Université de Lille - Sciences et Technologies
Licence Math/Physique, Semestre 3 (2018-19)
M31 - Algèbre
Devoir Surveillé, 10/1/2019
8H-11H

Documents et calculatrices interdites.

Barême indicatif : 6+5+1+4+4. Les exercices sont tous indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

1. Exercice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire associée $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, définie par $\phi(X) = AX$ pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^4$.

1.1) Calculer le polynôme caractéristique de ϕ. *Indication:* on pourra utiliser des méthodes de développement pour mener à bien ce calcul.

1.2) Déterminer les valeurs propres de ϕ.

1.3) Donner une base de chaque espace propre associé à ϕ.

1.4) Prouver que ϕ est diagonalisable et expliciter la matrice de ϕ dans sa base de vecteurs propres.

2. Exercice

On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire associée $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $\psi(X) = BX$ pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^3$.

2.1) Déterminer le polynôme caractéristique de ψ.

2.2) Prouver que ψ vérifie la relation $(\psi + id)^2 \circ (\psi - id) = 0$.

2.3) On pose $F = \ker((\psi + id)^2)$ et $G = \ker(\psi - id)$. On a $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. Comment se justifie cette relation?

2.4) Expliciter une base de F. On notera cette base $\underline{v} = (v_1, v_2)$ en observant que $\dim(F) = 2$.

2.5) Expliciter une base de G. On notera cette base $\underline{w} = (w_1)$ en observant que $\dim(G) = 1$.

2.6) Soit $\underline{u} = (v_1, v_2, w_1)$ la base de $\mathbb{R}^3$ que l'on obtient en concaténant les bases de F et G déterminées dans les questions précédentes et en utilisant la relation $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. Donner l'expression de la matrice de $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dans cette base $\underline{u} = (v_1, v_2, w_1)$. On note C cette matrice, et on pose

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = C - D,$$

de sorte que l'on a $C = D + N$.

2.7) Prouver que N est nilpotente et commute avec D. Puis donner l'expression de $C^k = (D+N)^k$, la matrice de $\psi^k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dans la base $\underline{u} = (v_1, v_2, w_1)$, pour un exposant $k \in \mathbb{N}$.

— Suite au verso —

3. Quiz

Soit $\phi_U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme associé à la matrice

$$U = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expliciter le polynôme caractéristique de ϕ_U et déterminer les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles cet endomorphisme ϕ_U est diagonalisable.

4. Exercice

Dans cet exercice, on dit par abus de langage qu'une matrice carrée est diagonalisable lorsque l'application linéaire associée l'est. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1) Expliciter un polynôme de degré 3, soit $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tel que $P(J) = 0$. *Indication:* On pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton ou calculer les puissances J^k, $k = 0, 1, 2, 3$, pour trouver directement une telle équation.

4.2) On considère la matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les puissances M^k, $k = 0, 1, 2, 3$, observer que M annule un polynôme de degré 3 que l'on explicitera, puis montrer en utilisant cette observation que M est diagonalisable lorsque l'on travaille sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ des nombres complexes.

4.3) Déterminer les valeurs propres de M. *Indication:* On argumentera à partir des résultats de la question précédente plutôt que d'effectuer le calcul (fastidieux) du polynôme caractéristique de M.

5. Question(s) de compréhension du cours

Le but de cet exercice est de mettre en application la démonstration du lemme des noyaux dans un cas particulier. On se donne un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, soit E, et un endomorphisme $\phi : E \to E$ tel que l'on a la relation $\phi^3 + \phi = 0$ dans l'espace des endomorphismes de E.

5.1) On considère les polynômes $P(x) = x^2 + 1$ et $Q(x) = x$. Prouver que l'on a la relation $P(\phi) \circ Q(\phi) = Q(\phi) \circ P(\phi) = 0$.

5.2) Prouver que $pgcd(P(x), Q(x)) = 1$ en explicitant un couple de polynôme $(A(x), B(x))$ tel que l'on a la relation de Bezout $A(x)P(x) + B(x)P(x) = 1$. Puis justifier que l'on a une relation $A(\phi) \circ P(\phi) + B(\phi) \circ Q(\phi) = id_E$ dans l'espace des endomorphismes de E, où on note id_E l'endomorphisme identité.

5.3) Soit $u \in E$ un vecteur quelconque. On pose $v = A(\phi) \circ P(\phi)(u)$ et $w = B(\phi) \circ Q(\phi)(u)$. Montrer que l'on a la décomposition $u = v + w$. Puis montrer que l'on a $v \in \ker(Q(\phi))$ et $w \in \ker(P(\phi))$ pour en déduire que l'on a la relation $E = \ker(P(\phi)) + \ker(Q(\phi))$.

5.4) Montrer maintenant que l'on a $u \in \ker(P(\phi)) \cap \ker(Q(\phi)) \Rightarrow u = 0_E$ en utilisant la décomposition de la formule précédente. Conclure que les espaces $\ker(P(\phi))$ et $\ker(Q(\phi))$ sont en somme directe et que l'on a $\ker(P(\phi)) \oplus \ker(Q(\phi)) = E$.

— Fin du devoir —