Applications polynomiales et foncteurs polynomiaux

Benoit Fresse

Groupe de travail
“Calcul polynomial et modules instables”

20/10/97

L’exposé qui suit est une introduction à la théorie des foncteurs polynomiaux. Il y a essentiellement deux définitions de foncteurs polynomiaux: l’une est issue de la théorie des représentations du groupe linéaire, l’autre des travaux de Eilenberg, Mac Lane, Dold et Puppe en théorie de l’homotopie. C’est cette dernière qui est présentée ici.

Ce texte ne contient pas de résultats originaux. On reprend en partie des résultats exposés par T. Pirashvili au groupe de travail “Algèbre et Topologie” de Strasbourg en 96. La présentation que nous en donnons simplement est différente.

On introduit (avec quelques exemples) les notions de bases de la théorie dans la première partie de ces notes. On fait également des rappels systématiques sur les fonctions polynomiales. La deuxième partie est plus spécifiquement consacrée à l’étude de la structure de la catégorie des foncteurs polynomiaux. La catégorie des foncteurs polynomiaux est filtrée par le degré. On identifie les catégories sous-quotients pour cette filtration. On explicite aussi des générateurs projectifs pour la catégorie des foncteurs de degré inférieur à r, ce qui permet d’identifier cette catégorie à une catégorie de modules sur un anneau.

On donnera quelques repères bibliographiques sans prétendre à l’exhaustivité.

§1. Définitions et exemples

1.1. Applications polynomiales

On fixe un anneau de base commutatif k. Les produits tensoriels seront pris sur k.

1.1.1. *Extension linéaire des applications*

Soit V un groupe abélien. On note $k[V]$ l’algèbre de groupe associée. Si $v \in V$, alors $[v]$ désigne l’élément correspondant de $k[V]$. L’idéal d’augmentation de $k[V]$, noté IV, est engendré par les éléments $[v] - 1$, $v \in V$.

Soit W un k-module. Toute application $f : V \to W$ a une unique extension linéaire $f : k[V] \to W$. De même, une application *pointée* (i.e. nulle en 0) s’identifie a une application linéaire de IV dans W.

1.1.2. *Applications polynomiales*

Notons $P'_r(V)$ le quotient $k[V]/IV^{r+1}$. Considérons l’application $p'_r : k[V] \to P'_r(V)$ dont l’extension linéaire est la projection $k[V] \to k[V]/IV^{r+1}$. Une application est *polynomiale de degré inférieur à* r si son extension linéaire factorise par la projection p'_r (de façon équivalente, $f : V \to W$ est polynomiale si son extension linéaire s’annule sur IV^{r+1}). On notera $\deg f \leq r$.

Notons $\mathrm{Pol}_r(V, W)$ le groupe abélien des applications polynomiales de degré inférieur à r. On a la relation d'adjonction

$$\mathrm{Pol}_r(V, W) = \mathrm{Mod}_k(P'_r(V), W).$$

En d'autres termes, p'_r est l'application polynomiale de degré inférieur à r universelle. Ce qui est immédiat, vu la définition.

Dans le cas pointé on peut remplacer $P'_r(V)$ par le quotient $P_r(V) = IV/IV^{r+1}$. L'application $p_r : V \to P_r(V)$, donnée par $p_r(v) = [v] - 1$, est universelle parmi les applications pointées et polynomiales de degré inférieur à r.

Les applications polynomiales vérifient les propriétés formelles suivantes.

1.1.3. Proposition

La somme de deux applications polynomiales $f : V \to W$ *et* $g : V \to W$ *est polynomiale. De plus* $\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g)$.

Le produit tensoriel de deux applications polynomiales $f : V_1 \to W_1$ *et* $g : V_2 \to W_2$ *est polynomial. De plus* $\deg(f \otimes g) = \deg f + \deg g$.

La composée de deux applications polynomiales $f : U \to V$ *et* $g : V \to W$ *est polynomiale. De plus* $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$.

On va écrire une caractérisation explicite de la notion d'application polynomiale.

1.1.4. *Différences successives*

Soit f une application de V dans W. La *différence* r*-ième* de f est l'application définie par

$$\Delta_r f(v_1, \ldots, v_r) := \sum_S (-1)^{r-\#S} f(\sum_{i \in S} v_i),$$

où S décrit l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, r\}$. Par exemple, les *différences première et deuxième* de f sont les applications

$$\begin{aligned} \Delta_1 f(x) &:= f(x) - f(0), \\ \Delta_2 f(x, y) &:= f(x + y) - f(x) - f(y) + f(0). \end{aligned}$$

Vu que dans $k[V]$ on a l'indentité

$$([v_1] - 1) \cdots ([v_r] - 1) = \sum_S (-1)^{r-\#S} [\sum_{i \in S} v_i],$$

$\Delta_r f(v_1, \ldots, v_r)$ représente la valeur de f en $([v_1] - 1) \cdots ([v_r] - 1)$.

Les produits $([v_1] - 1) \cdots ([v_r] - 1)$ engendrant IV^{r+1}, on obtient immédiatement:

1.1.5. Lemme

Une application $f : V \to W$ *est polynomiale de degré inférieur à* r *si et seulement si sa différence* $r + 1$*-ième* $\Delta_{r+1} f$ *est nulle.*

Ainsi, une application polynomiale de degré 0 est une application constante.

Si $f(0) = 0$, alors on a l'identité

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + \Delta_2 f(x, y).$$

Donc une application pointée et polynomiale de degré 1 est une application additive. En quelque sorte, $\Delta_2 f(x,y)$ mesure le défaut d'additivité de f. On peut généraliser cette dernière identité et contrôler la différence $f(v_1+\cdots+v_r)-(f(v_1)+\cdots+f(v_r))$ au moyen des différences successives comme le montre la proposition suivante.

1.1.6. PROPOSITION

On a l'identité

$$f(v_1+\cdots+v_r)=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_s\leq r}\Delta_s f(v_{i_1},\ldots,v_{i_s}).$$

Cette proposition est une conséquence immédiate du calcul suivant:

FAIT: *Dans $k[V]$, on a l'identité*

$$[v_1+\cdots+v_r]=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_s\leq r}([v_{i_1}]-1)\cdots([v_{i_s}]-1).$$

Le terme *fonction quadratique* désigne une fonction polynomiale de degré 2. On peut vérifier que f est quadratique si et seulement si la fonction $f(x+y)-f(x)-f(y)+f(0)$ est biadditive. On peut généraliser cette assertion et obtenir des caractérisations inductives de la notion d'application polynomiale:

1.1.7. LEMME

Une fonction f est polynomiale de degré r si et seulement si sa différence deuxième $\Delta_2 f$ est polynomiale de degré $r-1$ par rapport à l'une quelconque de ses variables.

1.1.8. LEMME

Une fonction f est polynomiale de degré r si et seulement si sa r-ième différence successive $\Delta_r f$ est multi-additive.

Ces énoncés sont des conséquences du lemme suivant qui montre que les différences successives s'obtiennent en itérant la différence deuxième.

1.1.9. LEMME

La différence deuxième de $\Delta_r f$ par rapport a l'une quelconque de ses variables redonne $\Delta_{r+1} f$. Plus précisément, pour $r\geq 1$, on a l'identité

$$\begin{aligned}\Delta_{r+1}f(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},v_{i+2},\ldots,v_{r+1}) &= \Delta_r f(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i+v_{i+1},v_{i+2},\ldots,v_{r+1})\\ &\quad -\Delta_r f(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+2},\ldots,v_{r+1})\\ &\quad -\Delta_r f(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},v_{i+2},\ldots,v_{r+1}).\end{aligned}$$

(La fonction $\Delta_r f$ est nulle quand un de ses arguments est nul.)

Preuve: Il suffit d'établir l'identité correspondante dans $k[V]$, ce qui résulte d'un calcul facile et laissé au lecteur.

Passons aux exemples. On commence par caractériser les fonctions polynomiales quand k est l'anneau des entiers ou un corps premier.

1.1.10. *Polynomes numériques*

La fonction de $\mathbf{Z}$ dans $k = \mathbf{Z}$, $k = \mathbf{Q}$ ou $k = \mathbf{F}_p$ donnée par le coefficient binomial $\binom{x}{i}$ est polynomiale de degré inférieur à i. En effet, le coefficient binomial $\binom{x}{i}$ est clairement une fonction polynôme si $k = \mathbf{Q}$,. On en déduit que $\binom{x}{i}$ est polynomiale comme fonction à valeurs dans $\mathbf{Z}$. Par suite sa classe résiduelle modulo p est aussi polynomiale.

1.1.11. Proposition

Soit f une fonction polynomiale de $\mathbf{Z}$ dans $k = \mathbf{Z}$ ou $k = \mathbf{F}_p$. Alors $f(x)$ est combinaison linéaire des fonctions binomiales $\binom{x}{i}$, $0 \leq i$.

Preuve: Notons δf la fonction $f(x+1) - f(x)$. Autrement dit $\delta f(x) = \Delta_2 f(x, 1)$. Si f est polynomiale de degré r, alors $\delta^{r+1} f = 0$. La fonction $\delta^r f$ est donc constante, égale à c_0. D'autre part, d'après l'identité de Pascal, on a $\delta\binom{x}{i} = \binom{x}{i-1}$. On en déduit $\delta^r(f(x) - c_0\binom{x}{r}) = 0$ et la proposition s'ensuit par induction.

De ce résultat, on déduit aisément les proposition suivantes.

1.1.12. Proposition

Soit f une fonction polynomiale de $\mathbf{F}_p$ dans $\mathbf{F}_p$. Alors $f(x)$ est combinaison linéaire des fonctions binomiales $\binom{x}{i}$, $0 \leq i < p$.

1.1.13. Proposition

Soit f une fonction polynomiale de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Q}$. Alors $f(x)$ est combinaison linéaire des fonctions binomiales $\binom{x}{i}$, $0 \leq i$.

Soient V, W des k-modules de dimension finie. Si a est une application r-linéaire de V dans W, alors l'application $f(v) := a(v, \ldots, v)$ est polynomiale de degré r. En effet, on a

$$\Delta_r f(v_1, \ldots, v_r) = \sum\nolimits_\sigma a(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}),$$

σ décrivant l'ensemble des permutations. Réciproquement, on a le résultat suivant:

1.1.14. Proposition

On suppose que k est un corps premier. Si $f : V \to W$ est polynomiale avec V et W de dimension finie, alors il existe des applications multilinéaires

$$a_i : V^{\otimes i} \to W \qquad \textit{telles que} \qquad f(v) = \sum_i a_i(v, \ldots, v), \ \forall x.$$

Preuve: On peut supposer $W = k$. Fixons $v, w \in V$, alors l'application qui à $x \in k$ associe $f(v + xw)$ est polynomiale. Soit $e_1, \ldots, e_d$ une base de V. En appliquant inductivement la caractérisation des fonctions polynomiales de k dans k obtenue dans une des propositions précédentes, on montre que la fonction $f(x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d)$ est un polynôme en $x_1, \ldots, x_d$. La conclusion s'ensuit aisément.

1.1.15. *Autres exemples dans la nature*

Une puissance ou une opération de puissance divisée $\gamma_r : A \to A$ est polynomiale. En effet, dans une algèbre aux puissances divisées, on suppose vérifiée l'identité

$$\gamma_r(a+b) - \gamma_r(a) - \gamma_r(b) = \sum_{0<i<r} \gamma_i(a)\gamma_{r-i}(b).$$

De même, une λ-opérations $\lambda^r : A \to A$ est polynomiale: dans un λ-anneau, on suppose vérifiée l'identité

$$\lambda_r(a+b) - \lambda_r(a) - \lambda_r(b) = \sum_{0<i<r} \lambda_i(a)\lambda_{r-i}(b).$$

Le Frobenius d'une algèbre de Lie p-restreinte est polynomial de degré p, car on a la relation de Jacobson qui exprime la différence $F(x+y) - F(x) - F(y)$ comme une somme de polynômes de Lie universels $\phi_i(x,y)$, $0 < i < p$, de degré i en x et $p-i$ en y. Ainsi, pour $p = 2$, on a

$$F(x+y) - F(x) - F(y) = [x,y].$$

On peut aussi calculer la différence p-ième du Frobenius:

$$\Delta_p F(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\sigma(1)=1} [\ldots[[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}], x_{\sigma(3)}], \ldots, x_{\sigma(p)}].$$

(Dans la somme, σ décrit l'ensemble des permutations vérifiant $\sigma(1) = 1$.)

Quelques indications bibliographiques

La structure polynomiale de $k[V]$ a été le centre de nombreux travaux en théorie des groupes (dans ce cadre, on ne suppose pas nécessairement V abélien). Citons à ce sujet les articles de Passi [23], [25] et [26].

1.2. Foncteurs polynomiaux

On fixe une catégorie additive $\mathcal{A}$ et une catégorie abélienne $\mathcal{B}$. On suppose que les morphismes forment des k-modules et que la composition est k-linéaire.

1.2.1. *Extension linéaire*

Par extension linéaire, la composition des morphismes induit

$$k[\mathcal{A}(V,W)] \otimes k[\mathcal{A}(U,V)] \to k[\mathcal{A}(U,W)].$$

Par suite, on peut former une catégorie $k[\mathcal{A}]$ avec les mêmes objets que $\mathcal{A}$ et dont les morphismes sont les groupes $k[\mathcal{A}(X,Y)]$. On notera $\circ$ la composition des morphismes dans $\mathcal{A}$ ou $k[\mathcal{A}]$ pour la distinguer du produit d'algèbre de $k[\mathcal{A}]$. Les formules de distribution suivantes, dont la démonstration est immédiate, nous seront très utiles.

1.2.2. Lemme

Dans $k[\mathcal{A}]$, on a les relations de distribution

$$[\phi] \circ (\Psi_1 \cdots \Psi_n) = ([\phi] \circ \Psi_1]) \cdots ([\phi] \circ \Psi_n),$$
$$(\Phi_1 \cdots \Phi_n) \circ [\psi] = (\Phi_1 \circ [\psi]) \cdots (\Phi_n \circ [\psi]).$$

Comme la composition des morphismes est linéaire, l'extension linéaire de la composition passe au quotient et induit

$$P'_r(\mathcal{A}(V,W)) \otimes P'_r(\mathcal{A}(U,V)) \;\to\; P'_r(\mathcal{A}(U,W)).$$

On définit ainsi des catégories $P'_r(\mathcal{A})$ intermédiaires entre $\mathcal{A}$ et $k[\mathcal{A}]$. On a des analogues pointés $I\mathcal{A}$ et $P_r(\mathcal{A})$ obtenu en prenant respectivement $I\mathcal{A}(V,W)$ et $P_r(\mathcal{A}(V,W))$ comme k-modules de morphismes.

1.2.3. *Foncteurs polynomiaux*

Soit $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur. L'application $T : \mathcal{A}(V,W) \to \mathcal{B}(TV,TW)$ s'étend linéairement en $T : k[\mathcal{A}(V,W)] \to \mathcal{B}(TV,TW)$, et donc T définit un foncteur de $k[\mathcal{A}]$ dans $\mathcal{B}$. On dit que $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est *polynomial de degré inférieur à r* si ce foncteur passe au quotient et induit un foncteur de $P_r(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{B}$. Autrement dit, un foncteur $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est polynomial de degré inférieur à r si l'application

$$T : \mathcal{A}(V,W) \;\to\; \mathcal{B}(TV,TW),\;\; V,W \in \mathcal{A}$$

est polynomiale de degré inférieur à r. On notera $\deg T \leq r$. Comme pour les fonctions polynomiale, on va écrire une caractérisation plus explicite de la notion de foncteur polynomial.

1.2.4. *Effets croisés*

Soient $V_1, \dots, V_r \in \mathcal{A}$. Notons $\pi_i : V_1 \oplus \cdots \oplus V_r \to V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ le projecteur sur la i-ième composante de $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$. On considère l'élément

$$\Pi_r \in k[\mathcal{A}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, V_1 \oplus \cdots \oplus V_r)]$$

qui est défini par

$$\Pi_r = ([\pi_1] - 1) \cdots ([\pi_r] - 1) = \sum_S (-1)^{r-\#S} [\sum_{i \in S} \pi_i].$$

On observe que Π_r est idempotent dans $k[\mathcal{A}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, V_1 \oplus \cdots \oplus V_r)]$ pour le produit de composition.

Par suite, son image par T

$$T(\Pi_r) = \sum_S (-1)^{r-\#S} T(\sum_{i \in S} \pi_i)$$

est idempotent dans $\mathcal{B}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, V_1 \oplus \cdots \oplus V_r)$. L'image de $T(\Pi_r)$, notée $\Delta_r T(V_1, \dots, V_r)$, est appelée le *$r$-ième effet croisé de T*. Quand on ne précise pas le r, il s'agit du 2-ième effet croisé.

1.2.5. LEMME

Le foncteur T est polynomial de degré inférieur à r si et seulement si son $r+1$-ième effet croisé est nul.

Preuve: L'idéal $I\mathcal{A}(V,W)^{r+1}$ est engendré par les élément de la forme $([\phi_1]-1)\cdots([\phi_r]-1)$. En particulier, $\Pi_r \in I\mathcal{A}(V,W)^{r+1}$, ce qui prouve que le $r+1$-ième effet croisé d'un foncteur polynomial de degré inférieur à r est nul. Réciproquement, on a l'identité

$$([\phi_1]-1)\cdots([\phi_r]-1) = [\phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_r] \circ \Pi_{r+1} \circ [\delta],$$

où $\delta : V \to V^{\oplus r+1}$ est l'application diagonale. Aussi, $T(\Pi_r) = 0$ entraine $T(([\phi_1]-1)\cdots([\phi_r]-1)) = 0$.

Comme pour les différences successives d'une fonction (cf. 1.1.9), on peut obtenir les effets croisés d'ordre supérieur par itération du deuxième effet croisé, et en déduire des caractérisations inductives de la notion de foncteur polynomial:

1.2.6. LEMME

L'effet croisé de $\Delta_r T$ par rapport à l'une quelconque de ses variables redonne le $r+1$-ième effet croisé de T.

1.2.7. LEMME

Le foncteur T est polynomial de degré r si et seulement si son effet croisé $\Delta_2 T$ est polynomial de degré $r-1$ par rapport à l'une quelconque de ses variables.

1.2.8. LEMME

Le foncteur T est polynomial de degré r si et seulement si son r-ième effet croisé $\Delta_r T$ est multi-additif.

1.2.9. *Foncteurs constants, additifs, quadratiques*

Explicitons les notions de foncteurs de degré r, pour r petit. Un foncteur de degré 0 est un foncteur constant.

Comme pour les fonctions, on dit qu'un foncteur T est *pointé* si $T(0) = 0$. Un foncteur pointé de degré 1 est un foncteur additif. En effet, dans ce cas, on a une suite exacte courte

$$0 \to \Delta_2 T(V,W) \to T(V \oplus W) \to T(V) \oplus T(W) \to 0,$$

la flèche de droite étant induite par les projections canoniques de $V \oplus W$ sur V, W. Cette suite exacte admet un scindage naturel fournit par les inclusions canoniques de V, W dans $V \oplus W$. Comme principe général, on en tire que $\Delta_2 T$ mesure le défaut d'additivité d'un foncteur T.

Un foncteur T est quadratique (polynomial de degré 2) si et seulement si son effet croisé $\Delta_2 T$ est biadditif.

Comme dans l'étude des fonctions polynomiales (cf. 1.1.6), on peut généraliser la suite exacte précédente et contrôler le noyau de la projection

$$T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \xrightarrow{(T(p_1),\ldots,T(p_r))} T(V_1) \oplus \cdots \oplus T(V_r)$$

au moyen des effets croisés supérieurs:

1.2.10. Proposition

On a la formule de décomposition canonique

$$T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq r} \Delta_s T(V_{i_1}, \ldots, V_{i_s}).$$

Preuve: Comme dans 1.1.6, on déduit la proposition de la formule de décomposition

$$[1] = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq r} ([\pi_{i_1}] - 1) \cdots ([\pi_{i_s}] - 1).$$

On vérifie aussi que les termes de la somme sont orthogonaux deux à deux.

On peut aussi généraliser la suite exacte courte

$$0 \to \Delta_2 T(V, W) \to T(V \oplus W) \to T(V) \oplus T(W) \to 0$$

pour caractériser $\Delta_r T$ comme le noyau d'une application simple:

1.2.11. Lemme

On a une suite exacte courte

$$0 \to \Delta_r T(V_1, \ldots, V_r) \to T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \to \bigoplus_{i=1}^{r} T(V_1 \oplus \cdots \oplus \overset{i}{0} \oplus \cdots \oplus V_r)$$

la flèche de droite étant induite par les projections canoniques de $\oplus_n V_n$ sur $\oplus_{n \neq i} V_n$.

Preuve: On peut déduire ce lemme de la proposition précédente. On va donner une autre preuve en établissant les identités ad hoc dans l'algèbre de groupe $k[\mathrm{Hom}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, V_1 \oplus \cdots \oplus V_r)]$. Il s'agit de montrer l'exactitude de la suite

$$T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \to T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \to \bigoplus_{i=1}^{r} T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r)$$

avec la flèche de gauche induite par Π_r et la flèche de droite par les projections $\sum_{n \neq i} \pi_n = 1 - \pi_i$.

On a déjà $[1 - \pi_i] \circ \Pi_r = 0$, ce qui montre que la composée des flèches est nulle. Ensuite, en distribuant succesivement chacun des facteurs $[\pi_i] - 1$ dans le produit $\Pi_r = ([\pi_1] - 1) \cdots ([\pi_r] - 1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Pi_r &= [\pi_1]([\pi_2] - 1) \cdots ([\pi_r] - 1) - ([\pi_2] - 1) \cdots ([\pi_r] - 1) \\
&= [\pi_1 + \pi_2]([\pi_3] - 1) \cdots ([\pi_r] - 1) \\
&\qquad - \big([\pi_1]([\pi_3] - 1) \cdots ([\pi_r] - 1) + ([\pi_2] - 1) \cdots ([\pi_r] - 1)\big) \\
&= \cdots \\
&= [\pi_1 + \cdots + \pi_r] \\
&\qquad - \big([\pi_1 + \cdots + \pi_{r-1}] + \cdots + [\pi_1 + \cdots + \pi_{i-1}]([\pi_{i+1}] - 1) \cdots ([\pi_r] - 1) + \cdots \\
&\qquad + ([\pi_2] - 1) \cdots ([\pi_r] - 1)\big).
\end{aligned}$$

Notons s_i, $1 \leq i \leq r$, les termes de la somme entre parenthèses. Explicitement, on a $s_i = [\pi_1 + \cdots + \pi_{i-1}]([\pi_{i+1}] - 1) \cdots ([\pi_r] - 1)$. Aussi $s_i \circ [1 - \pi_i] = s_i$. Donc finalement on a obtenu l'identité

$$1 = \Pi_r + s_1 \circ [1 - \pi_1] + \cdots + s_r \circ [1 - \pi_r].$$

Ce qui montre l'exactitude de la suite.

1.2.12. *Le foncteur de Schur associé à une représentation*

Soit K une k-algèbre. Le produit en couronne $K \wr S_r$ est le k-module $K^{\otimes r}[S_r]$ muni du produit

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_r; \sigma) \cdot (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r; \sigma') = (\lambda_1 \lambda'_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_r \lambda'_{\sigma(r)}; \sigma' \sigma).$$

Un $K \wr S_r$-module à droite M est donc un $K^{\otimes r}$-module à droite avec une action de S_r à gauche compatible. Si V est un K-module, alors $V^{\otimes r}$ est un $K \wr S_r$-module à gauche pour le produit

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_r; \sigma) \cdot (v_1, \ldots, v_r) = (\lambda_1 v_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_r v_{\sigma(r)}).$$

On considère alors

$$t(M, V) := (M \otimes_{K^{\otimes r}} V^{\otimes r})_{S_r} \qquad \text{et} \qquad \gamma(M, V) := (M \otimes_{K^{\otimes r}} V^{\otimes r})^{S_r}.$$

1.2.13. Proposition

Les foncteurs $t(M, -)$ et $\gamma(M, -)$ sont polynomiaux de degré r.

Cette proposition est une conséquence du calcul suivant:

1.2.14. Lemme

Si $T = t(M, -)$ ou $T = \gamma(M, -)$, alors on a l'identité

$$\Delta_r T(V_1, \ldots, V_r) = M \otimes_{K^{\otimes r}} (V_1 \otimes \cdots \otimes V_r),$$

pour tout K-modules $V_1, \ldots, V_r$.

Preuve: Décrivons le calcul pour $T = t(M, -)$. On a la suite exacte courte

$$0 \to \bigoplus_{s+t=r} (M \otimes_{K^{\otimes r}} V^{\otimes s} \otimes W^{\otimes t})_{S_s \times S_t} \to T(M, V \oplus W) \to T(M, V) \oplus T(M, W) \to 0.$$

On en déduit l'identité (cf. 1.2.9):

$$\Delta_2 T(V, W) = \bigoplus_{s+t=r} (M \otimes_{K^{\otimes r}} V^{\otimes s} \otimes W^{\otimes t})_{S_s \times S_t}.$$

On applique le même procédé pour calculer l'effet croisé de $\Delta_2 T(V, W)$ par rapport à V et ainsi de suite jusqu'à obtenir $\Delta_r T$.

1.2.15. *Foncteurs homogènes*

On suppose $k = \mathbf{F}_p$. Dans ce cas, $\Gamma(V) = \oplus_r (V^{\otimes r})^{S_r}$ représente l'algèbre aux puissances divisées libres engendrée par V. Si $v \in V$, alors sa puissance divisée dans $\Gamma(V)$ est donnée par la puissance tensorielle $\gamma_r(v) = v^{\otimes r}$. On note $\Gamma_r(V) = (V^{\otimes r})^{S_r}$ la partie de poids r de $\Gamma(V)$. On a un produit associatif

$$\Gamma_r(V) \otimes \Gamma_r(W) \to \Gamma_r(V \otimes W)$$

induit par l'application évidente

$$V^{\otimes r} \otimes W^{\otimes r} \to (V \otimes W)^{\otimes r}.$$

Aussi, pour toute catégorie additive k-linéaire $\mathcal{A}$, on a une catégorie $\Gamma_r(\mathcal{A})$ dont les morphismes sont donnés par les k-modules $\Gamma_r(\mathcal{A}(X,Y))$. L'opération de puissance divisée induit un foncteur

$$\gamma_r : \mathcal{A} \to \Gamma_r(\mathcal{A}).$$

Un foncteur pointé est dit *homogène de degré* r s'il factorise par γ_r. Les foncteurs $t(M,V)$ et $\gamma(M,V)$ introduits au numéro précédent sont homogènes de degré r.

L'application de puissance divisée étant polynomiale, on a une factorisation naturelle $\gamma_r = \eta_r \circ p_r$ pour un certain $\eta_r : I(V)/I(V)^{r+1} \to \Gamma_r(V)$. On constate que η_r induit en fait un foncteur de $P_r(\mathcal{A})$ dans $\Gamma_r(\mathcal{A})$ (il suffit de vérifier que η_r préserve le produit de composition, ce qui est à peu près immédiat). Par suite, un foncteur T homogène de degré r est polynomial de degré inférieur à r. On peut retrouver cette assertion en explicitant l'effet croisé de T.

Notons toujours $\pi_i : V_1 \oplus \cdots \oplus V_s \to V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ la projection sur la i-ième composante. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ des entiers tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = r$. L'élément

$$\gamma_{\alpha_1}(\pi_1) \cdots \gamma_{\alpha_s}(\pi_s)$$

est idempotent dans $\Gamma_r(\mathcal{A}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_s, V_1 \oplus \cdots \oplus V_s))$. L'image de cet idempotent est notée $T^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}(V_1, \ldots, V_s)$, on l'appelle l'*effet croisé homogène* de T. Les effets croisés homogènes entrent dans une formule de décomposition

$$T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_s) = \bigoplus_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = r} T^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}(V_1, \ldots, V_s).$$

En fait, dans une algèbre aux puissances divisées, on a l'identité

$$\gamma_r(\pi_1 + \cdots + \pi_s) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = r} \gamma_{\alpha_1}(\pi_1) \cdots \gamma_{\alpha_s}(\pi_s)$$

et on vérifie aussi que les termes de la somme sont des idempotents orthogonaux. Le lemme suivant peut se déduire de cette formule. Finalement, la formule de décomposition précédente est un rafinement de la formule de décomposition générale

$$T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_s) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq s} \Delta_t T(V_{i_1}, \ldots, V_{i_t}).$$

1.2.16. Lemme (cf. [5])

Les effets croisés de T se décomposent en somme d'effet croisés homogènes. Explicitement, on a

$$\Delta_s T(V_1, \ldots, V_s) = \bigoplus_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=r} T^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}(V_1, \ldots, V_s)$$

(on somme sur des familles d'entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ non nuls).

En particulier, il est clair que $\Delta_s T(V_1, \ldots, V_s)$ est nul pour $s > r$ puisque dans l'identité du lemme l'ensemble de sommation est vide. La notion de foncteur homogène a été introduite par Bousfield (cf. [5]).

Le foncteur I, qui à V associe l'idéal d'augmentation de $k[V]$, n'est pas polynomial, comme le montre la proposition suivante.

1.2.17. Proposition

On a $\Delta_r I(V_1, \ldots, V_r) = I(V_1) \otimes \cdots \otimes I(V_r)$. Plus précisément, l'application $\pi : I(V_1) \otimes \cdots \otimes I(V_r) \to \Delta_r I(V_1, \ldots, V_r)$ définie par la formule

$$\pi\big(([v_1]-1) \otimes \cdots \otimes ([v_r]-1)\big)$$
$$:= [(v_1, 0, \ldots, 0)] - 1) \cdots ([(0, \ldots, v_i, \ldots, 0)] - 1) \cdots ([(0, \ldots, 0, v_r)] - 1)$$

est un isomorphisme.

Preuve: On vérifie que l'application $\pi' : I(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \to I(V_1) \otimes \cdots \otimes I(V_r)$ définie par la formule

$$\pi'([v]-1) = ([\pi_1(v)]-1) \otimes \cdots \otimes ([\pi_r(v)]-1).$$

induit un isomorphisme réciproque.

Par contre le foncteur P_r, qui à V associe le quotient $I(V)/I(V)^{r+1}$ est polynomial. L'application $\pi : I(V_1) \otimes \cdots \otimes I(V_r) \to \Delta_r I(V_1, \ldots, V_r)$ introduite plus haut passe au quotient: on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
I(V_1) \otimes \cdots \otimes I(V_r) & \xrightarrow{\pi} & \Delta_r I(V_1, \ldots, V_r) & \hookrightarrow & I(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
V_1 \otimes \cdots \otimes V_r & \xrightarrow{\pi} & \Delta_r P_r(V_1, \ldots, V_r) & \hookrightarrow & P_r(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r)
\end{array}$$

Les projections

$$I(V_1) \otimes \cdots \otimes I(V_r) \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \qquad \text{et} \qquad I(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \to P_r(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r)$$

ont des sections (ensemblistes) et le diagramme correspondant commute. En conclusion:

1.2.18. Proposition

On a $\Delta_r P_r(V_1, \ldots, V_r) = V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$*. Plus précisément, l'application* $\pi : V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \to \Delta_r P_r(V_1, \ldots, V_r)$ *définie par la formule*

$$\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) := [(v_1, 0, \ldots, 0)] - 1) \cdots ([(0, \ldots, v_i, \ldots, 0)] - 1) \cdots ([(0, \ldots, 0, v_r)] - 1)$$

est un isomorphisme.

Quelques indications bibliographiques

Les modules d'effets croisés des foncteurs ont été introduits en théorie de l'homotopie par Eilenberg et Mac Lane dans [13]. Les progrès récents de la discipline ont permis de mieux comprendre les travaux d'Eilenberg-Mac Lane et la place des foncteurs polynomiaux en théorie de l'homotopie (cf. [18]). Mentionnons aussi que les notions développées dans cette section sont des outils privilégiés pour appliquer l'algèbre homologique aux catégories de foncteurs:

- soit pour l'étude des foncteurs dérivés à la Dold-Puppe et de leurs relations avec les opérations de Steenrod (cf. [11], [5], [6], [10]);
- soit pour le calcul de l'homologie de Mac Lane (cf. [17], [29], [14]).

Des notions plus ou moins voisines de foncteur polynomial existent aussi en théorie des représentations (cf. [16], [19], [20], [21]).

Pour un exposé de la théorie des foncteurs polynomiaux en caractéristique nulle, on pourra consulter [22]. Sinon, à ma connaissance, il n'existe pas d'ouvrage ou d'article de synthèse sur le sujet.

Récemment, des tentatives ont été faites pour étendre la théorie au cadre non abélien. Dans cette direction, on consultera [2], [3] et [31].

§2. Filtration polynomiale. Applications

Soit toujours $\mathcal{A}$ une catégorie additive et $\mathcal{B}$ une catégorie abélienne k-linéaire. On note $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ nuls en 0 et $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la sous-catégorie pleine formée par les foncteurs de degré inférieur à r. Ainsi $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est la catégorie des foncteurs additifs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Le but de cette partie est d'étudier la filtration de catégories

$$\mathcal{F}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{F}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{F}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Dans la première section, on construit des flèches $lt_r : \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathcal{F}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et $rt_r : \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathcal{F}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ respectivement adjointe à gauche et à droite de l'inclusion. Dans la deuxième section, on identifie les sous quotients de la filtration

$$\mathcal{F}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})/\mathcal{F}_{r-1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

aux catégories de représentations des groupes symétriques S_r. Les résultats de cette partie sont pour la plupart dus à Pirashvili et contenus dans l'article [28].

2.1. Foncteurs analytiques

2.1.1. *Notations*

On note $i_n : V \to V^{\oplus r}$ l'inclusion de la n-ième composante de $V^{\oplus r}$ et $p_n : V^{\oplus r} \to V$ la projection sur la n-ième composante $V^{\oplus r}$. On a ainsi $\pi_n = i_n p_n$. On note $\Delta_r \in k[\mathcal{A}(V, V^{\oplus r})]$ le produit

$$\Delta_r = ([i_1] - 1) \cdots ([i_r] - 1) = \sum_S (-1)^{r - \# S} [\sum_{n \in S} i_n].$$

De sorte qu'on a l'identité $\Delta_r = \Pi_r \circ [\delta]$, $\delta : V \to V^{\oplus r}$ désignant la diagonale $\delta = i_1 + \cdots + i_r$. De même, on note $\nabla_r \in k[\mathcal{A}(V^{\oplus r}, V)]$ le produit

$$\nabla_r = ([p_1] - 1) \cdots ([p_r] - 1) = \sum_S (-1)^{r - \# S} [\sum_{n \in S} p_n].$$

De sorte qu'on a l'identité $\nabla_r = [\sigma] \circ \Pi_r$, $\sigma : V^{\oplus r} \to V$ désignant la codiagonale $\sigma = p_1 + \cdots + p_r$.

On se donne un foncteur T. On considère le foncteur quotient $lt_r\, T := \operatorname{coker} T(\nabla_{r+1})$ et le sous foncteur $rt_r\, T := \ker T(\Delta_{r+1})$.

Le but de cette section est de montrer les résultats suivant:

2.1.2. Lemme

Les foncteurs $lt_r\, T$, $rt_r\, T$ sont polynomiaux de degré inférieur à r.

2.1.3. Théorème

Les foncteurs $lt_r, rt_r : \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathcal{F}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sont respectivement adjoint à gauche et adjoint à droite de l'inclusion inc : $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. De plus, la counité de l'adjonction entre lt_r et inc est un isomorphisme ainsi que l'unité de l'adjonction entre inc et rt_r. (Autrement dit, $\deg T \leq r$ entraine $lt_r\, T = T$ et $T = rt_r\, T$.)

Ce théorème comprend en particulier le résultat suivant:

2.1.4. Corollaire

Le foncteur $rt_r\, T$ est le plus grand sous foncteur de T de degré inférieur à r: si on a $S \hookrightarrow T$ avec $\deg S \leq r$ alors S est contenu dans $rt_r\, T$.

Le foncteur $lt_r\, T$ est le plus petit quotient de T de degré inférieur à r: si S est un quotient de T avec $\deg S \leq r$ alors la projection $T \to S$ factorise par $lt_r\, T$.

En particulier, on a une filtration de T par des foncteurs polynomiaux

$$rt_1\, T \hookrightarrow rt_2\, T \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow rt_r\, T \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow T.$$

Dans la section 2.2, on montrera que l'on peut approximer les sous quotients de cette filtration par des foncteurs de la forme

$$t(M, V) = (M \otimes_{K^{\otimes r}} V^{\otimes r})^{S_r},$$

le coefficient M étant une représentation du groupe symétrique (cf. 1.2.12). Quand cette filtration est exhaustive (explicitement, $T = \operatorname{colim}_r rt_r\, T$), on dit que T est *analytique*. On a une autre filtration utilisant les foncteurs lt_r. La notion de foncteur analytique a été introduite par Henn, Lannes et Schwartz dans l'étude de la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod (cf. [18]).

Avant de montrer ces résultats, on donne une interprétation de $rt_r T$ en termes d'éléments.

2.1.5. *Eléments polynomiaux* (cf. [18])

Soit x un élément de $T(V)$. On a une application d'évaluation en x qui à $\phi \in \mathcal{A}(V, W)$ associe l'élément $T(\phi)(x) \in T(W)$. On dit que x est polynomial de degré r si cette application est polynomiale de degré r, quelque soit l'objet $W \in \mathcal{A}$. Ainsi, par définition, T est polynomial si tout les éléments $x \in T(V)$ sont polynomiaux. Le résultat suivant montre que $rt_r T = \ker \Delta_{r+1}$ est en fait le sous foncteur de T constitué des éléments polynomiaux de degré inférieur à r.

2.1.6. Lemme

L'élément $x \in T(V)$ est polynomial de degré inférieur à r si et seulement si il vérifie $T(\Delta_{r+1})(x) = 0$.

Preuve: Ce lemme se montre de la même façon que le lemme 1.2.5 caractérisant les foncteurs polynomiaux.

Les résultats énoncés au début de cette section sont des conséquences faciles du lemme suivant:

2.1.7. Lemme

Les assertions suivantes sont équivalentes:
(1) Le foncteur T est polynomial de degré inférieur à r.
(2) L'application $T(\Pi_{r+1}) : T(V^{\oplus r+1}) \to T(V^{\oplus r+1})$ est nulle pour tout V.
(3) L'application $T(\Delta_{r+1}) : T(V) \to T(V^{\oplus r+1})$ est nulle pour tout V.
(4) L'application $T(\nabla_{r+1}) : T(V) \to T(V^{\oplus r+1})$ est nulle pour tout V.

Preuve: L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est claire. Les implications (2) $\Rightarrow$ (3), (4) sont claires vu les identités

$$\Delta_{r+1} = \Pi_{r+1} \circ [\delta] \qquad \text{et} \qquad \nabla_{r+1} = [\sigma] \circ \Pi_{r+1}.$$

Réciproquement, si $V_1, \ldots, V_{r+1} \in \mathrm{Mod}_k$, alors on note $\Pi_{r+1}(V_1, \ldots, V_{r+1})$ l'idempotent de $k[\mathcal{A}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_{r+1}, V_1 \oplus \cdots \oplus V_{r+1})]$ correspondant. Soit $V = \oplus_n V_n$. L'inclusion canonique de V_n dans V sera notée j_n et la projection canonique de V sur V_n sera notée q_n. L'assertion (2) $\Rightarrow$ (1) résulte alors de l'identité

$$\Pi_{r+1}(V_1, \ldots, V_{r+1}) = [\oplus_n q_n] \circ \Pi_{r+1}(V, \ldots, V) \circ [\oplus_n j_n].$$

De même, les assertions (3), (4) $\Rightarrow$ (1) résultent des identités

$$\Pi_{r+1}(V_1, \ldots, V_{r+1}) = [\oplus_n q_n] \circ \Delta_{r+1} = \nabla_{r+1} \circ [\oplus_n j_n].$$

Exemple

On a clairement $P_r = lt_r\, I$. En effet, par définition $P_r(V) = I(V)/I(V)^{r+1}$. Autrement dit, on a une suite exacte courte

$$I^{\otimes r+1} \to I \to P_r \to 0.$$

Mais $I^{\otimes r+1} = \Delta_{r+1} I$ (cf. proposition 1.2.17) et $P_r(V)$ s'identifie au conoyau de ∇_{r+1}.

2.2. Recollement

Fixons une k-algèbre K. On note Mod_K la catégorie des modules à gauche sur K et $\mathcal{M}at(K)$ la sous catégorie formée par les K-modules libres de type fini. A partir de maintenant, on fixe $\mathcal{A} = \mathcal{M}at(K)$ et $\mathcal{B} = \mathrm{Mod}_K$. Comme on ne considère plus que des foncteurs entre ces catégories, on simplifie nos notations en $\mathcal{F}_r(K) = \mathcal{F}_r(\mathcal{M}at(K), \mathrm{Mod}_K)$ et $\mathcal{F}(K) = \mathcal{F}(\mathcal{M}at(K), \mathrm{Mod}_K)$. Dans ce cadre, on va compléter les résultats de la section précédente. Principalement, on montre que les foncteurs lt_{r-1}, inc, rt_{r-1} s'insèrent dans un *diagramme de recollement* (cf. définition 2.2.7)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{r-1}(K) \arrow[r, "inc"] & \mathcal{F}_r(K) \arrow[l, bend right, "lt_{r-1}"'] \arrow[l, bend left, "rt_{r-1}"] \arrow[r, "q"] & \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r} \arrow[l, bend right, "t"'] \arrow[l, bend left, "\gamma"] \end{tikzcd}.$$

La notation $\mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r}$ désigne la catégorie des K-$K \wr S_r$-bimodules (cf. 1.2.12). Un tel diagramme s'appelle aussi une *échelle à trois barreaux*. Il en découlera une équivalence de catégories

$$\mathcal{F}_r(K)/\mathcal{F}_{r-1}(K) = \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r}\,.$$

Commençons par identifier les K-$K \wr S_r$-bimodules aux *foncteurs r-additifs et symétriques*:

2.2.1. Lemme

Soit M un K-$K \wr S_r$-bimodule. On lui fait correspondre le foncteur qui à $V_1, \ldots, V_r \in \mathcal{M}at(K)$ associe le K-module

$$M \otimes_{K^{\otimes r}} V_1 \otimes \cdots \otimes V_r.$$

Cette construction induit un isomorphisme de la catégorie des K-$K \wr S_r$-bimodules dans la catégorie des foncteurs r-additifs et symétriques de $\mathcal{M}at(K)$ dans Mod_K.

2.2.2. *Construction de l'équivalence inverse*

Soit T un foncteur r-additif et symétrique de $\mathcal{M}at(K)$ dans Mod_K. L'image de T par l'équivalence inverse est donnée par le K-module $M = T(K, \ldots, K)$ qui est muni d'une structure de $K \wr S_r$-module canonique. D'abords $T(K, \ldots, K)$ est muni d'une action de S_r comme T est supposé symétrique. La structure de $K^{\otimes r}$-module à droite est donnée comme suit. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$. Par multiplication par λ_i, on obtient des applications linéaires $\hat{\lambda}_i : K \to K$, pour $i = 1, \ldots, r$. Lesquelles induisent $T(\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_r) : T(K, \ldots, K) \to T(K, \ldots, K)$. Et ceci définit l'action du tenseur $\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_r$ sur $T(K, \ldots, K)$.

2.2.3. *Construction de l'échelle*

Pour T foncteur r-additif et symétrique, on pose

$$t(T,V) := T(V,\ldots,V)_{S_r} \qquad \text{et} \qquad \gamma(T,V) := T(V,\ldots,V)^{S_r}.$$

Soit $T \in \mathcal{F}_r(K)$. Le foncteur $\Delta_r T$ est r-additif. De plus il est muni d'une action du groupe symétrique, induite par la permutation des composantes: une permutation $\sigma \in S_r$ définit une transformation naturelle

$$\sigma_* : V_1 \oplus \cdots \oplus V_r \ \rightarrow \ V_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus V_{\sigma(r)};$$

il n'est pas difficile de vérifier que $[\sigma_*]$ commute à Π_r et l'action de σ sur $\Delta_r T$ s'en déduit. On pose alors $q(T) := \Delta_r T$. Via l'identification de catégories obtenue précédemment, on a construit le diagramme

$$\mathcal{F}_r(K) \overset{\xleftarrow{t}}{\underset{\xleftarrow[\gamma]{}}{\xrightarrow{q}}} \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r}.$$

On peut expliciter la valeur des foncteurs t et γ sur un objet de $\mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r}$. On retrouve les foncteurs introduits précédemment (cf. 1.2.12): pour $M \in \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r}$ et $V \in \mathcal{M}at(K)$, on a

$$t(M,V) := (M \otimes_{K^{\otimes r}} V^{\otimes r})_{S_r} \qquad \text{et} \qquad \gamma(M,V) := (M \otimes_{K^{\otimes r}} V^{\otimes r})^{S_r}.$$

2.2.4. Théorème

Les foncteurs $t, \gamma : \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r} \rightarrow \mathcal{F}_r(K)$ sont respectivement adjoint à gauche et à droite de $q : \mathcal{F}_r(K) \rightarrow \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r}$. De plus, la counité de l'adjonction entre t et q et un isomorphisme ainsi que l'unité de l'adjonction entre t et γ. (Autrement dit, $q(t(M,-)) = M$ et $M = q(\gamma(M,-))$, $\forall M$.)

Preuve:

Soit T un foncteur. Par symétrie de Π_r, l'application $T(\Delta_r) : T(V) \rightarrow T(V^{\oplus r})$ a son image contenue dans $\gamma(q(T),V) = \Delta_r T(V,\ldots,V)^{S_r}$. Rappelons qu'on a l'identité $\Delta_r = \Pi_r \circ [\delta]$ (cf. 2.1.1). Donc Δ_r induit un morphisme $\eta_T : T \rightarrow \gamma(q(T))$.

D'autre part, le lemme 1.2.14 montre qu'on a un isomorphisme

$$\Delta_r T(V_1,\ldots,V_r) = M \otimes_{K^{\otimes r}} (V_1 \otimes \cdots \otimes V_r),$$

pour $T = t(M)$ ou $T = \gamma(M)$. En particulier, on a un isomorphisme $\epsilon_M : q(\gamma(M,-)) \rightarrow M$.

Il n'est pas difficile de voir que η et ϵ sont respectivement l'unité et la counité d'une adjonction entre q et γ.

De même, l'application $T(\nabla_r) : T(V^{\oplus r}) \rightarrow T(V)$ factorise par le quotient

$$T(V^{\oplus r}) \rightarrow \Delta_r T(V,\ldots,V) \rightarrow \Delta_r T(V,\ldots,V)_{S_r}$$

et induit $\epsilon_T : t(q(T),V) = \Delta_r T(V,\ldots,V)_{S_r} \rightarrow T(V)$. Avec l'isomorphisme $\eta_M : M \rightarrow q(t(M,-))$ fourni par le lemme 1.2.14, on obtient une adjonction entre t et q.

2.2.5. *Localisation dans les catégories abéliennes* (cf. [15])

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $\mathcal{A}' \hookrightarrow \mathcal{A}$ une sous catégorie pleine. On dit que $\mathcal{A}'$ est *épaisse* si elle vérifie les conditions suivantes:
(1) $\mathcal{A}'$ est stable par les petites sommes directes;
(2) pour toute suite exacte courte dans $\mathcal{A}$, soit $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$, on a

$$X \in \mathcal{A}' \iff X', X'' \in \mathcal{A}'.$$

Etant donné une sous catégorie épaisse, $\mathcal{A}' \hookrightarrow \mathcal{A}$, on peut former la catégorie abélienne quotient $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$. On a un foncteur exact $q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{A}'$ tel que $t(X') = 0$ pour tout $X' \in \mathcal{A}'$. De plus $q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{A}'$ est universel parmi ces foncteurs: soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ un foncteur exact; si $f(X') = 0$ pour tout $X' \in \mathcal{A}'$, alors il existe un unique foncteur $f' : \mathcal{A}/\mathcal{A}' \to \mathcal{M}$ avec un isomorphisme $f \cong f'q$. On dira aussi que

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{A}' \to 0$$

est une suite exacte courte de catégories abéliennes.

Comme l'effet croisé est exact, $\mathcal{F}_{r-1}(K)$ est une sous catégorie épaisse de $\mathcal{F}_r(K)$. Comme annoncé dans l'introduction, on va établir le théorème suivant:

2.2.6. THÉORÈME

Le foncteur $q : \mathcal{F}_r(K) \to \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r}$ est exact et identifie $\mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r}$ à la catégorie quotient $\mathcal{F}_r(K)/\mathcal{F}_{r-1}(K)$.

Pour montrer ce résultat, on va utiliser l'idée du recollement des faisceaux.

2.2.7. *Donnée de recollement*

Une *donnée de recollement* est un diagramme de catégories abéliennes de la forme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r, "i_*=i_!" description] & \mathcal{A} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*=j^!" description] & \mathcal{A}'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}.$$

Tout les foncteurs sont supposés exacts et chaque flèche est adjointe à gauche à la flèche qui lui est immédiatement inférieure. De plus, on suppose vérifiées les hypothèses suivantes:
(1) i_*, j_*, $j_!$ sont des plongements;
(2) pour tout $X \in \mathcal{A}$, on a des suites exactes courtes

$$0 \to i_!i^!X \to X \to j_*j^*X \to 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \to j_!j^!X \to X \to i_*i^*X \to 0$$

formées avec les unités et counités des adjonctions;
(3) on a $j^*i_* = 0$ (et donc, par adjonction $i^*j_! = 0$ et $i^!j_* = 0$).
Ces conditions entrainent que chaque ligne dans le diagramme est une suite exacte courte de catégories. Cependant, ce résultat ne s'applique pas tout à fait à notre situation: *inc* et q sont exacts, mais lt_n et t sont exacts à gauche seulement, et rt_n et γ sont exacts à droite seulement. Néanmoins, le lemme suivant montre qu'une “semi-donnée de recollement” suffit à prouver que

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}' \xrightarrow{i_*} \mathcal{A} \xrightarrow{j^*} \mathcal{A}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de catégories.

2.2.8. Lemme

On se donne un diagramme de catégories abéliennes

$$\mathcal{A}' \underset{i_*}{\overset{i^*}{\leftrightarrows}} \mathcal{A} \underset{j^!}{\overset{j_!}{\leftrightarrows}} \mathcal{A}''$$

avec i_*, $j^!$ *exacts et* i^*, $j_!$ *exacts à droite. On suppose que ces foncteurs vérifient les hypothèses suivantes:*
(1) i_*, $j_!$ *sont des plongements;*
(2) pour tout $X \in \mathcal{A}$, *on a une suite exacte*

$$j_! j^! X \to X \to i_* i^* X \to 0$$

formée avec les unités et counités des adjonctions;
(3) on a $j^! i_* = 0$ *et* $j^! j_! = 1$.
Alors le foncteurs $j^! : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$ *identifie* $\mathcal{A}''$ *à la catégorie quotient* $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$.

Preuve:

La preuve de ce lemme est purement formelle. On montre d'abords l'assertion suivante:

Affirmation: $j^! X = 0$ *si et seulement si* $X \in i_* \mathcal{A}'$.

Maintenant, étant donné un foncteur exact $f : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$, on vérifie que la seule factorisation par $j^!$ possible est donnée par $f' = f j_!$. L'affirmation suivante montre que f' est exact et l'isomorphisme $f \cong f' j^!$ résulte de l'affirmation qui suit.

Affirmation: *Le foncteur* $j_!$ *est exact modulo* $i_*(\mathcal{A}')$. *Plus précisément, si* $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ *est exact dans* $\mathcal{A}''$, *alors on a une suite exacte*

$$j_! X' \to j_! X \to j_! X'' \to 0$$

et le noyau de la première flèche appartient à $i_* \mathcal{A}'$.

Affirmation: *la counité d'adjonction* $\epsilon_X : j_! j^! X \to X$ *est un isomorphisme modulo* $i_*(\mathcal{A}')$ *(i.e.* $\ker \epsilon_X, \operatorname{coker} \epsilon_X \in i_* \mathcal{A}'$*).*

2.2.9. Lemme

Le diagramme

$$\mathcal{F}_{r-1}(K) \underset{inc}{\overset{lt_{r-1}}{\leftrightarrows}} \mathcal{F}_r(K) \underset{q}{\overset{t}{\leftrightarrows}} \mathrm{Mod}_{K - K \wr S_r}$$

vérifie les hypothèses du lemme précédent.

Preuve:

C'est clair. Par exemple, dans ce cas, la suite exacte du lemme 2.2.8 s'écrit

$$\begin{array}{ccccccc} T(V^{\oplus r}) & & & & & & \\ \text{proj} \downarrow & & \searrow T(\nabla_r) & & & & \\ \Delta_r T(V, \dots, V)_{S_r} & \to & T(V) & \to & lt_{r-1} T(V) & \to & 0. \end{array}$$

Ce lemme complète la preuve du théorème 2.2.6. De façon symétrique, on aurait pu utiliser l'autre “semi-donnée de recollement”

$$\mathcal{F}_{r-1}(K) \underset{rt_{r-1}}{\overset{inc}{\rightleftarrows}} \mathcal{F}_r(K) \underset{\gamma}{\overset{q}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r}$$

pour prouver le théorème.

En caractéristique nulle, on a un résultat beaucoup plus fort. En effet, on voit facilement $\nabla_r \circ \Delta_r = r!$. Rappelons que l'unité de l'adjonction entre γ et q est induite par ∇_r et la counité de l'adjonction entre t et q est induite par Δ_r. Par suite, en composant cette unité d'adjonction $T(V) \to \Delta_r T(V,\dots,V)^{S_r}$ avec l'application canonique $T(V,\dots,V)^{S_r} \to T(V,\dots,V)_{S_r}$ on obtient une rétraction dans la suite introduite dans le lemme précédent. Explicitement, on a une suite exacte courte

$$0 \to \Delta_r T(V,\dots,V)_{S_r} \to T(V) \to lt_{r-1}T(V) \to 0$$

avec un scindage naturel. Donc finalement

2.2.10. Théorème

On suppose que K est une $\mathbf{Q}$-algèbre. Dans ce cas, la suite exacte courte de catégories abéliennes

$$\mathcal{F}_{r-1}(K) \to \mathcal{F}_r(K) \to \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r}$$

est scindée et on a $\mathcal{F}_r(K) = \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r} \times \mathcal{F}_{r-1}(K)$. Autrement dit, tout objet $T \in \mathcal{F}_r(K)$ admet une décomposition naturelle

$$T = S \oplus t(M,-)$$

avec $S \in \mathcal{F}_{r-1}(K)$ et $M \in \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_r}$.

Quelques indications bibliographiques

La notion de donnée de recollement a été introduite en théorie des faisceaux pervers par Beilinson, Bernstein, Deligne dans [4]. Pour d'autres applications en théorie des représentations, on pourra consulter [9] et aussi [19]. On trouvera une autre preuve de l'existence de l'isomorphisme

$$\mathcal{F}_r(K) = \prod_{t=0}^{r} \mathrm{Mod}_{K-K\wr S_t}$$

en caractéristique nulle dans le livre de Macdonald [22].

2.3. Générateurs polynomiaux

La lettre $\mathcal{M}$ désigne une catégorie abélienne. On suppose que toutes les petites sommes existent dans $\mathcal{M}$ et sont exactes. Explicitement, si on a des suites exactes $0 \to A_i' \to A_i \to A_i'' \to 0$, $i \in I$, alors la suite des sommes $0 \to \oplus_i A_i' \to \oplus_i A_i \to \oplus_i A_i'' \to 0$ est exacte.

Soit $P \in \mathcal{M}$ un objet. On dit que P est *projectif* si le foncteur $\mathcal{M}(P,-)$ est exact. On dit que P est *petit* si le foncteur $\mathcal{M}(P,-)$ préserve les sommes. On dit que P est *générateur* si tout objet $X \in \mathcal{M}$, est le quotient d'une petite somme de copies de P.

Si $\mathcal{M}$ est la catégorie des modules à gauche sur un anneau R, alors $P = R$ est un petit générateur projectif. Réciproquement, on a le résultat suivant du à Gabriel, qui caractérise les catégories de modules sur un anneau:

2.3.1. Théorème

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie abélienne comme ci-dessus. On suppose que $P \in \mathcal{M}$ est un petit générateur projectif. Alors le foncteur $\mathcal{M}(P,-)$ de $\mathcal{M}$ dans les $\mathcal{M}(P,P)$-modules à gauche est une équivalence de catégories abéliennes.

Comme dans la section précédente, on travaille sur une k-algèbre fixée K. Rappelons que Mod_K désigne la catégorie des modules à gauche sur K, et que $\mathcal{M}at(K)$ désigne la sous catégorie formée par les K-modules libres de type fini. On restreint toujours notre étude à $\mathcal{F}(K) = \mathcal{F}(\mathcal{M}at(K), \mathrm{Mod}_K)$ et $\mathcal{F}_r(K) = \mathcal{F}_r(\mathcal{M}at(K), \mathrm{Mod}_K)$. Regardons d'abords si $\mathcal{M} = \mathcal{F}(K)$ vérifie les hypothèses du théorème de Gabriel.

Soit K_s le foncteur

$$K_s(V) = K[V^s] = K[\mathrm{Mod}_K(K^s, V)].$$

On note I_s l'idéal d'augmentation de K_s. Ainsi, $I_1 = I$ (aux coefficients près). D'après le lemme de Yoneda, pour tout T tel que $T(0) = 0$, on a

$$\mathrm{Hom}(I_s, T) = T(K^s).$$

Donc I_s est petit et projectif. De plus, on a un épimorphisme canonique

$$\oplus_{x \in T(K^s)} I_s \to T.$$

Donc $\oplus_s I_s$ engendre $\mathcal{F}(K)$. Malheureusement, $\oplus_s I_s$ n'est pas petit, car c'est une somme infinie, ce qui empêche d'appliquer le résultat de Gabriel à $\mathcal{F}(K)$.

Le fait de se restreindre aux foncteurs polynomiaux permet de surmonter cette difficultée: si T est polynomial, alors $T(K^s)$ ne dépend que d'un nombre fini d'effets croisés. En fait, le foncteur d'effet croisé est représentable, au même titre que l'évaluation en K^s:

2.3.2. Lemme

Soit $T(0) = 0$. On a l'identité $\mathrm{Hom}(I^{\otimes s}, T) = \Delta_s T(K, \ldots, K)$.

Preuve: Notons e_i, $i = 1, \ldots, s$ les vecteurs de la base canonique de K^s. A $\phi : I^{\otimes s} \to T$, on associe l'image par ϕ du tenseur

$$([u_1] - 1) \otimes \cdots \otimes ([u_s] - 1) \in I(K^s)^{\otimes s}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cette image est invariante par $T(\Pi_s) : T(K^s) \to T(K^s)$ et donc, appartient en fait à $\Delta_s T(K, \ldots, K)$.

A $x \in T(K^s)$, on associe la transformation $\psi : I^{\otimes s} \to T$ qui est définie comme suit. Soit $v_i \in I(V)$, $i = 1, \ldots, s$. On note $\hat{v}_i : K^s \to V$ l'application définie par la formule $\hat{v}_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) := \lambda_i v_i$. On pose

$$\psi(([v_1] - 1) \otimes \cdots \otimes ([v_s] - 1)) := T(([\hat{v}_1] - 1) \cdots ([\hat{v}_s] - 1))(x).$$

Le lecteur vérifiera aisément que ces applications induisent des isomorphismes réciproques entre $\mathrm{Hom}(I^{\otimes s}, T)$ et $\Delta_s T(K, \ldots, K)$.

Exercice: Montrer que ces isomorphismes rendent le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\Delta_s I, T) & = & \Delta_s T(K, \ldots, K) \\ {\scriptstyle \nabla_s^*} \uparrow \downarrow {\scriptstyle \Delta_s^*} & & {\scriptstyle \Delta_s} \downarrow \uparrow {\scriptstyle \nabla_s} \\ \mathrm{Hom}(I, T) & = & T(K) \end{array}$$

Par adjonction, on obtient des foncteurs $P_r^s := lt_r\, I^{\otimes s}$ tels que P_r^s représente le s-ième effet croisé dans $\mathcal{F}_r(K)$. Comme on l'a mentionné, la formule de décomposition

$$T(K^t) = \bigoplus_{0 \le s \le r} \frac{t!}{s!(t-s)!} \Delta_s T(K, \ldots, K)$$

entraine que les P_r^s engendrent $\mathcal{F}_r(K)$. Finalement, on a obtenu:

2.3.3. Lemme

Les foncteurs P_r^s, $s = 1, \ldots, r$ forment un ensemble de petits objets projectifs engendrant la catégorie $\mathcal{F}_r(K)$.

Maintenant, le foncteur $P = \oplus_s P_r^s$ est petit puisque c'est une somme finie de petits objets. Il est projectif comme somme de projectifs et engendre $\mathcal{F}_r(K)$ vu que les P_r^s engendrent $\mathcal{F}_r(K)$. En conclusion:

2.3.4. Théorème

Il existe un anneau $\theta_r(K)$ tel que la catégorie des $\theta_r(K)$-modules à gauche soit équivalente à la catégorie des foncteurs de degré inférieur à r de $\mathcal{M}at(K)$ dans Mod_K *qui sont nuls en 0.*

Explicitement, on a $\theta_r(K) = \mathrm{Hom}(\oplus_{s=1}^r P_r^s, \oplus_{s=1}^r P_r^s)$. Donc un élément de $\theta_r(K)$ est une matrice $(f_{s,t})_{1 \le s,t \le r}$ avec

$$f_{s,t} \in \mathrm{Hom}(P_r^t, P_r^s) = \Delta_t P_r^s(K, \ldots, K).$$

Correspondant à l'inclusion $\mathcal{F}_{r-1}(K) \hookrightarrow \mathcal{F}_r(K)$, on a un morphisme d'anneau $\theta_r(K) \to \theta_{r-1}(K)$. On peut décrire ce morphisme de la façon suivante. On a évidemment $lt_{r-1}\, P_r^s = P_{r-1}^s$. On en déduit une application (surjective)

$$\Delta_t P_r^s \to \Delta_t P_{r-1}^s$$

et cette application induit le morphisme $\theta_r(K) \to \theta_{r-1}(K)$.

Exercice: On se donne un anneau A (sans unité) et $e \in A$ un élément idempotent. On pose $B = A/AeA$. De sorte qu'un B-module est un A module M tel que $eM = 0$. On a alors un diagramme de recollement

$$\mathrm{Mod}_B \underset{\overleftarrow{\ i^! \ }}{\overset{\overleftarrow{\ i^* \ }}{\xrightarrow{i_*=i_!}}} \mathrm{Mod}_A \underset{\overleftarrow{\ j_! \ }}{\overset{\overleftarrow{\ j_! \ }}{\xrightarrow{j^*=j^!}}} \mathrm{Mod}_{eAe}$$

avec des foncteurs définis comme suit:

$$\begin{aligned} i^*(M) &:= B \otimes_A M = M/AeAM, \\ i_*(M) &:= M, \\ i^!(M) &:= \mathrm{Mod}_A(B, M) = {}_{AeA}M, \\ j_!(M) &:= A \otimes_{eAe} M, \\ j^*(M) &:= eM, \\ j_*(M) &:= \mathrm{Mod}_{eAe}(eA, M) \end{aligned}$$

(cf. [9]).

Peut-on trouver un idempotent $e \in \theta_r(K)$ tel que

$$\theta_{r-1}(K) = \theta_r(K)/\theta_r(K)e\theta_r(K), e\theta_r(K)e = K \otimes (K \wr S_r)^\circ$$

et de tel sorte que le diagramme de recollement correspondant coincide avec celui étudié dans la section précédente?

On a un diagramme de recollement semblable pour les représentations polynomiales des groupes linéaires. Une représentation polynomiale de degré r de $GL(n,k)$ est équivalente à la donnée d'un module sur l'*algèbre de Schur* $S_k(n,r)$. Pour $r \leq n$, on a un idempotent $e \in S_k(n,r)$ tel que $eS_k(n,r)e = k[S_r]$ (cf. [16]).

2.3.5. *Modules quadratiques*

Comme exemple, on va écrire la classification des foncteurs quadratiques due à Baues.

Un $\mathbf{Z}$-module quadratique

$$M = (M_e \xrightarrow{H} M_{ee} \xrightarrow{P} M_e)$$

est une paire de groupes abéliens M_e, M_{ee} munis de morphismes H, P vérifiant les identités $PHP = 2P$ et $HPH = 2H$. Etant donné M, on a alors un foncteur de $\mathrm{Mod}_{\mathbf{Z}}$ dans $\mathrm{Mod}_{\mathbf{Z}}$ qui à un groupe abélien V associe le produit tensoriel quadratique $V \otimes M$. Le produit tensoriel quadratique $V \otimes M$ est le groupe abélien engendré par les symboles $v \otimes x$, $[v,w] \otimes y$, où $v, w \in V$, $x \in M_e$ et $y \in M_{ee}$. On suppose que $v \otimes x$ est linéaire en x et que $[v,w] \otimes y$ est linéaire en v, w et y. De plus, on suppose vérifiées les relations

$$\begin{aligned} (v+w) \otimes x &= v \otimes x + w \otimes x + [v,w] \otimes H(x), \\ [v,v] \otimes y &= v \otimes P(y). \end{aligned}$$

Réciproquement, un foncteur quadratique T définit un module quadratique

$$T(\mathbf{Z}) \xrightarrow{H} T(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{P} T(\mathbf{Z}),$$

avec $H = T(\Delta_2) = T(\Pi_2) \circ T(\delta)$ et $P = T(\nabla_2) = T(\sigma) \circ T(\Pi_2)$.

2.3.6. THÉORÈME (cf. [1])

Les applications ci-dessus fournissent des équivalences de catégories réciproques entre modules quadratiques et foncteurs quadratiques.

Cette classification s'étend au cadre non abélien (cf. [2], [3], voir aussi [27]).

§3. Bibliographie

1. H. BAUES, *Quadratic functors and metastable homotopy*, J. Pure Appl. Algebra **91** (1994), 49-107.
2. H. BAUES, M. HARTL, T. PIRASHVILI, *Quadratic categories and square rings*, preprint Max Planck Institut für Mathematik, Bonn (1995).
3. H. BAUES, T. PIRASHVILI, *Quadratic endfunctors of the category of groups*, preprint Max Planck Institut für Mathematik, Bonn (1995).
4. A. BEILINSON, J. BERNSTEIN, P. DELIGNE, *Faisceaux pervers*, Asterisque **100**, 1982.
5. A.K. BOUSFIELD, *Homogeneous functors and their derived functors*, manuscrit, Brandeis University (1967).
6. A.K. BOUSFIELD, *Operations on derived functors of non-additive functors*, manuscrit, Brandeis University (1967).
7. H. CARTAN, *Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane II*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **40** (1954), 704-707.
8. H. CARTAN, *Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie*, in "Séminaire Henri Cartan, 1954-55".
9. E. CLINE, B. PARSHALL, L. SCOTT, *Finite dimensional algebras and highest weight categories*, J. reine angew. Math. **391** (1988), 85-99.
10. E.B. CURTIS, *Lower central series of semi-simplicial complexes*, Topology **2** (1963), 159-171.
11. A. DOLD, D. PUPPE, *Homologie nicht-additiver funktoren*, Ann. Inst. Fourier **11** (1961), 201-312.
12. S. EILENBERG, S. MAC LANE, *On the groups $H(\Pi, n)$, I*, Ann. of Math. **58** (1953), 55-106.
13. S. EILENBERG, S. MAC LANE, *On the groups $H(\Pi, n)$, II*, Ann. of Math. **70** (1954), 49-139.
14. V. FRANJOU, J. LANNES, L. SCHWARTZ, *Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis*, Invent. Math. **115** (1994), 513-538.
15. P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. math. France **90** (1962), 323-448.
16. J. GREEN, Polynomial representations of GL_n, Lecture Notes in Math. **830**, Springer-Verlag, 1980.
17. M. JIBLADZE, T. PIRASHVILI, *Cohomology of algebraic theories*, J. Algebra **137** (1991), 253-296.
18. H.-W. HENN, J. LANNES, L. SCHWARTZ, *The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects*, Amer. J. Math.

115 (1993), 1053-1106.
19. N. Kuhn, *Generic representations of the finite linear groups and the Steenrod algebra I*, Amer. J. Math. **116** (1994), 327-360.
20. N. Kuhn, *Generic representations of the finite linear groups and the Steenrod algebra II*, K-theory **8** (1994), 395-428.
21. N. Kuhn, *Generic representations of the finite linear groups and the Steenrod algebra III*, K-theory **9** (1995), 273-303.
22. I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
23. I. Passi, *Polynomial maps on groups*, J. Algebra **9** (1968), 121-151.
24. I. Passi, *Polynomial functors*, Proc. Camb. Phil. Soc. **66** (1969), 505-512.
25. I. Passi, *Polynomial maps*, in "Proc. 2-nd internat. Conf. Theory of Groups, Canberra 1973", Lecture Notes in Math. **372**, Springer Verlag (1974), 550-561.
26. I. Passi, *Group rings and their augmentation ideal*, Lecture Notes in Math. **715**, Springer Verlag, 1979.
27. T. Pirashvili, *On quadratic functors*, Soobshch. Akad. Nauk. Gruz. SSR **129** (1988), 485-488.
28. T. Pirashvili, *Polynomial functors*, Tr. Tbilis. Mat. Inst. Razdamdze **91** (1988), 55-66.
29. T. Pirashvili, *Polynomial approximation of* Ext *and* Tor *groups in functor categories*, Comm. Algebra **21** (1993), 1705-1719.
30. T. Pirashvili, *Kan extension and stable homology of Eilenberg-MacLane spaces*, Topology **35** (1996), 883-886.
31. T. Pirashvili, *Simplicial Degrees of Functors*, preprint Bielefeld (1996).
32. J.-P. Serre, *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane*, Comment. Math. Helvet. **27** (1953), 198-232.

Adresse: Benoit Fresse, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02 (France).

E-mail: fresse@math.unice.fr