Université de Lille

Master Mathématiques, 2019-20

Propositions d'exposés pour le cours d'algèbre

EXP. 1. *Nullstellensatz et géométrie algébrique*

Le but de cet exposé est d'énoncer et de prouver la forme forte du Nullstellensatz de Hilbert, puis d'expliquer comment utiliser ce résultat pour construire une correspondance entre les variétés algébriques affines (les variétés définies par des équations polynomiales dans $\mathbb{C}^n$) et les algèbres de type fini réduites.

1. Rappel du Nullstellensatz (forme faible). Notion de racine d'un idéal et énoncé du Nullstellensatz (forme forte). Démonstration.
2. Notion d'algèbre réduite. Identité entre la racine d'un idéal et l'intersection des idéaux premiers contenant l'idéal.
3. Définition de l'équivalence de catégories entre les variétés algébriques affines et les algèbres de type fini réduites.
4. Topologie de Zariski. Relation entre les ouverts Zariski et les algèbres localisées. Notion de fermé irréductible et correspondance avec les idéaux premiers.

RÉFÉRENCE : [4, Chap. 1]

EXP. 2. *Résolutions, homologie et groupes d'extensions*

On a vu en cours la notion de présentation d'un module M : il s'agit d'une suite exacte courte $L_1 \to L_0 \to M \to 0$ où L_1 et L_0 sont des modules libres. Lorsque l'on travaille sur un anneau principal, le théorème de la forme normale de Smith montre que l'on peut produire une présentation réduite où l'application $L_1 \to L_0$ est donnée par une matrice diagonale, mais on ne peut pas assurer un tel résultat en général. L'application $L_1 \to L_0$ peut aussi posséder un noyau, ce qui signifie qu'il n'est pas toujours possible de construire des systèmes de relations génératrices sans relations entre elles. L'idée de résolution libre consiste à poursuivre la construction d'une présentation pour produire une suite exacte longue $\cdots \to L_n \to \cdots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$ où chaque terme L_n est un module libre, et de remplacer l'étude du module M par l'étude de ses résolutions.

Le but de cet exposé sera d'expliquer la construction de ces résolutions libres et des résolutions projectives qui les généralisent, puis d'expliquer comment on peut utiliser les résolutions projectives pour classifier les classes d'isomorphismes d'extensions d'un module M par un module N, c'est à dire les suites exactes de la forme $0 \to M \to P_k \to \cdots \to P_1 \to N \to 0$ où $P_k, \dots, P_1$ sont des modules quelconques.

1. Notion de module projectif. Notion de résolution projective d'un module. Exemples : résolution projective du module $M = \mathbb{K}$ sur l'anneau $R = \mathbb{K}[T]/(T^2 - 1)$ avec l'action induite par le morphisme $\epsilon : R \to \mathbb{K}$ tel que $\epsilon(T) = 1$; résolution projective du module $M = \mathbb{K}$ sur l'anneau $R = \mathbb{K}[T]/(T^2)$ avec l'action induite par le morphisme $\epsilon : R \to \mathbb{K}$ tel que $\epsilon(T) = 0$.
2. Notion de complexe de chaînes. Groupes d'homologie d'un complexe de chaînes.
3. Groupes d'extensions et calcul au moyen de résolutions projectives.

RÉFÉRENCES : [8, §2.2 et §§3.3-3.4], [2, Chap. 3]

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

Exp. 3. *Bases de Gröbner*

Les bases de Gröbner sont des systèmes de générateurs particuliers des idéaux des anneaux de polynômes à plusieurs variables qui permettent de tester de façon effective si un polynôme donné appartient à un idéal ou non. La théorie des bases de Gröbner a des applications dans l'étude des systèmes d'équations polynomiales, pour étudier la géométrie de variétés définies par des équations polynomiales et dans divers domaines qui utilisent ces objets (cryptographie, robotique, ...).

1. Définition de la notion de base de Gröbner. L'algorithme de Buchberger. Exemples.
2. Application au calcul des *syzygies* (les syzygies sont des "relations entre relations" dans les anneaux de polynômes). Démonstration effective du théorème des syzygies de Hilbert.

Référence : [1, Chap. 2]

Exp. 4. *Le groupe des classes d'idéaux d'un anneau d'entiers de corps de nombres*

Un corps de nombres K est une extension de degré fini du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. L'anneau des entiers de K, que l'on notera O_K, est constitué des éléments de K qui sont entiers sur $\mathbb{Z}$. On montre que K est égal au corps des fractions de O_K et par suite que O_K est intégralement clos. On montre également que tout idéal premier de O_K est maximal de sorte que O_K forme un anneau de Dedekind (voir exposé 6).

Le but de cet exposé sera de donner la définition du groupe des classes d'idéaux fractionnaires de O_K et de prouver que ce groupe est fini en montrant au passage l'existence et l'unicité de la décomposition d'un idéal fractionnaire en produit d'idéaux premiers dans un anneau d'entiers de corps de nombres.

Référence : [6, Chap. V]

Exp. 5. *Le théorème des unités de Dirichlet*

Le théorème des unités de Dirichlet montre que le groupe des unités de O_K est le produit d'un groupe fini cyclique par un groupe abélien libre de rang $r_1 + r_2$, où r_1 est le nombre de plongement de réels de K tandis que r_2 est le nombre de plongement complexes (à conjugaison près). Le but de cet exposé sera de prouver ce théorème.

Référence : [6, Chap. IV]

Exp. 6. *Modules projectifs et K-théorie des anneaux de Dedekind*

La K-théorie est une généralisation de la théorie du rang utilisée pour classifier les modules projectifs de type fini sur un anneau. La classe des modules projectifs est une classe importante de module, généralisant les modules libres, qui apparait notamment dans l'étude des fibrés vectoriels sur une variété.

La classe des anneaux de Dedekind est la classe des anneaux intégralement clos dont les idéaux premiers sont maximaux. L'anneau des entiers d'un corps de nombres et l'algèbre des fonctions régulières associée à une courbe sont des exemples d'anneaux de Dedekind. Le but de l'exposé sera de montrer que les modules projectifs sur les anneaux de Dedekind s'identifent aux sommes directes d'idéaux, puis d'expliquer le calcul de la K-théorie des anneaux de Dedekind en termes du groupe des classes d'idéaux.

1. Notion de module projectif et groupes de K-théorie
2. Propriétés des anneaux de Dedekind. Structure des modules projectifs sur un anneau de Dedekind
3. Calcul de la K-théorie des anneaux de Dedekind

Référence : [3, Chap. 1]

Exp. 7. *Le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet*

Le but de cet exposé sera de donner la démonstration du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet qui affirme que toute suite arithmétique $x_n = a + rn$ contient un nombre infini de nombres premiers.

Référence : [7, Chap. VI]

Références

1. V. Ene, J. Herzog : *Gröbner bases in commutative algebra.* Graduate Studies in Mathematics, 130. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
2. S. Mac Lane : *Homology.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.
3. J. Milnor : *Introduction to Algebraic K-Theory.* Annals of Mathematics Studies, 72. Princeton University Press, 1972.
4. D. Perrin : *Géométrie algébrique. Une introduction.* Savoirs Actuels. InterEditions, Paris. CNRS Éditions, Paris, 1995.
6. P. Samuel : *Théorie algébrique des nombres.* Méthodes. Hermann, 1967.
7. J.-P. Serre : *Cours d'arithmétique.* Presses universitaires de France, 1970.
8. C. A. Weibel : *An introduction to homological algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, 1994.