Université de Lille
Licence Math/Physique, Semestre 3 (2018-19)
M31 - Algèbre
Devoir Surveillé – Corrigé, 6/11/2018
10H30-12H30

Documents et calculatrices interdites.

Barême indicatif : 5+6+1+4+4. Les exercices sont tous indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

1. Exercice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire associée $\phi = \phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $\phi(X) = AX$.

1.1) *Déterminer le polynôme caractéristique $P_\phi(\lambda) = \mathrm{Det}(\phi - \lambda\, id)$ ainsi que les valeurs propres de ϕ.*

Le polynôme caractéristique vaut $P_\phi(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda I_3)$, où on note I_3 la matrice identité. On calcule ce déterminant en utilisant les propriétés d'homogénéité du déterminant et d'invariance par rapport à des opérations sur des lignes et des colonnes. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1\ . \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ \end{matrix} \\
&= (1-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) \quad \text{(déterminant d'une matrice triangulaire)}
\end{aligned}$$

Les valeurs s'identifient aux racines du polynôme caractéristique d'après le cours. On obtient donc que l'ensemble des valeurs propres de ϕ est $\{1, -1, 0\}$.

Remarque: On peut également calculer le polynôme caractéristique de ϕ par la formule du déterminant en dimension 3. On obtient alors $\mathrm{Det}(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \lambda$, et on retrouve $\mathrm{Det}(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda)$ en factorisant cette expression.

1.2) *Expliciter une base de chaque espace propre de ϕ.*

Les espaces propres sont définis par $E_\lambda = \ker(\phi - \lambda\, id)$. On détermine une base de ces espaces pour les valeurs propres $\lambda = 1, -1, 0$ trouvées dans la question précédente.

Pour $\lambda = 1$, on considère la matrice :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(\phi - id) \Leftrightarrow (A - I_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow (*) \begin{cases} -x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

On utilise des opérations sur les lignes pour échelonner ce système :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & & 0 & = 0 \\ & 2x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}.$$

[On prend L_1 : ligne pivot, $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.] On remonte les équations dans le système échelonné pour exprimer les variables associées à des échelons (x_1, x_2) en fonction de l'autre variable x_3 :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 & = x_3 \\ x_1 & = x_2 - x_3 = 0 \end{cases},$$

d'où on tire :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(\phi - id) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pour un paramètre $x_3 \in \mathbb{R}$ quelconque. On en conclut immédiatement que le vecteur

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forme une base de $E_1 = \ker(\phi - id)$.

Pour $\lambda = -1$, on considère la matrice :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(\phi + id) \Leftrightarrow (A + I_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (*) \begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On utilise des opérations sur les lignes pour échelonner ce système :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & & 2x_3 & = 0 \end{cases}.$$

[On prend L_1 : ligne pivot, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.] On remonte les équations dans le système échelonné pour exprimer les variables associées à des échelons (x_1, x_3) en fonction de l'autre variable x_2 :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 & = 0 \\ x_1 & = -x_2 + x_3 = -x_2 \end{cases},$$

d'où on tire :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(\phi + id) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pour un paramètre $x_2 \in \mathbb{R}$ quelconque. On en conclut immédiatement que le vecteur

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forme une base de $E_{-1} = \ker(\phi + id)$.

Pour $\lambda = 0$, on considère la matrice :

$$A - 0I_3 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(\phi - 0\,id) = \ker(\phi) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Leftrightarrow (*) \begin{cases} & x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \end{cases}$$

On utilise des opérations sur les lignes pour échelonner ce système :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}.$$

[On fait $L_1 \leftrightarrow L_2$, puis on prend L_1 : ligne pivot, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.] On remonte les équations dans le système échelonné pour exprimer les variables associées à des échelons (x_1, x_2) en fonction de l'autre variable x_3 :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 & = x_3 \\ x_1 & = -x_3 \end{cases},$$

d'où on tire :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(\phi) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pour un paramètre $x_3 \in \mathbb{R}$ quelconque. On en conclut immédiatement que le vecteur

$$u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forme une base de $E_0 = \ker(\phi - 0\,id) = \ker(\phi)$.

Remarque: une autre méthode pour déterminer les noyaux $E_\lambda = \ker(\phi - \lambda\,id)$ consiste à échelonner la matrice de $\psi = \phi - \lambda\,id$ selon les colonnes, ce qui revient à effectuer des changements de base au départ dans l'expression de $\psi = \phi - \lambda\,id$, et à reporter les opérations effectuées sur la matrice identité pour avoir la matrice de changement de base correspondante.

Dans le cas $\lambda = 1$ et $\psi = \phi - id$, on obtient ainsi :

$$(1) \qquad A - I_3 = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \psi(e_1) & \psi(e_2) & \psi(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \psi(e_1') & \psi(e_2') & \psi(e_3') \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_1 : \text{colonne pivot} \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array},$$

$$(2) \qquad \mapsto \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \psi(e_1'') & \psi(e_2'') & \psi(e_3'') \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 : \text{colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \end{array},$$

et :

$$I_3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_1 : \text{colonne pivot} \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}, \tag{1}$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e''_1 & e''_2 & e''_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 : \text{colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \end{array}, \tag{2}$$

On conclut de l'expression échelonnée de la matrice de $\psi = \phi - id$ dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) au départ que l'on a :

$$\ker(\psi) = \ker(\phi - id) = \mathbb{R}e''_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas $\lambda = -1$ et $\theta = \phi + id$, on obtient ainsi :

$$A + I_3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \theta(e_1) & \theta(e_2) & \theta(e_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \theta(f'_1) & \theta(f'_2) & \theta(f'_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_1 : \text{colonne pivot} \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{array}, \tag{1}$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \theta(f''_1) & \theta(f''_2) & \theta(f''_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 \leftrightarrow C_3 \end{array}, \tag{2}$$

et :

$$I_3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f'_1 & f'_2 & f'_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_1 : \text{colonne pivot} \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{array}, \tag{1}$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f''_1 & f''_2 & f''_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 \leftrightarrow C_3 \end{array}, \tag{2}$$

On conclut de l'expression échelonnée de la matrice de $\theta = \phi + id$ dans la base (f''_1, f''_2, f''_3) au départ que l'on a :

$$\ker(\theta) = \ker(\phi + id) = \mathbb{R}f''_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas $\lambda = 0$ et $\phi = \phi - 0\,id$, on obtient :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \phi(e_1) & \phi(e_2) & \phi(e_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \phi(g'_1) & \phi(g'_2) & \phi(g'_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_1 \leftrightarrow C_3 \end{array} \tag{1}$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \phi(g''_1) & \phi(g''_2) & \phi(g''_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_1 : \text{colonne pivot} \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \end{array}, \tag{2}$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \phi(g'''_1) & \phi(g'''_2) & \phi(g'''_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 : \text{colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{array}, \tag{3}$$

et :

$$
(1) \qquad I_3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} g_1' & g_2' & g_3' \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} C_1 \leftrightarrow C_3
$$

$$
(2) \qquad \mapsto \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} g_1'' & g_2'' & g_3'' \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_1 : \text{colonne pivot} \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \end{array},
$$

$$
(3) \qquad \mapsto \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} g_1''' & g_2''' & g_3''' \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C_2 : \text{colonne pivot} \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{array},
$$

On conclut de l'expression échelonnée de la matrice de ϕ dans la base (g_1''', g_2''', g_3''') au départ que l'on a :

$$
\ker(\phi) = \ker(\phi - 0\, id) = \mathbb{R} g_3''' = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

1.3) *Prouver que ϕ est diagonalisable, et expliciter la matrice de ϕ dans la base de vecteurs propres obtenue.*

On a $E_1 = \mathbb{R}u_1 \Rightarrow \dim(E_1) = 1$, $E_{-1} = \mathbb{R}u_2 \Rightarrow \dim(E_{-1}) = 1$, $E_0 = \mathbb{R}u_3 \Rightarrow \dim(E_0) = 1$, et par suite $\dim(E_1 \oplus E_{-1} \oplus E_0) = 3 \Rightarrow E_1 \oplus E_{-1} \oplus E_0 = \mathbb{R}^3$ par égalité des dimensions. Soit :

$$
\underbrace{\mathbb{R}u_1}_{=E_1} \oplus \underbrace{\mathbb{R}u_2}_{=E_{-1}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}u_3}_{=E_0} = \mathbb{R}^3.
$$

On obtient donc que (u_1, u_2, u_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres pour ϕ. Ceci prouve que ϕ est diagonalisable, et la matrice de ϕ dans cette base de vecteurs propres $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ s'écrit :

$$
M_{\underline{u}}^{\underline{u}}(\phi) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \phi(u_1) & \phi(u_2) & \phi(u_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

Remarque: Le polynôme caractéristique de ϕ a la particularité d'être scindé à racines simples. On pouvait conclure que ϕ est diagonalisable dès cet instant, sans calculer explicitement les espaces propres. On a en effet λracine du polynôme caractéristique $\Rightarrow E_\lambda \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow \dim(E_\lambda) \geq 1$, et lorsque l'on a trois racines simples en dimension 3, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, ceci implique que l'on a nécessairement $\dim(E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus E_{\lambda_3}) = \dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + \dim(E_{\lambda_3}) \geq 3 \Rightarrow E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus E_{\lambda_3} = \mathbb{R}^3$.

2. Exercice

On considère le déterminant $n \times n$ tel que :

$$
\Delta_n = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} s+t & st & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & s+t & st & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & st & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & s+t & st \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & s+t \end{pmatrix},
$$

avec des coefficients $s+t$ sur la diagonale, des coefficients 1 sur la diagonale "en dessous", des coefficients st sur la diagonale "au dessus", et des 0 partout ailleurs, pour des paramètres $s, t \in \mathbb{Q}$ tels que $s \neq t$.

2.1) *Montrer en utilisant des méthodes de développement que l'on a la relation*

$$\Delta_n = (s+t)\Delta_{n-1} - st\Delta_{n-2}$$

pour tout entier $n \geq 3$.

On effectue un développement selon la première colonne. Comme seul les deux premiers coefficients de la première colonne sont non nuls, on obtient un développement à deux termes :

$$\Delta_n = (s+t) \cdot \begin{vmatrix} s+t & st & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & st & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & s+t & st \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & s+t \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} st & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & s+t & st & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & st & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & s+t & st \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & s+t \end{vmatrix}.$$

On identifie le premier déterminant mineur qui apparaît dans ce développement au déterminant Δ_{n-1}. On effectue un développement du second déterminant mineur selon la première ligne. Comme cette ligne n'a que le premier coefficient de non nul, ce second développement ne produit qu'un seul terme. On a donc :

$$\Delta_n = (s+t) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} s+t & st & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & st & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & s+t & st \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & s+t \end{vmatrix}}_{=\Delta_{n-1}} -1 \cdot st \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} s+t & st & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & st & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & s+t & st \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & s+t \end{vmatrix}}_{=\Delta_{n-2}}.$$

On constate que le nouveau déterminant mineur $n-2 \times n-2$ obtenu s'identifie à Δ_{n-2}. On obtient donc la formule :

$$\Delta_n = (s+t)\Delta_{n-1} - st\Delta_{n-2}$$

qui est valide lorsque $n-2 \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 3$.

Remarque: On peut obtenir le même résultat en commençant à developper selon une ligne plutôt que selon une colonne.

2.2) *Déterminer* Δ_1 *et* Δ_2 *en fonction de* s *et* t*, puis montrer en utilisant un argument de récurrence que l'on a la formule*

$$\Delta_n = \frac{s^{n+1} - t^{n+1}}{s-t}$$

pour tout $n \geq 1$.

On a $\Delta_1 = s+t$ (déterminant d'une matrice 1×1) et

$$\Delta_2 = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} s+t & st \\ 1 & s+t \end{pmatrix} = (s+t)^2 - st = s^2 + st + t^2$$

d'après la formule d'un déterminant 2×2. On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{s^2 - t^2}{s-t} &= \frac{(s-t)(s+t)}{s-t} = s+t = \Delta_1 \\ \frac{s^3 - t^3}{s-t} &= \frac{(s-t)(s^2+st+t^2)}{s-t} = s^2 + st + t^2 = \Delta_2 \end{aligned}$$

d'après les identités remarquables classiques. Si on a $n \geq 3$ et on suppose que par récurrence que l'on a $\Delta_k = (s^{k+1} - t^{k+1})/(s-t)$ pour tout $k < n$, alors on a :

$$\Delta_n = (s+t)\Delta_{n-1} - st\Delta_{n-2} \Rightarrow \Delta_n = (s+t)\frac{s^n - t^n}{s-t} - st\frac{s^{n-1} - t^{n-1}}{s-t} = \frac{s^{n+1} - st^n + ts^n - t^{n+1} - ts^n + st^n}{s-t} = \frac{s^{n+1} - t^{n+1}}{s-t}$$

Donc la formule

$$\Delta_n = \frac{s^{n+1} - t^{n+1}}{s - t}$$

est valable pour tout $n \geq 1$ par principe de récurrence.

3. Quiz

Déterminer la décomposition en cycles à supports disjoints et donner la signature de la permutation de $\{1, \ldots, 7\}$ *telle que :*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\sigma = (1\ 5)(2\ 4\ 7\ 3),$$

et

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(1\ 5) \operatorname{sgn}(2\ 4\ 7\ 3) = (-1)^1(-1)^3 = 1$$

d'après la formule $\operatorname{sgn}(c) = (-1)^{l-1}$ vue en cours pour la signature d'un cycle de longueur l.

Remarque: on peut aussi compter le nombre d'inversions pour déterminer $\operatorname{sgn}(\sigma)$. On trouve $\sharp \operatorname{Inv}(\sigma) = 12$. `[Ne donner les 0,5pt de la détermination de` $\operatorname{sgn}(\sigma)$ `aux étudiants qui ont suivi cette approche que si le nombre d'inversions est correctement déterminé]`

4. Exercice

On note Σ_n *le groupe des permutations à* n *lettres, défini comme le groupe des bijections de* $\{1, \ldots, n\}$ *dans* $\{1, \ldots, n\}$*. Soient* $\sigma \in \Sigma_p$ *et* $\tau \in \Sigma_q$*. On considère la permutation* $\theta \in \Sigma_{p+q}$ *telle que :*

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & p & p+1 & \cdots & p+k & \cdots & p+q \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(p) & p+\tau(1) & \cdots & p+\tau(k) & \cdots & p+\tau(q) \end{pmatrix}.$$

4.1) *Sous quelle condition une paire* $i < j$ *telle que* $1 \leq i < j \leq p$ *définit-elle une inversion pour la permutation* θ*? Sous quelle condition une paire* $p+k < p+l$ *telle que* $p+1 \leq p+k < p+l \leq p+q$ *définit-elle une inversion pour la permutation* θ*? Qu'en est-il des paires* $i < p+k$ *avec* $1 \leq i \leq p$ *et* $p+1 \leq p+k \leq p+q$*?*

Pour une paire $i < j$ telle que $1 \leq i < j \leq p$, on a $\theta(i) = \sigma(i)$ et $\theta(j) = \sigma(j)$. Donc $\theta(i) > \theta(j) \Leftrightarrow \sigma(i) > \sigma(j)$. Donc $i < j$ forme une inversion pour θ si et seulement si $i < j$ forme une inversion pour σ.

Pour une paire $p+k < p+l$ telle que $p+1 \leq p+k < p+l \leq p+q$, on a $\theta(p+k) = p+\tau(k)$ et $\theta(p+l) = p+\tau(l)$. Donc $\theta(p+k) > \theta(p+l) \Leftrightarrow p+\tau(k) > p+\tau(l) \Leftrightarrow \tau(k) > \tau(l)$. Donc $p+k < p+l$ forme une inversion pour θ si et seulement si $k < l$ forme une inversion pour τ.

Pour une paire $i < p+k$ avec $1 \leq i \leq p$ et $p+1 \leq p+k \leq p+q$, on a $\theta(i) = \sigma(i)$ et $\theta(p+k) = p+\tau(k)$. Comme $\sigma(i) \in \{1, \ldots, p\}$ par définition d'une permutation, on a $\theta(i) = \sigma(i) \leq p$. On a inversement $\theta(p+k) \geq p+1$ puisque $\tau(k) \in\in \{1, \ldots, q\} \Rightarrow \tau(k) \geq 1$. On a donc nécessairement $\theta(i) < \theta(p+k)$ pour toutes les paires de la forme $i < p+k$, ce qui montre qu'aucune de ces paires est une inversion.

4.2) *Déterminer le nombre d'inversions de* θ *en fonction du nombre d'inversions de* σ *et du nombre d'inversions de* τ*.*

On a

$$\operatorname{Inv}(\theta) = \{i < j | i < j \text{ inversion de } \sigma\} \amalg \{p+k < p+l | k < l \text{ inversion de } \tau\}$$

d'après le résultat de la question précédente. D'où :

$$\sharp \operatorname{Inv}(\theta) = \sharp \operatorname{Inv}(\sigma) + \sharp \operatorname{Inv}(\tau).$$

4.3) *Déterminer une expression de la signature de* θ *en fonction de la signature de* σ *et de la signature de* τ*.*

On a

$$\operatorname{sgn}(\theta) = (-1)^{\sharp \operatorname{Inv}(\theta)} = (-1)^{\sharp \operatorname{Inv}(\sigma) + \sharp \operatorname{Inv}(\tau)}$$

d'après le résultat de la question précédente. On en déduit :

$$\operatorname{sgn}(\theta) = (-1)^{\sharp \operatorname{Inv}(\sigma)} \cdot (-1)^{\sharp \operatorname{Inv}(\tau)} \Rightarrow \operatorname{sgn}(\theta) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau).$$

5. Question(s) de compréhension du cours

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps $\mathbb{K}$ muni d'une base $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $\phi : E \times E \times E \to \mathbb{K}$ une forme 3-linéaire alternée. Soient $u, v, w \in E$ des vecteurs et

$$\begin{aligned} u &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3, \\ v &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, \quad (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{K}^3, \\ w &= z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3, \quad (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{K}^3, \end{aligned}$$

leur écriture dans la base $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$. Démontrer la formule

$$\phi(u, v, w) = (x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2) \cdot \phi(e_1, e_2, e_3)$$

en détaillant bien les propriétés de ϕ utilisées. (Remarque: Il s'agit du cas particulier $n = 3$ de la formule de développement d'une forme n-linéaire alternée vue en cours – on demande de redonner la démonstration de cette formule dans ce cas et en suivant les notations utilisées dans l'exercice.)

On applique la linéarité de ϕ par rapport à la première variable. On obtient :

$$\phi(u, v, w) = \phi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, v, w) = x_1 \phi(e_1, v, w) + x_2 \phi(e_2, v, w) + x_3 \phi(e_3, v, w).$$

On applique ensuite la linéarité de ϕ par rapport à la seconde variable pour chacun des termes obtenus dans ce développement. On peut aussi utiliser que ϕ s'annule quand deux variables sont égales (propriété de forme alternée) pour simplifier l'expression obtenue :

$$\begin{aligned} \phi(u, v, w) &= x_1 \phi(e_1, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, w) \\ &\quad + x_2 \phi(e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, w) \\ &\quad + x_3 \phi(e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, w) \\ &= x_1 (y_1 \underbrace{\phi(e_1, e_1, w)}_{=0} + y_2 \phi(e_1, e_2, w) + y_3 \phi(e_1, e_3, w)) \\ &\quad + x_2 (y_1 \phi(e_2, e_1, w) + y_2 \underbrace{\phi(e_2, e_2, w)}_{=0} + y_3 \phi(e_2, e_3, w)) \\ &\quad + x_3 (y_1 \phi(e_3, e_1, w) + y_2 \phi(e_3, e_2, w) + y_3 \underbrace{\phi(e_3, e_3, w)}_{=0}) \\ &= x_1 y_2 \phi(e_1, e_2, w) + x_1 y_3 \phi(e_1, e_3, w) \\ &\quad + x_2 y_1 \phi(e_2, e_1, w) + x_2 y_3 \phi(e_2, e_3, w) \\ &\quad + x_3 y_1 \phi(e_3, e_1, w) + x_3 y_2 \phi(e_3, e_2, w). \end{aligned}$$

On applique ensuite la linéarité de ϕ par rapport à la troisième variable et on utilise encore que ϕ s'annule quand deux variables sont égales pour simplifier l'expression obtenue :

$$\begin{aligned}
\phi(u,v,w) &= x_1y_2\phi(e_1,e_2,z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3) + x_1y_3\phi(e_1,e_3,z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3)\\
&\quad + x_2y_1\phi(e_2,e_1,z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3) + x_2y_3\phi(e_2,e_3,z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3)\\
&\quad + x_3y_1\phi(e_3,e_1,z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3) + x_3y_2\phi(e_3,e_2,z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3)\\
&= x_1y_2(z_1\underbrace{\phi(e_1,e_2,e_1)}_{=0} + z_2\underbrace{\phi(e_1,e_2,e_2)}_{=0} + z_3\phi(e_1,e_2,e_3))\\
&\quad + x_1y_3(z_1\underbrace{\phi(e_1,e_3,e_1)}_{=0} + z_2\phi(e_1,e_3,e_2) + z_3\underbrace{\phi(e_1,e_3,e_3)}_{=0})\\
&\quad + x_2y_1(z_1\underbrace{\phi(e_2,e_1,e_1)}_{=0} + z_2\underbrace{\phi(e_2,e_1,e_2)}_{=0} + z_3\phi(e_2,e_1,e_3))\\
&\quad + x_2y_3(z_1\phi(e_2,e_3,e_1) + z_2\underbrace{\phi(e_2,e_3,e_2)}_{=0} + z_3\underbrace{\phi(e_2,e_3,e_3)}_{=0})\\
&\quad + x_3y_1(z_1\underbrace{\phi(e_3,e_1,e_1)}_{=0} + z_2\phi(e_3,e_1,e_2) + z_3\underbrace{\phi(e_3,e_1,e_3)}_{=0})\\
&\quad + x_3y_2(z_1\phi(e_3,e_2,e_1) + z_2\underbrace{\phi(e_3,e_2,e_2)}_{=0} + z_3\underbrace{\phi(e_3,e_2,e_3)}_{=0})\\
&= x_1y_2z_3\phi(e_1,e_2,e_3) + x_1y_3z_2\phi(e_1,e_3,e_2) + x_2y_1z_3\phi(e_2,e_1,e_3)\\
&\quad + x_2y_3z_1\phi(e_2,e_3,e_1) + x_3y_1z_2\phi(e_3,e_1,e_2) + x_3y_2z_1\phi(e_3,e_2,e_1).
\end{aligned}$$

On utilise les propriétés d'antisymétrie (la forme change de signes quand on transpose deux variables) pour exprimer les facteurs $\phi(e_i,e_j,e_k)$ obtenus en fonction de $\phi(e_1,e_2,e_3)$:

$$\begin{aligned}
\phi(e_1,e_3,e_2) &= -\phi(e_1,e_2,e_3)\\
\phi(e_2,e_1,e_3) &= -\phi(e_1,e_2,e_3)\\
\phi(e_2,e_3,e_1) &= -\phi(e_2,e_1,e_3) = \phi(e_1,e_2,e_3)\\
\phi(e_3,e_1,e_2) &= -\phi(e_1,e_3,e_2) = \phi(e_1,e_2,e_3)\\
\phi(e_3,e_2,e_1) &= -\phi(e_1,e_2,e_3).
\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\phi(u,v,w) &= x_1y_2z_3\phi(e_1,e_2,e_3) - x_1y_3z_2\phi(e_1,e_2,e_3) - x_2y_1z_3\phi(e_1,e_2,e_3)\\
&\quad + x_2y_3z_1\phi(e_1,e_2,e_3) + x_3y_1z_2\phi(e_1,e_2,e_3) - x_3y_2z_1\phi(e_1,e_2,e_3)\\
&= (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2)\phi(e_1,e_2,e_3),
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

— Fin du devoir —