Université de Lille
Master de Mathématiques, Semestre 3 (2020-21)
Algèbre
Devoir Maison, à rendre pour le 6/1/2021

Barême indicatif : 10+7+3. Les exercices sont autonomes et peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

1. Problème

Le but de ce problème est de montrer que deux $\mathbb{Z}$-modules de type fini sont isomorphes si et seulement si ils ont des facteurs libres de même rang et les mêmes facteurs invariants. Plus explicitement, si pour deux $\mathbb{Z}$-modules M et N, on écrit $M = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^r$, avec $d_1|\cdots|d_k$, $d_1 \neq 1$, $d_k \neq 0$, et $N = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/e_l\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^s$, avec $e_1|\cdots|e_l$, $e_1 \neq 1$, $e_l \neq 0$, alors on a $M \simeq N$ si et seulement si $r = s$, $k = l$ et $d_i = e_i$ $(\forall i)$.

1.1) Dans un $\mathbb{Z}$-module M, on dit qu'un élément $x \in M$ est de torsion lorsqu'il existe $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, tel que $ax = 0$. Prouver que l'ensemble de ces éléments de torsion M_{tors} forme un sous module de M. Identifier ce sous module M_{tors} et le quotient M/M_{tors} lorsque $M = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^r$. Déduire du résultat obtenu que, dans les notations utilisées dans le préambule du problème, on a la relation $M \simeq N \Rightarrow r = s$. Dans la suite, on supposera $M = M_{tors}$ (et $N = N_{tors}$).

1.2) On fixe un nombre premier p. On considère le système multiplicatif $S_p = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}p$ et l'anneau localisé $\mathbb{Z}_{(p)} = S_p^{-1}\mathbb{Z}$. On note également $M_{(p)} = S_p^{-1}M$ le $\mathbb{Z}_{(p)}$-module localisé associé à un module M.

Prouver que l'on a la relation $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})_{(p)} = \mathbb{Z}/p^v\mathbb{Z}$, lorsque l'on applique cette localisation à un $\mathbb{Z}$-module de la forme $M = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, où on pose $v = v_p(d)$. En déduire que lorsque l'on écrit $M = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}$ avec $d_1|\cdots|d_k$ comme dans le préambule, on a $M_{(p)} = \mathbb{Z}/p^{v_p(d_1)}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{v_p(d_k)}\mathbb{Z}$, pour la suite croissante de valuations telle que $v_p(d_1) \leq \cdots \leq v_p(d_k)$.

Dans la suite, on réécrit cette expression comme $M_{(p)} = \mathbb{Z}/p^{v_p^1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{v_p^{k_p}}\mathbb{Z}$, en éliminant les termes nuls éventuels de la suite $v_p(d_1) \leq \cdots \leq v_p(d_k)$, de sorte que l'on a $(v_p(d_1), \cdots, v_p(d_k)) = (0, \cdots, 0, v_p^1, \cdots, v_p^{k_p})$ où on ajoute $k - k_p$ termes nuls à la suite $v_p^1 \leq \cdots \leq v_p^{k_p}$. Le nombre k associé à notre module de départ se détermine par $k = \max\{k_p | p \text{ premier}\}$ (car $d_1 = \prod_p p^{v_p(d_1)} \neq 1$ suppose qu'au moins une suite $v_p(d_1) \leq \cdots \leq v_p(d_k)$ commence par un terme $v_p(d_1) \neq 0$).

1.3) Pour un $\mathbb{Z}_{(p)}$-module S, on considère la suite emboitée de sous $\mathbb{Z}_{(p)}$-modules $S \supset pS \supset \cdots \supset p^m S \supset \cdots$ tels que $p^m S = \{p^m x | x \in S\}$, pour $m = 0, 1, \ldots$.

Montrer que les sous-quotients $p^m S/p^{m+1}S$ héritent d'une structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel par quotient de l'action de $\mathbb{Z}_{(p)}$ sur S. Identifier ces sous-quotients pour un $\mathbb{Z}_{(p)}$-module de la forme $S = \mathbb{Z}/p^v\mathbb{Z}$, et prouver que l'on a $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} p^m S/p^{m+1}S = 1$ si $m < v$ et $p^m S/p^{m+1}S = 0$ sinon. En déduire que pour un module localisé comme dans le résultat de la question précédente $M_{(p)} = \mathbb{Z}/p^{v_p^1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{v_p^{k_p}}\mathbb{Z}$, on a $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} p^m M_{(p)}/p^{m+1}M_{(p)} = \sharp\{v_p^i | m < v_p^i\}$.

1.4) Montrer à partir du résultat de la question précédente que si on a $M \simeq N$, pour deux $\mathbb{Z}$-modules tels que $M = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}$ et $N = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/e_l\mathbb{Z}$, alors en écrivant $M_{(p)} = \mathbb{Z}/p^{v_p^1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \mathbb{Z}/p^{v_p^{k_p}}\mathbb{Z}$ et $N_{(p)} = \mathbb{Z}/p^{w_p^1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \mathbb{Z}/p^{w_p^{l_p}}\mathbb{Z}$, on a $k_p = l_p$ et $v_p^i = w_p^i$ $(\forall i)$, pour tout nombre premier p.

1.5) Conclure quant au résultat annoncé.

— Suite au verso —

2. Problème

On fixe un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$. On travaille dans l'espace affine $V = \mathbb{K}^r$ que l'on munit de la topologie de Zariski, avec comme ensemble de parties fermées les ensembles algébriques affines $V(I) = \{(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^r | f(a_1, \dots, a_r) = 0\, (\forall f \in I)\}$ associés aux idéaux de l'anneau des polynômes $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$. On pourra utiliser l'ensemble des résultats établis dans le cours, dont on suivra les conventions, ainsi que les résultats établis dans le devoir maison du 23/11 concernant en particulier les intersections et réunions d'ensembles algébriques affines. On note également $D(f) = V \setminus V(f) = \{(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^r | f(a_1, \dots, a_r) \neq 0\}$ l'ouvert standard de V associé à un polynôme $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$.

On considère le faisceau d'anneaux O_V tel que $O_V(D(f)) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r][1/f]$ pour les ouverts standards $D(f) \subset V$. On se donne un recouvrement de V par des ouverts standards $D(f_1) \cup \dots \cup D(f_m) = V$ et une collection

$$(*) \qquad \begin{array}{l} \alpha_{ij} = p_{ij}/f_{ij}^{n_{ij}} \in O_V(D(f_i f_j)), \quad (i,j) \in \{1, \dots, m\}^2, \\ \text{telle que} \quad \begin{cases} \alpha_{ii} = 0 \quad (\forall i), \\ \alpha_{ij} = -\alpha_{ji} \quad (\forall ij), \\ \alpha_{ij}|_{D(f_i f_j f_k)} = \alpha_{ik}|_{D(f_i f_j f_k)} + \alpha_{kj}|_{D(f_i f_j f_k)} \quad (\forall ijk). \end{cases} \end{array}$$

(On dit alors que notre collection α_{ij} est un 2-*cocycle*.) On veut prouver qu'il existe une collection $\beta_i \in O_V(D(f_i))$, $i \in \{1, \dots, m\}$, telle que

$$(**) \qquad \alpha_{ij} = \beta_i|_{D(f_i f_j)} - \beta_j|_{D(f_i f_j)}$$

pour tout couple (i,j). (On dit alors que notre collection α_{ij} est un *cobord*.)

On peut supposer que, dans l'expression des fractions α_{ij}, on a $n_{ij} = n$ pour tout couple (i,j), pour un unique exposant $n \in \mathbb{N}$ (sinon il suffit d'écrire $p_{ij}/f_{ij}^{n_{ij}} = p_{ij} f_{ij}^{n - n_{ij}}/f_{ij}^n$ pour remplacer les exposants n_{ij} par leur maximum).

2.1) Prouver que l'on a $1 \in (f_1^n, \dots, f_m^n)$, de sorte qu'il existe des polynômes $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$ tels que $1 = u_1 f_1^n + \dots + u_m f_m^n$. *Indications :* On observera que l'on a $D(f_i) = D(f_i^n)$, pour tout i, et on exprimera la relation $D(f_1) \cup \dots \cup D(f_m) = D(f_1^n) \cup \dots \cup D(f_m^n) = V$ en termes d'une relation sur les fermés $V(f_i^n)$ pour se ramener à une application du Nullstellensatz.

2.2) Prouver que les éléments $\beta_i = \sum_{k=1}^m u_k p_{ik}/f_i^n$ résolvent notre problème (**).

2.3) On considère maintenant le recouvrement $U = D(x_1) \cup D(x_2)$ de l'ouvert $U = \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $V = \mathbb{K}^2$. Montrer qu'il existe au moins un élément $\alpha_{12} \in O_V(D(x_1 x_2))$ qui ne s'écrit pas comme un "cobord" $\alpha_{12} = \beta_2|_{D(x_1 x_2)} - \beta_1|_{D(x_1 x_2)}$ sur l'ouvert $D(x_1 x_2)$, pour des éléments $\beta_1 \in O_V(D(x_1))$ et $\beta_2 \in O_V(D(x_2))$.

3. Exercice

Soit M un module de type fini sur un anneau local R dont l'idéal maximal est noté $\mathcal{M}$.

3.1) On veut prouver $M/\mathcal{M}M = 0 \Rightarrow M = 0$. On fixe $e_1, \dots, e_r \in M$ une famille génératrice de M. On a $M/\mathcal{M}M = 0 \Leftrightarrow M = \mathcal{M}M$. On suppose donc $e_i = \sum_j a_{ij} e_j$, avec $a_{ij} \in \mathcal{M}$, pour $i = 1, \dots, r$, et on considère la matrice $A = (a_{ij}) \in M_{rr}(R)$.

Prouver que l'on a $\mathrm{Det}(I - A) \in R^\times$. Puis montrer que l'on a $e_i = 0$ $(\forall i)$ en utilisant une matrice inverse de $I - A$ donnée par les formules de Cramer, soit $U = (u_{ij}) \in M_{rr}(R)$ telle que $U(I - A) = I$. Conclure.

3.2) [question optionnelle] Prouver en utilisant le résultat de la question précédente qu'une famille d'éléments de M, soit $(x_1, \dots, x_r)$, est une famille génératrice du R-module M, dès lors que $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ est une famille génératrice du $R/\mathcal{M}$-espace vectoriel $M/\mathcal{M}M$.

— **Fin du devoir** —