Université de Lille
Licence Math/Physique, Semestre 3 (2018-19)
M31 - Algèbre, Feuille 4

§0. Compléments

1. Exercice !

On rappelle que la trace d'une matrice $n \times n$, soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, est définie par la formule $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1.1) Prouver que l'on a la relation $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour tout couple de matrices $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. En déduire que l'on a relation $\mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$ pour toute matrice A, où P est une matrice inversible.

1.2) On définit la trace d'un endomorphisme $\phi : E \to E$ d'un espace vectoriel E de dimension finie n par $\mathrm{Tr}(\phi) = \mathrm{Tr}(M_e^e(\phi))$, où on considère la matrice $M_e^e(\phi)$ de l'endomorphisme ϕ dans une base e de l'espace E au départ et à l'arrivée. Montrer que l'on a la relation $\mathrm{Tr}(M_e^e(\phi)) = \mathrm{Tr}(M_f^f(\phi))$ lorsque l'on considère la matrice $M_f^f(\phi)$ de l'endomorphisme ϕ associée à un autre choix de base f de l'espace E. (*Indication :* on utilisera une formule de changement de base et le résultat de la question précédente.) En conclure que $\mathrm{Tr}(\phi)$ ne dépend pas du choix de la base considérée.

1.3) Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant que le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas du choix de la base et de la relation

$$P_\phi(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}(\phi) x^{n-1} + \ldots + \mathrm{Det}(\phi)$$

qui lie le polynôme caractéristique $P_\phi(x) = \mathrm{Det}(\phi - x\,\mathrm{Id})$ et la trace $\mathrm{Tr}(\phi)$.

§1. Trigonalisation

2. Exercice

Soit $\phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que $\phi_A(X) = AX$.

2.1) Prouver que ϕ_A possède deux valeurs propres, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, et que $\dim E_{\lambda_i} = 1$ pour $i = 1, 2$. Expliciter des vecteurs propres $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $E_{\lambda_i} = \mathbb{R}u_i$, $i = 1, 2$.

2.2) Expliciter une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de ϕ_A a une forme triangulaire supérieure que l'on explicitera. *Indication:* On pourra fixer $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2 \oplus \mathbb{R}u_3 = \mathbb{R}^3$, où on considère les vecteurs propres $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ déterminés dans la question précédente, et on déterminera les scalaires $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\phi_A(u_3) = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$.

§2. Polynômes de matrices et d'endomorphismes – généralités

3. Exercice

3.1) Montrer que la matrice

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et expliciter des vecteurs propres de W formant une base de $\mathbb{C}^4$. On notera cette base (w_1, w_2, w_3, w_4). *Indication :* L'équation $WX = \lambda X$ se résoud facilement et directement, sans passer par le polynôme caractéristique de W.

3.2) Soit $A = A(a_0, a_1, a_2, a_3)$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Observer que A s'écrit comme un polynôme en W (on calculera les puissances W^i). Comment s'écrit l'image de w_i par l'application $X \mapsto AX$? On utilisera l'observation précédente pour obtenir un résultat sans calcul.
3.3) Comment s'écrit la matrice de l'application $X \mapsto AX$ dans la base (w_1, w_2, w_3, w_4)? Utiliser le résultat obtenu pour exprimer $\mathrm{Det}(A)$ sous forme factorisée.
3.4) ! Généraliser l'exercice pour une matrice $n \times n$ de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_n & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_0 \end{pmatrix}.$$

§3. Polynômes d'endomorphismes et diagonalisation

4. Exercice (exercice de compréhension du cours)
On considère l'application linéaire $\phi = \phi_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1) Prouver que ϕ annule le polynôme $P(x) = x^3 + 1$. Dans la suite, on considère la factorisation $P(x) = F(x)G(x)$, où on pose $F(x) = x^2 - x + 1$ et $G(x) = x + 1$.
4.2) Expliciter une décomposition de Bezout $U(x)F(x) + V(x)G(x) = 1$ En déduire la relation $U(\phi)F(\phi) + V(\phi)G(\phi) = \mathrm{Id}$.
4.3) Montrer en utilisant la relation précédente que l'on a $v \in \ker(F(\phi)) \cap \ker(G(\phi)) \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^3}$. En déduire que les espaces $\ker(F(\phi))$ et $\ker(G(\phi))$ sont en somme directe.
4.4) Montrer que l'on a $U(\phi) \cdot F(\phi)(v) \in \ker(G(\phi))$ et $V(\phi) \cdot G(\phi)(v) \in \ker(F(\phi))$, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$, en utilisant que $F(\phi)G(\phi) = G(\phi)F(\phi) = P(\phi) = 0$. Puis conclure que l'on a la relation $\ker(F(\phi)) \oplus \ker(G(\phi)) = \mathbb{R}^3$.
4.5) Prouver que l'endomorphisme $R(\phi) = U(\phi)F(\phi)$ définit en fait un projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur l'espace $\ker(G(\phi))$ parallèlement au sous espace $\ker(F(\phi))$, et que l'endomorphisme $S(\phi) = V(\phi)G(\phi) = \mathrm{Id} - R(\phi)$ définit, de façon symétrique, un projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur l'espace $\ker(G(\phi))$ parallèlement au sous espace $\ker(F(\phi))$. Expliciter ces projecteurs $R(\phi)$ et $S(\phi)$ pour l'endomorphisme $\phi = \phi_W$ considéré dans l'exercice.

5. Exercice
Soit X une matrice $n \times n$ à coefficients réels telle que $I + X + X^2 = 0$.
5.1) Montrer que X est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$) et donner ses valeurs propres.
5.2) Que peut-on dire de la dimension n, du déterminant et de la trace de X? (*Indication:* on utilisera l'expression de l'endomorphisme $\phi_X : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ associé à X dans une base de vecteurs propres.)

6. Quiz

Dans cet exercice, on dit par abus de langage qu'une matrice carrée est diagonalisable lorsque l'application linéaire assocée l'est, et on utilise de même l'analogue matriciel des notions de polynôme caractéristique et de polynôme minimal. On se donne une matrice par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où A est une matrice $n \times n$ à coefficients dans un corps quelconque $\mathbb{K}$.

6.1) Quelle relation lie le polynôme caractéristique de la matrice M et le polynôme caractéristique de la matrice A?

6.2) Soit $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + \cdots + c_r x^r$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Comment s'écrivent les puissances M^k de la matrice M en fonction des puissances A^k de la matrices A? Comment s'écrit $p(M)$ en fonction de $p(A)$? Quelle relation lie le polynôme minimal de la matrice M et le polynôme minimal de la matrice A?

6.3) Prouver que la matrice M est diagonalisable si et seulement si la matrice A est diagonalisable. *Indication*: on pourra utiliser le résultat de la question précédente, et la caractérisation des matrices/endomorphismes diagonalisables en fonction du polynôme minimal vue dans le cours (ou un des avatars de cette caractérisation).

6.4) ! Étendre les résultats des questions précédentes lorsque M est une matrice par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où A est une matrice $m \times m$ et B est une matrice $n \times n$. (On montrera que dans ce cas, le polynôme minimal de M est le ppcm des polynômes minimaux de A et de B.)

7. Exercice

Soient $\phi, \psi : E \to E$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose que ϕ et ψ commutent $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ et sont diagonalisables. On veut montrer que ϕ et ψ diagonalisent dans une base commune de vecteurs propres. On note λ_i, $i = 1, \ldots, r$ les valeurs propres de ϕ et $E_{\lambda_i} = \{v \in E | \phi(v) = \lambda_i v\}$, $i = 1, \ldots, r$, les espaces propres correspondants.

7.1) Prouver que l'on a $\psi(E_{\lambda_i}) \subset E_{\lambda_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, r$. On considère alors l'application $\psi_i : E_{\lambda_i} \to E_{\lambda_i}$ obtenue par restriction de $\psi : E \to E$ au sous espace $E_{\lambda_i} \subset E$.

7.2) Observer que ψ_i annule un polynôme scindé à racines simples. Conclure que chaque endomorphisme $\psi_i : E_{\lambda_i} \to E_{\lambda_i}$ est diagonalisable.

7.3) Déduire du résultat précédent que ϕ et ψ diagonalisent dans une base commune de vecteurs propres comme annoncé.

7.4) ! Expliciter une base commune de vecteurs propres pour les endomorphismes $\phi = \phi_A$ et $\psi = \psi_B$ associés aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

après avoir vérifié que ces matrices satisfont bien à la relation $AB = BA$.

§4. Sous espaces caractéristiques et décomposition de Dunford

8. Exercice

On considère l'application linéraire $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associée à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.1) Prouver que l'on a la relation $(\phi - \mathrm{Id})^2 \cdot (\phi + \mathrm{Id})^2 = 0$, soit en calculant directement cet endomorphisme composé, soit en appliquant le théorème de Cayley-Hamilton.
8.2) Prouver que les espaces $F = \ker(\phi - \mathrm{Id})^2$ et $G = \ker(\phi + \mathrm{Id})^2$ sont de dimension 2 en explicitant une base de chacun de ces espaces. On notera (v_1, v_2) la base choisie pour l'espace F, et (w_1, w_2) la base choisie pour l'espace G. Comment justifier que (v_1, v_2, w_1, w_2) forme une base de $\mathbb{R}^4$?
8.3) Prouver que l'on a $\phi(F) \subset F$ et $\phi(G) \subset G$. Puis donner l'expression de la matrice de ϕ dans la base (v_1, v_2, w_1, w_2).
8.4) Soit $\sigma : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base (v_1, v_2, w_1, w_2) s'écrit :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prouver que σ et $\rho = \phi - \sigma$ sont des endomorphismes qui commutent, et que ρ est nilpotente (on a $\rho^N = 0$ pour $N \gg 0$).
8.5) Donner l'expression de la matrice de σ^k dans la base (v_1, v_2, w_1, w_2), pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de la matrice de $\phi^k = (\sigma + \rho)^k$ dans la base (v_1, v_2, w_1, w_2) en utilisant la formule du binôme.

9. Exercice

On considère l'application linéaire $\phi : X \mapsto AX$ définie par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.1) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de ϕ. Déterminer une base des espaces caractéristiques de ϕ puis expliciter la matrice des composantes de la décomposition de Dunford de ϕ dans la base de $\mathbb{R}^4$ obtenue en assemblant les bases des espaces caractéristiques.
9.2) Déterminer la matrice de ϕ^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans la base considérée dans la question précédente.

10. Exercice

Déterminer le polynôme minimal de l'application linéaire $\psi : X \mapsto BX$ associée à la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

§5. Endomorphismes nilpotents

11. Exercice

Soit $\phi : E \to E$ un endomorphisme nilpotent. On suppose que l'indice de nilpotence de ϕ est égal à $n = \dim(E)$. On fixe $u_1 \in E$ tel que $\phi^{n-1}(u_1) \neq 0_E$, et on pose $u_i = \phi^{i-1}(u_1)$ pour $i = 2, 3, \ldots, n$.

11.1) Montrer que la famille de vecteurs ainsi obtenue $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ forme une base de E et donner l'expression de la matrice de ϕ dans cette base.

11.2) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire $\phi_A(X) = AX$ qui lui est associée.

Prouver que $N = A - 2I$ est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence 3. Expliciter la base obtenue en applicant la construction de la question 1, pour un choix de vecteur $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(A - 2I)^2 u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ laissé au soin de l'étudiant, puis expliciter la matrice de ϕ_A dans cette base.