Université de Lille - Sciences et Technologies
Licence Math/Physique, Semestre 3 (2018-19)
M31 - Algèbre
Devoir Surveillé – Corrigé, 10/1/2019
8H-11H

Documents et calculatrices interdites.

Barême indicatif : 6+5+1+4+4. Les exercices sont tous indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

1. Exercice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire associée $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, définie par $\phi(X) = AX$ pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^4$.

1.1) *Calculer le polynôme caractéristique de ϕ. Indication: on utilisera des méthodes de développement pour mener à bien ce calcul.*

On calcule $P_\phi(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda I)$. On utilise un développement par rapport à la première colonne :

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & -1 \end{vmatrix}.$$

On applique ensuite la règle de calcul des déterminants 3×3 pour calculer les déterminants mineurs de cette somme :

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I) = (-\lambda)\cdot(-\lambda^3 + 0 + 0 - 0 - 0 + 2\lambda) + 2\cdot(0 + 0 + 2 - 0 - x^2 - 0) - (0 + x^2 + 0 - 0 - 0 - 0).$$

On a donc :

$$P_\phi(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4.$$

1.2) *Déterminer les valeurs propres de ϕ.*

On utilise que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. Si on pose $T = \lambda^2$, on a $T^2 - 5T + 4 = (T-1)(T-4)$ (factorisation d'un trinôme), et donc :

$$P_\phi(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

On en conclut que les valeurs propres de ϕ sont :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = -2.$$

1.3) *Donner une base de chaque espace propre associé à ϕ.*

On détermine $E_1 = \ker(\phi - 1\,Id)$. On a :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(\phi - Id) \Leftrightarrow (A - I_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Leftrightarrow (*) \quad \begin{cases} -x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ & -x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 0 \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot :

$$(*) \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} -x_1 & & +x_3 & +x_4 & =0 & L_1 : \text{ligne pivot} \\ & -x_2 & & +2x_4 & =0 & \\ & & x_3 & +2x_4 & =0 & L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \\ & x_2 & +x_3 & & =0 & L_4 \leftarrow L_4+L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} -x_1 & & +x_3 & +x_4 & =0 & \\ & -x_2 & & +2x_4 & =0 & L_2 : \text{ligne pivot} \\ & & x_3 & +2x_4 & =0 & \\ & & x_3 & +2x_4 & =0 & L_4 \leftarrow L_4+L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} -x_1 & & +x_3 & +x_4 & =0 & \\ & -x_2 & & +2x_4 & =0 & \\ & & x_3 & +2x_4 & =0 & L_3 : \text{ligne pivot} \\ & & & 0 & =0 & L_4 \leftarrow L_4-L_3 \end{array}\right.$$

On remonte les équations pour déterminer la forme générale des solutions :

$$\begin{cases} L_3 \Rightarrow x_3 = -2x_4 \\ L_2 \Rightarrow x_2 = 2x_4 \\ L_1 \Rightarrow x_1 = x_3 + x_4 = -x_4 \end{cases}$$

On a donc :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(\phi - Id) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -x_4 \\ 2x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pour un paramètre $x_4 \in \mathbb{R}$. On en conclut :

$$E_1 = \ker(\phi - Id) = \mathbb{R}u_1 \quad \text{avec} \quad u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(vecteur définissant la base de } E_1\text{).}$$

On applique la même méthode pour déterminer $E_{-1} = \ker(\phi + 1\,Id)$. On a :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(\phi + Id) \Leftrightarrow (A + I_4)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Leftrightarrow (*) \quad \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & & +x_3 & +x_4 & =0 \\ & x_2 & & +2x_4 & =0 \\ 2x_1 & & +x_3 & & =0 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & =0 \end{array}\right.$$

On applique la méthode du pivot :

$$(*) \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} x_1 & & +x_3 & +x_4 & =0 & L_1 : \text{ligne pivot} \\ & x_2 & & +2x_4 & =0 & \\ & & -x_3 & -2x_4 & =0 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \\ & x_2 & -x_3 & & =0 & L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} x_1 & & +x_3 & +x_4 & =0 & \\ & x_2 & & +2x_4 & =0 & L_2 : \text{ligne pivot} \\ & & -x_3 & -2x_4 & =0 & \\ & & -x_3 & -2x_4 & =0 & L_4 \leftarrow L_4-L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} x_1 & & +x_3 & +x_4 & =0 & \\ & x_2 & & +2x_4 & =0 & \\ & & -x_3 & -2x_4 & =0 & L_3 : \text{ligne pivot} \\ & & & 0 & =0 & L_4 \leftarrow L_4-L_3 \end{array}\right.$$

On remonte les équations pour déterminer la forme générale des solutions :

$$\begin{cases} L_3 \Rightarrow x_3 = -2x_4 \\ L_2 \Rightarrow x_2 = -2x_4 \\ L_1 \Rightarrow x_1 = -x_3 - x_4 = x_4 \end{cases}$$

On a donc :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(\phi + Id) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_4 \\ -2x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pour un paramètre $x_4 \in \mathbb{R}$. On en conclut :

$$E_{-1} = \ker(\phi + Id) = \mathbb{R}u_2 \quad \text{avec} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(vecteur définissant la base de } E_{-1}\text{)}.$$

On détermine $E_2 = \ker(\phi - 2\,Id)$. On a :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(\phi - 2\,Id) \Leftrightarrow (A - 2I_4)X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Leftrightarrow (*) \quad \begin{cases} -2x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ & -2x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & & -2x_3 & & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & -2x_4 & = 0 \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot :

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & & -2x_4 & = 0 & \quad L_1 \leftrightarrow L_4 \\ & -2x_2 & & +2x_4 & = 0 & \\ 2x_1 & & -2x_3 & & = 0 & \\ -2x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 & \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & & -2x_4 & = 0 & \quad L_1 : \text{ligne pivot} \\ & -2x_2 & & +2x_4 & = 0 & \\ & -2x_2 & -2x_3 & +4x_4 & = 0 & \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ & 2x_2 & +x_3 & -3x_4 & = 0 & \quad L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & & -2x_4 & = 0 & \\ & -2x_2 & & +2x_4 & = 0 & \quad L_2 : \text{ligne pivot} \\ & & -2x_3 & +2x_4 & = 0 & \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ & & x_3 & -x_4 & = 0 & \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & & -2x_4 & = 0 & \\ & -2x_2 & & +2x_4 & = 0 & \\ & & -2x_3 & +2x_4 & = 0 & \quad L_3 : \text{ligne pivot} \\ & & & 0 & = 0 & \quad L_4 \leftarrow L_4 + 1/2 \cdot L_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

On remonte les équations pour déterminer la forme générale des solutions :

$$\begin{cases} L_3 & \Rightarrow x_3 = x_4 \\ L_2 & \Rightarrow x_2 = x_4 \\ L_1 & \Rightarrow x_1 = -x_2 + 2x_4 = x_4 \end{cases}$$

On a donc :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(\phi - 2\,Id) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pour un paramètre $x_4 \in \mathbb{R}$. On en conclut :

$$E_2 = \ker(\phi - 2\,Id) = \mathbb{R}u_3 \quad \text{avec} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(vecteur définissant la base de } E_2\text{)}.$$

On applique la même méthode pour déterminer $E_{-2} = \ker(\phi + 2\,Id)$. On a :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(\phi + 2\,Id) \Leftrightarrow (A + 2I_4)X &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4} \\ \Leftrightarrow (*) & \left\{ \begin{array}{lllll} 2x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ & 2x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & & +2x_3 & & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On applique la méthode du pivot :

$$\begin{aligned} (*) \quad & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ & 2x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & & +2x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_4 \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ & 2x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ & -2x_2 & +2x_3 & -4x_4 & = 0 \\ & -2x_2 & +x_3 & -3x_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} L_1 : \text{ligne pivot} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ & 2x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ & & 2x_3 & -2x_4 & = 0 \\ & & x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 : \text{ligne pivot} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ & 2x_2 & & +2x_4 & = 0 \\ & & 2x_3 & -2x_4 & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 : \text{ligne pivot} \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1/2 \cdot L_3 \end{array} \end{aligned}$$

On remonte les équations pour déterminer la forme générale des solutions :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_3 & \Rightarrow x_3 = x_4 \\ L_2 & \Rightarrow x_2 = -x_4 \\ L_1 & \Rightarrow x_1 = -x_2 - 2x_4 = -x_4 \end{array} \right.$$

On a donc :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(\phi - 2\,Id) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pour un paramètre $x_4 \in \mathbb{R}$. On en conclut :

$$E_{-2} = \ker(\phi + 2\,Id) = \mathbb{R}u_4 \quad \text{avec} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(vecteur définissant la base de } E_{-2}\text{).}$$

Remarque: Une autre technique pour déterminer ces noyaux consiste à appliquer la méthode d'échelonnement selon les colonnes.

On considère par exemple le cas de $E_1 = \ker(\phi - i\,Id)$. On note $\phi_1 = \phi - Id$ par commodité. On obtient :

$$\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi_1(e_1) & \phi_1(e_2) & \phi_1(e_3) & \phi_1(e_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}}_{A-I_4} \mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi_1(e'_1) & \phi_1(e'_2) & \phi_1(e'_3) & \phi_1(e'_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_1 : \text{colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_1 \end{array} \quad (1)$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi_1(e''_1) & \phi_1(e''_2) & \phi_1(e''_3) & \phi_1(e''_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 : \text{colonne pivot} \\ C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2 \end{array} \quad (2)$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi_1(e'''_1) & \phi_1(e'''_2) & \phi_1(e'''_3) & \phi_1(e'''_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_3 : \text{colonne pivot} \\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3 \end{array} \quad (3)$$

et :

$$\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{I_4} \mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 & e'_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_1 : \text{colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_1 \end{array} \quad (1)$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e''_1 & e''_2 & e''_3 & e''_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 : \text{colonne pivot} \\ C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2 \end{array} \quad (2)$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e'''_1 & e'''_2 & e'''_3 & e'''_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_3 : \text{colonne pivot} \\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3 \end{array} \quad (3)$$

On conclut de l'expression échelonnée de la matrice de $\phi_1 = \phi - Id$ dans la base $(e'''_1, e'''_2, e'''_3, e'''_4)$ au départ que l'on a :

$$E_1 = \ker(\phi - Id) = \mathbb{R}e'''_4 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve le résultat obtenu par l'autre méthode.

On considère ensuite le cas de $E_{-1} = \ker(\phi + Id)$. On note $\phi_{-1} = \phi + Id$ par commodité. On obtient :

$$\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi_{-1}(e_1) & \phi_{-1}(e_2) & \phi_{-1}(e_3) & \phi_{-1}(e_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{A+I_4} \mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi_{-1}(e'_1) & \phi_{-1}(e'_2) & \phi_{-1}(e'_3) & \phi_{-1}(e'_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_1 \text{ : colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array} \tag{1}$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi_{-1}(e''_1) & \phi_{-1}(e''_2) & \phi_{-1}(e''_3) & \phi_{-1}(e''_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 \text{ : colonne pivot} \\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2 \end{array} \tag{2}$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi_{-1}(e'''_1) & \phi_{-1}(e'''_2) & \phi_{-1}(e'''_3) & \phi_{-1}(e'''_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_3 \text{ : colonne pivot} \\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3 \end{array} \tag{3}$$

et :

$$\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{I_4} \mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 & e'_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_1 \text{ : colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array} \tag{1}$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e''_1 & e''_2 & e''_3 & e''_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 \text{ : colonne pivot} \\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2 \end{array} \tag{2}$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e'''_1 & e'''_2 & e'''_3 & e'''_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_3 \text{ : colonne pivot} \\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3 \end{array} \tag{3}$$

On conclut de l'expression échelonnée de la matrice de $\phi_{-1} = \phi + Id$ dans la base $(e'''_1, e'''_2, e'''_3, e'''_4)$ au départ que l'on a :

$$E_{-1} = \ker(\phi + Id) = \mathbb{R}e'''_4 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve le résultat obtenu par l'autre méthode.

On considère le cas de $E_2 = \ker(\phi - 2\,Id)$. On note $\phi_2 = \phi - 2\,Id$. On échelonne la matrice de ϕ_2 par la droite, ce qui sera plus simple (plus économe en fractions ou en opérations d'échanges). On obtient :

$$\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi_2(e_1) & \phi_2(e_2) & \phi_2(e_3) & \phi_2(e_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array}}_{A-2I_4} \mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi_2(e'_1) & \phi_2(e'_2) & \phi_2(e'_3) & \phi_2(e'_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_4 \text{ : colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_4 \\ C_1 \leftarrow C_1 + 2C_4 \end{array} \tag{1}$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \phi_2(e_1'') & \phi_2(e_2'') & \phi_2(e_3'') & \phi_2(e_4'') \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} C_3 : \text{colonne pivot} \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3 \end{matrix} \qquad (2)$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \phi_2(e_1''') & \phi_2(e_2''') & \phi_2(e_3''') & \phi_2(e_4''') \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} C_2 : \text{colonne pivot} \\ C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \end{matrix} \qquad (3)$$

et :

$$\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{I_4} \mapsto \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1' & e_2' & e_3' & e_4' \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} C_4 : \text{colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_4 \\ C_1 \leftarrow C_1 + 2C_4 \end{matrix} \qquad (1)$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1'' & e_2'' & e_3'' & e_4'' \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} C_3 : \text{colonne pivot} \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3 \end{matrix} \qquad (2)$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1''' & e_2''' & e_3''' & e_4''' \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} C_2 : \text{colonne pivot} \\ C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \end{matrix} \qquad (3)$$

On conclut de l'expression échelonnée de la matrice de $\phi_2 = \phi - 2\,Id$ dans la base $(e_1''', e_2''', e_3''', e_4''')$ au départ que l'on a :

$$E_2 = \ker(\phi - 2\,Id) = \mathbb{R}e_1''' = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve le résultat obtenu par l'autre méthode.

On considère ensuite le cas de $E_{-2} = \ker(\phi + 2\,Id)$. On note $\phi_{-2} = \phi - 2\,Id$. On échelonne encore la matrice de ϕ_{-2} par la droite, ce qui sera plus simple (plus économe en fractions ou en opérations d'échanges). On obtient :

$$\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \phi_{-2}(e_1) & \phi_{-2}(e_2) & \phi_{-2}(e_3) & \phi_{-2}(e_4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}}_{A-2I_4} \mapsto \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \phi_{-2}(e_1') & \phi_{-2}(e_2') & \phi_{-2}(e_3') & \phi_{-2}(e_4') \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} C_4 : \text{colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_4 \\ C_1 \leftarrow C_1 - 2C_4 \end{matrix} \qquad (1)$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \phi_{-2}(e_1'') & \phi_{-2}(e_2'') & \phi_{-2}(e_3'') & \phi_{-2}(e_4'') \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} C_3 : \text{colonne pivot} \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\ C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3 \end{matrix} \qquad (2)$$

$$\mapsto \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phi_{-2}(e_1''') & \phi_{-2}(e_2''') & \phi_{-2}(e_3''') & \phi_{-2}(e_4''') \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 : \text{colonne pivot} \\ C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \end{array} \quad (3)$$

et :

$$\underbrace{\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{I_4} \mapsto \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1' & e_2' & e_3' & e_4' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_4 : \text{colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_4 \\ C_1 \leftarrow C_1 - 2C_4 \end{array} \quad (1)$$

$$\mapsto \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1'' & e_2'' & e_3'' & e_4'' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_3 : \text{colonne pivot} \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\ C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3 \end{array} \quad (2)$$

$$\mapsto \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1''' & e_2''' & e_3''' & e_4''' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 : \text{colonne pivot} \\ C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \end{array} \quad (3)$$

On conclut de l'expression échelonnée de la matrice de $\phi_{-2} = \phi + 2\,Id$ dans la base $(e_1''', e_2''', e_3''', e_4''')$ au départ que l'on a :

$$E_{-2} = \ker(\phi + 2\,Id) = \mathbb{R}e_1''' = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve un résultat équivalent au résultat obtenu par l'autre méthode.

1.4) *Prouver que ϕ est diagonalisable et expliciter la matrice de ϕ dans sa base de vecteurs propres.*

On a $\dim(E_1 \oplus E_{-1} \oplus E_2 \oplus E_{-2}) = \dim(E_1) + \dim(E_{-1}) + \dim(E_2) + \dim(E_{-2}) = 4 \Rightarrow E_1 \oplus E_{-1} \oplus E_2 \oplus E_{-2} = \mathbb{R}^4$, ce qui prouve que ϕ est diagonalisable, et la matrice de ϕ dans la base de vecteurs propres $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ s'écrit :

$$M_{\underline{u}}^{\underline{u}}(\phi) = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phi(u_1) & \phi(u_2) & \phi(u_3) & \phi(u_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Remarque : On peut aussi conclure que ϕ est diagonalisable sans avoir calculé les espaces propres, en invoquant le théorème du cours qui affirme qu'un endomorphisme est diagonalisable dès lors que son polynôme caractéristique est scindé et que toutes ses racines sont simples.

2. Exercice

On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire associée $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $\psi(X) = BX$ pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^3$.

2.1) *Déterminer le polynôme caractéristique de ψ.*

On a

$$P_\psi(\lambda) = \mathrm{Det}(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)$$
$$\Rightarrow P_\psi(\lambda) = (-1-\lambda)^2(1-\lambda)$$

(déterminant d'une matrice triangulaire).

2.2) *Prouver que ψ vérifie la relation $(\psi + Id)^2 \circ (\psi - Id) = 0$.*

On a d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$P_\psi(\psi) = (-Id - \psi)^2 \circ (Id - \psi) = 0 \Rightarrow (-1)^3(\psi + Id)^2 \circ (\psi - Id) = 0 \Leftrightarrow (\psi + Id)^2 \circ (\psi - Id) = 0$$

d'où le résultat.

Remarque : On peut aussi vérifier directement que $(B + I_3)^2(B - I_3) = 0$ pour prouver la relation de la question.

2.3) *On pose $F = \ker((\psi + Id)^2)$ et $G = \ker(\psi - Id)$. On a $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. Comment se justifie cette relation?*

On a $pgcd((x+1)^2, (x-1)) = 1$, ce qui d'après le théorème des noyaux entraîne que la somme de ces espaces est directe et on a de plus

$$\ker((\psi + Id)^2) \oplus \ker(\psi - Id) = \ker((\psi + Id)^2 \circ (\psi - Id)) = \ker(0) = \mathbb{R}^3$$

avec le résultat de la question précédente.

Remarque : Les espaces $F = \ker((\psi + Id)^2)$ et $G = \ker(\psi - Id)$ forment les espaces caractéristiques de ψ, d'après le calcul du polynôme caractéristique de ψ, dans la question (2.1), et on peut aussi invoquer les résultats du cours qui affirment que ces espaces sont en somme directe et ont l'espace tout entier $\mathbb{R}^3$ pour somme, pour répondre à cette question. L'autre façon de prouver le résultat $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ consiste à déterminer des bases de F et de G (on résoud donc les questions qui suivent en premier) et à vérifier que la concaténation de ces bases fournit une base de $\mathbb{R}^3$.

2.4) *Expliciter une base de F. On notera cette base (v_1, v_2) en observant que $\dim(F) = 2$.*

On calcule $(B + I_3)^2$:

$$(B + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker((\psi - Id)^2) \Leftrightarrow (B - I_3)^2 X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_2 & -4x_3 & = 0 \\ 4x_2 & -4x_3 & = 0 \\ & 0 & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x_2 = x_3$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pour des paramètres $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$. On en conclut :

$$F = \ker((\phi + Id)^2) = \mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2 \quad \text{avec} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(vecteurs définissant la base de } F\text{).}$$

2.5) *Expliciter une base de G. On notera cette base $\underline{w} = (w_1)$ en observant que $\dim(G) = 1$.*

On a :

$$(B - I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(\psi - Id) \Leftrightarrow (B + I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} -2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 0 \\ & & -2x_3 & = 0 \\ & & -2x_3 & = 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_3 & = 0 \\ x_1 & = x_2 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pour un paramètre $x_2 \in \mathbb{R}$. On en conclut :

$$G = \ker(\phi - Id) = \mathbb{R}w_1 \quad \text{avec} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(vecteur définissant la base de } G\text{)}.$$

2.6) *Soit $\underline{u} = (v_1, v_2, w_1)$ la base de $\mathbb{R}^3$ que l'on obtient en concaténant les bases de F et G déterminées dans les questions précédentes et en utilisant la relation $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. Donner l'expression de la matrice de $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dans cette base $\underline{u} = (v_1, v_2, w_1)$. On note C cette matrice, et on pose*

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = C - D,$$

de sorte que l'on a $C = D + N$.

On calcule :

$$Bv_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi(v_1) = -v_1$$
$$Bv_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi(v_2) = 4v_1 - v_2$$
$$Bw_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi(w_1) = w_1.$$

On a donc :

$$C = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ w_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \psi(v_1) & \psi(v_2) & \psi(w_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2.7) *Prouver que N est nilpotente et commute avec D. Puis donner l'expression de $C^k = (D + N)^k$, la matrice de $\psi^k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dans la base $\underline{u} = (u_1, u_2, w_1)$, pour un exposant $k \in \mathbb{N}$.*

On a :

$$N = C - D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve immédiatement :

$$N^2 = 0, \quad \text{et} \quad DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme D et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme qui donne :

$$\begin{aligned} C^k &= (D+N)^k = D^k + kD^{k-1}N + \binom{k}{2} D^{k-2}N^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} DN^{k-1} + N^k \\ \Rightarrow C^k &= D^k + kD^{k-1}N \end{aligned}$$

puisque $N^2 = 0 \Rightarrow N^2 = N^3 = \cdots = N^k = 0$. On a ensuite :

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(expression des puissances d'une matrice diagonale). On obtient finalement :

$$\begin{aligned} C^k &= \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} (-1)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^k & 4k(-1)^{k-1} & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. Quiz

Soit $\phi_U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme associé à la matrice

$$U = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expliciter le polynôme caractéristique de ϕ_U et déterminer les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles cet endomorphisme ϕ_U est diagonalisable.

Le polynôme caractéristique de ϕ_U s'écrit :

$$P_U(\lambda) = \mathrm{Det}(U - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(1-\lambda)$$

(déterminant d'une matrice triangulaire). Les valeurs propres de ϕ_U (éventuellement comptées avec multiplicités) sont donc $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = 1$.

Lorsque $a \neq 1$, on obtient que le polynôme caractéristique de ϕ_U est scindé à racines simples, et d'après un théorème du cours, on est assuré que ϕ_U est diagonalisable dans ce cas. Lorsque $a = 1$, on obtient que ϕ_U n'a que $\lambda = 1$ comme valeur propre double. Dans ce cas, on a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \ker(\phi_U - Id_{\mathbb{R}^2}) \Leftrightarrow (U - I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 = 0,$$

soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \ker(\phi_U - Id_{\mathbb{R}^2}) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pour un paramètre $x_1 \in \mathbb{R}$. On en conclut $\dim \ker(\phi_U - Id_{\mathbb{R}^2}) = 1$, donc $\ker(\phi_U - Id_{\mathbb{R}^2}) \subsetneqq \mathbb{R}^2$ ce qui prouve que ϕ_U n'est pas diagonalisable dans le cas $a = 1$.

En résumé, on obtient que ϕ_U est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

4. Quiz

Dans cet exercice, on dit par abus de langage qu'une matrice carrée est diagonalisable lorsque l'application linéaire associée l'est. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1) *Expliciter un polynôme de degré 3, soit $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tel que $P(J) = 0$. Indication: On pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton ou calculer les puissances J^k, $k = 0, 1, 2, 3$, pour trouver directement une telle équation.*

On calcule le polynôme caractérique de J pour appliquer la suggestion de l'énoncé. On a :

$$P_J(\lambda) = \mathrm{Det}(J - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 - 1 - \lambda - \lambda - \lambda = -\lambda^3 - 3\lambda$$

d'après la formule de calcul du déterminant d'une matrice 3×3. D'où :

$$P_J(J) = 0 \Rightarrow -J^3 - 3J = 0$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

4.2) *On considère la matrice par blocs*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les puissances M^k, $k = 0, 1, 2, 3$, observer que M annule un polynôme de degré 3 que l'on explicitera, puis montrer en utilisant cette observation que M est diagonalisable lorsque l'on travaille sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ des nombres complexes.

D'après les calculs des produits de matrices par blocs, on a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & J^3 \\ J^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite :

$$-M^3 - 3M = \begin{pmatrix} 0 & -J^3 - 3J \\ -J^3 - 3J & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'après le résultat de la question précente. Donc, la matrice M annule le polynôme $p(x) = -x^3 - 3x$.

On a $p(x) = -x(x^2 + 3) = -x(x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3})$. On obtient donc que M annule un polynôme scindé à racines simples, ce qui implique que M est diagonalisable d'après un théorème du cours.

4.3) *Déterminer les valeurs propres de M. Indication: On argumentera à partir des résultats de la question précédente plutôt que d'effectuer le calcul (fastidieux) du polynôme caractéristique de M.*

Comme M annule le polynôme $p(x) = -x(x^2 + 3) = -x(x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3})$, on a en fait :

$$\ker(M) \oplus \ker(M - i\sqrt{3}I_6) \oplus \ker(M + i\sqrt{3}I_6) = \mathbb{C}^6$$

d'après le lemme des noyaux. On a donc que les valeurs propres de M vérifient $\lambda \in \{0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$.

On obtient plus précisément que l'ensemble des valeurs propres de M est le sous-ensemble des scalaires $\lambda \in \{0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$ tels que $\ker(M - \lambda I_6) \neq \{0_{\mathbb{C}^6}\}$. On voit rapidement que :

$$JX_0 = 0_{\mathbb{C}^3} \quad \text{pour} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ JX_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'après les formules de multiplication des matrices par blocs. Donc $\ker(M) \neq 0$. Comme $M \neq 0$, on a $\ker(M) \subsetneq \mathbb{C}^6$, et il est exclus d'avoir $\ker(M - i\sqrt{3}I_6)$ et $\ker(M + i\sqrt{3}I_6)$ nuls tout deux. On a vu en cours que pour une matrice à coefficients réels, les espaces associés à des valeurs propres complexes conjuguées ont même dimension. On a donc $\dim \ker(M - i\sqrt{3}I_6) = \dim \ker(M + i\sqrt{3}I_6)$ dans notre cas. On en conclut que les espaces $\ker(M - i\sqrt{3}I_6)$ et $\ker(M + i\sqrt{3}I_6)$ sont tout deux non-nuls et donc que $\lambda = i\sqrt{3}$ et $\lambda = -i\sqrt{3}$ sont toutes deux valeurs propres de M.

On obtient au final que l'ensemble des valeurs propres de M est exactement $\{0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$.

Remarque: Ce n'est pas l'approche proposée dans l'énoncé, mais on pourrait en fait montrer que l'on a :

$$\begin{aligned} &\ker(M) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} X_0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ X_0 \end{pmatrix}, \\ &\ker(M - i\sqrt{3}) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ -\bar{X}_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \ker(M + i\sqrt{3}) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où X_0 est le vecteur considéré ci-dessus et X_1 est un vecteur tel que $JX_1 = i\sqrt{3}X_1$ (un vecteur propre de J pour $\lambda = i\sqrt{3}$).

5. Question(s) de compréhension du cours

Le but de cet exercice est de mettre en application la démonstration du lemme des noyaux dans un cas particulier. On se donne un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, soit E, et un endomorphisme $\phi : E \to E$ tel que l'on a la relation $\phi^3 + \phi = 0$ dans l'espace des endomorphismes de E.

5.1) *On considère les polynômes $P(x) = x^2 + 1$ et $Q(x) = x$. Prouver que l'on a la relation $P(\phi) \circ Q(\phi) = Q(\phi) \circ P(\phi) = 0$.*

On a $P(\phi) \circ Q(\phi) = Q(\phi) \circ P(\phi) = (PQ)(\phi)$, où on considère le polynôme produit $(PQ)(x) = P(x)Q(x)$, et $P(x)Q(x) = (x^2 + 1)x = x^3 + x \Rightarrow (PQ)(\phi) = \phi^3 + \phi = 0$ par hypothèse.

5.2) *Prouver que pgcd$(P(x), Q(x)) = 1$ en explicitant un couple de polynôme $(A(x), B(x))$ tel que l'on a la relation de Bezout $A(x)P(x) + B(x)Q(x) = 1$. Puis justifier que l'on a une relation $A(\phi) \circ P(\phi) + B(\phi) \circ Q(\phi) = Id_E$ dans l'espace des endomorphismes de E, où on note Id_E l'endomorphisme identité.*

On a

$$x^2 + 1 = x \cdot x + 1 \Leftrightarrow \underbrace{1}_{=A(x)} \cdot \underbrace{(x^2 + 1)}_{=P(x)} + \underbrace{(-x)}_{=B(x)} \cdot \underbrace{x}_{=Q(x)} = 1,$$

ce qui donne une relation de Bézout en prenant $A(x) = 1$ et $B(x) = -x$. Si on applique cette identité de polynômes à ϕ, on obtient :

$$\underbrace{Id_E}_{=A(\phi)} \circ \underbrace{(\phi^2 + 1)}_{=P(\phi)} + \underbrace{(-\phi)}_{=B(\phi)} \circ \underbrace{\phi}_{=Q(\phi)} = Id_E$$

(on remplace x par ϕ en faisant apparaître le morphisme identité dans les termes constants).

5.3) *Soit $u \in E$ un vecteur quelconque. On pose $v = A(\phi) \circ P(\phi)(u)$ et $w = B(\phi) \circ Q(\phi)(u)$. Montrer que l'on a la décomposition $u = v + w$. Puis montrer que l'on a $v \in \ker(Q(\phi))$ et $w \in \ker(P(\phi))$ pour en déduire que l'on a la relation $E = \ker(P(\phi)) + \ker(Q(\phi))$.*

On applique l'identité d'endomorphisme obtenue dans la question précédente au vecteur u. On obtient :

$$\underbrace{A(\phi) \circ P(\phi)(u)}_{=v} + \underbrace{B(\phi) \circ Q(\phi)(u)}_{=w} = Id_E(u) = u,$$

ce qui donne la relation voulue $v + w = u$.

On a ensuite :

$$Q(\phi)(A(\phi) \circ P(\phi)(u)) = Q(\phi) \circ A(\phi) \circ P(\phi)(u) = A(\phi) \circ P(\phi) \circ Q(\phi)(u),$$

puisque les polynômes en ϕ définissent des endomorphismes qui commutent, puis :

$$A(\phi) \circ P(\phi) \circ Q(\phi)(u) = A(\phi)(0_E) = 0_E$$

puisque l'on a vu que $P(\phi) \circ Q(\phi)$ est l'endomorphisme nul. D'où la relation $v = A(\phi) \circ P(\phi)(u) \in \ker(Q(\phi))$.

On a de même :

$$P(\phi)(B(\phi) \circ Q(\phi)(u)) = P(\phi) \circ B(\phi) \circ Q(\phi)(u) = B(\phi) \circ P(\phi) \circ Q(\phi)(u),$$

et :

$$B(\phi) \circ P(\phi) \circ Q(\phi)(u) = B(\phi)(0_E) = 0_E,$$

d'où la relation $w = B(\phi) \circ Q(\phi)(u) \in \ker(P(\phi))$.

La formule $u = v + w$ donne donc une décomposition de u en un vecteur de $\ker(Q(\phi))$ plus un vecteur de $\ker(P(\phi))$, ce qui montre que l'on a $u \in \ker(P(\phi)) + \ker(Q(\phi))$. Comme ceci est valable pour tout vecteur $u \in E$, on en conclut que l'on a $u = \ker(P(\phi)) + \ker(Q(\phi))$.

5.4) *Montrer maintenant que l'on a $u \in \ker(P(\phi)) \cap \ker(Q(\phi)) \Rightarrow u = 0_E$ en utilisant la décomposition de la formule précédente. Conclure que les espaces $\ker(P(\phi))$ et $\ker(Q(\phi))$ sont en somme directe et que l'on a $\ker(P(\phi)) \oplus \ker(Q(\phi)) = E$.*

Si $u \in \ker(P(\phi)) \cap \ker(Q(\phi)) \Rightarrow u = 0_E$, alors dans la décomposition de la question précédente $u = v + w$, on a

$$v = A(\phi) \circ P(\phi)(u) = A(\phi)(0_E) = 0_E \quad \text{et} \quad w = B(\phi) \circ Q(\phi)(u) = B(\phi)(0_E) = 0_E,$$

d'où $u = 0_E + 0_E = 0_E$. On en déduit que l'on a la relation $\ker(P(\phi)) \cap \ker(Q(\phi)) = \{0_E\}$ qui montre que les espaces $\ker(P(\phi))$ et $\ker(Q(\phi))$ sont en somme directe. On en conclut que l'on a :

$$\ker(\underbrace{\phi^2 + 1}_{=P(\phi)}) \oplus \ker(\underbrace{-\phi}_{=Q(\phi)}) = E.$$

— Fin du devoir —