Université de Lille
Licence Math/Physique, Semestre 3 (2018-19)
M31 - Algèbre
Devoir Surveillé, 6/11/2018
10H30-12H30

Documents et calculatrices interdites.

Barême indicatif : 5+6+1+4+4. Les exercices sont tous indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

1. Exercice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire associée $\phi = \phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $\phi(X) = AX$.
1.1) Déterminer le polynôme caractéristique $P_\phi(\lambda) = \mathrm{Det}(\phi - \lambda\, id)$ ainsi que les valeurs propres de ϕ.
1.2) Expliciter une base de chaque espace propre de ϕ.
1.3) Prouver que ϕ est diagonalisable, et expliciter la matrice de ϕ dans la base de vecteurs propres obtenue.

2. Exercice

On considère le déterminant $n \times n$ tel que :

$$\Delta_n = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} s+t & st & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & s+t & st & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & st & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & s+t & st \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & s+t \end{pmatrix},$$

avec des coefficients $s+t$ sur la diagonale, des coefficients 1 sur la diagonale "en dessous", des coefficients st sur la diagonale "au dessus", et des 0 partout ailleurs, pour des paramètres $s, t \in \mathbb{Q}$ tels que $s \neq t$.
2.1) Montrer en utilisant des méthodes de développement que l'on a la relation

$$\Delta_n = (s+t)\Delta_{n-1} - st\Delta_{n-2}$$

pour tout entier $n \geq 3$.
2.2) Déterminer Δ_1 et Δ_2 en fonction de s et t, puis montrer en utilisant un argument de récurrence que l'on a la formule

$$\Delta_n = \frac{s^{n+1} - t^{n+1}}{s-t}$$

pour tout $n \geq 1$.

— Suite au verso —

3. Exercice

Déterminer la décomposition en cycles à supports disjoints et donner la signature de la permutation de $\{1,\ldots,7\}$ telle que :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Exercice

On note Σ_n le groupe des permutations à n lettres, défini comme le groupe des bijections de $\{1,\ldots,n\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$. Soient $\sigma \in \Sigma_p$ et $\tau \in \Sigma_q$. On considère la permutation $\theta \in \Sigma_{p+q}$ telle que :

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & p & p+1 & \cdots & p+k & \cdots & p+q \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(p) & p+\tau(1) & \cdots & p+\tau(k) & \cdots & p+\tau(q) \end{pmatrix}.$$

4.1) Sous quelle condition une paire $i<j$ telle que $1 \leq i < j \leq p$ définit-elle une inversion pour la permutation θ? Sous quelle condition une paire $p+k < p+l$ telle que $p+1 \leq p+k < p+l \leq p+q$ définit-elle une inversion pour la permutation θ? Qu'en est-il des paires $i < p+k$ avec $1 \leq i \leq p$ et $p+1 \leq p+k \leq p+q$?
4.2) Déterminer le nombre d'inversions de θ en fonction du nombre d'inversions de σ et du nombre d'inversions de τ.
4.3) Déterminer une expression de la signature de θ en fonction de la signature de σ et de la signature de τ.

5. Question(s) de compréhension du cours

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps $\mathbb{K}$ muni d'une base $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $\phi : E \times E \times E \to \mathbb{K}$ une forme 3-linéaire alternée. Soient $u, v, w \in E$ des vecteurs et

$$\begin{aligned} u &= x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \quad (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{K}^3, \\ v &= y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3, \quad (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{K}^3, \\ w &= z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3, \quad (z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{K}^3, \end{aligned}$$

leur écriture dans la base $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$. Démontrer la formule

$$\phi(u,v,w) = (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2) \cdot \phi(e_1,e_2,e_3)$$

en détaillant bien les propriétés de ϕ utilisées. (*Remarque:* Il s'agit du cas particulier $n=3$ de la formule de développement d'une forme n-linéaire alternée vue en cours – on demande de redonner la démonstration de cette formule dans ce cas et en suivant les notations utilisées dans l'exercice.)

— Fin du devoir —