex domain, Gauthier–Villars (1935). [BIBMATH]