

Bilan du Travail d'Étude et de Recherche « La marche de l'empereur » à l'Université de Lille 1

par Romain Ragonnet, Romain Jumentier et Bernhard Beckermann¹

Le manchot empereur est un oiseau qui vit en colonie, qui peut comporter plusieurs milliers d'individus. Le manchot est confronté durant les mois d'hiver à des conditions climatiques très rudes. Il adopte alors une stratégie particulière durant les périodes de grand froid : afin de maintenir leur température corporelle, tous les manchots d'une horde se regroupent afin de former un amas compact d'oiseaux, appelé « tortue » par les ornithologues [8], voir Fig. 1. Lorsqu'un manchot a trop froid (ce qui arrive typiquement pour les oiseaux du bord situés du côté le plus exposé au vent) il se déplace afin de trouver une position où les conditions sont plus acceptables. Ainsi, la horde voit sa forme être sensiblement modifiée, et l'ensemble de manchots avance sur la banquise en suivant apparemment le sens du vent. Ces déplacements peuvent prendre une ampleur conséquente étant donné que les manchots font parfois la tortue durant des temps très longs (plusieurs jours sans interruption).

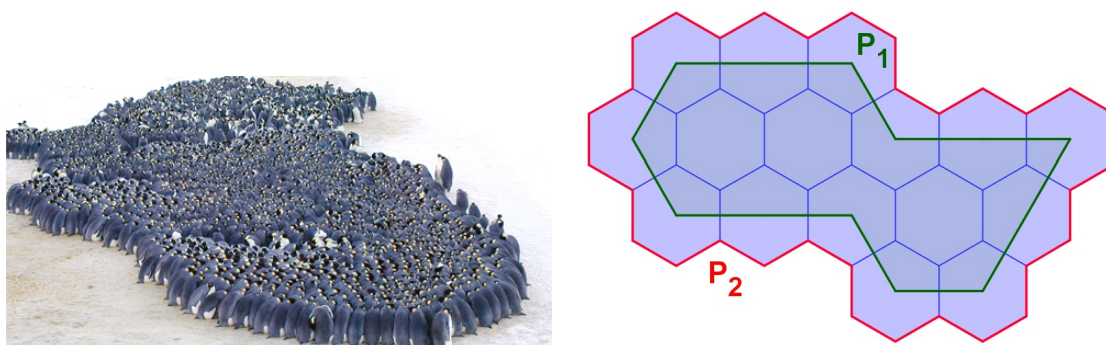


FIGURE 1 – A gauche, la horde de manchots forme une « tortue », une espèce de grosse carapace très dense, pour se protéger du vent. A droite, sa discrétisation par hexagones.

Le but du TER (effectué par R.R. et R.J. sous la direction de B.B.) dans le cadre du Master 1 d'ingénierie mathématique à l'Université de Lille était de comprendre le modèle mathématique et sa discrétisation – comme exposé par A. Waters, F. Blanchette et A.D. Kim d'une manière succincte dans [6] – et d'effectuer des simulations numériques (sous Matlab), en confirmant les résultats numériques et en variant les hypothèses dans [6]. Ici la volonté d'un manchot situé au bord de la horde de se déplacer est déterminée par le flux de la température au travers de la partie du bord associée à ce manchot. Pour connaître la température, il fallait résoudre une suite de problèmes de convection-diffusion stationnaires sur divers domaines Ω non bornés et assez irréguliers (l'extérieur de la horde), avec un vent qui loin de la horde est d'amplitude et de direction fixe, mais qui est dévié par l'obstacle formé par la horde. Comme nous allons le voir dans la suite, des changements de variables à l'aide des fonctions holomorphes seront essentiels pour obtenir un temps de calcul acceptable. Ainsi, ce TER n'a pas seulement permis aux étudiants de comprendre la démarche de modélisation mathématique et la simulation numérique, mais aussi de revoir divers chapitres de cours sur les EDP et leur discrétisation, et de découvrir un lien inattendu avec l'analyse complexe.

1 Les hypothèses et le modèle mathématique

Nous allons énumérer dans ce chapitre un certain nombre d'hypothèses qui nous permettent d'aboutir à un modèle mathématique de formation de tortue. Ici nous allons suivre de près les idées mathématiques de l'article [6], bien que ce dernier ne s'adresse pas forcément à un public de mathématiciens.

(H1) Étude dans $\mathbb{R}^2$: Étant donné que les manchots vivent sur la banquise, on peut considérer qu'ils se trouvent sur un plan parfait. De plus, au vu de leur petite taille ($< 120\text{cm}$), nous négligerons les effets liés à l'altitude concernant le vent et la température. Même s'il est clair que le vent qui passe au dessus de la horde contribue à refroidir les manchots, nous considérons qu'il y contribue de la même

¹. Laboratoire Painlevé UMR 8524, UFR Mathématiques, Université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq

manière pour tous les individus. Ainsi, notre domaine de résolution sera un domaine du plan, et seulement les manchots situés au bord de la horde seront exposés au vent et susceptibles de changer de place.

(H2) Égoïsme des manchots : Au sein de la horde, chaque individu souhaite augmenter sa propre température corporelle. Les manchots ne cherchent donc pas à augmenter la température globale de la horde. Ils raisonnent en tant qu'individus et non en tant que membres d'un groupe. Pour simplifier, nous allons donc discrétiser l'axe du temps, en permettant à un seul manchot à la fois de changer de place, en se déplaçant d'une position au bord à une autre position au bord.

(H3) Forme d'une horde : Le corps d'un manchot a une physionomie assez régulière, assimilable à une forme cylindrique. Nous nous intéressons ici à une visualisation du manchot dans un plan horizontal. Il est alors naturel de modéliser un individu par un disque. On observe aussi que les centres de gravité des manchots forment une sorte de maillage hexagonal [7]. Tenant compte de la déformation des manchots par la volonté de se regrouper, on obtient alors une modélisation de la horde par un ensemble d'hexagones sur un maillage hexagonal, comme décrit dans Fig. 1. Comme nous ne souhaitons pas que la horde se scinde en deux parties, nous allons imposer l'hypothèse que tout hexagone-manchot ait au moins deux voisins, ce qui interdit certains déplacements.

(H4) Paramétrisation du bord de la horde : Nous avons tracé dans Fig. 1 deux polygones décrivant le bord de notre horde et son extérieur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un domaine simplement connexe. Le polyèdre P_1 passant par les centres de gravité a été considéré dans [6], et nous allons voir plus tard que le polyèdre P_2 donne lieu à des conclusions sensiblement différentes.

Pour pouvoir gérer et mettre à jour sur ordinateur la forme d'une telle horde, il nous fallait concevoir une structure matlab qui permette d'énumérer l'ensemble des manchots, identifier ceux au bord, calculer le polyèdre formant le bord du domaine extérieur Ω , et vérifier les restrictions mentionnés en **(H3)**. Cette partie algorithmique est de nature plus technique et nous a pris probablement le plus de temps dans le TER, pour plus de détails nous renvoyons le lecteur intéressé sur [1, §4].

Nous pouvons maintenant introduire les contraintes sur le vent $\vec{u} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ et la température $T : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, pour finalement déterminer le manchot qui a le plus envie de bouger.

(H5) Conditions au bord pour le vent : Le vent n'entre pas dans la horde, est de direction et d'amplitude constante loin de l'obstacle, c'est-à-dire, avec $n_\Omega(x)$ la normale intérieure à Ω au point $x \in \partial\Omega$ et u_∞ donné

$$\text{pour } x \in \partial\Omega : n_\Omega(x)^T \vec{u}(x) = 0, \quad \text{pour } \|x\| \rightarrow \infty : \vec{u}(x) \rightarrow u_\infty \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(H6) Absence de source pour le vent : d'après le théorème de Gauß [2], nous pouvons conclure de l'absence de source que la divergence $\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ s'annule sur Ω .

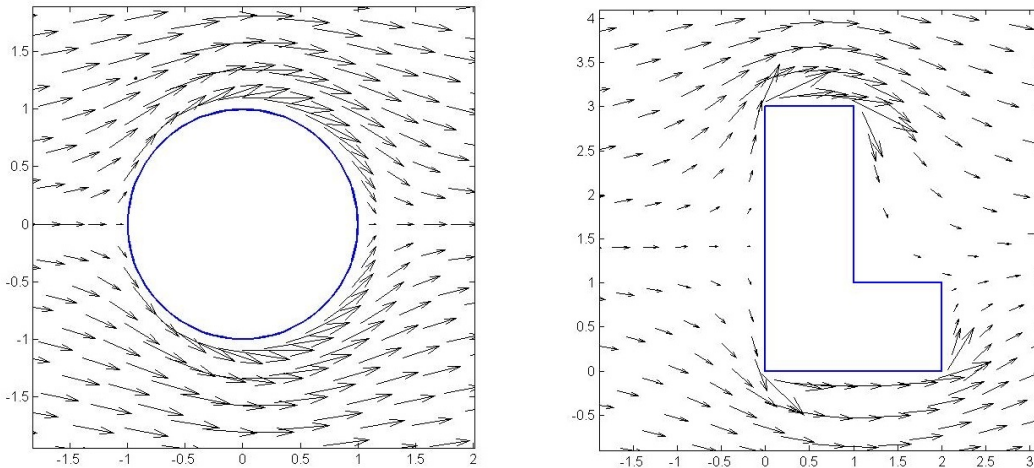


FIGURE 2 – Le vent $\vec{u} = \nabla\psi$ dévié par des obstacles en forme de disque et de L-shape.

(H7) Absence de turbulence pour le vent : cette hypothèse certes discutable nous dit que le rotationnel $\text{rot}(\vec{u}) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ s'annule sur Ω . La décomposition de Hodge nous permet d'écrire alors le vent comme la transposée d'un gradient d'un potentiel : il existe $\psi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ suffisamment lisse tel que

$\vec{u}(x) = (\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x))^T = \nabla \psi(x)^T$ pour tout $x \in \Omega$. Les trois hypothèses **(H5)**-**(H7)** nous permettent de nous ramener à un problème de Dirichlet-Neumann pour le potentiel du vent sur un domaine non borné

$$\begin{aligned} \text{pour } x \in \Omega : & \quad \Delta \psi(x) = 0, \\ \text{pour } x \in \partial \Omega : & \quad \nabla \psi(x) n_\Omega(x) = 0, \\ \text{pour } \|x\| \rightarrow \infty : & \quad \psi(x) - u_\infty x_1 = O(1)_{\|x\| \rightarrow \infty}. \end{aligned} \quad (1)$$

Il découle de l'analyse harmonique que, à une constante additive près, il existe une et une seule solution.

(H8) Conditions au bord pour la température : Nous allons calculer la température à l'extérieur de la horde, pas sur Ω entier, mais seulement sur $\Omega' \subset \Omega$, un domaine borné entourant notre horde à spécifier plus tard, en introduisant une condition aux limites artificielle. La température est supposée égale à une constante τ_H au bord de la horde $\partial \Omega \subset \partial \Omega'$, et égale à une autre constante τ_∞ sur la partie du bord $\partial \Omega' \setminus \partial \Omega$ loin de la horde (et donc la forme exacte de $\partial \Omega' \setminus \partial \Omega$ n'est pas primordiale dans notre étude).

(H9) La température est diffusée et transportée par le vent : Après chaque déplacement d'un manchot, la température dans Ω' à l'extérieur de la horde est décrite par une équation de convection-diffusion stationnaire qui relie la température au vent, avec $D > 0$ le coefficient de diffusivité thermique

$$\begin{aligned} \text{pour } x \in \Omega' : & \quad D \Delta T(x) - \nabla T(x) \vec{u}(x) = 0, \\ \text{pour } x \in \partial \Omega \subset \partial \Omega' : & \quad T(x) = \tau_H, \\ \text{pour } x \in \partial \Omega' \setminus \partial \Omega : & \quad T(x) = \tau_\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Ici, l'existence et l'unicité d'une solution est classique, voir par exemple [5, Chapitre 8].

(H10) Ressenti du froid : Un manchot numéro j au bord de la horde ressent le froid déterminé en calculant le flux de la température au travers de la partie Γ_j de la frontière qui est exposée au vent, c'est-à-dire, commune au manchot hexagonal et à $\partial \Omega$. Nous devons donc calculer l'intégrale curviligne

$$w_j = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T}{\partial n_\Omega}(x) dx = \int_{\Gamma_j} \nabla T(x) n_\Omega(x) dx$$

pour l'ensemble des manchots au bord, en identifiant le manchot d'indice $\ell = \arg \max_j w_j$, qui devrait se rapprocher du manchot d'indice $k = \arg \min_j w_j$.

Avant d'aller plus loin, nous allons mettre à l'échelle notre vent/température et notre variable spatiale par la substitution

$$x \leftarrow x/L, \quad u \leftarrow u/u_\infty, \quad T \leftarrow \frac{T - \tau_\infty}{\tau_H - \tau_\infty}, \quad Pe = \frac{u_\infty L}{D}, \quad (3)$$

avec $\pi L^2/4$ l'aire de la horde (un invariant). Ceci revient à remplacer dans (2) le coefficient D par $1/Pe$, et de poser $\tau_\infty = 0$, $\tau_H = 1$, $u_\infty = 1$. D'après [6], des valeurs réalistes pour le nombre de Péclet Pe sont comprises entre 10 et 500.

2 L'analyse complexe au secours du calcul numérique

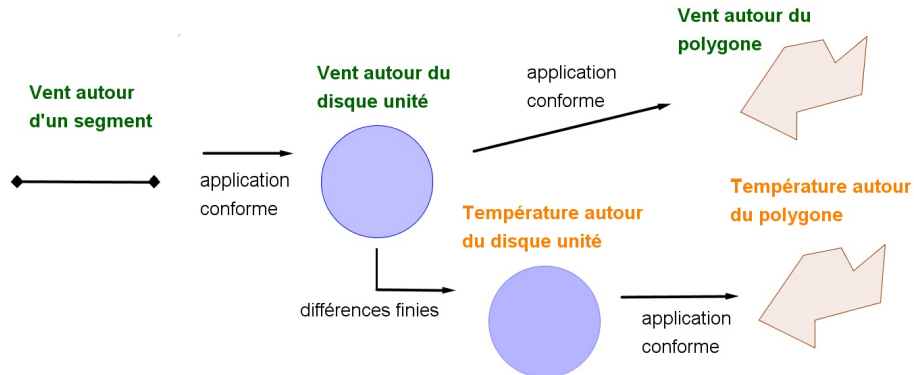


FIGURE 3 – Les étapes de résolution pour trouver le vent et la température en dehors de la horde de manchots.

On trouve dans Fig. 3 un schéma qui explique notre démarche pour trouver le vent et la température autour de toute forme polygonale représentant une horde. Ce chapitre a pour but de donner quelques détails (voir aussi [1, 6]) .

Un élément essentiel dans nos simulations est que la connaissance de la solution de (1), (2) pour un seul domaine Ω_0 (dit de référence) nous permet de trouver par un changement de variables la solution pour tout autre domaine Ω simplement connexe. Ce changement de variables provient de l'analyse complexe, nous allons donc dans ce chapitre identifier le plan $\mathbb{R}^2$ avec le plan complexe $\mathbb{C}$, et identifier deux fonctions $f : \mathbb{C} \supset \Omega \mapsto \mathbb{C}$ et $F : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ par l'écriture

$$f(x_1 + ix_2) = F_1(x_1, x_2) + iF_2(x_1, x_2).$$

Pour $\Omega, \Omega_0 \subset \mathbb{C}$ deux domaines simplement connexes de bord compact, notons par ϕ l'application conforme qui renvoie Ω_0 sur Ω , normalisée par $\phi(\infty) = \infty$ et $\phi'(\infty) > 0$. Alors ϕ est bijective et holomorphe, avec $\phi'(z) \neq 0$ pour $z \in \Omega$. Nous obtenons des équations de Cauchy-Riemann en $z = x_1 + ix_2 \in \Omega_0$ que

$$\nabla \Phi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} (x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \end{bmatrix} (x),$$

en particulier $Q(x) := \nabla \Phi(x) / |\phi'(z)|$ est une matrice orthogonale, ce qui confirme que, localement, l'application Φ préserve les angles (mais pas les distances). Par conséquent, au moins pour les bords suffisamment lisses comme pour des polyèdres (à l'exception de leurs sommets)

$$n_\Omega(\Phi(x)) = Q(x)n_{\Omega_0}(x), \quad x \in \partial\Omega_0. \quad (4)$$

Nous souhaitons vérifier que, avec ψ_0 et T_0 solutions de (1), (2) pour Ω_0, Ω'_0 , les fonctions ψ et T définies sur Ω, Ω' par

$$\psi(\Phi(x)) = \psi_0(x), \quad T(\Phi(x)) = T_0(x), \quad \Omega' = \Phi(\Omega'_0), \quad (5)$$

sont bien solutions de (1), (2) pour Ω, Ω' . Pour obtenir un tel résultat avec la même vitesse limite $u_\infty = 1$, les auteurs dans [6] ont implicitement supposé que $\phi'(\infty) = 1$ ou, autrement dit, la capacité logarithmique de la horde est invariante au cours du temps.² Comme

$$\nabla \psi(\Phi(x)) \nabla \Phi(x) = \nabla \psi_0(x), \quad \nabla T(\Phi(x)) \nabla \Phi(x) = \nabla T_0(x),$$

nous concluons de (4) que l'ensemble des conditions aux bords $\partial\Omega, \partial\Omega'$ est respecté. Pour la condition asymptotique dans (1), rappelons que $\phi(z) = \phi'(\infty)z + \mathcal{O}(1)_{|z| \rightarrow \infty} = z + \mathcal{O}(1)_{|z| \rightarrow \infty}$ par hypothèse, et que $\|\Phi(x)\| = |\phi(z)| \rightarrow \infty$ ssi $|z| = \|x\| \rightarrow \infty$. Il en suit que

$$\psi(\Phi(x)) - u_\infty \Phi_1(x) = \psi_0(x) - x_1 + \mathcal{O}(1)_{\|x\| \rightarrow \infty} = \mathcal{O}(1)_{\|\Phi(x)\| \rightarrow \infty}.$$

Aussi,

$$\begin{aligned} \Delta \psi_0(x) &= \text{trace}(\nabla^2 \psi_0(x)) \\ &= |\phi(z)|^2 \text{trace}\left(Q(x)^{-1} \nabla^2 \psi(\Phi(x)) Q(x)\right) + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(\Phi(x)) \Delta \Phi_1(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(\Phi(x)) \Delta \Phi_2(x) \\ &= |\phi(z)|^2 \Delta \psi(\Phi(x)), \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité nous avons utilisé le fait que Φ_1, Φ_2 sont harmoniques dans Ω_0 , qui découle également des équations de Cauchy-Riemann. Comme $\phi'(z) \neq 0$, la condition $\Delta \psi_0(x) = 0$ pour $x \in \Omega_0$ implique alors que $\Delta \psi(x) = 0$ pour $x \in \Omega$, et alors la fonction ψ définie dans (5) est bien une solution de (1). De plus, pour $x \in \Omega'_0$

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta T_0(x) - Pe \nabla T_0(x) \vec{u}_0(x) = D \Delta \psi_0(x) - Pe \nabla T_0(x) \nabla \psi_0(x)^T \\ &= |\phi(z)|^2 \Delta T(\Phi(x)) - Pe \nabla T(\Phi(x)) \nabla \Phi(x) \nabla \Phi(x)^T \nabla \psi(\Phi(x))^T \\ &= |\phi(z)|^2 \left(\Delta T - Pe \nabla T (\nabla \psi)^T \right) (\Phi(x)), \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction T de (5) est bien une solution de (2).

². En effet, par notre modélisation **(H1)**–**(H3)** nous pouvons seulement assurer que l'aire de la horde reste constante, et une forte déformation risque de mettre en péril cette hypothèse sur la capacité logarithmique.

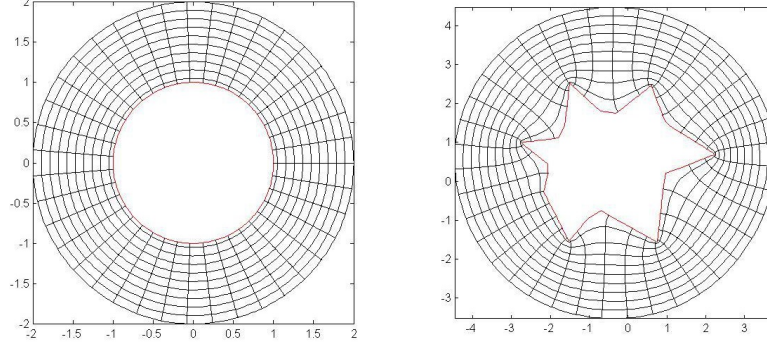


FIGURE 4 – Le maillage uniforme en coordonnées polaires avant et après déformation sous Φ .

Dans la suite on utilisera comme domaine de références le plan privé du disque unité fermé, et un anneau, respectivement,

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| > 1\}, \quad \Omega'_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|x\| < r_{\max}\},$$

avec le paramètre de troncature $r_{\max} = 3$ (il s'avérât que les résultats pour un paramètre $r_{\max}$ plus grand étaient assez semblables). Ici on peut donner une formule explicite pour le vent, en passant par le domaine Ω donné par le complémentaire du segment avec extrémités $(\pm 2, 0)^T$. Ce dernier n'étant pas un obstacle pour un vent horizontal constant, on obtient aisément les solutions $\psi(x) = x_1$ et $\vec{u}(x) = \nabla \psi(x)^T = (1, 0)^T$. Sachant que $\phi(w) = w + 1/w$ (et $\phi'(\infty) = 1$), ceci donne pour notre domaine de référence (en échangeant dans les arguments ci-dessus les rôles de Ω, Ω_0)

$$\psi_0(x) = \operatorname{Re}\left(x_1 + ix_2 + \frac{1}{x_1 + ix_2}\right) = x_1 + \frac{x_1}{\|x\|^2}, \quad \vec{u}_0(x) = \left(\frac{\|x\|^4 + x_2^2 - x_1^2}{\|x\|^4}, \frac{-2x_1x_2}{\|x\|^4}\right)^T. \quad (6)$$

Pour Ω un domaine simplement connexe avec $\partial\Omega$ un polyèdre, les valeurs des applications conformes ϕ, ϕ^{-1} et de leurs dérivées sont explicitement disponibles sous Matlab en se servant du paquetage Schwarz-Christoffel de T. Driscoll [3, 4]. En combinant avec (5), nous pouvons alors³ obtenir le vent (6) autour d'un disque, mais aussi pour toute horde sous forme de polygone, voir Fig. 2. Ces exemples et d'autres exposés dans [1, §2.2] permettent de mettre en évidence quelques phénomènes :

- Le vent est faible pour les points situés dans les zones concaves de la horde ;
- Lorsque le vent fait face à un mur qui est perpendiculaire à sa direction d'origine, la direction du vent se modifie assez rapidement en amont de l'obstacle ;
- Au niveau de certaines irrégularités (convexes) de la frontière, l'amplitude du vent est beaucoup plus forte. Il s'agit des sommets du polygone pour lesquels le vent n'a pas beaucoup dévié en amont.

Pour obtenir la température T_0 de référence, nous allons introduire les coordonnées polaires $x = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $1 < r < R$, $0 \leq \theta < 2\pi$, où nous remarquons que l'équation (2) pour notre domaine de référence devient

$$\left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_0}{\partial \theta^2}\right) = Pe \left(\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos(\theta) \frac{\partial T_0}{\partial r} - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\right) \sin(\theta) \frac{\partial T_0}{\partial \theta} \right) \quad (7)$$

$$T_0(1, \theta) = 1, \quad T_0(R, \theta) = 0, \quad T_0(r, 0) = T_0(r, 2\pi).$$

Suivant [6], nous avons approché la solution de (7) par différences finies centrées sur un maillage uniforme [1, §3] en utilisant un pas $\Delta r = r_{\max}/151 \approx 1/50$ pour le rayon et un pas $\Delta \theta = 2\pi/300 \approx 1/50$ pour l'angle. Pour la résolution de ce seul système creux d'ordre 45000 nous avons utilisé un solveur direct d'une boîte noire Matlab. Au travers de la formule (5) nous obtenons donc des valeurs approchées $T(x_{j,k})$ aux points donnés par le maillage uniforme en coordonnées polaires déformé sous Φ (qui préserve les angles mais pas les distances), voir l'exemple donné dans Fig. 4. On trouve dans Fig. 5 deux simulations, où les données dispersées de température ont été interpolées au travers de la commande matlab `griddata(..., 'cubic')`. Nous rappelons que le vent vient de la gauche de la figure, il est donc logique que les zones les plus chaudes soient situées sur la partie droite (ce qui est moins prononcé pour un nombre de Péclet faible).

3. Ce paquetage Schwarz-Christoffel ne respecte pas la normalisation $\phi'(\infty) > 0$, et sans un terme correctif, on avait obtenu un changement de l'orientation du vent loin de l'obstacle.

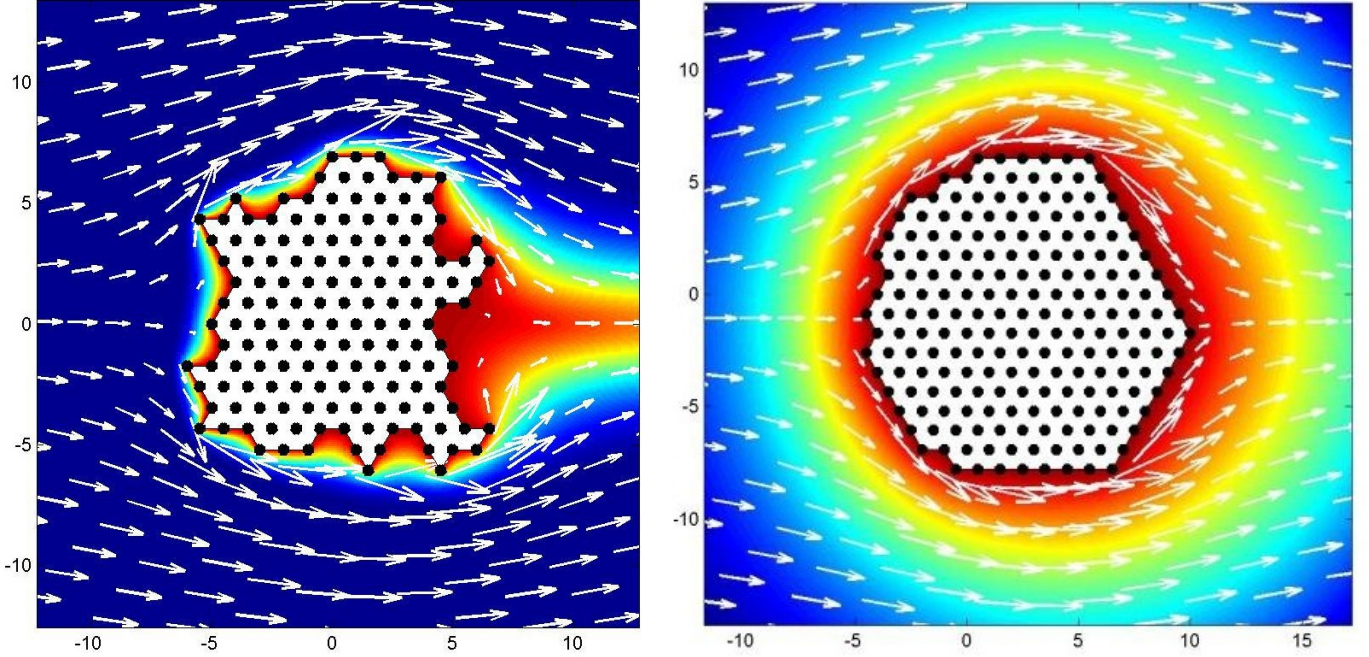


FIGURE 5 – Deux simulations pour la température en dehors de la horde, à gauche pour $N = 150$ manchots et $Pe = 100$, à droite pour $N = 200$ manchots et $Pe = 1$. Les flèches indiquent la direction du vent, la couleur la température (1=rouge=chaud, 0=bleu=froid).

Il reste à spécifier comment on a évalué l'indicateur w_j pour le manchot au bord d'indice j donné dans **(H10)** : la partie associée Γ_j du bord de la horde est paramétrée par $\Phi(x(\theta))$, $x(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))^T$, $\theta \in (\Theta_-, \Theta_+) \approx (\ell_- \Delta\theta, \ell_+ \Delta\theta)$ pour des entiers ℓ_-, ℓ_+ , et alors par (5) en posant $y = \Phi(x)$

$$\begin{aligned} w_j &= \int_{\Gamma_j} \nabla T(y) n_{\Omega}(y) \|dy\| = \int_{\Phi^{-1}(\Gamma_j)} \nabla T_0(x) n_{\Omega_0}(x) \|dx\| = \int_{\Theta_-}^{\Theta_+} \nabla T_0(x(\theta)) x(\theta) d\theta \\ &= \int_{\Theta_-}^{\Theta_+} \frac{\partial T_0}{\partial r}(x(\theta)) d\theta \approx \sum_{\ell=\ell_-}^{\ell_+} \frac{T_0((1+\Delta r)x(\ell\Delta\theta)) - T_0(x(\ell\Delta\theta))}{\Delta r} \Delta\theta \end{aligned}$$

voir aussi la modification dans [1, §4.2.2.c] où on propose une autre formule d'intégration numérique qui est au moins correcte pour des constantes. Ainsi, la simulation du mouvement d'une horde de 200 manchots sur 200 pas de temps nécessite environ 3h sur un PC pas très moderne, où à peu près la moitié du temps est utilisé pour l'évaluation des applications conformes.

3 Évolution de la horde au cours du temps

Nous avons réalisé les simulations en considérant les deux types de polygones présentés dans **(H4)**. En effet, l'article [6] montrait l'utilisation du premier modèle avec le polygone passant par les centres des hexagones. Il nous est toutefois paru plus naturel de considérer le polygone du second modèle traçant le contour de la horde (suivant les sommets des hexagones). Pour interpréter les résultats affichés dans Fig. 6, Fig. 7 et Fig. 8, nous avons utilisé une autre représentation, où un code couleur s'échelonnant entre le rouge (chaud) et le bleu (froid) montre les manchots au bord qui ont chaud et ceux qui ont froid. Nous renvoyons le lecteur intéressé sur le site web [1] où on peut trouver des vidéos de simulation permettant de suivre l'évolution de la horde en temps réel.

Nous avons effectué une analyse de sensibilité en incluant différentes modifications aux modèles : cumul des pertes de chaleur sur 5 étapes pour la détermination du critère de froid, prise en compte de la frilosité des manchots et ajout d'une variable aléatoire dans le critère de froid. Ces modifications n'ont abouti à aucun changement dans nos résultats si ce n'est un éventuel ralentissement dans la progression sur la banquise. Notons que les relevés individuels de perte de chaleur ont été enregistrés pour chacun

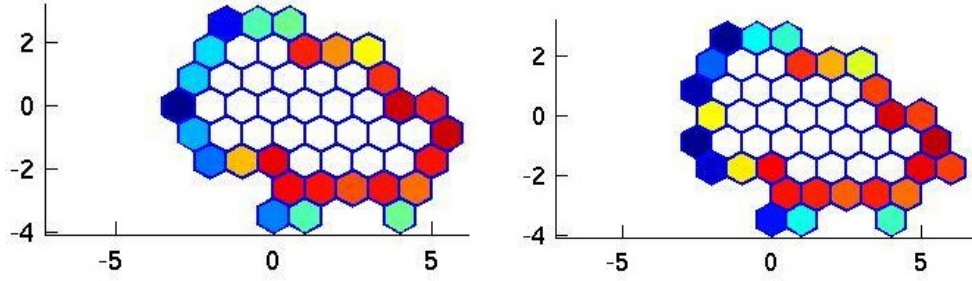


FIGURE 6 – Deux étapes successives où un manchot s’est déplacé. Dans nos simulations, on a supposé que le vent venait de gauche, ainsi, le manchot le plus susceptible de partir est situé parmi les manchots du côté gauche de la frontière. En effet, on constate clairement que les zones situées à droite de la horde sont beaucoup plus chaudes que les autres. De plus, nous constatons qu’un deuxième paramètre rentre en compte, c’est celui du nombre de voisins. En effet, au moins un manchot a de voisins, au plus il ressent le froid.

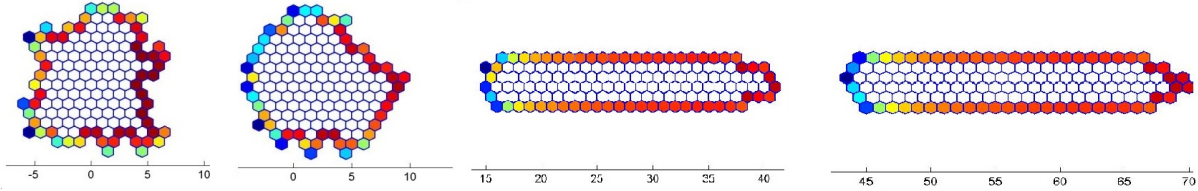


FIGURE 7 – Étapes 1, 25, 228 et 400 pour une simulation réalisée avec le premier modèle (centre des manchots) avec $N = 150$ manchots et $Pe = 100$: la horde a tendance à s’affiner, à s’allonger. Nous constatons dans un premier temps que la horde cherche à se régulariser : la frontière de la horde est plus régulière au bout de 25 étapes et n’a pas avancé. Dans un second temps, comme les manchots situés sur la gauche de la horde ont tendance à aller vers la droite, on peut alors observer que la horde se déplace globalement vers la droite avec le temps (en se référant aux axes). Mais même une fois la forme allongée, au fur et à mesure du temps, la horde continue d’avancer.

des manchots et à chaque étape de la simulation. Cela nous a permis de constater qu’il n’y avait pas de diminution du sentiment de froid global perçu par la horde.

4 Conclusions

Considérant le point de vue du biologiste, la conclusion commune aux deux modèles présentés dans cet article est que la horde de manchots avance sur la banquise dans le sens du vent. Un phénomène d’allongement est apparu avec le modèle qui considère le polygone passant par les centres des manchots mais pas dans celui où le polygone décrit le contour des hexagones (pour $N \in \{75, 100, 150, 200\}$ et $Pe \in \{100, 200, 500, 1000\}$). Nous pensons que la conclusion du second modèle est plus réaliste, tout d’abord car le contour utilisé est beaucoup plus proche du contour réel mais aussi parce que, dans nos recherches bibliographiques, nous avons seulement trouvé dans [6] mention du phénomène d’allongement.

Malgré les modifications apportées aux modèles, notamment l’ajout de variables aléatoires, la tendance reste la même ; ce qui assure la fiabilité des résultats de notre étude. D’autre part, nous avons pu remarquer que la stratégie des manchots était efficace de manière individuelle mais qu’elle ne contribuait pas à réchauffer la horde de manière globale.

Concernant l’aspect mathématique, on a pu voir qu’une modélisation plus fine des individus apportait des conclusions plus proches de la réalité. De même nous avons pu observer l’influence des hypothèses sur notre modèle. Tout d’abord la forme choisie pour un manchot peut changer les conclusions, mais aussi les coûts de calcul. Idéalement il aurait fallu considérer des cercles, mais l’outil de Schwarz Christoffel aurait alors montré des limites. Le fait de considérer un contour hexagonal (modèle 2) plutôt qu’un polygone passant par les centres (modèle 1) a eu pour conséquence de quasiment tripler les temps de calculs. On se rend compte alors qu’il serait compliqué d’imaginer un modèle plus affiné.

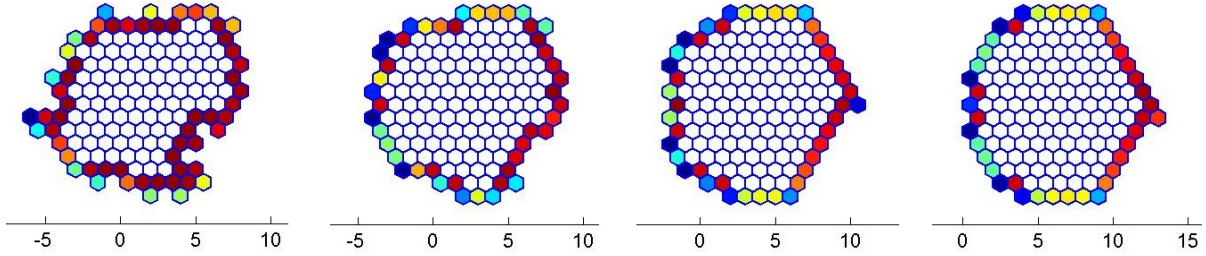


FIGURE 8 – Étapes 1, 15, 40 et 85 pour une simulation réalisée avec le second modèle (contour des manchots) avec $N = 150$ manchots et $Pe = 100$: la horde avance une nouvelle fois sur la banquise dans le sens du vent. Cependant il n'y a plus de phénomène d'allongement. On remarque que la horde adopte une forme très régulière qui ressemble à un hexagone.

Une autre hypothèse assez forte du modèle était de supposer le vent irrotationnel, ce qui nous a permis d'appliquer la décomposition de Helmholtz-Hodge. Sans cette hypothèse, nous aurions été amené à résoudre des équations de type Navier-Stokes. Mais dans ce cas, nous perdons la possibilité de passage d'une solution d'un domaine à un autre par application conforme.

Références

- [1] R. Ragonnet, R. Jumentier, La marche de l'empereur, Travail d'Étude et de Recherche, Université de Lille 1, 2013. Site web <http://aisn.free.fr/Manchots/>
- [2] P. Lascaux, R. Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tome 1 : Méthodes directes.
- [3] T.A. Driscoll, A MATLAB toolbox for Schwarz-Christoffel mapping. ACM Trans. Math. Soft., 22 :168-186, 1996.
- [4] T.A. Driscoll and L.N. Trefethen, Schwarz-Christoffel Mapping. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [5] A.M. Quarteroni, A. Valli, Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer (2008).
- [6] A. Waters, F. Blanchette, A.D. Kim, Modeling Huddling Penguins. PLoS ONE 7(11) (2012) : e50277. doi :10.1371/journal.pone.0050277, <http://doi.org/jst>
- [7] D.P. Zitterbart, B. Wienecke, J.P. Butler, B. Fabry, Coordinated movements prevent jamming in an emperor penguin huddle. PLoS ONE 6 : (2011) e20260. doi : 10.1371/journal.pone.0020260.
- [8] <http://recherchespolaires.inist.fr/?Les-manchots-font-la-tortue>