Université de Lille

Master Mathématiques, 2019-20

Feuille d'exercices 3

§1. Diagrammes et suites exactes de modules

1. Exercice

Soit R un anneau. On dit qu'une suite de morphismes de R-modules

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_n} M_n$$

est *exacte* si on a $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$. (On note que cette hypothèse entraine $f_{i+1} \circ f_i = 0$.) Ainsi, si on considère le morphisme nul $0 \to M'$, qui a pour image le sous-module trivial de M', et le morphisme nul $M'' \to, 0$, qui a pour noyau le module M'' tout entier, alors une suite

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

est exacte quand $\ker(f) = 0$ (donc f est injectif), $\operatorname{im}(f) = \ker(g)$ et $\operatorname{im}(g) = M''$ (donc g est surjectif).

Un carré de morphismes de R-modules

$$\begin{tikzcd} M_{00} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "g_0"'] & M_{10} \arrow[d, "g_1"] \\ M_{01} \arrow[r, "f_1"] & M_{11} \end{tikzcd}$$

est *commutatif* si on a $f_1 \circ g_0 = g_1 \circ f_0$.

1.1) On se donne un diagramme

$$\begin{tikzcd} M_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u_0"'] & M_1 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "u_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "u_2"'] & M_3 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "u_3"'] & M_4 \arrow[d, "u_4"'] \\ N_0 \arrow[r, "g_1"] & N_1 \arrow[r, "g_2"] & N_2 \arrow[r, "g_3"] & N_3 \arrow[r, "g_4"] & N_4 \end{tikzcd}$$

constitué de carrés commutatifs (on dit que le diagramme est commutatif) et dont les lignes forment des suites exactes. On suppose que u_0 est surjectif, u_1 et u_3 sont bijectifs, u_4 est injectif. Montrer que u_2 est bijectif.

1.2) On dit qu'une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

(comme ci-dessus) est scindée quand il existe un morphisme de R-modules $s : M'' \to M$ tel que $g \circ s = id_{M''}$. Observer que l'existence d'un scindage $s : M'' \to M$ équivaut à l'existence d'un

BF, Courriel : `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

morphisme $u : M' \oplus M'' \to M$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "="] & M' \oplus M'' \arrow[r, "q"] \arrow[d, dashed, "u"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commutatif. Que peut-on conclure de la question 2.1) quant à ce morphisme u?
1.3) Montrer que les suites exactes courtes dont le R-module de droite M'' est libre de type fini sont scindées. Si on suppose également que M' est libre de type fini, alors que peut-on en conclure quant au module M?

Application : Retrouver un résultat classique concernant le rang et la dimension du noyau d'un morphisme d'espaces vectoriels $f : U \to V$ en considérant la suite

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow U \xrightarrow{f} \operatorname{im} f \longrightarrow 0.$$

1.4) Déterminer l'ensemble des suites exactes courtes de $\mathbb{Z}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

(*Remarque :* On pourra utiliser le résultat de la question suivante qui affirme que M possède 4 éléments.) Utiliser ce résultat pour donner un ou des exemples de suites exactes courtes qui ne sont pas scindées.
1.5) On se donne une suite exacte courte de $\mathbb{Z}$-modules

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

telle que M' et M'' sont finis. On veut montrer que M est également fini de cardinal $\sharp M = \sharp M' \cdot \sharp M''$: observer que les classes d'équivalences de M modulo M' sont en bijections avec les éléments de M'' et conclure.

2. Exercice

On se donne un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' & \end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Montrer que l'on a alors une suite exacte de morphismes

$$\ker(f') \dashrightarrow \ker(f) \dashrightarrow \ker(f'') \dashrightarrow \operatorname{coker}(f') \dashrightarrow \operatorname{coker}(f) \dashrightarrow \operatorname{coker}(f'')$$

qui relie les noyaux et conoyaux des morphismes verticaux de ce diagramme (lemme du serpent).

§2. Facteurs invariants et structure des $\mathbb{Z}$-modules de type fini

1. Exercice

Quels sont les facteurs invariants de la matrice

$$\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 0 & 4 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}?$$

2. Exercice

On considère le $\mathbb{Z}$-module M engendré par des éléments $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ avec les relations

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3u_1 & - & 4u_2 & + & 5u_3 & + & 3u_4 & + & 7u_5 & = & 0, \\ 3u_1 & + & 2u_2 & - & u_3 & - & 3u_4 & + & u_5 & = & 0, \\ 8u_1 & + & 2u_2 & - & 2u_3 & - & 8u_4 & + & 2u_5 & = & 0, \\ 11u_1 & - & 8u_2 & + & 9u_3 & - & 5u_4 & + & 9u_5 & = & 0. \end{array}$$

Construire une présentation par générateurs et relations réduite de M. On explicitera la relation entre les générateurs obtenus $(v_1, \ldots, v_d)$ et les éléments $(u_1, \ldots, u_5)$.

3. Exercice

Quel est le rang et quels sont les coefficients de torsion du $\mathbb{Z}$-module engendré par des éléments (u_1, u_2, u_3, u_4) avec les relations

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 9u_1 & + & 6u_2 & + & 5u_3 & + & 4u_4 & = & 0, \\ 6u_1 & + & 5u_2 & - & 3u_3 & + & 11u_4 & = & 0, \\ 3u_1 & + & 2u_2 & - & u_3 & + & 5u_4 & = & 0. \end{array}$$

4. Exercice

On considère l'application $\phi : \mathbb{Z}^5 \to \mathbb{Z}^3$ déterminée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Construire une base de $\ker \phi \subset \mathbb{Z}^5$.