Université Lille 1 - Sciences et Technologies
Licence Math/Physique, Semestre 3 (2018-19)
M31 - Algèbre, Feuille 1

§1. Généralité sur les espaces vectoriels et les applications linéaires

1. Exercice

Dans la liste suivante, quelles familles de vecteurs $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Q}^3$ sont libres, génératrices, ou forment des bases de $\mathbb{Q}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right), \qquad \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right), \qquad \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

On rappelle que des vecteurs $(u_1, \dots, u_m)$ forment une famille libre (respectivement génératrice, respectivement une base) d'un espace vectoriel E si, pour tout vecteur $v \in E$ donné, l'équation $x_1u_1 + \cdots + x_mu_m = v$ possède au plus (respectivement au moins, respectivement une et une seule) solution $(x_1, \dots, x_m)$.

2. Exercice

Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes $P(X)$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ et de degré $\deg P \leq n$.

2.1) Soient $\phi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ et $\psi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ les applications telles que $\phi(P(X)) = P(X+1)$ et $\psi(P(X)) = P(X-1)$. Vérifier que ces applications sont linéaires et expliciter leur matrice dans la base naturelle de $\mathcal{P}_n$ constituée des polynômes $(1, X, \dots, X^n)$. La matrice de ϕ sera notée A. La matrice de ψ sera notée B.

2.2) Comment s'écrit l'image d'un polynôme $P(X)$ par l'application composée $\psi \circ \phi$? Quelle relation peut-on déduire de ce résultat quant aux matrices A et B?

3. Exercice !

On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3.1) Prouver que les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ forment une famille libre.

Indication : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des scalaires tels que $a\,f + b\,g = 0$. On évaluera la fonction $a\,f + b\,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en quelques valeurs x bien choisies.

3.2) On note $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{F}$ engendré par les fonctions f et g. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{P}$. Soit $\phi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $\phi_\alpha(x) = \phi(x + \alpha)$, pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que ϕ_α appartient à $\mathcal{P}$ puis vérifier que l'application $T_\alpha : \phi \mapsto \phi_\alpha$ définit une application linéaire $T_\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$. Comment s'écrit la matrice de T_α dans la base f, g?

3.3) Quelle est l'image d'une application ϕ par l'application composée $T_\alpha \circ T_\beta$? Que donne le produit des matrices associées à T_α et T_β?

§2. Matrices de changement de base et applications

4. Exercice

On travaille dans un espace V de dimension 3 dont une base est notée (e_1, e_2, e_3).

4.1) Prouver que les vecteurs (f_1, f_2, f_3) tels que

$$f_1 = e_1 - e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + e_2, \quad f_3 = e_1 + e_3$$

forment une base V.
4.2) Déterminer la matrice $P = P_{(f_1,f_2,f_3)}(e_1, e_2, e_3)$ des coordonnées de (e_1, e_2, e_3) dans la base (f_1, f_2, f_3).
4.3) Quelles sont les coordonnées du vecteur $v = e_1 + e_2 + e_3$ dans la base (f_1, f_2, f_3)?

5. Exercice

On travaille dans l'espace $V = \mathbb{R}^2$. On note (e_1, e_2) les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
5.1) Prouver que les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Comment s'écrit la matrice $P = P_{(e_1,e_2)}(u_1, u_2)$ de changement de base de (u_1, u_2) à (e_1, e_2) et la matrice de changement de base inverse $Q = P_{(u_1,u_2)}(e_1, e_2)$?
5.2) On note L_1 et L_2 les droites de $\mathbb{R}^2$ respectivement engendrées par les vecteurs u_1 et u_2. Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur L_1 parallèlement à L_2. Comment s'écrit la matrice de π dans la base (u_1, u_2)? Comment s'écrit la matrice de π dans la base (e_1, e_2)? (On utilisera le résultat précédent et la formule de changement de bases.)
5.3) Soit $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique s'écrit

$$S = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\sigma(u_1)$ et $\sigma(u_2)$. Comment s'écrit la matrice de σ dans la base (u_1, u_2)? Quelle transformation géométrique représente l'application σ?

§3. Méthode du pivot et applications

6. Exercice (exercice guidé d'application du cours)

On travaille dans l'espace $\mathbb{R}^4$. On note $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base naturelle de cet espace. Soit $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) (au départ et à l'arrivée) s'écrit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.1) Utiliser des opérations selon les lignes pour écrire la matrice de ϕ sous une forme échelonnée (selon les lignes), interpréter cette construction comme un changement de base à l'arrivée $\underline{e} \mapsto \underline{f}'$ dans l'expression de ϕ, et expliciter la matrice $P = P_{\underline{f}'}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ correspondant à ce changement de base.
6.2) Utiliser le résultat obtenu dans la question précédente pour expliciter une base de $\operatorname{Im} \phi$. Construire également une base de $\operatorname{Ker} \phi$ en utilisant la forme de ϕ obtenue dans la question précédente.
6.3) Comment s'exprime un vecteur

$$v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

dans la base $\underline{f}' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ considérée dans la question 1? [*Indication:* On peut appliquer la formule de changement de base matricielle ou reporter les opérations sur les lignes considérée

dans la construction de la question 1 sur le vecteur v pour obtenir le résultat demandé.] Utiliser ce calcul pour expliciter une description de $\operatorname{Im}\Phi$ par des équations.

7. Exercice (exercice guidé d'application du cours)

On travaille à nouveau dans l'espace $\mathbb{R}^4$. On note toujours $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base naturelle de cet espace. On considère l'application linéaire $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) (au départ et à l'arrivée) s'écrit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

comme dans l'exercice précédent.

7.1) Utiliser des opérations selon les colonnes pour écrire la matrice de ϕ sous une forme échelonnée (selon les colonnes), interpréter cette construction comme un changement de base au départ de base $\underline{e} \mapsto \underline{e}'$ dans l'expression de ϕ, et expliciter la matrice $P = P_{\underline{e}}(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ correspondant à ce changement de base.

7.2) Utiliser le résultat obtenu dans la question précédente pour expliciter une base de $\operatorname{Im}\phi$ et une base de $\operatorname{Ker}\phi$.

8. Exercice

Soit $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ l'application linéaire définie par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Expliciter une base de $\operatorname{Ker}\phi$. L'application ϕ peut-elle être surjective?