

---

# LE COMPLEXE BAR ITÉRÉ DES $E_n$ -ALGÈBRES COMME UN DIAGRAMME HOMOTOPIQUE SUR LA CATÉGORIE DES ARBRES ÉLAGUÉS

*par*

Benoit Fresse

---

**Résumé.** — On a montré dans un précédent travail que le complexe bar  $n$ -itéré usuel des algèbres commutatives s'étend aux  $E_n$ -algèbres et détermine l'homologie naturelle associée à cette catégorie d'algèbres. On montre dans cet article que le complexe bar  $n$ -itéré d'une  $E_n$ -algèbre forme un diagramme sur un remplacement cofibrant de la catégorie des arbres élagués à  $n$  niveaux – une variante de la catégorie définie par Batanin pour l'étude des  $n$ -catégories. On utilise cette construction pour montrer que l'homologie du complexe bar  $n$ -itéré de toute  $E_n$ -algèbre possède une interprétation en termes de foncteur Tor catégorique. On obtient ainsi l'extension, dans son cadre naturel, d'un résultat obtenu par Livernet et Richter pour les algèbres commutatives.

La clé de notre travail consiste à mettre en oeuvre des méthodes de la dualité de Koszul des algèbres dans le contexte des catégories différentielles graduées. On détermine par ce moyen un modèle minimal de la catégorie des arbres élagués et un petit complexe, calculant les foncteurs Tor sur cette catégorie, que l'on identifie ensuite au complexe bar  $n$ -itéré pour obtenir notre théorème principal.

## INTRODUCTION

Le complexe bar classique  $B(A)$  définit un foncteur de la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives dans elle-même. Par suite un complexe bar itéré bien défini  $B^n(A)$  est associé à toute algèbre différentielle graduée commutative  $A$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par simple composition de la construction.

---

*Classification mathématique par sujets (2000).* — Primary: 57T30; Secondary: 18G15, 55P48, 18G55, 18D20.

Recherche soutenue en partie par le contrat ANR-06-JCJC-0042 "OBTH".

La commutativité du produit de  $A$  est essentielle dans la construction usuelle, cependant on a montré dans un précédent travail [8] que la construction bar  $n$ -itérée  $B^n(A)$  s'étend aux  $E_n$ -algèbres et détermine l'homologie naturelle  $H_*^{E_n}(A)$  associée à cette catégorie d'algèbres.

On revient sur la définition de la notion de  $E_n$ -algèbre plus loin. Pour l'instant, rappelons qu'une  $E_1$ -algèbre désigne une structure algébrique multiplicative fortement associative à homotopie près, mais non commutative (la terminologie de  $A_\infty$ -algèbre désigne la même notion). Une  $E_\infty$ -algèbre est une structure qui est fortement associative et fortement commutative à homotopie près. La notion de  $E_n$ -algèbre, avec  $1 < n < \infty$ , définit une structure intermédiaire qui est fortement associative à homotopie près, mais commutative jusqu'à un certain degré seulement. En un sens, la structure de  $E_n$ -algèbre est juste suffisamment commutative à homotopie près pour que l'on puisse rectifier la différentielle usuelle de la construction bar  $m$ -itérée pour  $m \leq n$ , mais pas au delà.

Une idée clé de la construction de [8], sur laquelle on reviendra, consiste à utiliser des structures cellulaires sur des opérades définissant ces structures algébriques pour contrôler les homotopies de commutativité nécessaires à la rectification de la différentielle de la construction bar  $n$ -itérée.

Dans [17], Muriel Livernet et Birgit Richter observent que le complexe bar  $n$ -itéré d'une algèbre commutative  $A$  définit un diagramme sur une catégorie, que l'on notera  $\Omega_n^{epi}$ , dont les objets sont des suites de partitions ou, dans leur représentation graphique, des arbres élagués à  $n$ -niveaux. Puis elles montrent que cette construction conduit à une interprétation de l'homologie de  $B^n(A)$ , et donc de l'homologie  $H_*^{E_n}(A)$ , comme un foncteur Tor catégorique

$$H_*(B^n(A)) = \mathrm{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(b_n, \underline{B}^n(A)),$$

pour toute algèbre commutative  $A$  formant un objet cofibrant dans la catégorie des modules différentiels gradués, l'objet  $b_n$  désignant un certain diagramme contravariant sur  $\Omega_n^{epi}$ . L'expression  $B^n(A)$  dans le membre de gauche de cette identité désigne le complexe bar  $n$ -itéré de  $A$ . L'expression  $\underline{B}^n(A)$  dans le membre de droite désigne le  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme sous-jacent à ce complexe.

Le but de cet article est de montrer comment ce résultat s'étend aux  $E_n$ -algèbres.

La première étape de ce travail, qui fait l'objet des sections §§1-3, consiste à généraliser la définition du diagramme  $\underline{B}^n(A)$ . Cette partie s'applique : dans la catégorie des espaces topologiques  $\mathbf{Top}$ , dans la catégorie des ensembles simpliciaux  $\mathbf{Simp}$ , dans la catégorie des modules différentiels gradués  $dg\mathbb{k}\mathbf{Mod}$  sur un anneau de base fixé  $\mathbb{k}$  (la catégorie des dg-modules en abrégé). La lettre  $\mathcal{C}$  désignera l'une quelconque de ces catégories. Dans chaque cas, on a : un produit tensoriel naturel sur  $\mathcal{C}$ , faisant de  $\mathcal{C}$  une catégorie monoïdale symétrique ; et une structure de catégorie modèle cofibrément engendrée sur  $\mathcal{C}$  satisfaisant aux axiomes des catégories modèles monoïdales. On renvoie à [7, §1] pour la définition de ce cadre catégorique en vue des applications de la théorie des opérades. Nos méthodes permettent également de traiter le cas de catégories monoïdales symétriques sur la catégorie de base  $\mathcal{C}$ , comme les catégories de spectres qui sont des exemples de catégories monoïdales symétriques

sur la catégorie des ensembles simpliciaux  $\mathbf{Simp}$ , mais on n'étudiera pas de telles applications dans cet article.

Une  $E_n$ -algèbre est une algèbre sur une opérade d'un certain type homotopique dans la catégorie des opérades, le type des  $E_n$ -opérades, défini comme : le type des opérades topologiques faiblement équivalentes à l'opérade des petits  $n$ -cubes de Boardman-Vogt dans le cas  $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$  ; le type des opérades simpliciales dont la réalisation géométrique est faiblement équivalente à l'opérade des petits  $n$ -cubes dans le cas  $\mathcal{C} = \mathbf{Simp}$  ; le type des opérades différentielles graduées faiblement équivalentes à l'opérade de chaîne des petits  $n$ -cubes dans le cas  $\mathcal{C} = dg\mathbf{kMod}$ . On dira qu'une  $E_n$ -opérade est faiblement équivalente à l'opérade des petits  $n$ -cubes dans  $\mathcal{C}$  pour couvrir l'ensemble de ces variantes. On ajoute généralement des hypothèses de cofibrations assurant que la catégorie d'algèbres associée à une  $E_n$ -opérade hérite d'une structure de catégorie (semi)modèle.

On ne considérera que des algèbres sans unité dans l'article et des opérades  $\mathbf{P}$  telles que  $\mathbf{P}(0)$  est l'objet initial de  $\mathcal{C}$  (on dit alors que l'opérade  $\mathbf{P}$  est non-unitaire). On suppose en particulier (contrairement à la convention habituelle) qu'une  $E_n$ -opérade satisfait cette stipulation qui facilite la définition du complexe bar itéré.

Les  $E_n$ -opérades usuelles s'insèrent dans des suites d'opérades emboîtées

$$(*) \quad \mathbf{E}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{E}_n \subset \cdots \subset \operatorname{colim}_n \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_\infty$$

faiblement équivalentes à la suite emboîtée des opérades de petits  $n$ -cubes dans  $\mathcal{C}$  et telles que  $\mathbf{E}_\infty = \operatorname{colim}_n \mathbf{E}_n$  définit une  $E_\infty$ -opérade. Cette  $E_\infty$ -opérade est munie d'une équivalence faible  $\epsilon : \mathbf{E}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ , la notation  $\mathbf{C}$  désignant l'opérade des algèbres associatives et commutatives.

Pour certaines suites d'opérades emboîtées, la filtration (\*) se raffine en une structure cellulaire qui, d'après [3], permet de caractériser son type d'homotopie dans la catégorie des opérades. On a ainsi un critère pour montrer qu'une suite d'opérades emboîtées (\*) est constituée de  $E_n$ -opérades. On utilise ces structures cellulaires dans l'article mais dans un but tout différent et d'une toute autre façon.

On considère une opérade dans les posets, l'opérade du graphe complet  $\mathcal{K}$ , qui, dans l'idée de [3], modélise des relations d'inclusions universelles apparaissant dans ces structures cellulaires. Pour nous, la notion importante, introduite dans [9, §2], est celle de  $\mathcal{K}$ -opérade, définie comme une collection de  $\mathcal{K}(r)$ -diagrammes  $\{\mathbf{P}(\kappa)\}_\kappa$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , avec une structure opéradique combinant les composantes  $\mathbf{P}(\kappa)$  selon la structure opéradique du graphe complet  $\mathcal{K}$  (on renvoie au §2 pour des rappels complets). Dans la définition de  $\mathcal{K}$ -opérade, on oublie essentiellement les conditions de [3] permettant de caractériser les opérades faiblement équivalente à l'opérade des petits  $n$ -cubes dans  $\mathcal{C}$ . Notre idée consiste à utiliser ces structures d'une façon plus globale, en observant que les  $\mathcal{K}$ -opérades forment une catégorie modèle, dans le but de produire des morphismes et non pour caractériser des types homotopiques opéradiques.

On associe à chaque  $\mathcal{K}$ -opérade  $\mathbf{P}$  une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie universelle  $\Upsilon_n^{\mathbf{P}}$  agissant de façon naturelle sur les termes du complexe bar itéré  $B^n(A)$  lorsque  $A$  décrit la catégorie des  $\mathbf{P}$ -algèbres. On montre que  $\Upsilon_n^{\mathbf{P}}$  est un foncteur appliquant une fibration acyclique en  $\mathbf{P}$  sur une fibration acyclique de catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies. L'idée consiste alors à appliquer la théorie des catégories modèles pour relever l'action de la catégorie

des arbres élagués sur le complexe bar  $n$ -itéré des algèbres commutatives aux  $E_n$ -algèbres. Cependant, en appliquant les axiomes des catégories modèles, on obtient seulement que les termes du complexe bar  $n$ -itéré  $B^n(A)$  forment un diagramme sur un remplacement cofibrant  $R(\Omega_n^{epi})$  de la catégorie des arbres élagués  $\Omega_n^{epi}$ . On verra qu'il y a en fait des obstructions à faire agir la catégorie des arbres élagués elle-même sur  $B^n(A)$  de sorte à produire un complexe bar  $n$ -itéré avec les propriétés homotopiques attendues lorsque  $A$  est une  $E_n$ -algèbre – c'est pourquoi on parle de diagramme homotopique sur la catégorie des arbres élagués dans le titre de l'article.

On devra en fait, pour des raisons techniques, considérer des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies scindées sur  $\Omega_n^{epi}$ . On introduira ce raffinement de la notion usuelle de catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie au §1 et on définira en parallèle les structures modèles utilisées pour les catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies et leur version scindée.

La relation entre homologie de  $B^n(A)$  et foncteurs Tor catégoriques est établie dans la deuxième partie de ce travail §§4-8. On se concentre alors sur les applications dans le cadre des dg-modules  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \text{Mod}$  pour démontrer le résultat principal de cet article :

**Théorème.** — *Soit  $E_n$  une  $E_n$ -opérade provenant de la filtration d'une opérade cellulaire sur l'opérade du graphe complet  $\mathcal{K}$ . Soit  $R(\Omega_n^{epi})$  un remplacement cofibrant de la catégorie des arbres élagués  $\Omega_n^{epi}$  dans la catégorie des catégories différentielles graduées. On a l'identité*

$$H_*(B^n(A)) = \text{Tor}_*^{R(\Omega_n^{epi})}(b_n, \underline{B}^n(A)),$$

pour toute  $E_n$ -algèbre  $A$ , pourvu que le module différentiel gradué sous-jacent de  $A$  soit cofibrant.

La terminologie de catégorie différentielle graduée renvoie à une catégorie enrichie en modules différentiels gradués. La notion d'opérade cellulaire sur l'opérade du graphe complet renvoie aux structures introduites dans [3]. La définition précise de cette notion sera rappelée §2.7. L'expression  $B^n(A)$  dans le membre de gauche de l'identité du théorème désigne le complexe bar  $n$ -itéré de  $A$ . L'expression  $\underline{B}^n(A)$  dans le membre de droite désigne le  $R(\Omega_n^{epi})$ -diagramme sous-jacent à ce complexe. La notation  $b_n$  désigne le même  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme contravariant que dans [17, Théorème 4.1]. Les foncteurs Tor sur une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie sont définis §4. Ces foncteurs Tor vérifient des propriétés d'invariances homotopiques telles que le choix du remplacement cofibrant  $R(\Omega_n^{epi})$ , ainsi que le choix de relèvement fait dans la construction du  $R(\Omega_n^{epi})$ -diagramme  $\underline{B}^n(A)$ , n'importe pas dans le résultat du théorème.

D'après [17, Proposition-Définition 3.6], un complexe  $C_*(T)$  est associé à tout diagramme  $T$  sur la catégorie des arbres élagués  $\Omega_n^{epi}$ , de sorte que le complexe bar  $n$ -itéré  $B^n(A)$  d'une algèbre commutative s'identifie au complexe associé à son  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme sous-jacent. De plus, on a la relation

$$H_*(C_*(T)) = \text{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(b_n, T),$$

pour tout  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme  $T$ , et pas seulement pour le diagramme de la construction bar  $n$ -itérée.

On étend la construction du complexe  $C_*(T)$  aux diagrammes sur un remplacement cofibrant particulier  $R(\Omega_n^{epi})$  de la catégorie des arbres élagués  $\Omega_n^{epi}$  de sorte que le complexe bar  $n$ -itéré  $B^n(A)$  de [8] s'identifie au complexe associé à son  $R(\Omega_n^{epi})$ -diagramme sous-jacent (défini dans la partie précédente). On démontre que l'on a la relation

$$H_*(C_*(T)) = \mathrm{Tor}_*^{R(\Omega_n^{epi})}(b_n, T)$$

pour tout  $R(\Omega_n^{epi})$ -diagramme  $T$  et le théorème s'ensuit. Pour cela, on applique un analogue dans le cadre des catégories de la dualité de Koszul des algèbres associatives [20]. De fait, notre relation s'obtient par une identification directe de  $C_*(T)$  avec un complexe de Koszul  $K(b_n, \Omega_n^{epi}, T)$  associé à  $\Omega_n^{epi}$ . En outre, le remplacement cofibrant particulier que l'on considère  $R(\Omega_n^{epi})$  est un modèle minimal de  $\Omega_n^{epi}$  déduit de la dualité de Koszul et la détermination de ce modèle minimal constitue un des résultats principaux de l'article.

On rappelle la définition de la catégorie des arbres élagués dans une partie préliminaire, “*La catégorie des arbres élagués*”.

La partie suivante, “*Construction de diagrammes homotopiques sur la catégorie des arbres élagués*”, est consacrée à la définition du diagramme  $B^n(A)$  associé à une  $E_n$ -algèbre. Cette partie comprend : un exposé des applications des structures modèles aux catégories enrichies (§1), une introduction aux structures d'opéades cellulaires sur l'opéade du graphe complet (§2), avant la construction proprement dite du diagramme (§3).

Puis, dans la partie “*Interprétation de la  $E_n$ -homologie en termes de foncteurs Tor catégoriques*”, on démontre le théorème principal de cet article, tel qu'il est énoncé dans l'introduction. On étudie d'abord les applications des structures modèles aux catégories de diagrammes associées à une catégorie enrichie (§4). On utilise ce formalisme pour définir les foncteurs Tor associés une catégorie différentielle gradué. On donne ensuite un exposé des applications de la construction bar des algèbres différentielles graduées, puis de la dualité de Koszul, aux catégories enrichies (§§5-6), avant de conclure quant à notre résultat principal (§7).

On consacrera un appendice (§8) à la démonstration d'une propriété clé de la dualité de Koszul pour la catégorie des arbres élagués.

*Remerciements.* — Je remercie Muriel Livernet pour une série de discussions qui sont à l'origine de ce travail.

## LA CATÉGORIE DES ARBRES ÉLAGUÉS

On rappelle brièvement la définition, dégagée dans [1], de la catégorie des arbres élagués à  $n$ -niveaux  $\Omega_n^{epi}$ . Quelques rappels supplémentaires sur cette catégorie seront fait en cours d'article.

**0.1. La catégorie des arbres élagués : définition formelle et représentation graphique.** — On note  $\underline{r}$  l'ensemble ordonné  $\underline{r} = \{1 < \dots < r\}$ .

Les objets de  $\Omega_n^{epi}$ , désignés par des lettres grecques soulignées  $\underline{\tau}$ , sont les suites de surjections croissantes

$$\underline{t}_0 \xrightarrow{\tau_1} \underline{t}_1 \xrightarrow{\tau_2} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n = *$$

avec l'ensemble final  $* = \underline{1}$  comme dernier ensemble but. Une telle suite de surjections définit un arbre planaire dont les sommets sont arrangés sur des niveaux  $0, \dots, n$  : l'ensemble  $\underline{t}_i$  définit l'ensemble des sommets au niveau  $i$  de l'arbre, ordonnés de la gauche vers la droite ; la surjection  $\tau_i$  définit l'ensemble des arêtes des sommets de niveau  $i - 1$  vers les sommets de niveau  $i$ . Un exemple, représentant une suite de surjections de la forme

$$\underline{3} \xrightarrow{\tau_1} \underline{2} \xrightarrow{\tau_2} \underline{2} \xrightarrow{\tau_3} \underline{1} \xrightarrow{\tau_4} \underline{1},$$

est donné Figure 1.

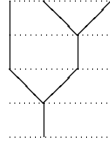


FIGURE 1.

Un morphisme de  $\Omega_n^{epi}$

$$\{\underline{t}_0 \xrightarrow{\tau_1} \underline{t}_1 \xrightarrow{\tau_2} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n\} \xrightarrow{u} \{\underline{s}_0 \xrightarrow{\sigma_1} \underline{s}_1 \xrightarrow{\sigma_2} \dots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{s}_n\}$$

est une suite d'applications  $u : \underline{t}_i \rightarrow \underline{s}_i$  telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{t}_0 & \xrightarrow{\tau_1} & \underline{t}_1 & \xrightarrow{\tau_2} & \dots & \xrightarrow{\tau_n} & \underline{t}_n \\ \downarrow u & & \downarrow u & & & & \downarrow u \\ \underline{s}_0 & \xrightarrow{\sigma_1} & \underline{s}_1 & \xrightarrow{\sigma_2} & \dots & \xrightarrow{\sigma_n} & \underline{s}_n \end{array}$$

commute et  $u : \underline{t}_i \rightarrow \underline{s}_i$  est croissante sur chaque sous-ensemble  $\tau_{i+1}^{-1}(x) \subset \underline{t}_i$ , pour tout  $x \in \underline{t}_{i+1}$ .

On utilise la notation  $In \underline{\tau}$  pour désigner l'ensemble source  $In \underline{\tau} = \underline{t}_0$  de la première surjection d'un objet  $\underline{\tau} \in \Omega_n^{epi}$ . L'application  $In : \underline{\tau} \mapsto In \underline{\tau}$  définit un foncteur de  $\Omega_n^{epi}$  dans la catégorie  $Surj$  constituée des ensembles finis avec les applications surjectives comme morphismes.

**0.2. Le poset des arbres élagués avec une source fixée.** — On utilise dans [8] la catégorie comma  $\underline{e}/\Omega_n^{epi}$ , associée à chaque ensemble fini  $\underline{e}$ , dont les objets sont les suites

$$\underline{e} \xrightarrow{\tau_0} \underline{t}_0 \xrightarrow{\tau_1} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n = *$$

telles que  $\underline{\tau} = \{\underline{t}_0 \xrightarrow{\tau_1} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n\}$  définit un élément de  $\Omega_n^{epi}$  et  $\{\underline{e} \xrightarrow{\tau_0} \underline{t}_0\}$  définit un morphisme  $\tau_0 : \underline{e} \rightarrow In \underline{\tau}$  dans  $Surj$ . L'application  $\tau_0 : \underline{e} \rightarrow \underline{t}_0$  se représente dans

l'arbre associé à  $\underline{\tau}$  par un étiquetage des noeuds de niveau 0 par les sous-ensembles  $\tau_0^{-1}(x)$ , pour  $x \in \underline{\mathfrak{t}}_0$ , comme dans l'exemple de la figure 2.

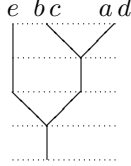


FIGURE 2. Un arbre élagué étiqueté. Dans cet exemple, on a  $\underline{e} = \{a, b, c, d, e\}$ , et la surjection  $\tau_0 : \underline{e} \rightarrow \underline{\mathfrak{t}}_0$  est définie par  $\tau_0(e) = 1$ ,  $\tau_0(b) = \tau_0(c) = 2$  et  $\tau_0(a) = \tau_0(d) = 3$ .

Une suite d'applications  $u : \underline{\mathfrak{t}}_i \rightarrow \underline{\mathfrak{s}}_i$  définit un morphisme dans la catégorie comma

$$\{\underline{e} \xrightarrow{\tau_0} \underline{\mathfrak{t}}_0 \xrightarrow{\tau_1} \underline{\mathfrak{t}}_1 \xrightarrow{\tau_2} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\mathfrak{t}}_n\} \xrightarrow{u} \{\underline{e} \xrightarrow{\sigma_0} \underline{\mathfrak{s}}_0 \xrightarrow{\sigma_1} \underline{\mathfrak{s}}_1 \xrightarrow{\sigma_2} \dots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{\mathfrak{s}}_n\}$$

si chaque application  $u : \underline{\mathfrak{t}}_i \rightarrow \underline{\mathfrak{s}}_i$  est croissante sur les sous-ensembles  $\tau_{i+1}^{-1}(x) \subset \underline{\mathfrak{t}}_i$ ,  $x \in \underline{\mathfrak{t}}_{i+1}$  (condition pour avoir un morphisme dans  $\Omega_n^{epi}$ ), et le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{e} & \xrightarrow{\tau_0} & \underline{\mathfrak{t}}_0 & \xrightarrow{\tau_1} & \underline{\mathfrak{t}}_1 & \xrightarrow{\tau_2} & \dots & \xrightarrow{\tau_n} & \underline{\mathfrak{t}}_n \\ \parallel & & \downarrow u & & \downarrow u & & & & \downarrow u \\ \underline{e} & \xrightarrow{\sigma_0} & \underline{\mathfrak{s}}_0 & \xrightarrow{\sigma_1} & \underline{\mathfrak{s}}_1 & \xrightarrow{\sigma_2} & \dots & \xrightarrow{\sigma_n} & \underline{\mathfrak{s}}_n \end{array}$$

commute dans son ensemble.

On observe dans [8] que  $\underline{e}/\Omega_n^{epi}$  forme un poset (cette catégorie est notée  $\Pi^n(\underline{e})$  dans la référence citée). Par suite, un morphisme  $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$  de la catégorie  $\Omega_n^{epi}$  est entièrement déterminé par la donnée :

- d'un objet source  $\underline{\tau} = \{\underline{\mathfrak{t}}_0 \xrightarrow{\tau_1} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\mathfrak{t}}_n\}$ ,
- d'un objet but  $\underline{\sigma} = \{\underline{\mathfrak{s}}_0 \xrightarrow{\sigma_1} \dots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{\mathfrak{s}}_n\}$ ,
- et d'une application  $u : In \underline{\tau} \rightarrow In \underline{\sigma}$ ,

de sorte qu'on a la relation

$$\{In \underline{\tau} \xrightarrow{\tau_0} \underline{\mathfrak{t}}_0 \xrightarrow{\tau_1} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\mathfrak{t}}_n\} \geq \{In \underline{\tau} \xrightarrow{u} \underline{\mathfrak{s}}_0 \xrightarrow{\sigma_1} \dots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{\mathfrak{s}}_n\}$$

dans le poset  $In \underline{\tau}/\Omega_n^{epi}$ .

On reviendra ponctuellement à cette représentation pour appliquer des définitions de [8].

**Remarque.** — Les résultats que l'on obtiendra §6 montrent que le poset  $\underline{e}/\Omega_n^{epi}$  est de Cohen-Macaulay. On peut cependant observer qu'il n'admet pas de CL-shelling au sens de [5] en général.

**0.3. La graduation de la catégorie des arbres élagués.** — Dans nos constructions, on utilisera de façon essentielle que la catégorie des arbres élagués  $\Omega_n^{epi}$  possède une graduation naturelle. On définit d'abord le degré d'un objet  $\underline{\tau} \in \Omega_n^{epi}$ , défini par une suite de surjections  $\underline{\tau}_0 \xrightarrow{\tau_1} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\tau}_n$ , en posant :

$$\deg(\underline{\tau}) = s_0 + \dots + s_{n-1}.$$

Graphiquement, cette expression représente le nombre de sommets de niveau  $> n$  de l'arbre représentant  $\underline{\tau}$ , ou, de façon équivalente, le nombre d'arêtes de  $\underline{\tau}$ . Le degré d'un morphisme  $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$  est défini par la différence :

$$\deg(u) = \deg(\underline{\tau}) - \deg(\underline{\sigma}),$$

représentant le nombre de sommets de  $\underline{\tau}$  identifiés par  $u$ .

## CONSTRUCTION DE DIAGRAMMES HOMOTOPIQUES SUR LA CATÉGORIE DES ARBRES ÉLAGUÉS

Le but de cette partie est de définir le diagramme sous-jacent au complexe bar  $n$ -itéré d'une  $E_n$ -algèbre.

On commence §1 par introduire la notion de catégorie enrichie scindée sur  $\Omega_n^{epi}$  qui sera utilisée dans notre construction. On observe aussi que les catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies scindées sur  $\Omega_n^{epi}$  forment une catégorie modèle, tout comme les catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies usuelles.

La définition de l'opérade du graphe complet  $\mathcal{K}$  de [3] et de la notion de  $\mathcal{K}$ -opérade de [9] est rappelée §2. On définit ensuite la catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie universelle  $\Upsilon_n^{\mathcal{P}}$  que l'on utilise pour définir la structure de diagramme de  $B^n(A)$  au §3.

### 1. Catégories enrichies scindées sur la catégorie des arbres élagués

On peut supposer pour les besoins de cette section que la catégorie de base  $\mathcal{C}$  est une catégorie monoïdale symétrique quelconque munie d'une structure de catégorie modèle cofibrement engendrée telle que :

- l'objet unité  $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$  est cofibrant ;
- le produit tensoriel  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  vérifie l'axiome du pushout-produit (voir [11, §4.2]).

On dit alors que  $\mathcal{C}$  forme une catégorie modèle monoïdale. Les catégories de base que l'on considèrera plus loin dans l'article

$$\mathcal{C} = \text{Simp}, \text{Top}, dg \mathbb{k} \text{Mod}$$

sont des exemples classiques de catégories munie d'une telle structure.



Une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $\Theta$  consiste en la donnée d'un ensemble d'objets  $\text{Ob } \Theta$  et de hom-objets  $\Theta(\underline{b}, \underline{a}) \in \mathcal{C}$ , associés aux couples  $(\underline{a}, \underline{b}) \in \text{Ob } \Theta$ , avec des morphismes de composition

$$\Theta(\underline{x}, \underline{a}) \otimes \Theta(\underline{b}, \underline{x}) \xrightarrow{\mu} \Theta(\underline{b}, \underline{a})$$

et des morphismes d'identité

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\eta} \Theta(\underline{b}, \underline{a})$$

vérifiant une généralisation naturelle des axiomes d'associativité et d'unité de la composition des morphismes dans les catégories (voir [16]). Une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée sur  $\Omega_n^{epi}$  est essentiellement une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie dont les hom-objets possèdent une décomposition indexée par les morphismes de la catégorie des arbres élagués  $\Omega_n^{epi}$ .

On commencera par donner la définition précise de cette structure. On étudie ensuite en parallèle les applications des catégories modèles aux catégories enrichies et aux catégories scindées.

Une catégorie enrichie sur  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \text{Mod}$  est une petite catégorie différentielle graduée (dg-catégorie) au sens de [15]. On renvoie à cette référence pour un survol récent et une ample bibliographie sur les applications des dg-catégories.

**1.1. Définition : catégories enrichies scindées sur la catégorie des arbres élagués.** — Une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée au dessus de  $\Omega_n^{epi}$ , soit  $\tilde{\Theta}$ , est définie par la donnée d'une collection de hom-objets

$$\tilde{\Theta}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \in \mathcal{C}$$

indexée par les morphismes  $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$  de la catégorie des arbres élagués  $\Omega_n^{epi}$ , munie des morphismes de composition

$$\tilde{\Theta}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_v \otimes \tilde{\Theta}(\underline{\tau}, \underline{\theta})_w \xrightarrow{\mu} \tilde{\Theta}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_{vw},$$

définis pour chaque couple de morphismes composables  $\underline{\sigma} \xleftarrow{v} \underline{\theta} \xleftarrow{w} \underline{\tau}$ , avec des morphismes d'identité

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\eta} \tilde{\Theta}(\underline{\tau}, \underline{\tau})_{\text{id}},$$

définis pour chaque objet  $\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , ces opérations vérifiant une généralisation naturelle des axiomes d'associativité et d'unité usuels.

Lorsque  $\mathcal{C} = \text{Simp}, \text{Top}, dg \mathbb{k} \text{Mod}$ , on utilisera la notation  $\alpha \cdot \beta \in \tilde{\Theta}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_{vw}$  pour désigner l'image d'homomorphismes  $(\alpha, \beta) \in \tilde{\Theta}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_v \times \tilde{\Theta}(\underline{\tau}, \underline{\theta})_w$  par le morphisme de composition de  $\tilde{\Theta}$ . La donnée des morphismes d'identité est également équivalente à la donnée d'un élément unité  $1 \in \tilde{\Theta}(\underline{\tau}, \underline{\tau})_{\text{id}}$  pour chaque  $\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ . On adopte des conventions similaires pour les catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies.

Les catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies scindées au dessus de  $\Omega_n^{epi}$  forment une catégorie, qui sera notée  $\widetilde{\text{Cat}}_{\Omega_n^{epi}}$ . Un morphisme de catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies scindées au dessus de  $\Omega_n^{epi}$

$$f : \tilde{\Phi} \rightarrow \tilde{\Psi}$$

consiste naturellement en la donnée d'une collection de morphismes entre hom-objets

$$f : \tilde{\Phi}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \rightarrow \tilde{\Psi}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$$

préservant les opérations de composition et d'identité.

On utilisera la notation  $Cat_{\Omega_n^{epi}}$  pour la catégorie formée des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies au sens usuel avec  $\text{Ob } \Omega_n^{epi}$  comme ensemble d'objets et des morphismes de catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies qui sont l'application identique sur les objets.

**1.2. L'adjonction avec les catégories enrichies usuelles.** — Une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $\Theta = u\tilde{\Theta}$  telle que  $\text{Ob } \Theta = \text{Ob } \Omega_n^{epi}$  est naturellement associée à toute catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée  $\tilde{\Theta}$ . Les hom-objets de cette catégorie sont simplement définis par les coproduits

$$\Theta(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) = \coprod_{u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})} \tilde{\Theta}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u,$$

pour tout couple  $(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \in \text{Ob } \Omega_n^{epi} \times \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , avec l'opération de composition et les morphismes d'identité hérités de  $\tilde{\Theta}$ .

Dans la direction inverse, pour une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $\Theta$  telle que  $\text{Ob } \Theta = \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , on a une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée au dessus de  $\Omega_n^{epi}$  naturellement associée à  $\Theta$  définie par les collections constantes

$$c\Theta(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = \Theta(\underline{\tau}, \underline{\sigma}),$$

pour  $u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ . On montre aisément :

**Proposition 1.3.** — *Nos foncteurs définissent une relation d'adjonction*

$$u : \widetilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}} \rightleftarrows Cat_{\Omega_n^{epi}} : c$$

entre la catégorie  $\widetilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}}$  des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies scindées au dessus de  $\Omega_n^{epi}$  et la catégorie  $Cat_{\Omega_n^{epi}}$  des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies au sens usuel  $\Theta$  telles que  $\text{Ob } \Theta = \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ .

*Démonstration.* — Observer que l'adjonction usuelle entre colimites et foncteurs constants préserve les structures catégoriques.  $\square$

**1.4. La catégorie des arbres élagués comme catégorie scindée sur elle-même.** — Dans le cas  $\mathcal{C} = \mathbf{Simp}, \mathbf{Top}$ , la catégorie ensembliste  $\Omega_n^{epi}$ , vue comme une collection d'espaces (d'ensemble simpliciaux) discrets, définit elle-même une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée au dessus de  $\Omega_n^{epi}$ . Dans le cas  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \mathbf{Mod}$ , on considère la catégorie enrichie  $\mathbb{k}[\Omega_n^{epi}]$  dont les hom-objets sont les  $\mathbb{k}$ -modules librement engendrés par les morphismes de  $\Omega_n^{epi}$ , vu comme des dg-modules concentrés en degré 0. Clairement, cette catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie est aussi associée à une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée au dessus de  $\Omega_n^{epi}$ .

Dans la suite, on laissera tomber la notation  $\mathbb{k}[\Omega_n^{epi}]$  et la version enrichie en dg-modules de  $\Omega_n^{epi}$  sera aussi notée  $\Omega_n^{epi}$  par souci de simplicité. Cependant, dans nos conventions, la notation  $\text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$  renvoie toujours aux ensembles de morphismes la catégorie  $\Omega_n^{epi}$  tandis que  $\Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$  renvoie toujours aux hom-objets de la catégorie

$\mathcal{C}$ -enrichie associée. Dans le cas  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \text{Mod}$ , on a ainsi l'identité

$$\Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) = \bigoplus_{u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})} \mathbb{k}\{u\},$$

en adoptant la notation  $\{u\}$  pour le générateur de  $\Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$  associé à  $u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ .

Dans chaque cas  $\mathcal{C} = \text{Simp}, \text{Top}, dg \mathbb{k} \text{Mod}$ , on adoptera la notation  $\widetilde{\Omega}_n^{epi}$  pour la catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée sous-jacente à  $\Omega_n^{epi}$ . Dans le cas  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \text{Mod}$ , on a ainsi l'identité

$$\widetilde{\Omega}_n^{epi}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = \mathbb{k}\{u\},$$

pour tout  $u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ .

**1.5. Graphes enrichis et catégories enrichies libres.** — Définissons un graphe  $\mathcal{C}$ -enrichi sur  $\text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , soit  $\Gamma$ , comme une collection d'objets

$$\Gamma(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \in \mathcal{C},$$

indexée par les couples  $(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \in \text{Ob } \Omega_n^{epi} \times \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , sans plus de structure. La catégorie des graphes  $\mathcal{C}$ -enrichis, que l'on notera  $Gr_{\Omega_n^{epi}}$ , s'identifie ainsi à la catégorie produit

$$Gr_{\Omega_n^{epi}} = \mathcal{C}^{\text{Ob } \Omega_n^{epi} \times \text{Ob } \Omega_n^{epi}}.$$

On a un foncteur d'oubli évident  $U : Cat_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow Gr_{\Omega_n^{epi}}$ . On définit un foncteur en sens inverse  $F : Gr_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow Cat_{\Omega_n^{epi}}$  qui, à un graphe  $\Gamma$ , associe une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie libre  $F(\Gamma)$ . Les hom-objets de  $F(\Gamma)$  sont définis par les coproduits de produits tensoriels des hom-objets générateurs de  $\Gamma$  :

$$F(\Gamma)(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) = \coprod_{\underline{\sigma} = \underline{\tau}_0, \dots, \underline{\tau}_m = \underline{\tau}} \Gamma(\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_0) \otimes \cdots \otimes \Gamma(\underline{\tau}_m, \underline{\tau}_{m-1}),$$

la sommation s'étendant sur l'ensemble des collections

$$(\underline{\tau}_0, \dots, \underline{\tau}_m) \in \text{Ob } \Omega_n^{epi} \times \cdots \times \text{Ob } \Omega_n^{epi}, \quad m \geq 0,$$

telles que  $\underline{\tau}_0 = \underline{\sigma}$  et  $\underline{\tau}_m = \underline{\tau}$ . Lorsque  $\underline{\sigma} \neq \underline{\tau}$ , ces dernières conditions entraînent  $m > 0$ . Lorsque  $\underline{\sigma} = \underline{\tau}$ , on peut avoir  $m = 0$  avec un produit tensoriel associé d'ordre nul retournant donc l'objet unité  $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ . Le morphisme de composition de  $F(\Gamma)$  est donné par la concaténation des tenseurs. Le morphisme d'identité de  $F(\Gamma)$  est donné par l'inclusion des tenseurs d'ordre  $m = 0$  dans le développement des hom-objets  $F(\Gamma)(\underline{\tau}, \underline{\tau})$ .

On a aussi un morphisme de graphes  $\mathcal{C}$ -enrichi  $\eta : \Gamma \rightarrow F(\Gamma)$  qui identifie  $\Gamma(\underline{\tau}, \underline{\tau})$  au facteur de  $F(\Gamma)(\underline{\tau}, \underline{\tau})$  constitué des tenseurs d'ordre  $m = 1$ . On peut ainsi identifier  $\Gamma$  à un sous-objet de  $F(\Gamma)$ .

On montre aisément :

**Proposition 1.6.** — *Le foncteur  $F : Gr_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow Cat_{\Omega_n^{epi}}$  défini §1.5 est adjoint à gauche au foncteur d'oubli  $U : Cat_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow Gr_{\Omega_n^{epi}}$ . Le morphisme d'inclusion  $\eta : \Gamma \rightarrow F(\Gamma)$  représente le morphisme d'unité de cette relation d'adjonction.  $\square$*

De la sorte, ce foncteur  $F : Gr_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow Cat_{\Omega_n^{epi}}$  associe bien un objet libre, caractérisé par une propriété universelle usuelle, à chaque graphe  $\mathcal{C}$ -enrichi  $\Gamma$ .

### 1.7. Graphes enrichis et catégories enrichies libres dans le cadre scindé.

— Les notions introduites au §1.5 ont un analogue pour les catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies scindées sur  $\Omega_n^{epi}$  : un graphe  $\mathcal{C}$ -enrichi scindé sur  $\Omega_n^{epi}$ , soit  $\tilde{\Gamma}$ , est défini comme une collection d'objets

$$\tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \in \mathcal{C},$$

indexée par les morphismes  $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$  de  $\Omega_n^{epi}$  ; la catégorie des graphes  $\mathcal{C}$ -enrichis scindés sur  $\Omega_n^{epi}$ , que l'on notera  $\tilde{Gr}_{\Omega_n^{epi}}$ , s'identifie donc à la catégorie produit

$$\tilde{Gr}_{\Omega_n^{epi}} = \mathcal{C}^{\text{Mor } \Omega_n^{epi}}$$

sur l'ensemble des morphismes de  $\Omega_n^{epi}$  ; on a alors un foncteur d'oubli évident  $\tilde{U} : \tilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow \tilde{Gr}_{\Omega_n^{epi}}$ .

On construit un foncteur en sens inverse  $\tilde{F} : \tilde{Gr}_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow \tilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}}$  qui à un graphe scindé  $\tilde{\Gamma}$  associe une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie libre  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  scindée sur  $\Omega_n^{epi}$ . On prend simplement les produits tensoriels

$$\tilde{F}(\tilde{\Gamma})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = \prod_{u=u_1 \cdots u_m} \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_0)_{u_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}_m, \underline{\tau}_{m-1})_{u_m},$$

pour définir la composante de  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  associée à un morphisme  $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$ , la somme s'étendant sur les décompositions de  $u$  en composée de morphismes

$$\underline{\tau}_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_m} \underline{\tau}_m$$

dans  $\Omega_n^{epi}$  ; l'opération de composition de  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  est induite par la concaténation des produits tensoriels, comme dans la définition du §1.5, et le morphisme d'identité de  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  associe l'objet unité  $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$  aux facteurs de  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  définis par la décomposition de longueur nulle des morphismes identiques  $\text{id} : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\tau}$ .

On a aussi un morphisme naturel  $\tilde{\eta} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  qui identifie  $\tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\tau})$  au sous-objet de  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})(\underline{\tau}, \underline{\tau})$  constitué des tenseurs d'ordre  $m = 1$ .

Puis on vérifie que :

**Proposition 1.8.** — *Le foncteur  $\tilde{F} : \tilde{Gr}_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow \tilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}}$  défini §1.7 est adjoint à gauche au foncteur d'oubli  $\tilde{U} : \tilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow \tilde{Gr}_{\Omega_n^{epi}}$ . Le morphisme d'inclusion  $\tilde{\eta} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  représente le morphisme d'unité de cette relation d'adjonction.  $\square$*

De la sorte, ce foncteur  $\tilde{F} : \tilde{Gr}_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow \tilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}}$  associe bien un objet libre à chaque graphe  $\mathcal{C}$ -enrichi scindé  $\tilde{\Gamma}$ .

**Remarque.** — L'adjonction de la Proposition 1.3 se relève au niveau des catégories de graphes, de sorte que l'on a finalement un carré commutatif de relations d'adjonctions

entre catégories :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Gr}_{\Omega_n^{epi}} & \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{c} \end{array} & Gr_{\Omega_n^{epi}} \\ \widetilde{U} \updownarrow \widetilde{F} & & U \updownarrow F \\ \widetilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}} & \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{c} \end{array} & Cat_{\Omega_n^{epi}} \end{array} .$$

On a le résultat suivant :

**Proposition 1.9.** —

- (a) La catégorie  $Gr_{\Omega_n^{epi}}$  hérite d'une structure modèle cofibrement engendrée telle qu'un morphisme  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  est une équivalence faible (respectivement, fibration, cofibration) si ses composantes  $f : \Gamma(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \rightarrow \Delta(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$  sont des équivalences faibles (respectivement, fibrations, cofibrations) dans la catégorie de base  $\mathcal{C}$ .
- (b) La catégorie  $\widetilde{Gr}_{\Omega_n^{epi}}$  hérite de même d'une structure modèle cofibrement engendrée telle qu'un morphisme  $f : \widetilde{\Gamma} \rightarrow \widetilde{\Delta}$  est une équivalence faible (respectivement, fibration, cofibration) si ses composantes  $f : \widetilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \rightarrow \widetilde{\Delta}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$  sont des équivalences faibles (respectivement, fibrations, cofibrations) dans la catégorie de base  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* — Immédiat, les catégories de graphes  $Gr_{\Omega_n^{epi}}$  et  $\widetilde{Gr}_{\Omega_n^{epi}}$  s'identifiant à des catégories produits  $\mathcal{C}^I = \prod_{i \in I} \mathcal{C}$  sur un certain ensemble  $I$ .  $\square$

Que l'on utilise pour démontrer :

**Théorème 1.10.** —

- (a) La catégorie  $Cat_{\Omega_n^{epi}}$  hérite d'une structure semi-modèle (au sens de [12]) telle qu'un morphisme est une équivalence faible (respectivement, fibration) dans  $Cat_{\Omega_n^{epi}}$  si il définit une équivalence faible (respectivement, fibration) dans  $Gr_{\Omega_n^{epi}}$ .
- (b) La catégorie  $\widetilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}}$  hérite d'une structure semi-modèle telle qu'un morphisme est une équivalence faible (respectivement, fibration) dans  $\widetilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}}$  si il définit une équivalence faible (respectivement, fibration) dans  $\widetilde{Gr}_{\Omega_n^{epi}}$ .

Les cofibrations sont, dans chaque cas, caractérisées par la propriété de relèvement à droite par rapport aux fibrations acycliques. La notion de structure semi-modèle renvoie à une restriction des axiomes de relèvements et de factorisation des catégories modèles aux morphismes dont la source est un objet cofibrant. Les constructions usuelles de l'algèbre homotopique restent valables dans le cadre des catégories semi-modèles. L'article [11] donne l'existence d'une structure semi-modèle pour les monoïdes dans une catégorie modèle monoïdale cofibrement engendrée. Le théorème 1.10 se démontre par une généralisation formelle des arguments de cette référence aux petites catégories.

L'idée générale consiste à utiliser l'adjonction  $F : Gr_{\Omega_n^{epi}} \rightleftarrows Cat_{\Omega_n^{epi}} : U$  pour définir la structure semi-modèle de  $Cat_{\Omega_n^{epi}}$  par transfert à partir de la catégorie

modèle des graphes  $\mathcal{C}$ -enrichi (on renvoie à [7, Théorème 12.1.4] pour le théorème de transfert utilisé).  $\square$

On peut observer que  $Cat_{\Omega_n^{epi}}$ , ainsi que  $\widetilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}}$ , hérite d'une structure modèle complète dans les cas  $\mathcal{C} = \text{Simp}, dg \mathbb{k}\text{Mod}$ , et plus généralement lorsque la catégorie de base  $\mathcal{C}$  vérifie l'axiome du monoïde de [21] et possède des cofibrations (acycliques) génératrices qui vérifient l'argument des petits objets pour des compositions transfinies de morphismes quelconques de  $\mathcal{C}$ . L'article [21] donne l'existence d'une structure modèle complète pour les monoïdes dans  $\mathcal{C}$  dans un tel contexte. L'extension des arguments de [21] aux petites catégories est purement formelle.

L'existence d'une structure modèle sur la catégorie des petites catégories enrichies avec un ensemble d'objets fixé est formellement démontrée dans [6] dans le cas  $\mathcal{C} = \text{Simp}$ .

On a également une structure modèle complète dans le cas  $\mathcal{C} = \text{Top}$ .

En plus du Théorème 1.10, on a le résultat suivant :

**Proposition 1.11.** — *Le foncteur  $c : Cat_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow \widetilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}}$  préserve les fibrations et les fibrations acycliques, de sorte que l'adjonction de la Proposition 1.3*

$$u : \widetilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}} \rightleftarrows Cat_{\Omega_n^{epi}} : c$$

*est une adjonction de Quillen et que le foncteur  $u : \widetilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow Cat_{\Omega_n^{epi}}$  préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques. Ce foncteur  $u : \widetilde{Cat}_{\Omega_n^{epi}} \rightarrow Cat_{\Omega_n^{epi}}$  préserve aussi toutes les équivalences faibles et pas seulement les équivalences faibles entre objets cofibrants.*

*Démonstration.* — Immédiat.  $\square$

## 2. Intermède : opérades cellulaires structurées sur l'opérade du graphe complet

On utilise essentiellement les conventions de [9] concernant l'opérade du graphe complet  $\mathcal{K}$  et les structures de  $\mathcal{K}$ -opérades. Cependant on reprend la définition de ces notions pour que notre exposé soit complet et on donne un rapide survol des résultats de [3, 9] que nous utiliserons dans l'article.

Rappelons que la collection sous-jacente d'une opérade  $\mathbf{P}$  revient à la donnée d'un foncteur sur la catégorie  $Bij$  constituée des ensembles finis avec les applications bijectives comme morphismes. On utilisera ce point de vue qui simplifie la définition de l'opérade du graphe complet.

Les termes  $\mathbf{P}(r)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , de la définition usuelle d'une opérade correspondent aux composantes  $\mathbf{P}(r) = \mathbf{P}(\underline{r})$  associées aux ensembles ordinaux  $\underline{r} = \{1 < \dots < r\}$ . Dans la suite, on ne considèrera que des opérades non-unitaires dont le terme  $\mathbf{P}(0)$  se réduit à l'objet initial de la catégorie considérée. On adoptera la notation  $\mathcal{O}_0$  pour la catégorie des opérades non-unitaires dans  $\mathcal{C}$ .

On suppose maintenant que  $\mathcal{C}$  est l'une de nos catégories de base préférées  $\mathcal{C} = \text{Simp}, \text{Top}, dg \mathbb{k}\text{Mod}$ .

**2.1. Les posets des graphes complets.** — Soit  $\underline{e} = \{e_1, \dots, e_s\}$  un ensemble fini. La composante  $\mathcal{K}(\underline{e})$  de l'opérade du graphe complet  $\mathcal{K}$  est l'ensemble des couples  $\kappa = (\mu, \sigma)$ , tels que  $\mu$  est une collection d'entiers naturels  $\mu_{ef} \in \mathbb{N}$  indexée par les paires  $\{e, f\} \subset \underline{e}$  et  $\sigma$  est une bijection  $\sigma : \{1, \dots, s\} \rightarrow \underline{e}$ .

Se donner une telle bijection  $\sigma$  revient à munir l'ensemble  $\underline{e} = \{e_1, \dots, e_r\}$  d'un ordre total  $\{e_{i_1} < \dots < e_{i_s}\}$ . La relation d'ordre définie par  $\sigma$  entre les éléments d'une paire  $\{e, f\} \subset \underline{e}$  sera notée  $\sigma|_{ef}$ .

Un élément  $\kappa = (\mu, \sigma)$  de  $\mathcal{K}(\underline{e})$  se représente par un graphe décoré avec  $\underline{e}$  comme ensemble de sommets, une arête pour chaque paire  $\{e, f\} \subset \underline{e}$ , de telle sorte que chaque arête est munie d'un poids, défini par l'entier  $\mu_{ef} \in \mathbb{N}$ , et d'une orientation, définie par la relation d'ordre  $\sigma|_{ef}$ . La Figure 3 donne un exemple de graphe complet étiqueté définissant un élément de  $\mathcal{K}(4)$ . On utilise aussi la terminologie de système

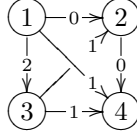


FIGURE 3. Cette figure représente le graphe étiqueté associé au système de poids orienté  $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}(4)$  tel que  $\mu_{12} = \mu_{24} = 0$ ,  $\mu_{14} = \mu_{23} = \mu_{34} = 1$ ,  $\mu_{13} = 2$  et  $\sigma = (1, 3, 2, 4)$ .

de poids orientés pour désigner un élément de  $\mathcal{K}(\underline{e})$ .

Des éléments  $(\mu, \sigma), (\nu, \tau) \in \mathcal{K}(\underline{e})$  sont comparables  $(\mu, \sigma) \leq (\nu, \tau)$  si on a la relation

$$(\mu_{ef} < \nu_{ef}) \quad \text{ou} \quad (\mu_{ef}, \sigma|_{ef}) = (\nu_{ef}, \tau|_{ef}),$$

pour toutes les paires  $\{e, f\} \subset \underline{e}$ .

Une bijection  $\phi : \underline{e} \xrightarrow{\cong} \underline{f}$  induit un morphisme de posets  $\phi_* : \mathcal{K}(\underline{e}) \rightarrow \mathcal{K}(\underline{f})$  qui applique un élément  $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}(\underline{e})$  sur le système de poids orienté  $(\nu, \tau) \in \mathcal{K}(\underline{f})$  tel que  $\nu_{\phi(e)\phi(f)} = \mu_{ef}$  et  $\tau = \phi\sigma$ . De la sorte, la collection de posets  $\mathcal{K}(\underline{e})$  définit un foncteur sur la catégorie des ensembles finis et des bijections.

Graphiquement, le morphisme de posets  $\phi_* : \mathcal{K}(\underline{e}) \rightarrow \mathcal{K}(\underline{f})$  revient à appliquer la bijection  $\phi : \underline{e} \rightarrow \underline{f}$  pour réindexer les sommets du graphe complet.

**2.2. La structure d'opérade des posets de graphes complets.** — La composition opéradique

$$\alpha \circ_e \beta \in \mathcal{K}(\underline{e} \setminus \{e\} \cup \underline{f})$$

de  $\alpha = (\mu, \sigma) \in \mathcal{K}(\underline{e})$  et  $\beta = (\nu, \tau) \in \mathcal{K}(\underline{f})$  est le système de poids orienté défini par le couple  $(\mu \circ_e \nu, \sigma \circ_e \tau)$  tel que :

$$(\mu \circ_e \nu)_{xy} = \begin{cases} \mu_{xy}, & \text{si } x, y \in \underline{e} \setminus \{e\}, \\ \mu_{xe}, & \text{si } x \in \underline{e} \setminus \{e\}, y \in \underline{f}, \\ \nu_{xy}, & \text{si } x, y \in \underline{f}, \end{cases}$$

et  $\sigma \circ_e \tau$  s'obtient en substituant l'occurrence de  $e$  dans la suite ordonnée  $\sigma = \{e_{i_1} < \dots < e < \dots < e_{i_s}\}$  représentant  $\sigma$  par la suite ordonnée  $\tau = \{f_{j_1} < \dots < f_{j_t}\}$  représentant  $\tau$ . On a également :

$$(\sigma \circ_e \tau)|_{xy} = \begin{cases} \sigma|_{xy}, & \text{si } x, y \in \underline{e} \setminus \{e\}, \\ \sigma|_{xe}, & \text{si } x \in \underline{e} \setminus \{e\}, y \in \underline{f}, \\ \tau|_{xy}, & \text{si } x, y \in \underline{f}, \end{cases}$$

Graphiquement, l'idée revient à brancher le graphe complet étiqueté défini par  $\beta$  sur le sommet indexé par  $e$  du graphe complet associé à  $\alpha$ . Dans le graphe composé, les arêtes d'un sommet  $x \neq e \in \underline{e}$  sur un sommet  $y \in \underline{f}$  sont des copies de l'arête  $\{x, e\}$  du graphe défini par  $\alpha$ . Les autres arêtes sont des copies des arêtes internes  $\{x, y\}$ ,  $x, y \in \underline{f}$ , du graphe de  $\beta$  et des arêtes internes  $\{x, y\}$ ,  $x, y \neq e \in \underline{e}$ , du graphe de  $\alpha$ . Un exemple est représenté Figure 4.

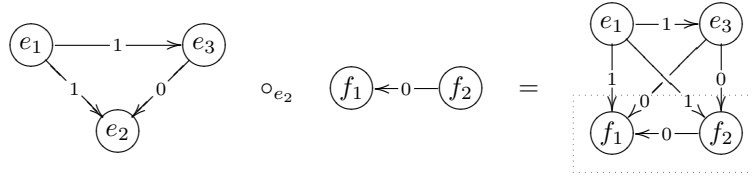


FIGURE 4. Une composition dans l'opérade du graphe complet

On définit ainsi des morphismes de compositions

$$\mathcal{K}(\underline{e}) \times \mathcal{K}(\underline{f}) \xrightarrow{\circ_e} \mathcal{K}(\underline{e} \setminus \{e\} \cup \underline{f})$$

pour tout  $e \in \underline{e}$  qui donnent à la collection de posets  $\mathcal{K}(\underline{e})$ ,  $\underline{e} \in \text{Ob } \text{Bij}$ , la structure d'une opérade dans les posets. Notons que l'ensemble  $\mathcal{K}(\underline{1})$  est réduit à un point qui représente l'unité de l'opérade. Comme on ne considère que des opérades non-unitaires dans la suite, on prendra aussi par convention  $\mathcal{K}(\underline{0}) = \emptyset$ , ce qui diffère de la définition de [3].

**2.3. La catégorie des  $\mathcal{K}$ -opérades.** — On appelle  $\mathcal{K}$ -diagramme une collection de foncteurs  $M : \mathcal{K}(\underline{e}) \rightarrow \mathcal{C}$  sur les posets  $\mathcal{K}(\underline{e})$ ,  $\underline{e} \in \text{Ob } \text{Bij}$ . On adoptera la notation  $M(\kappa)$  pour désigner le terme du diagramme associé à un système de poids orienté  $\kappa \in \mathcal{K}(\underline{e})$ . Le morphisme associé à une relation d'ordre  $\alpha \leq \beta$  dans  $\mathcal{K}(\underline{e})$  sera noté  $i_* : M(\alpha) \rightarrow M(\beta)$ .

Une  $\mathcal{K}$ -opérade est un  $\mathcal{K}$ -diagramme  $\mathbf{P}$  muni

(a) de morphismes

$$\mathbf{P}(\kappa) \xrightarrow{\phi_*} \mathbf{P}(\phi_* \kappa)$$



associés à chaque bijection  $\phi \in \text{Mor } \text{Bij}$ , de telle sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P(\alpha) & \xrightarrow{\phi_*} & P(\phi_*\alpha) \\ i_* \downarrow & & \downarrow i_* \\ P(\beta) & \xrightarrow{\phi_*} & P(\phi_*\beta) \end{array}$$

commute pour toute relation  $\alpha \leq \beta$ ,

(b) de morphismes de compositions

$$P(\alpha) \otimes P(\beta) \xrightarrow{\circ_e} P(\alpha \circ_e \beta),$$

definis pour tout  $e \in \underline{e}$  lorsque  $\alpha \in \mathcal{K}(\underline{e})$ , de telle sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P(\alpha) \otimes P(\beta) & \xrightarrow{\circ_e} & P(\alpha \circ_e \beta) \\ i_* \otimes i_* \downarrow & & \downarrow i_* \\ P(\gamma) \otimes P(\delta) & \xrightarrow{\circ_e} & P(\gamma \circ_e \delta) \end{array}$$

commute à chaque fois que l'on a des relations  $\alpha \leq \gamma$  et  $\beta \leq \delta$  dans  $\mathcal{K}$ ,

(c) et d'un élément unité  $1 \in P(1)$

vérifiant une extension naturelle des axiomes usuels des opérades. Un morphisme de  $\mathcal{K}$ -opérades  $\phi : P \rightarrow Q$  consiste naturellement en la donnée de morphismes de  $\mathcal{K}(\underline{e})$ -diagrammes  $\phi : P(\kappa) \rightarrow Q(\kappa)$ , pour  $\underline{e} \in \text{Ob } \text{Bij}$ , commutant à l'action des bijections, aux produits de compositions opéradiques, et préservant les unités. La catégorie des  $\mathcal{K}$ -opérades sera notée  $\mathcal{O}_0^{\mathcal{K}}$ .

On note qu'une  $\mathcal{K}$ -opérade ne possède pas de composante  $P(\kappa)$  avec  $\kappa \in \mathcal{K}(\underline{0})$  puisque l'on suppose par convention  $\mathcal{K}(\underline{0}) = \emptyset$ .

**2.4. Structures de  $\mathcal{K}$ -opérades constantes et colimites.** — Soit  $P \in \mathcal{O}_0$  une opérade au sens usuel, supposée non-unitaire. La collection des  $\mathcal{K}(\underline{e})$ -diagrammes constants

$$P(\kappa) = P(\underline{e}), \quad \kappa \in \mathcal{K}(\underline{e}), \quad \underline{e} \in \text{Ob } \text{Bij},$$

hérite d'une structure de  $\mathcal{K}$ -opérade évidente. On a ainsi un foncteur d'objet constant  $\text{cst} : \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0^{\mathcal{K}}$  de la catégorie des opérades usuelles  $\mathcal{O}_0$  dans la catégorie des  $\mathcal{K}$ -opérades  $\mathcal{O}_0^{\mathcal{K}}$ .

En sens inverse, toute  $\mathcal{K}$ -opérade  $P$  a une opérade usuelle associée  $\text{colim}_{\mathcal{K}} P$  définie par les colimites de ses diagrammes sous-jacents :

$$(\text{colim}_{\mathcal{K}} P)(\underline{e}) = \text{colim}_{\kappa \in \mathcal{K}(\underline{e})} P(\kappa).$$

L'action des bijections et la structure de composition de  $\text{colim}_{\mathcal{K}} P$  s'obtient en assemblant l'action des bijections et la structure de composition de  $P$  sur la colimite. De la sorte, on a aussi un foncteur  $\text{colim}_{\mathcal{K}} : \mathcal{O}_0^{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{O}_0$  de la catégorie des  $\mathcal{K}$ -opérades  $\mathcal{O}_0^{\mathcal{K}}$  dans la catégorie des opérades usuelles  $\mathcal{O}_0$ . Notons simplement que la convention  $\mathcal{K}(\underline{0}) = \emptyset$  entraîne que la colimite d'une  $\mathcal{K}$ -opérade est une opérade non-unitaire.

L'adjonction usuelle entre colimites et diagrammes constants entraîne que ces foncteurs définissent une relation adjonction

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{K}} : \mathcal{O}_0^{\mathcal{K}} \rightleftarrows \mathcal{O}_0 : \text{cst}$$

entre la catégorie des  $\mathcal{K}$ -opéades et la catégorie des opéades usuelles.

Dans la suite, on dira qu'une opéade dans les dg-modules  $\mathcal{P}$  a une  $\mathcal{K}$ -structure si on s'est donné une  $\mathcal{K}$ -opéade  $\mathcal{P}$  telle que  $\mathcal{P} = \operatorname{colim}_{\mathcal{K}} \mathcal{P}$ . Généralement, on adopte la même notation pour la colimite  $\mathcal{P}(\underline{e}) = \operatorname{colim}_{\kappa \in \mathcal{K}(\underline{e})} \mathcal{P}(\kappa)$  et la  $\mathcal{K}$ -opéade sous-jacente  $\mathcal{P}(\kappa)$ . En cas de risque de confusion préjudiciable, on marquera simplement les termes de ces structures avec des variables  $\kappa \in \mathcal{K}(\underline{e})$  et  $\underline{e} \in \text{Bij}$ , comme dans l'identité ci-dessus, pour distinguer les deux notions d'opéades.

On observe :

**Théorème 2.5 (voir [9, Theorem 2.2.8]).** — *La catégorie des  $\mathcal{K}$ -opéades non-unitaires  $\mathcal{O}_0^{\mathcal{K}}$  hérite d'une structure modèle cofibremment engendrée telle qu'un morphisme  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  est une équivalence faible (respectivement, fibration) si chacune de ses composantes  $\phi : \mathcal{P}(\kappa) \rightarrow \mathcal{Q}(\kappa)$  est une équivalence faible (respectivement, fibration) dans la catégorie de base  $\mathcal{C}$ , les cofibrations étant caractérisées par la propriété de relèvement à droite par rapport aux fibrations acycliques.*  $\square$

Dans la référence citée, le résultat est énoncé pour les  $\mathcal{K}$ -opéades dans la catégorie des dg-modules  $\mathcal{C} = \text{dg kMod}$ , cependant les arguments restent valables pour toute catégorie de base modèle monoïdale symétrique cofibremment engendrée. Dans la référence citée, on considère aussi une sous-catégorie  $\mathcal{O}_1^{\mathcal{K}}$  de  $\mathcal{O}_0^{\mathcal{K}}$  constituée des  $\mathcal{K}$ -opéades  $\mathcal{P}$  dont le terme  $\mathcal{P}(1)$  se réduit à l'unité, mais ceci ne modifie pas le résultat – par contre, comme dans le cas des opéades usuelles, l'absence de terme  $\mathcal{P}(0)$  est essentielle pour avoir une structure modèle complète et pas seulement une structure semi-modèle dans laquelle les axiomes de relèvement et de factorisation ne sont assurés que pour les morphismes dont le domaine est un objet cofibrant.

**2.6. La suite emboîtée associée à une  $\mathcal{K}$ -opéade.** — L'opéade des graphes complets a une suite emboîtée de sous-opéades

$$\mathcal{K}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{K}_n \subset \cdots \subset \operatorname{colim}_n \mathcal{K}_n = \mathcal{K}$$

dont les termes  $\mathcal{K}_n(\underline{e})$  sont constitué des systèmes de poids orientés  $\kappa = (\mu, \sigma) \in \mathcal{K}(r)$  tels que  $\max_{ef}(\mu_{ef}) < n$ . On pose également  $\mathcal{K}_{\infty} = \mathcal{K}$ .

La construction du §2.4 peut être appliquée pour produire, à partir de la structure d'une  $\mathcal{K}$ -opéade  $\mathcal{P}$ , une suite d'opéades usuelles

$$(*) \quad \operatorname{colim}_{\mathcal{K}_1} \mathcal{P} \rightarrow \cdots \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{K}_n} \mathcal{P} \rightarrow \cdots \rightarrow \operatorname{colim}_n \{ \operatorname{colim}_{\mathcal{K}_n} \mathcal{P} \} = \operatorname{colim}_{\mathcal{K}} \mathcal{P}$$

telles que  $(\operatorname{colim}_{\mathcal{K}_n} \mathcal{P})(\underline{e}) = \operatorname{colim}_{\kappa \in \mathcal{K}_n(\underline{e})} \mathcal{P}(\kappa)$ . Les morphismes

$$\operatorname{colim}_{\mathcal{K}_{n-1}} \mathcal{P} \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{K}_n} \mathcal{P}$$

sont induits par les inclusions de posets  $\mathcal{K}_{n-1}(\underline{e}) \subset \mathcal{K}_n(\underline{e})$ ,  $\underline{e} \in \text{Ob Bij}$ . On utilise aussi la notation  $\mathcal{P}_n = \operatorname{colim}_{\mathcal{K}_n} \mathcal{P}$  pour désigner les opéades de la suite (\*).

**2.7. Opérades cellulaires sur l'opérade du graphe complet.** — Rappelons que l'opérade commutative  $\mathbf{C}$ , associée à la catégorie des algèbres associatives et commutatives sans unité, vérifie  $\mathbf{C}(r) = \mathbf{1}$  pour tout  $r > 0$ , où  $\mathbf{1}$  est l'objet unité de la catégorie monoïdale symétrique sous-jacente. On regarde maintenant cette opérade  $\mathbf{C}$  comme une  $\mathcal{K}$ -opérade constante.

Le foncteur  $\text{colim}_{\mathcal{K}_n} : \mathcal{O}_0^{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{O}_0$  ne préserve évidemment pas toutes les équivalences faibles de  $\mathcal{K}$ -opérades. C'est pourquoi on introduit la notion de  $\mathcal{K}$ -opérade cellulaire : une  $\mathcal{K}$ -opérade  $\mathbf{P}$  augmentée sur l'opérade commutative  $\mathbf{C}$  est une  $\mathcal{K}$ -opérade cellulaire si :

- (K1) le morphisme d'augmentation  $\epsilon : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}$  est une équivalence faible de  $\mathcal{K}$ -opérades ;
- (K2) pour chaque  $\underline{e} \in \text{Ob } \text{Bij}$ , le  $\mathcal{K}(\underline{e})$ -diagramme  $\{\mathbf{P}(\kappa)\}_{\kappa \in \mathcal{K}(\underline{e})}$  sous-jacent à la structure de  $\mathcal{K}$ -opérade est cofibrant pour la structure modèle usuelle des diagrammes dans une catégorie cofibremment engendrée.

Ces conditions (K1-K2) assurent que les suites emboîtées (\*) associées à des  $\mathcal{K}$ -opérades cellulaires sont toutes faiblement équivalentes dans la catégorie des opérades. La condition (K2) assure aussi que les morphismes

$$\text{colim}_{\kappa \in \mathcal{K}_{n-1}(\underline{e})} \mathbf{P}(\underline{e}) \rightarrow \text{colim}_{\kappa \in \mathcal{K}_n(\underline{e})} \mathbf{P}(\underline{e})$$

dans la suite (\*) définissent des cofibrations dans la catégorie de base  $\mathcal{C}$  et que chaque opérade  $\mathbf{P}_n(\underline{e}) = \text{colim}_{\kappa \in \mathcal{K}_n(\underline{e})} \mathbf{P}(\kappa)$  définit une sous-opérade de la colimite complète  $\mathbf{P}(\underline{e}) = \text{colim}_{\kappa \in \mathcal{K}(\underline{e})} \mathbf{P}(\kappa)$ . On a également une relation d'inclusion  $\mathbf{P}(\kappa) \subset \mathbf{P}(\underline{e})$ , pour tout  $\kappa \in \mathcal{K}(\underline{e})$ , et  $\mathbf{P}(\kappa) \subset \mathbf{P}_n(\underline{e})$  lorsque  $\kappa \in \mathcal{K}_n(\underline{e})$ .

De plus :

**Théorème 2.8 (voir [3]).** — *La suite d'opérades (\*) associée à une  $\mathcal{K}$ -opérade cellulaire définit une suite emboîtée d'opérades faiblement équivalente, dans la catégorie des opérades, à la suite emboîtée des opérades de petits cubes dans  $\mathcal{C}$ .*  $\square$

On notera que les opérades de petits cubes elle-mêmes ne proviennent pas d'une opérade cellulaire sur l'opérade du graphe complet (voir [3]). Par contre l'opérade simpliciale  $\mathbf{W}$ , introduite par Barratt-Eccles dans [2], possède une  $\mathcal{K}$ -structure naturelle telle que les conditions (K1-K2) sont satisfaites (voir [3], voir également [9]). On a ainsi un exemple de  $\mathcal{K}$ -opérade cellulaire dans la catégorie des ensembles simpliciaux. On obtient un exemple de  $\mathcal{K}$ -opérade cellulaire dans la catégorie des espaces topologiques en prenant la réalisation topologique de cette opérade, une  $\mathcal{K}$ -opérade cellulaire dans la catégorie des dg-modules en prenant l'opérade de chaîne associée.

### 3. Catégories d'opérations universelles

On considère dans ce travail des diagrammes sur des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies. Un tel diagramme  $T : \Theta \rightarrow \mathcal{C}$ , pour une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $\Theta$ , consiste en la donnée d'une application

$$T : \text{Ob } \Theta \rightarrow \text{Ob } \mathcal{C}$$

qui à chaque objet  $\underline{a} \in \text{Ob } \Theta$  associe un objet  $T(\underline{a}) \in \mathcal{C}$  et de morphismes

$$\Theta(\underline{b}, \underline{a}) \otimes T(\underline{b}) \xrightarrow{T^\sharp} T(\underline{a}),$$

pour chaque couple d'objets  $(\underline{b}, \underline{a}) \in \text{Ob } \Theta \times \text{Ob } \Theta$ , satisfaisant des relations d'unité et d'associativité standards par rapport aux morphismes d'identité et de composition de la catégories  $\Theta$ . Si on a un hom-interne  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  qui fait de  $\mathcal{C}$  une catégorie monoïdale symétrique fermée, alors la donnée des morphismes  $T^\sharp$  équivaut à la donnée de morphismes

$$T : \Theta(\underline{b}, \underline{a}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(\underline{b}), T(\underline{a}))$$

dans  $\mathcal{C}$ , pour tout couple  $(\underline{b}, \underline{a}) \in \text{Ob } \Theta \times \text{Ob } \Theta$ . Un morphisme de  $\Theta$ -diagrammes  $f : S \rightarrow T$  consiste en la donnée d'une collection de morphismes

$$f : S(\underline{a}) \rightarrow T(\underline{a})$$

commutant à l'action de  $\Theta$ .

La notion de  $\Theta$ -diagramme contravariant est définie de façon symétrique, avec des morphismes agissant en sens inverse :

$$\Theta(\underline{b}, \underline{a}) \otimes T(\underline{a}) \xrightarrow{T^\sharp} T(\underline{b}).$$

On a une équivalence formelle entre la catégorie des  $\Theta$ -diagrammes contravariant et la catégorie des diagrammes covariants sur la catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $\Theta^{op}$  telle que  $\Theta^{op}(\underline{b}, \underline{a}) = \Theta(\underline{a}, \underline{b})$ .

La catégorie des diagrammes (covariants) associée à une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $\Theta$  sera notée  $\mathcal{C}^\Theta$ .

Lorsque la catégorie  $\mathcal{C}$  possède un hom-interne  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)$ , une structure de  $\Theta$ -diagramme peut se définir au moyen de la proposition suivante :

**Proposition 3.A.** —

- (a) Une collection d'objets  $T(\underline{x})$ ,  $\underline{x} \in \text{Ob } \Theta$ , forme un diagramme sur la catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $\text{End}_T$  qui a  $\text{Ob } \text{End}_T = \text{Ob } \Theta$  comme ensemble d'objets et

$$\text{End}_T(\underline{b}, \underline{a}) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(\underline{b}), T(\underline{a}))$$

comme hom-objets.

- (b) De plus, munir la collection  $T(\underline{a})$ ,  $\underline{a} \in \text{Ob } \Theta$ , d'une structure de  $\Theta$ -diagramme revient à se donner un morphisme de catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies  $\phi : \Theta \rightarrow \text{End}_T$

*Démonstration.* — Formel. □

Cette proposition sera appliquée §5.

On utilise la notation  ${}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}$  pour désigner la catégorie d'algèbres associée à une opérade  $\mathfrak{P}$ . Lorsque  $\mathbf{E}$  est une  $\mathcal{K}$ -opérade cellulaire, les inclusions de la suite d'opérades (\*) induisent aux niveaux des catégories d'algèbres des foncteurs de restriction de structure :

$$\mathbf{E}_\infty \mathcal{C} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{E}_n \mathcal{C} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{E}_1 \mathcal{C}.$$

On a aussi un foncteur de restriction de structure

$${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{E}_\infty \mathcal{C}$$

associé au morphisme  $\epsilon : E_\infty \rightarrow C$  induit par l'augmentation de  $E$  au dessus de l'opérade commutative  $C$ .

Le  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme  $\underline{B}^n(A)$  associé à une algèbre commutative  $A$ , tel qu'il est donné dans [17], définit un foncteur  $\underline{B} : {}_C C \rightarrow \mathcal{C}^{\Omega_n^{epi}}$ .

On forme maintenant un remplacement cofibrant de la catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée  $\tilde{\Omega}_n^{epi}$ , soit  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$ . La Proposition 1.11 implique que la catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $R(\Omega_n^{epi}) = u\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  définit un remplacement cofibrant de la catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie des arbres élagués  $\Omega_n^{epi}$ . Un morphisme de catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies  $f : \Phi \rightarrow \Psi$  induit un foncteur de restriction  $f^* : \mathcal{C}^\Phi \rightarrow \mathcal{C}^\Psi$  au niveau des catégories de diagrammes. Par conséquent, l'augmentation  $\epsilon : R(\Omega_n^{epi}) \xrightarrow{\sim} \Omega_n^{epi}$  de notre remplacement cofibrant, induit un foncteur de restriction  $\epsilon^* : \mathcal{C}^{\Omega_n^{epi}} \rightarrow \mathcal{C}^{R(\Omega_n^{epi})}$ .

On démontre le résultat suivant :

**Théorème 3.B.** — *Le foncteur  $\underline{B}^n : A \mapsto \underline{B}^n(A)$  défini dans [17], qui à une algèbre commutative  $A$  associe un  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme  $\underline{B}^n(A)$ , possède une extension :*

$$\begin{array}{ccc} {}_C C & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & E_n C \\ \underline{B}^n \downarrow & & \downarrow \exists \underline{B}^n \\ \mathcal{C}^{\Omega_n^{epi}} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{R(\Omega_n^{epi})} \end{array} ,$$

pour les structures introduites précédemment.

Pour la suite on aura besoin de la construction du foncteur  $\underline{B}^n : E_n C \rightarrow \mathcal{C}^{R(\Omega_n^{epi})}$  car le résultat du théorème ne le caractérise pas complètement. C'est aussi pourquoi on forme au préalable un remplacement cofibrant de la catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée  $\tilde{\Omega}_n^{epi}$ , même si seule la catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $R(\Omega_n^{epi}) = u\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  apparaît dans le résultat du Théorème 3.B.

L'idée expliquée dans l'introduction consiste à associer à toute  $\mathcal{K}$ -opérade  $P$  une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie universelle  $\Upsilon_n^P$ , agissant sur les termes de la construction bar  $n$ -itérée et à produire un morphisme  $R(\Omega_n^{epi}) \rightarrow \Upsilon_n^E$  lorsque  $E$  est une  $\mathcal{K}$ -opérade cellulaire pour définir l'action de  $R(\Omega_n^{epi})$  sur  $\underline{B}^n(A)$ .

On introduit en fait une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée sur  $\Omega_n^{epi}$ , soit  $\tilde{\Upsilon}_n^P$ , et on définit  $\Upsilon_n^P$  comme la catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie qui lui est associée.

La définition de  $\tilde{\Upsilon}_n^P$  fait l'objet des paragraphes suivants.

La collection sous-jacente du diagramme  $\underline{B}^n(A)$  est, dans tout les cas, défini par  $\underline{B}^n(A)(\underline{\tau}) = A^{\otimes In \underline{\tau}}$ . Lorsque  $A$  est une algèbre commutative, le morphisme  $u_* : A^{\otimes In \underline{\tau}} \rightarrow A^{\otimes In \underline{\sigma}}$  associé à un morphisme  $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$  de  $\Omega_n^{epi}$  effectue le produit des facteurs  $A^{\otimes u^{-1}(i)}$ ,  $i \in In \underline{\sigma}$ , associés aux fibres de l'application  $u : In \underline{\tau} \rightarrow In \underline{\sigma}$ . On a explicitement

$$u_* \left( \bigotimes_{j \in In \underline{\tau}} a_j \right) = \bigotimes_{i \in In \underline{\sigma}} \left\{ \mu \left( \bigotimes_{j \in u^{-1}(i)} a_j \right) \right\}.$$

Basiquement, l'idée consiste à définir le morphisme  $u_* : A^{\otimes In \underline{\tau}} \rightarrow A^{\otimes In \underline{\sigma}}$  de façon analogue lorsque  $A$  est une  $\mathbf{E}_n$ -algèbre

$$u_* \left( \bigotimes_{j \in In \underline{\tau}} a_j \right) = \sum_k \left\{ \bigotimes_{i \in In \underline{\sigma}} \left\{ \pi_k^j \left( \bigotimes_{j \in u^{-1}(i)} a_j \right) \right\} \right\},$$

en remplaçant l'opération de multiplication  $\mu$  par des tenseurs d'opérations  $\pi_k^j \in \mathbf{E}_n(u^{-1}(i))$ .

La catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée  $\tilde{\Upsilon}_n^{\mathbf{E}}$  est la structure qui, avec la notion de  $\mathcal{K}$ -opérade, nous permettra d'organiser et de contrôler les opérations  $\pi_k^j$  de la construction.

**3.1. Les composantes de la catégorie  $\tilde{\Upsilon}_n^{\mathbf{P}}$ .** — On associe à tout arbre élagué  $\underline{\tau} \in \Omega_n^{epi}$  une collection d'indices  $\mu(\underline{\tau})$ , indexée par les paires  $\{i < j\} \subset In \underline{\tau}$ , telle que  $\mu(\underline{\tau})_{ij} \in \mathbb{N}$  est la profondeur de séparation entre  $i$  et  $j$  dans l'arbre représentant  $\underline{\tau}$  (voir [8, §A.4]). Formellement, on définit  $\mu_{ij} = \mu(\underline{\tau})_{ij}$  comme le plus petit entier  $m$  tel que  $(\tau_m \cdots \tau_1)(i) \neq (\tau_m \cdots \tau_1)(j)$ . Pour un arbre élagué  $\underline{\tau} \in \Omega_n^{epi}$ , on a nécessairement  $\mu(\underline{\tau})_{ij} < n$ ,  $\forall i < j$ .

La composante de la catégorie scindée  $\tilde{\Upsilon}_n^{\mathbf{P}}$  associée à un morphisme  $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$  est définie par le produit tensoriel

$$\tilde{\Upsilon}_n^{\mathbf{P}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = \bigotimes_{j \in In \underline{\sigma}} \mathbf{P}(\mu(\underline{\tau})_{u^{-1}(j)}, \text{id}_{u^{-1}(j)}),$$

où  $\mu(\underline{\tau})_{u^{-1}(j)}$  désigne la restriction de  $\mu(\underline{\tau})$  aux paires de  $u^{-1}(j) \subset In \underline{\tau}$  et  $\text{id}_{u^{-1}(j)}$  désigne l'ordre naturel, hérité de  $In \underline{\tau}$ , du sous-ensemble  $u^{-1}(j) \subset In \underline{\tau}$ , le couple  $(\mu(\underline{\tau})_{u^{-1}(j)}, \text{id}_{u^{-1}(j)})$  définissant ainsi un élément de  $\mathcal{K}(u^{-1}(j))$ , pour tout  $j \in In \underline{\sigma}$ .

Pour chaque  $\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , on a un morphisme naturel

$$\mathbf{1} \rightarrow \tilde{\Upsilon}_n^{\mathbf{P}}(\underline{\tau}, \underline{\tau})_{\text{id}} = \bigotimes_{j \in In \underline{\tau}} \mathbf{P}(1)$$

induit par l'unité de  $\mathbf{P}$  qui donne un morphisme d'identité pour  $\tilde{\Upsilon}_n^{\mathbf{P}}$ .

On se donne maintenant un couple de morphismes composables

$$\underline{\sigma} \xleftarrow{v} \underline{\theta} \xleftarrow{w} \underline{\tau}.$$

Pour définir l'opération de composition de  $\tilde{\Upsilon}_n^{\mathbf{P}}$ , on part de l'observation suivante :

**Observation 3.2.** — *Pour chaque  $i \in In \underline{\sigma}$ , l'opération de composition du graphe complet*

$$\mathcal{K}(v^{-1}(i)) \otimes \left\{ \bigotimes_{k \in v^{-1}(i)} \mathcal{K}(w^{-1}(k)) \right\} \rightarrow \mathcal{K}((vw)^{-1}(i))$$

*composant un facteur  $\lambda_k \in \mathcal{K}(w^{-1}(k))$  sur l'entrée  $k \in v^{-1}(i)$  d'un élément  $\kappa \in \mathcal{K}(v^{-1}(i))$ , applique la collection d'éléments*

$$\begin{aligned} \kappa &= (\mu(\underline{\theta})_{v^{-1}(i)}, \text{id}_{v^{-1}(i)}) \in \mathcal{K}(v^{-1}(i)) \\ \lambda_k &= (\mu(\underline{\tau})_{w^{-1}(k)}, \text{id}_{w^{-1}(k)}) \in \mathcal{K}(w^{-1}(k)), \quad k \in v^{-1}(i), \end{aligned}$$

sur un élément plus petit que

$$\mu = (\mu(\underline{\tau})_{(vw)^{-1}(i)}, \text{id}_{(vw)^{-1}(i)}) \in \mathcal{K}((vw)^{-1}(i))$$

par rapport à l'ordre du poset  $\mathcal{K}((vw)^{-1}(i))$ .

**3.3. Le morphisme de composition de  $\tilde{\Upsilon}_n^{\mathbb{P}}$ .** — L'observation précédente entraîne l'existence d'un morphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mu(\underline{\theta})_{v^{-1}(i)}, \text{id}_{v^{-1}(i)}) \otimes \left\{ \bigotimes_{k \in v^{-1}(i)} \mathbb{P}(\mu(\underline{\tau})_{w^{-1}(k)}, \text{id}_{w^{-1}(k)}) \right\} \\ \rightarrow \mathbb{P}(\mu(\underline{\tau})_{(vw)^{-1}(i)}, \text{id}_{(vw)^{-1}(i)}) \end{aligned}$$

déduit de la structure de  $\mathcal{K}$ -opérate de  $\mathbb{P}$ . On forme le produit tensoriel sur  $j \in \text{In } \underline{\sigma}$  de ces morphismes pour définir le produit de composition

$$\tilde{\Upsilon}_n^{\mathbb{P}}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_v \otimes \tilde{\Upsilon}_n^{\mathbb{P}}(\underline{\tau}, \underline{\theta})_w \rightarrow \tilde{\Upsilon}_n^{\mathbb{P}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_{vw}.$$

On vérifie aisément que cette opération de composition, et notre opération identité, satisfont les propriétés attendues pour une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée sur  $\Omega_n^{\text{epi}}$ , de sorte que :

**Proposition 3.4.** — *Notre construction donne une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $\tilde{\Upsilon}_n^{\mathbb{P}}$ , scindée sur  $\Omega_n^{\text{epi}}$ , naturellement associée à chaque  $\mathcal{K}$ -opérate  $\mathbb{P}$ .  $\square$*

En outre, on voit clairement que :

**Proposition 3.5.** — *Pour l'opérate commutative  $\mathcal{C}$  (considérée comme une  $\mathcal{K}$ -opérate constante), on a l'identité  $\tilde{\Upsilon}_n^{\mathcal{C}} = \tilde{\Omega}_n^{\text{epi}}$ .  $\square$*

On dit qu'une opérate  $\mathbb{P}$  est  $\mathcal{C}$ -cofibrante si ses composantes  $\mathbb{P}(\kappa)$  sont des objets cofibrants de  $\mathcal{C}$ . Cette condition technique intervient dans le cas  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \text{Mod}$  lorsque l'anneau de base  $\mathbb{k}$  n'est pas semi-simple pour assurer qu'un produit tensoriel d'équivalences faibles  $\mathbb{P}(\kappa) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(\kappa)$  est encore une équivalence faible. Une  $\mathcal{K}$ -opérate cellulaire est automatiquement  $\mathcal{C}$ -cofibrante.

On montre maintenant :

**Lemme 3.6.** — *Le foncteur  $\tilde{\Omega}_n^{\text{epi}} : \mathbb{P} \mapsto \tilde{\Upsilon}_n^{\mathbb{P}}$  applique une fibration acyclique entre  $\mathcal{K}$ -opérades ( $\mathcal{C}$ -cofibrantes dans le cas  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \text{Mod}$ ) sur une fibration acyclique de catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies scindées au dessus de  $\Omega_n^{\text{epi}}$ .*

*Démonstration.* — Le lemme est une conséquence directe du fait que les fibrations acycliques, tant dans la catégorie des  $\mathcal{K}$ -opérades que dans la catégorie des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies scindées au dessus de  $\Omega_n^{\text{epi}}$ , sont créées par oubli de structure dans la catégorie de base et qu'un produit tensoriel de fibrations acycliques (entre objets cofibrants dans le cas  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \text{Mod}$ ) est encore une fibration acyclique.  $\square$

On a alors :

**Proposition 3.7.** — Soit  $\mathbf{E}$  une  $\mathcal{K}$ -opérade munie d'une fibration acyclique  $\epsilon : \mathbf{E} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ . Le problème de relèvement

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\Upsilon}_n^{\mathbf{E}} \\ & \nearrow \exists? \psi & \downarrow \\ \tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) & \xrightarrow{\sim} \tilde{\Omega}_n^{epi} \xrightarrow{=} & \tilde{\Upsilon}_n^{\mathbf{C}} \end{array}$$

possède une solution  $\psi$  qui est de plus unique à homotopie près.

On rappelle que  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  désigne un remplacement cofibrant de  $\tilde{\Omega}_n^{epi}$  dans la catégorie des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies scindées au dessus de  $\Omega_n^{epi}$ .

*Démonstration.* — Cette proposition est une conséquence directe du Lemme 3.6 et de l'axiome de relèvement des catégories modèles.  $\square$

On suppose maintenant que  $\mathbf{E}$  est une  $\mathcal{K}$ -opérade cellulaire de sorte que l'on a une inclusion  $\mathbf{E}(\kappa) \subset \operatorname{colim}_{\kappa \in \mathcal{K}(\mathbf{e})} \mathbf{E}(\kappa) = \mathbf{E}(\mathbf{e})$ , pour chaque  $\kappa \in \mathcal{K}(\mathbf{e})$ , et  $\mathbf{E}_n(\mathbf{e}) = \operatorname{colim}_{\kappa \in \mathcal{K}_n(\mathbf{e})} \mathbf{E}(\kappa)$  définit une sous-opérade de la colimite  $\mathbf{E}(\mathbf{e})$ . On a aussi une inclusion  $\mathbf{E}(\kappa) \subset \mathbf{E}_n(\mathbf{e})$  lorsque  $\kappa = (\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_n(\mathbf{e})$ , ce qui revient par définition de  $\mathcal{K}_n$  à la relation  $\max_{ef}(\mu_{ef}) < n$ .

On a noté que le système de poids  $\mu(\tau)$  associé à un arbre élagué de  $n$  niveaux  $\tau \in \Omega_n^{epi}$  vérifie  $\max_{ij}(\mu(\tau)_{ij}) < n$ . Par conséquent :

**Observation 3.8.** — Dans les hom-objets

$$\tilde{\Upsilon}_n^{\mathbf{E}}(\tau, \sigma)_u = \bigotimes_{i \in \operatorname{In} \sigma} \mathbf{E}(\mu(\tau)_{u^{-1}(i)}, \operatorname{id}_{u^{-1}(i)}),$$

les éléments  $p \in \mathbf{E}(\mu(\tau)_{u^{-1}(i)}, \operatorname{id}_{u^{-1}(i)})$  définissent des opérations de  $\mathbf{E}_n(u^{-1}(i))$ .

**3.9. Définition de la structure de diagramme sur la construction bar  $n$ -itérée.** — On peut maintenant définir la structure de  $R(\Omega_n^{epi})$ -diagramme sur les termes du complexe bar  $n$ -itéré  $B^n(A)$  lorsque  $A$  décrit la catégorie des  $\mathbf{E}_n$ -algèbres. On rappelle que l'on a fixé un catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie cofibrante  $R(\Omega_n^{epi})$  associée à une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$ , de sorte que :

$$R(\Omega_n^{epi})(\tau, \sigma) = \prod_{u \in \operatorname{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\tau, \sigma)} \tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\tau, \sigma)_u.$$

On pose  $\underline{B}^n(A)(\tau) = A^{\otimes \operatorname{In} \tau}$ . Le morphisme

$$R(\Omega_n^{epi})(\tau, \sigma) \otimes \underline{B}^n(A)(\tau) \rightarrow \underline{B}^n(A)(\sigma)$$

est défini sur la composante  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\tau, \sigma)_u$  de  $R(\Omega_n^{epi})(\tau, \sigma)$  par la composée

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\tau, \sigma)_u \otimes A^{\otimes \operatorname{In} \tau} &\rightarrow \tilde{\Upsilon}_n^{\mathbf{E}}(\tau, \sigma)_u \otimes A^{\otimes \operatorname{In} \tau} \\ &\xrightarrow{\cong} \bigotimes_{i \in \operatorname{In} \sigma} \{\mathbf{E}(\mu(\tau)_{u^{-1}(i)}, \operatorname{id}_{u^{-1}(i)}) \otimes A^{\otimes u^{-1}(i)}\} \rightarrow A^{\otimes \operatorname{In} \sigma}, \end{aligned}$$



où intervient : le relèvement  $\psi : \tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) \rightarrow \tilde{\Upsilon}_n^E$  construit dans la Proposition 3.7 ; et les morphismes  $E(\mu(\underline{\tau})_{u^{-1}(i)}, \text{id}_{u^{-1}(i)}) \otimes A^{\otimes u^{-1}(i)} \rightarrow A$  déduit de la structure de  $E_n$ -algèbre de  $A$  via la relation  $E(\mu(\underline{\tau})_{u^{-1}(i)}, \text{id}_{u^{-1}(i)}) \subset E_n(u^{-1}(i))$  donnée par l'observation 3.8.

Les propriétés d'unité et d'associativité de l'action des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies sur un diagramme se vérifient aisément, de sorte que l'on a bien construit un  $R(\Omega_n^{epi})$ -diagramme  $\underline{B}^n(A)$  naturellement associé à chaque  $E_n$ -algèbre  $A$ .

Lorsque  $A$  est une algèbre commutative, notre composée donnant l'action de  $R(\Omega_n^{epi})$  sur  $\underline{B}^n(A)$  factorise par :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_n^{epi}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \otimes A^{\otimes In \underline{\tau}} &\xrightarrow{\cong} \tilde{\Upsilon}_n^C(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \otimes A^{\otimes In \underline{\tau}} \\ &\xrightarrow{\cong} \bigotimes_{i \in In \underline{\sigma}} \{C(\mu(\underline{\tau})_{u^{-1}(i)}, \text{id}_{u^{-1}(i)}) \otimes A^{\otimes u^{-1}(i)}\} \rightarrow A^{\otimes In \underline{\sigma}}. \end{aligned}$$

On a

$$\tilde{\Omega}_n^{epi}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = \tilde{\Upsilon}_n^C(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = C(\mu(\underline{\tau})_{u^{-1}(i)}, \text{id}_{u^{-1}(i)}) = \mathbf{1}$$

et ce morphisme composé s'identifie au morphisme  $u_* : A^{\otimes In \underline{\tau}} \rightarrow A^{\otimes In \underline{\sigma}}$  multipliant les facteurs  $A^{\otimes u^{-1}(i)}$ ,  $i \in In \underline{\sigma}$ , associés aux fibres de l'application

$$u : In \underline{\tau} \rightarrow In \underline{\sigma}.$$

On retrouve ainsi la définition de [17] pour le  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme associé à une algèbre commutative.

Cette dernière remarque montre que la construction de ce paragraphe donne un foncteur  $\underline{B}^n : E_n \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{R(\Omega_n^{epi})}$  satisfaisant toutes les propriétés énoncées dans le Théorème 3.B et achève la démonstration de ce résultat.  $\square$

**Remarque.** — Observons que les morphismes  $\tilde{\Upsilon}_n^E(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \otimes A^{\otimes In \underline{\tau}} \xrightarrow{\omega^\#} A^{\otimes In \underline{\sigma}}$  qui interviennent dans la construction du §3.9 déterminent une action de  $\Upsilon_n^E = u\tilde{\Upsilon}_n^E$  sur  $A$ . Les morphismes adjoints  $\tilde{\Upsilon}_n^E(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \xrightarrow{\omega} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A^{\otimes In \underline{\tau}}, A^{\otimes In \underline{\sigma}})$  déterminent, dans l'idée de la Proposition 3.A, le morphisme de catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies  $\omega : \Upsilon_n^E \rightarrow \text{End}_{\underline{B}^n(A)}$  auquel cette action est associée.

L'action de  $R(\Omega_n^{epi}) = u\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  sur  $\underline{B}^n(A)$  est associée au morphisme composé :

$$u\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) \xrightarrow{\psi} u\tilde{\Upsilon}_n^E \xrightarrow{\omega} \text{End}_{\underline{B}^n(A)}.$$

La construction du Lemme 3.7 entraîne que des choix de morphismes  $\psi$  différents conduisent à des morphismes homotopes à gauche dans la catégorie des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies scindées sur  $\Omega_n^{epi}$ . Les morphismes composés  $\omega\psi$  associés à des choix de morphismes  $\psi$  différents sont également homotopes à gauches dans la catégorie des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies, puisque le foncteur  $u : \Theta \mapsto u\Theta$  s'intègre dans une adjonction de Quillen et la composition (à gauche) préserve la relation d'homotopie (à gauche) dans une catégorie modèle. La structure de catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie scindée permet ainsi, même si elle n'apparaît pas dans le résultat final de notre construction, de caractériser l'action de la catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $R(\Omega_n^{epi})$  sur  $\underline{B}^n(A)$ .

## INTERPRÉTATION DE LA $E_n$ -HOMOLOGIE EN TERMES DE FONCTEURS TOR CATÉGORIQUES

Le but de cette partie est de démontrer le théorème, énoncé dans l'introduction de l'article, donnant interprétation de l'homologie du complexe bar  $n$ -itéré d'une  $E_n$ -algèbre en termes de foncteurs Tor catégoriques.

On commence §4 par définir la notion de foncteur Tor sur une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie. On utilise pour cela que la catégorie de diagrammes associée à une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie hérite d'une structure de catégorie modèle cofibrement engendrée.

On se concentre ensuite sur le cadre différentiel gradué. On définit §5 un analogue des constructions cobar-bar de l'algèbre pour les catégories scindées enrichies en dg-modules (on parle alors de dg-catégoriques). La construction cobar-bar produit, sous des hypothèses minimales, un modèle cofibrant de toute catégorie scindée  $\tilde{\Theta}$  dans la catégorie des dg-catégoriques scindées. On définit §6 une construction de Koszul qui donne un modèle minimal de la catégorie scindée des arbres élagués  $\tilde{\Omega}_n^{epi}$ , puis on montre comment déduire un complexe calculant les foncteurs Tor de la structure cette catégorie cofibrante particulière. On applique la construction de Koszul §7 pour prouver l'identité de l'homologie du complexe bar  $n$ -itéré  $B^n(A)$  avec un foncteur Tor catégorique.

On consacre la section d'appendice §8 à la démonstration d'une propriété clé pour appliquer la dualité de Koszul à la catégorie des arbres élagués.

### 4. Foncteurs Tor sur une catégorie enrichie

On peut revenir pour cette section au contexte général d'une catégorie de base quelconque  $\mathcal{C}$ , munie d'une structure modèle cofibrement engendrée qui en fait une catégorie modèle monoïdale symétrique comme au §1. On doit simplement se restreindre à des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies  $\Theta$  telles que :

- le morphisme d'identité  $\eta : \mathbf{1} \rightarrow \Theta(\underline{x}, \underline{x})$  est une cofibration dans  $\mathcal{C}$ , pour tout  $\underline{x} \in \text{Ob } \Theta$ ,
- les hom-objets  $\Theta(\underline{b}, \underline{a})$  sont cofibrants dans  $\mathcal{C}$ , pour tout les couples  $(\underline{b}, \underline{a}) \in \text{Ob } \Theta \times \text{Ob } \Theta$  ;

On dit dans cette situation que la catégorie  $\Theta$  est  $\mathcal{C}$ -cofibrante (ou dg-cofibrante lorsque  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \text{Mod}$ ). On supposera tacitement que cette hypothèse, que l'on ne rappellera que dans les théorèmes principaux, est satisfaite pour toutes les catégories considérée dans cette section. On peut montrer qu'une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie cofibrante est automatiquement  $\mathcal{C}$ -cofibrante.

La restriction à des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies  $\mathcal{C}$ -cofibrantes n'est pas nécessaire pour certains de nos résultats (mais pas tous) lorsque la catégorie de base  $\mathcal{C}$  vérifie l'axiome du monoïde de [21] (ce qui est le cas des catégories  $\mathcal{C} = \text{Simp}, \text{Top}, dg \mathbb{k} \text{Mod}$  considérées dans cet article).

On sait (voir par exemple [10, §11.6]) que la catégorie de diagrammes associée à une petite catégorie  $\Theta$  hérite d'une structure de catégorie modèle cofibrement engendrée

de la catégorie de base. Une généralisation formelle de ce résultat donne dans le cadre des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies :

**Théorème 4.1.** — *La catégorie de diagrammes  $\mathcal{C}^\Theta$  associée à une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $\Theta$  hérite d'une structure de catégorie modèle cofibremment engendrée avec pour équivalences faibles (respectivement, fibrations) les morphismes de  $\Theta$ -diagrammes  $f : S \rightarrow T$  dont les composantes  $f : S(\underline{x}) \rightarrow T(\underline{x})$  sont des équivalences faibles (respectivement, fibrations) dans la catégorie de base  $\mathcal{C}$ , pour tout  $\underline{x} \in \text{Ob } \Theta$ , les cofibrations étant caractérisées par la propriété de relèvement à droite par rapport aux fibrations acycliques.  $\square$*

Les cofibrations (acycliques) génératrices de  $\mathcal{C}^\Theta$  sont les morphismes

$$i \otimes \Theta(\underline{x}, -) : C \otimes \Theta(\underline{x}, -) \rightarrow D \otimes \Theta(\underline{x}, -)$$

donnés par les produits tensoriels avec les foncteurs de Yoneda

$$\Theta(\underline{x}, -), \quad \underline{x} \in \text{Ob } \Theta,$$

des cofibrations (acycliques) génératrices  $i : C \rightarrow D$  de la catégorie de base  $\mathcal{C}$ .

On définit une  $\mathcal{C}$ -cofibration (acyclique) de  $\Theta$ -diagrammes comme un morphisme  $f : S \rightarrow T$  dont les composantes  $f : S(\underline{x}) \rightarrow T(\underline{x})$  sont des cofibrations dans la catégorie de base  $\mathcal{C}$ , pour tout objet  $\underline{x} \in \text{Ob } \Theta$ . On dit qu'un diagramme  $T$  est  $\mathcal{C}$ -cofibrant lorsque le morphisme initial  $0 \rightarrow T$  est une  $\mathcal{C}$ -cofibration. On utilise aussi les terminologies de dg-cofibration et d'objet dg-cofibrant pour désigner ces notions dans le cadre différentiel gradué.

La proposition suivante montre que les  $\mathcal{C}$ -cofibrations de  $\Theta$ -diagrammes forment une classe élargie de cofibrations au sens de [7, §11.1.16] :

**Proposition 4.2.** —

- (a) *Les  $\mathcal{C}$ -cofibrations (acycliques) de diagrammes sont stables par extension de cobase, par composition (transfinie), et par rétraction.*
- (b) *Une cofibration (acyclique) de diagrammes est aussi une  $\mathcal{C}$ -cofibration (acyclique).*

*Démonstration.* — On montre aisément que le foncteur d'oubli  $U : \mathcal{C}^\Theta \rightarrow \mathcal{C}^{\text{Ob } \Theta}$  qui à un  $\Theta$ -diagramme  $T$  associe sa collection d'objets sous-jacente  $T(\underline{x})$ ,  $\underline{x} \in \text{Ob } \Theta$ , crée les colimites. L'assertion (a) est une conséquence immédiate de cette observation, du fait que les cofibrations (acycliques) dans une catégorie modèle sont stables par extension de cobase, par composition (transfinie), et par rétraction. L'axiome du pushout-produit des catégories modèles monoïdales symétriques entraîne que les cofibrations (acycliques) génératrices

$$i \otimes \Theta(\underline{x}, -) : C \otimes \Theta(\underline{x}, -) \rightarrow D \otimes \Theta(\underline{x}, -)$$

sont des  $\mathcal{C}$ -cofibrations. L'assertion (b) s'ensuit puisque toute cofibration (acyclique) de  $\mathcal{C}^\Theta$  est rétract d'un complexe cellulaire relatif produit par des compositions (transfinies) d'extensions de cobases de cofibrations (acycliques) génératrices.  $\square$

**4.3. Produit tensoriels sur une catégorie enrichie.** — Le produit tensoriel sur une catégorie enrichie est un objet de la catégorie de base

$$S \otimes_{\Theta} T \in \mathcal{C}$$

naturellement associé à un  $\Theta$ -diagramme contravariant  $S$  et à un  $\Theta$ -diagramme covariant  $T$ . Il est défini par un coégalisateur réflexif de la forme :

$$\coprod_{(b, \underline{a}) \in \text{Ob } \Theta \times \Theta} \{S(\underline{a}) \otimes \Theta(b, \underline{a}) \otimes T(b)\} \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} \coprod_{\underline{x} \in \text{Ob } \Theta} \{S(\underline{x}) \otimes T(\underline{x})\} \dashrightarrow S \otimes_{\Theta} T ;$$

$s_0$

avec le morphisme  $d_0$  induit composante par composante par l'action à droite de la catégorie  $\Theta$  sur  $S$  :

$$S(\underline{a}) \otimes \Theta(b, \underline{a}) \otimes T(b) \xrightarrow{S^{\sharp} \otimes T(b)} S(b) \otimes T(b) ;$$

le morphisme  $d_1$  induit par l'action à gauche de  $\Theta$  sur  $T$  :

$$S(\underline{a}) \otimes \Theta(b, \underline{a}) \otimes T(b) \xrightarrow{S(\underline{a}) \otimes T^{\sharp}} S(\underline{a}) \otimes T(\underline{a}) ;$$

et le morphisme  $s_0$  induit par le morphisme d'identité de  $\Theta$  :

$$S(\underline{x}) \otimes T(\underline{x}) = S(\underline{x}) \otimes \mathbf{1} \otimes T(\underline{x}) \xrightarrow{S(\underline{x}) \otimes \eta \otimes T(\underline{x})} S(\underline{x}) \otimes \Theta(\underline{x}, \underline{x}) \otimes T(\underline{x}).$$

On peut aussi adopter la notation usuelle des cofins

$$S \otimes_{\Theta} T = \int^{\underline{x} \in \Theta} S(\underline{x}) \otimes T(\underline{x})$$

pour représenter ce produit tensoriel.

Le produit tensoriel  $S \otimes_{\Theta} T$  définit clairement un bifoncteur qui, par le principe de commutation des colimites, préserve les colimites en  $S$  et les colimites en  $T$ . De plus :

**Observation 4.4.** — *Pour un foncteur de Yoneda contravariant  $S = \Theta(-, \underline{x})$ , on a un isomorphisme naturel  $\Theta(-, \underline{x}) \otimes_{\Theta} T \simeq T(\underline{x})$ . Pour un foncteur de Yoneda covariant  $T = \Theta(\underline{x}, -)$ , on a symétriquement  $S \otimes_{\Theta} \Theta(\underline{x}, -) \simeq S(\underline{x})$ .*

On a aussi (en utilisant que le produit tensoriel de  $\mathcal{C}$  préserve les colimites) :

**Observation 4.5.** — *Soit  $C \in \mathcal{C}$ . On a les identités :*

$$(C \otimes S) \otimes_{\Theta} T = C \otimes (S \otimes_{\Theta} T) = S \otimes_{\Theta} (C \otimes T),$$

pour les diagrammes  $C \otimes S$  et  $C \otimes T$  définis point par point par le produit tensoriel avec  $C$  dans  $\mathcal{C}$ .

On s'intéresse maintenant aux propriétés homotopiques du produit tensoriel  $S \otimes_{\Theta} T$ . On utilise des pushout-produits de bifoncteurs pour simplifier l'étude de ces propriétés. On rappelle la définition de cette construction pour le produit tensoriel  $S \otimes_{\Theta} T$ . On renvoie à [11, §4.2] pour la définition initiale du pushout-produit appliquée au produit tensoriel d'une catégorie monoïdale symétrique.

**4.6. Pushout-produits.** — Le pushout-produit, relativement au produit tensoriel sur  $\Theta$ , d'un morphisme de  $\Theta$ -diagrammes contravariants  $f : A \rightarrow B$  et d'un morphisme de  $\Theta$ -diagrammes covariants  $g : S \rightarrow T$  est le morphisme  $f \square_{\Theta} g$  produit par le diagramme de pushout :

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes_{\Theta} S & \xrightarrow{A \otimes_{\Theta} g} & A \otimes_{\Theta} T \\
 f \otimes_{\Theta} S \downarrow & & \downarrow \\
 B \otimes_{\Theta} S & \xrightarrow{\quad} & B \otimes_{\Theta} S \oplus_{A \otimes_{\Theta} S} A \otimes_{\Theta} T \\
 & \searrow & \downarrow f \square_{\Theta} g \\
 & & B \otimes_{\Theta} T
 \end{array}$$

$B \otimes_{\Theta} g$

On a la propriété suivante :

**Lemme 4.7.** — *Le pushout-produit  $f \square_{\Theta} g$  est une cofibration dans  $\mathcal{C}$*

- (a) *lorsque le morphisme de diagrammes  $f$  est une  $\mathcal{C}$ -cofibration et  $g$  est une cofibration de diagrammes,*
- (b) *ou inversement lorsque le morphisme  $f$  est une cofibration de diagrammes et  $g$  est une  $\mathcal{C}$ -cofibration.*

*En outre, si  $f$  ou  $g$  est acyclique, alors le pushout-produit  $f \square_{\Theta} g$  est aussi une cofibration acyclique.*

*Démonstration.* — On se concentre sur la situation (a) car les arguments sont symétriques dans l'un et l'autre cas.

Comme le foncteur  $S \otimes_{\Theta} -$  préserve les colimites, il suffit d'après l'argument de [11, Lemme 4.2.4] de considérer le cas d'une cofibration (acyclique)  $g$  génératrice, donc d'un morphisme de la forme

$$i \otimes \Theta(\underline{x}, -) : C \otimes \Theta(\underline{x}, -) \rightarrow D \otimes \Theta(\underline{x}, -)$$

où  $i$  est une cofibration (acyclique) génératrice de  $\mathcal{C}$ . Les observations 4.4 et 4.5 entraînent alors que le pushout-produit  $f \square_{\Theta} g$  s'identifie au pushout-produit, relativement au produit tensoriel de  $\mathcal{C}$ , des morphismes  $f : S(\underline{x}) \rightarrow T(\underline{x})$  et  $i : C \rightarrow D$  dans  $\mathcal{C}$ . L'axiome du pushout-produit pour les catégories monoïdales symétriques nous permet de conclure immédiatement que ce morphisme  $f \square i$  est une cofibration (acyclique) et le lemme s'ensuit.  $\square$

Ce lemme entraîne :

**Lemme 4.8.** —

- (a) *Lorsque le diagramme  $S$  (respectivement,  $T$ ) est  $\mathcal{C}$ -cofibrant, le produit tensoriel  $S \otimes_{\Theta} T$  applique une cofibration (acyclique) en  $T$  (respectivement,  $S$ ) sur une cofibration (acyclique) dans  $\mathcal{C}$ .*
- (b) *Lorsque  $S$  (respectivement,  $T$ ) est cofibrant comme diagramme, le produit tensoriel  $S \otimes_{\Theta} T$  applique une  $\mathcal{C}$ -cofibration (acyclique) en  $T$  (respectivement,  $S$ ) sur une cofibration (acyclique) dans  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* — L'assertion (a) est une conséquence directe du Lemme 4.7 appliqué au morphisme initial  $f : 0 \rightarrow B$  (respectivement,  $g : 0 \rightarrow T$ ) et à une cofibration (acyclique)  $g : S \rightarrow T$  (respectivement,  $f : A \rightarrow B$ ). L'assertion (b) se démontre de façon analogue.  $\square$

Puis :

**Théorème 4.9.** —

- (a) Lorsque le diagramme  $S$  (respectivement,  $T$ ) est  $\mathcal{C}$ -cofibrant, le produit tensoriel  $S \otimes_{\Theta} T$  applique une équivalence faible en  $T$  (respectivement,  $S$ ) entre diagrammes cofibrants sur une équivalence faible dans  $\mathcal{C}$ .
- (b) Lorsque  $S$  (respectivement,  $T$ ) est cofibrant comme diagramme, le produit tensoriel  $S \otimes_{\Theta} T$  applique une équivalence faible en  $T$  (respectivement,  $S$ ) entre diagrammes  $\mathcal{C}$ -cofibrants sur une équivalence faible dans  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* — Conséquence directe du Lemme 4.8 et du lemme de Brown [11, Lemme 11.1.12] étendu aux classes élargies de cofibrations (cf. [7, Proposition 11.1.18]).  $\square$

Lorsque la catégorie de base  $\mathcal{C}$  satisfait à l'axiome du monoïde de [21], on peut omettre les conditions de  $\mathcal{C}$ -cofibration dans le théorème, cependant on n'aura pas besoin de ce résultat plus fort.

**4.10. Définition des foncteurs Tor sur une catégorie enrichie.** — On considère maintenant le cas de catégories enrichies dans la catégorie des dg-modules  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \text{Mod}$ . Soit  $S$  un  $\Theta$ -diagramme contravariant dg-cofibrant. Soit  $T$  un  $\Theta$ -diagramme covariant dg-cofibrant. Le Théorème 4.9 montre qu'il est raisonnable de définir un foncteur Tor par :

$$\text{Tor}_*^{\Theta}(S, T) = H_*(S \otimes_{\Theta} Q),$$

où  $Q$  est un remplacement cofibrant de  $T$  dans la catégorie des  $\Theta$ -diagrammes. En effet, le Théorème 4.9 entraîne que  $\text{Tor}^{\Theta}(S, T)$  définit un bifoncteur en  $S$  et en  $T$  satisfaisant les propriétés d'invariance homotopique usuelles des foncteurs Tor. C'est ce foncteur Tor qui intervient dans le théorème de l'introduction.

On a aussi :

$$\text{Tor}_*^{\Theta}(S, T) = H_*(P \otimes_{\Theta} T),$$

où  $P$  est un remplacement cofibrant de  $S$  dans la catégorie des  $\Theta$ -diagrammes contravariant, puisque les morphismes  $P \xrightarrow{\sim} S$  et  $Q \xrightarrow{\sim} T$  induisent, d'après le Théorème 4.9, des équivalences faibles :

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_{\Theta} Q & \xrightarrow{\sim} & P \otimes_{\Theta} T \\ \sim \downarrow & & \\ S \otimes_{\Theta} Q & & \end{array}$$

de sorte que l'on a un isomorphisme naturel  $H_*(S \otimes_{\Theta} Q) \simeq H_*(P \otimes_{\Theta} T)$ .

**4.11. Construction bar à coefficients.** — On considère toujours le cas de catégories enrichies dans la catégorie des dg-modules  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \text{Mod}$ , cependant la construction introduite dans ce paragraphe possède une analogue dans la catégorie des ensembles simpliciaux  $\mathcal{C} = \text{Simp}$  et dans la catégorie des espaces topologique  $\mathcal{C} = \text{Top}$  qui sont munies d'un bon foncteur de réalisation géométrique  $|-| : \mathcal{C}^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  tel que :

- la réalisation commute au produit tensoriel par un objet simplicial discret  $C \in \mathcal{C}$  ;
- le morphisme d'augmentation naturel  $\epsilon : C \rightarrow \pi_0(C)$ , où  $\pi_0(C) = \text{coker}(d_0, d_1 : C_1 \rightrightarrows C_0)$ , induit une équivalence faible au niveau des réalisations  $\epsilon : |C| \xrightarrow{\sim} \pi_0(C)$  lorsque  $C$  est muni d'une dégénérescence supplémentaire  $s_{n+1} : C_n \rightarrow C_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Quand on travaille dans le cadre différentiel gradué, un tel foncteur de réalisation est donné par le foncteur de complexe normalisé  $|-| = N_*(-)$  qui à un dg-module simplicial  $C$  associe le complexe total du complexe de dg-modules

$$N_n(C) = C_n / s_0 C_{n-1} + \cdots + s_{n-1} C_{n-1},$$

muni de la différentielle  $\partial : N_n(C) \rightarrow N_{n-1}(C)$  définie par la somme alternée des faces de  $C$ . On reviendra sur l'interprétation du complexe normalisé comme un foncteur de réalisation abstrait dans la démonstration du Lemme 4.13 lorsqu'on utilisera des propriétés générales des foncteurs de réalisation pour obtenir notre résultat.

On définit une construction bar à coefficients  $B(S, \Theta, T)$ , pour tout  $\Theta$ -diagramme contravariant  $S$ , pour tout  $\Theta$ -diagramme covariant  $T$ , qui nous permettra de donner un complexe explicite calculant  $\text{Tor}^\Theta(S, T)$ . Cette construction est une généralisation dans le cadre des catégories enrichies de la construction bar classique d'une algèbre différentielle graduée. On forme d'abord l'objet simplicial  $\underline{B}(S, \Theta, T)$  tel que

$$\underline{B}_n(S, \Theta, T) = \bigoplus_{(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n)} S(\underline{x}_0) \otimes \Theta(\underline{x}_1, \underline{x}_0) \otimes \cdots \otimes \Theta(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}) \otimes T(\underline{x}_n) ;$$

avec la face  $d_0$  induite composante par composante par le morphisme

$$S(\underline{x}_0) \otimes \Theta(\underline{x}_1, \underline{x}_0) \rightarrow S(\underline{x}_1)$$

défini par l'action de  $\Theta$  sur  $S$  ; les faces  $d_i$ ,  $0 < i < n$ , induites par les morphismes

$$\Theta(\underline{x}_i, \underline{x}_{i-1}) \otimes \Theta(\underline{x}_{i+1}, \underline{x}_i) \rightarrow \Theta(\underline{x}_{i+1}, \underline{x}_{i-1})$$

définis par la composition de  $\Theta$  ; et la face  $d_n$  induite par le morphisme

$$\Theta(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}) \otimes T(\underline{x}_n) \rightarrow T(\underline{x}_n)$$

défini par l'action de  $\Theta$  sur  $T$  ; les dégénérescences  $s_j$ ,  $0 \leq j \leq n$ , étant induites les morphismes

$$\mathbf{1} \rightarrow \Theta(\underline{x}_j, \underline{x}_j)$$

définis par les morphismes d'identité de  $\Theta$ . On pose ensuite :

$$B(S, \Theta, T) = N_*(\underline{B}(S, \Theta, T)).$$

Lorsque  $T$  est un foncteur de Yoneda covariant  $T = \Theta(\underline{a}, -)$ , le morphisme de composition de  $\Theta$

$$\Theta(\underline{b}, \underline{a}) \otimes \Theta(\underline{a}, \underline{x}_n) \rightarrow \Theta(\underline{b}, \underline{x}_n)$$

induit un morphisme

$$\Theta(\underline{b}, \underline{a}) \otimes \underline{B}_n(S, \Theta, \Theta(\underline{a}, -)) \rightarrow \underline{B}_n(S, \Theta, \Theta(\underline{b}, -))$$

de sorte que la collection de dg-modules

$$\underline{B}(S, \Theta, \Theta)(\underline{x}) = \underline{B}(S, \Theta, \Theta(\underline{x}, -)), \quad \underline{x} \in \text{Ob } \Theta,$$

définit un  $\Theta$ -diagramme simplicial naturellement associé à  $S$ . En outre, le morphisme

$$S(\underline{x}_0) \otimes \Theta(\underline{a}, \underline{x}_0) \rightarrow S(\underline{a})$$

donné par l'action de  $\Theta$  sur  $S$  définit une augmentation de ce diagramme simplicial  $\underline{B}(\Theta, \Theta, T)$  sur  $T$ .

On forme le  $\Theta$ -diagramme  $B(S, \Theta, \Theta) = N_*(\underline{B}(S, \Theta, \Theta))$  associé à ce  $\Theta$ -diagramme simplicial, qui est également muni d'une augmentation  $\epsilon : B(S, \Theta, \Theta) \rightarrow S$  induite par l'augmentation de  $\underline{B}(S, \Theta, \Theta)$ . Les propriétés suivantes sont des généralisations naturelles des propriétés classiques du complexe bar des algèbres différentielles graduées.

**Lemme 4.12.** — *L'augmentation naturelle  $B(S, \Theta, \Theta) \rightarrow S$  est une équivalence faible, pour tout  $\Theta$ -diagramme  $S$ .*

*Démonstration.* — Les morphismes

$$\begin{aligned} S(\underline{x}_0) \otimes \Theta(\underline{x}_1, \underline{x}_0) \otimes \cdots \otimes \Theta(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}) \otimes \Theta(\underline{x}, \underline{x}_n) \\ \rightarrow S(\underline{x}_0) \otimes \Theta(\underline{x}_1, \underline{x}_0) \otimes \cdots \otimes \Theta(\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}) \otimes \Theta(\underline{x}, \underline{x}_n) \otimes \Theta(\underline{x}, \underline{x}) \end{aligned}$$

induit par le morphisme d'identité  $\mathbf{1} \rightarrow \Theta(\underline{x}, \underline{x})$ , définissent une dégénérescence supplémentaire

$$\underline{B}(\Theta(-, \underline{x}), \Theta, T)_n \xrightarrow{s_{n+1}} \underline{B}(\Theta(-, \underline{x}), \Theta, T)_{n+1}$$

sur le dg-module simplicial  $\underline{B}(S, \Theta, \Theta(\underline{x}, -))$ , pour tout objet  $\underline{x} \in \text{Ob } \Theta$  fixé. L'existence de cette dégénérescence supplémentaire entraîne que l'augmentation de  $\underline{B}(S, \Theta, \Theta(\underline{x}, -))$  induit une équivalence faible

$$B(S, \Theta, \Theta)(\underline{x}) = N_*(\underline{B}(S, \Theta, \Theta(\underline{x}, -))) \xrightarrow{\sim} S(\underline{x}),$$

pour tout  $\underline{x} \in \text{Ob } \Theta$ . La conclusion s'ensuit.  $\square$

**Lemme 4.13.** — *Le diagramme  $B(S, \Theta, \Theta)$  est cofibrant comme diagramme.*

On utilise pour démontrer ce lemme des propriétés générales des foncteurs de réalisation  $|-|$  dans une catégorie modèle cofibrément engendrée.

On rappelle brièvement comment le foncteur de normalisation  $N_*(-)$  s'interprète comme un foncteur de réalisation  $|-|$  dans la catégorie des dg-modules. On considère les complexes de chaînes normalisés  $N_*(\Delta^n)$  des  $n$ -simplexes  $\Delta^n \in \mathbf{Simp}$ . Les produits tensoriels  $C \otimes N_*(\Delta^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , associés à un dg-module cofibrant  $C$  définissent un encadrement cosimplicial de  $C$  au sens de [11, Définition 5.2.7]. Le foncteur de réalisation d'un dg-module simplicial  $C$ , cofibrant au sens de Reedy, est alors défini par la cofin

$$|C| = \int^{\Delta} C_n \otimes N_*(\Delta^n)$$



sur la catégorie simpliciale  $\Delta$ . On constate aisément que le complexe normalisé  $N_*(C)$  s'identifie à cette cofibré en utilisant que les  $n$ -simplexes  $\Delta^n \in \mathbf{Simp}$  sont définis par les foncteurs de Yoneda  $\Delta^n = \text{Mor}_\Delta(-, [n])$  sur  $\Delta$ .

On peut également appliquer cette construction pour identifier le  $\Theta$ -diagramme  $B(S, \Theta, \Theta) = N_*(\underline{B}(S, \Theta, \Theta))$  à la réalisation de  $\underline{B}(S, \Theta, \Theta)$  dans la catégorie des  $\Theta$ -diagrammes contravariants.

*Démonstration.* — On démontre que le  $\Theta$ -diagramme simplicial  $\underline{B}(S, \Theta, \Theta)$  est cofibrant au sens de Reedy, ce qui, d'après un résultat général sur les réalisations [10, Théorème 19.8.2], entraîne que le  $\Theta$ -diagramme  $B(S, \Theta, \Theta) = N_*(\underline{B}(S, \Theta, \Theta))$  est cofibrant.

On utilise dans notre argument le pushout-produit  $m$ -itéré  $f^{\square m}$  d'un morphisme de dg-modules  $f : C_0 \rightarrow C_1$ , défini comme le morphisme de coin

$$\text{colim}_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) < (1, \dots, 1)} \{C_{\epsilon_1} \otimes \dots \otimes C_{\epsilon_m}\} \xrightarrow{f^{\square m}} C_1 \otimes \dots \otimes C_1$$

du diagramme cubique dont les sommets sont les produits tensoriels de dg-modules  $C_{\epsilon_1} \otimes \dots \otimes C_{\epsilon_m}$ ,  $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ , et les arêtes les morphismes  $C_{\epsilon_1} \otimes \dots \otimes f \otimes \dots \otimes C_{\epsilon_m}$  induits par  $f$ . Le pushout-produit  $m$ -itéré  $f^{\square m}$  s'identifie aisément au pushout-produit  $f^{\square m-1} \square f$  du pushout-produit  $(m-1)$ -itéré  $f^{\square m-1}$  et de  $f$ . Par conséquent, on déduit des axiomes des catégories modèles monoïdales que le pushout-produit  $m$ -itéré d'une cofibration de dg-modules forme lui-même une cofibration de dg-modules.

Le morphisme d'assemblage (latching-morphism, voir [11, §5.2], [10, §15])

$$\lambda : L_n \underline{B}(S, \Theta, \Theta)(\underline{x}) \rightarrow \underline{B}_n(S, \Theta, \Theta)(\underline{x})$$

s'identifie, par inspection des définitions, au coproduit de morphismes

$$S(\underline{x}_0) \otimes \lambda(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n) \otimes \Theta(\underline{x}, \underline{x}_n),$$

tels que  $\lambda(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n)$  est un produit tensoriel de morphismes identiques

$$\text{id} : \Theta(\underline{x}_{i+1}, \underline{x}_i) \rightarrow \Theta(\underline{x}_{i+1}, \underline{x}_i),$$

sur les facteurs associés aux couples  $(\underline{x}_{i+1}, \underline{x}_i)$  tels que  $\underline{x}_{i+1} \neq \underline{x}_i$ , avec des pushouts-produits itérés  $\eta^{\square m}$  de morphismes d'identité

$$\eta : \mathbf{1} \rightarrow \Theta(\underline{x}_i, \underline{x}_i)$$

sur les facteurs associés à des intervalles  $(\underline{x}_i, \dots, \underline{x}_{i+m})$  tels que  $\underline{x}_{i+m} = \dots = \underline{x}_i$ .

On déduit des axiomes des catégories modèles monoïdales et des hypothèses sur les catégories enrichies que  $\lambda(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n)$  forme une cofibration de dg-modules, pour tout  $n$ -uplet d'objets  $(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n)$ .

Si on fait varier  $\underline{x}$ , alors on obtient que notre morphisme d'assemblage est une somme de produits tensoriels de morphismes de  $\Theta$ -diagrammes de la forme

$$S(\underline{x}_0) \otimes \lambda(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n) \otimes \Theta(-, \underline{x}_n).$$

On observe aisément que le produit tensoriel externe d'un  $\Theta$ -diagramme avec un dg-module satisfait l'axiome du pushout-produit. Par conséquent, le produit tensoriel du diagramme de Yoneda  $\Theta(-, \underline{x}_n)$ , qui est un  $\Theta$ -diagramme contravariant cofibrant,

avec le morphisme de dg-modules  $S(\underline{x}_0) \otimes \lambda(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n)$ , qui est une cofibration, définit une cofibration dans la catégorie des  $\Theta$ -diagrammes contravariants.

On conclut de tout ceci que le morphisme d'assemblage  $\lambda : L_n \underline{B}(S, \Theta, \Theta) \rightarrow \underline{B}_n(S, \Theta, \Theta)$  définit une cofibration dans  $\mathcal{C}^\Theta$ , pour tout  $n$ , ce qui termine la démonstration du lemme.  $\square$

Le diagramme  $B(S, \Theta, \Theta)$  définit donc un remplacement cofibrant de  $T$ .

Maintenant, on montre aisément :

**Observation 4.14.** — *On suppose que  $S$  est un  $\Theta$ -diagramme contravariant simplicial. On a un isomorphisme naturel  $N_*(S \otimes_\Theta T) \xrightarrow{\cong} N_*(S) \otimes_\Theta T$ , pour tout  $\Theta$ -diagramme covariant  $T$ .*

Cette observation est une conséquence directe de la définition de  $S \otimes_\Theta T$  comme un coégalisateur (réflexif).

Pour le  $\Theta$ -diagramme  $\underline{B}(S, \Theta, \Theta)$ , on en déduit :

**Lemme 4.15.** — *On a un isomorphisme naturel  $B(S, \Theta, \Theta) \otimes_\Theta T \xrightarrow{\cong} B(S, \Theta, T)$ .*

*Démonstration.* — Conséquence directe des observations 4.4 et 4.5 et de l'observation précédente.  $\square$

Les lemmes 4.12, 4.13, 4.15 entraînent :

**Proposition 4.16.** — *On a l'identité*

$$\mathrm{Tor}_*^\Theta(S, T) = H_*(B(S, \Theta, T)),$$

pour tout couple de diagrammes dg-cofibrants  $(S, T)$ .  $\square$

On revient maintenant au cadre général des catégories modèles monoïdales symétriques cofibrément engendrées. Pour mémoire, on note le résultat suivant :

**Proposition 4.17.** — *Un morphisme de catégories  $C$ -enrichies  $f : \Phi \rightarrow \Psi$  qui est l'identité sur les objets (on suppose tacitement  $\mathrm{Ob} \Phi = \mathrm{Ob} \Psi$ ) induit des foncteurs d'extension et de restriction*

$$f_! : \mathcal{C}^\Phi \rightleftarrows \mathcal{C}^\Psi : f^*$$

qui forment une adjonction de Quillen. Si  $f$  est une équivalence faible, alors ces foncteurs définissent une équivalence de Quillen.

Le diagramme  $f^*T$  obtenu par restriction de structure d'un  $\Psi$ -diagramme  $T$  est défini par  $f^*T(\underline{x}) = T(\underline{x})$  sur les objets  $\underline{x} \in \mathrm{Ob} \Phi$ , avec l'action de  $\Phi$  définie par le morphisme composé :

$$\Phi(\underline{b}, \underline{a}) \otimes T(\underline{b}) \xrightarrow{f \otimes T(\underline{b})} \Psi(\underline{b}, \underline{a}) \otimes T(\underline{b}) \xrightarrow{T^\sharp} T(\underline{a}).$$

Le diagramme  $f_!S$  obtenu par extension de structure d'un  $\Phi$ -diagramme  $S$  peut se représenter par un produit tensoriel catégorique :

$$f_!S(\underline{x}) = \Psi(-, \underline{x}) \otimes_\Phi S,$$

où on considère la restriction de structure du  $\Psi^{op}$ -diagramme de Yoneda  $\Psi(-, \underline{x})$  associé à  $\underline{a} \in \text{Ob } \Psi$ . Le morphisme naturel  $\Psi(\underline{b}, \underline{a}) \otimes \Psi(-, \underline{b}) \rightarrow \Psi(-, \underline{a})$ , défini par le morphisme de composition de  $\Psi$ , induit un morphisme

$$\Psi(\underline{b}, \underline{a}) \otimes \{\Psi(-, \underline{b}) \otimes_{\Phi} S\} \rightarrow \{\Psi(-, \underline{a}) \otimes_{\Phi} S\}$$

qui donne sa structure de  $\Psi$ -diagramme à  $f_! S$ . Une vérification formelle montre que ce foncteur  $f_! : S \mapsto f_! S$  est bien adjoint au foncteur de restriction de structure.

*Démonstration de la Proposition 4.17.* — Le foncteur de restriction de structure préserve clairement les fibrations et les fibrations acycliques puisque ces classes de morphismes sont créées dans la catégorie de base par oubli de structure. On en conclut immédiatement que les foncteurs de restriction et d'extension de structure définissent une adjonction de Quillen.

On suppose maintenant que  $f$  est une équivalence faible. Lorsque  $S$  est un  $\Phi$ -diagramme cofibrant, le morphisme de diagrammes de Yoneda  $f : \Phi(-, \underline{x}) \rightarrow \Psi(-, \underline{x})$  induit une équivalence faible

$$\Phi(-, \underline{x}) \otimes_{\Phi} S \xrightarrow{\sim} \Psi(-, \underline{x}) \otimes_{\Phi} S$$

puisque, d'après le Théorème 4.9, le produit tensoriel  $- \otimes_{\Phi} S$  préserve les équivalences faibles entre diagrammes  $\mathcal{C}$ -cofibrants. En utilisant la relation formelle

$$S(\underline{x}) = \Phi(-, \underline{x}) \otimes_{\Phi} S,$$

on en conclut que l'unité d'augmentation  $S \rightarrow f^* f_! S$  associée à un  $\Phi$ -diagramme cofibrant  $S$  est une équivalence faible. Soit  $T$  un  $\Psi$ -diagramme quelconque. On forme un remplacement cofibrant de  $f^* T$ , soit  $S \xrightarrow{\sim} f^* T$ , et on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\sim} & f^* T \\ \sim \downarrow & & \downarrow \\ f^* f_! S & \longrightarrow & f^* f_! f^* T \\ & & \downarrow \\ & & f^* T \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} \text{id} \\ \curvearrowright \end{array}$$

combinant unité et augmentation d'adjonctions, pour en déduire que l'image du morphisme  $f_! S \rightarrow T$  adjoint de  $S \xrightarrow{\sim} f^* T$  par le foncteur  $f^*$  est une équivalence faible. Comme le foncteur de restriction de structure reflète clairement les équivalences faibles, on en conclut que le morphisme  $f_! S \rightarrow T$  est une équivalence faible lui-même. Cette observation achève la démonstration des propriétés d'une équivalence de Quillen pour l'adjonction  $f_! : \mathcal{C}^{\Phi} \rightleftarrows \mathcal{C}^{\Psi} : f^*$  associée à une équivalence faible de catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies  $f : \Phi \rightarrow \Psi$ .  $\square$

La proposition suivante est bien connue pour les produits tensoriels sur une petite catégorie standard :

**Proposition 4.18.** — Soit  $f : \Phi \rightarrow \Psi$  un morphisme de catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichies. On a un isomorphisme naturel

$$(f^*S) \otimes_{\Phi} T \simeq S \otimes_{\Psi} (f_!T)$$

pour tout couple  $(S, T)$  tel que  $S$  est un  $\Psi$ -diagramme contravariant et  $T$  est un  $\Psi$ -diagramme covariant. On a symétriquement

$$(f_!S) \otimes_{\Psi} T \simeq S \otimes_{\Phi} (f^*T)$$

lorsque  $S$  est un  $\Psi$ -diagramme covariant et  $T$  est un  $\Psi$ -diagramme contravariant.

*Démonstration.* — On applique le formalisme des cofins. La relation  $(f^*S) \otimes_{\Phi} T \simeq S \otimes_{\Psi} (f_!T)$  apparaît alors comme une conséquence des relations de Fubini :

$$\begin{aligned} \int^{b \in \Psi} S(\underline{b}) \otimes \left\{ \int^{a \in \Phi} \Psi(\underline{a}, \underline{b}) \otimes T(\underline{a}) \right\} &\simeq \int^{(a, b) \in \Phi \times \Psi} S(\underline{b}) \otimes \Psi(\underline{a}, \underline{b}) \otimes T(\underline{a}) \\ &\simeq \int^{a \in \Phi} \left\{ \int^{b \in \Psi} S(\underline{b}) \otimes \Psi(\underline{a}, \underline{b}) \right\} \otimes T(\underline{a}) \\ &\simeq \int^{a \in \Phi} S(\underline{a}) \otimes T(\underline{a}). \end{aligned}$$

Les relations de Fubini résultent du principe de commutation des colimites. C'est pourquoi elles restent valables pour des cofins sur des catégories enrichies.

La démonstration de la relation  $(f_!S) \otimes_{\Psi} T \simeq S \otimes_{\Phi} (f^*T)$  est symétrique.  $\square$

Lorsque  $f : \Phi \rightarrow \Psi$  est une équivalence faible de catégories enrichies en dg-modules, les relations de cette proposition entraînent :

**Proposition 4.19.** — Soit  $f : \Phi \rightarrow \Psi$  une équivalence faible de catégories enrichies en dg-modules. On a un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Tor}_*^{\Phi}(f^*S, f^*T) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\Psi}(S, T),$$

pour tout couple  $(S, T)$  tel que  $S$  est un  $\Psi$ -diagramme contravariant dg-cofibrant et  $T$  est un  $\Psi$ -diagramme covariant dg-cofibrant.

*Démonstration.* — On fixe un remplacement cofibrant de  $f^*T$  dans la catégorie des  $\Phi$ -diagrammes, soit  $Q \xrightarrow{\sim} f^*T$ . On a alors

$$\mathrm{Tor}_*^{\Phi}(f^*S, f^*T) = H_*((f^*S) \otimes_{\Phi} Q) \simeq H_*(S \otimes_{\Phi} (f_!Q))$$

d'après la Proposition 4.18. La Proposition 4.17 entraîne que le morphisme  $f_!Q \rightarrow T$  adjoint de  $Q \xrightarrow{\sim} f^*T$  est aussi une équivalence faible et que  $f_!Q$  est un objet cofibrant dans la catégorie des  $\Psi$ -diagrammes. On a donc

$$\mathrm{Tor}_*^{\Psi}(S, T) = H_*(S \otimes_{\Phi} (f_!Q))$$

et la conclusion s'ensuit.  $\square$

**Remarque.** — Rappelons qu’une structure de  $\Theta$ -diagramme sur une collection  $T(\underline{x})$ ,  $\underline{x} \in \text{Ob } \Theta$ , équivaut, d’après la Proposition 3.A, à la donnée d’un morphisme  $\psi : \Theta \rightarrow \text{End}_T$  vers une catégorie  $\mathcal{C}$ -enrichie  $\text{End}_T$  naturellement associée à  $T$ . On peut utiliser la donnée du couple  $(T, \psi)$  pour désigner un  $\Theta$ -diagramme lorsqu’une collection  $T$  n’est pas donnée avec une structure de diagramme naturel, comme maintenant. Le  $\Phi$ -diagramme  $f^*(T, \psi)$  obtenu par restriction de structure d’un  $\Psi$ -diagramme  $(T, \psi)$  est défini par le couple  $f^*(T, \psi) = (T, \psi f)$ .

La proposition précédente nous permet de montrer que les foncteurs Tor associés à des diagrammes  $(T, \psi_0)$  et  $(T, \psi_1)$  définis par des morphismes  $\psi_0, \psi_1 : \Theta \rightarrow \text{End}_T$  homotopes à gauches sont isomorphes. Une homotopie gauche entre  $\psi^0$  et  $\psi^1$  est définie par un morphisme  $\omega : \text{Cyl } \Theta \rightarrow \text{End}_T$  tel que  $\omega d^0 = \psi^0$  et  $\omega d^1 = \psi^1$  pour un objet en cylindre

$$\Theta \begin{array}{c} \xrightarrow{d^0} \\ \xrightarrow{d^1} \end{array} \text{Cyl } \Theta \xrightarrow[\sim]{s^0} \Theta$$

dans la catégorie des catégories  $\mathcal{C}$ -enrichies. La Proposition 4.19 nous donne des isomorphismes

$$\begin{aligned} \text{Tor}_*^\Theta \left( \underbrace{(d^0)^*(S, \phi s^0)}_{=(S, \phi)}, \underbrace{(d^0)^*(T, \omega)}_{=(T, \psi^0)} \right) \\ \simeq \text{Tor}_*^{\text{Cyl } \Theta} ((S, \phi), (T, \omega)) \\ \simeq \text{Tor}_*^\Theta \left( \underbrace{(d^1)^*(S, \phi s^0)}_{=(S, \phi)}, \underbrace{(d^1)^*(T, \omega)}_{=(T, \psi^1)} \right), \end{aligned}$$

pour tout  $\Theta^{op}$ -diagramme  $(S, \phi)$ , ce qui prouve notre affirmation.

Ceci nous permet de montrer que les foncteurs  $\text{Tor}_*^{R(\Omega_n^{epi})}(S, \underline{B}^n(A))$  associés à la construction bar itérée  $\underline{B}^n(A)$  ne dépendent pas des choix fait dans la construction du §3.

## 5. Constructions bar et résolutions de dg-catégories scindées

On se concentre maintenant sur l’étude des foncteurs Tor sur des catégories enrichies dans le cadre différentiel gradué.

On se restreint, comme expliqué au §4, à des catégories enrichies  $\Theta$  dont les composantes  $\Theta(\underline{b}, \underline{a})$  sont des dg-modules cofibrants et les morphismes d’identité  $\eta : \mathbf{1} \rightarrow \Theta(\underline{x}, \underline{x})$  des cofibrations de dg-modules. On dit alors que  $\Theta$  est (pour  $\mathcal{C}$ -cofibrante lorsque  $\mathcal{C} = dg \mathbb{k} \text{Mod}$ ). On ne rappellera cette hypothèse que dans les théorèmes principaux. On adopte une convention analogue pour tout les objets considérés dans cette section. On ne considèrera en particulier que des diagrammes  $T$  qui sont cofibrant comme collection de dg-modules  $T(\underline{x})$ ,  $\underline{x} \in \text{Ob } \Theta$ .

On utilise le préfixe dg pour désigner tout objet enrichi sur la catégorie des dg-modules.

Le premier objectif de cette section est de définir l’analogie pour les dg-catégories scindées des constructions cobar-bar de l’algèbre différentielle graduée classique (voir [13,

18]). Cette construction définit un foncteur de remplacement cofibrant dans la catégorie des dg-catégories scindées. On montre ensuite que le complexe bar à coefficients, introduit dans la section précédente, s'interprète comme un dg-module naturellement associé à la construction cobar-bar des catégories.

On adopte des conventions standard de l'algèbre différentielle graduée, telles qu'elles sont appliquées dans [7]. On utilise de façon récurrente la suspension des dg-modules, définie comme un produit tensoriel  $\Sigma C = \mathbb{k}[1] \otimes C$ , où  $\mathbb{k}[1]$  est un dg-module concentré en degré 1 muni d'une différentielle triviale, et la désuspension définie, de façon symétrique, par le produit tensoriel  $\Sigma^{-1}C = \mathbb{k}[-1] \otimes C$ , où  $\mathbb{k}[-1]$  est un dg-module concentré en degré  $-1$ . On ne fera que quelques rappels strictement nécessaires dans la suite, mais pour commencer on doit réviser la notion d'homomorphisme de torsion de dg-module et la définition du dg-module tordu associé à un homomorphisme de torsion.

**5.1. Rappels : homomorphismes de torsion de dg-modules.** — On utilise dans nos constructions des dg-modules  $C$  munis d'un homomorphisme  $\partial : C \rightarrow C$ , de degré  $-1$ , qui additionné à la différentielle interne de  $C$  définit une nouvelle différentielle  $\delta + \partial : C \rightarrow C$  sur le module gradué sous-jacent à  $C$ . On obtient ainsi un nouveau dg-module que l'on désignera par la donnée du couple  $(C, \partial)$ . La relation  $(\delta + \partial)^2 = 0$ , nécessaire pour que la différentielle de  $(C, \partial)$  soit bien définie, est équivalente à l'équation  $\delta\partial + \partial\delta + \partial^2 = 0$  puisque la différentielle interne de  $C$  vérifie déjà  $\delta^2 = 0$ . On dit alors que  $\partial$  est un homomorphisme de torsion du dg-module  $C$ .

La catégorie des dg-modules possède un hom-interne

$$\mathrm{Hom}_{dg \mathbb{k} \mathrm{Mod}}(-, -) : dg \mathbb{k} \mathrm{Mod}^{op} \times dg \mathbb{k} \mathrm{Mod} \rightarrow dg \mathbb{k} \mathrm{Mod}$$

qui en fait une catégorie monoïdale symétrique fermée. Le dg-module  $\mathrm{Hom}_{dg \mathbb{k} \mathrm{Mod}}(C, D)$  associé à un couple de dg-modules  $(C, D)$  est engendré en degré  $d$  par les morphismes de  $\mathbb{k}$ -modules  $f : C \rightarrow D$  qui augmentent le degré de  $d$ . La différentielle de  $f : C \rightarrow D$  dans  $\mathrm{Hom}_{dg \mathbb{k} \mathrm{Mod}}(C, D)$  est donnée par le commutateur gradué de  $f$  avec les différentielles internes :

$$\delta(f) = \delta f + \pm f \delta.$$

Le signe  $\pm$  est déterminé par la commutation de  $f$ , de degré  $d$ , avec le symbole de différentielle interne  $\delta$ , de degré  $-1$ . Donc, dans cette formule, on a  $\pm = (-1)^{\mathrm{deg} f}$ . On utilise la terminologie d'homomorphisme de dg-modules pour désigner les éléments du hom-interne  $\mathrm{Hom}_{dg \mathbb{k} \mathrm{Mod}}(C, D)$  et les distinguer des morphismes actuels de la catégorie des dg-modules.

Un homomorphisme de torsion  $\partial : C \rightarrow C$  s'interprète donc comme un homomorphisme de dg-modules de degré  $-1$  tel que :

$$\delta(\partial) + \partial^2 = 0$$

dans  $\mathrm{Hom}_{dg \mathbb{k} \mathrm{Mod}}(C, C)$ .

**5.2. Homomorphismes de torsion de dg-catégories scindées.** — On se donne maintenant une dg-catégorie scindée sur  $\Omega_n^{epi}$ , soit  $\tilde{\Theta}$ . On dit qu'une collection d'homomorphismes  $\partial : \tilde{\Theta}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\sigma})_u \rightarrow \tilde{\Theta}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\sigma})_u$  définit une dérivation de  $\tilde{\Theta}$  si on a la relation

$$(*) \quad \partial(\alpha \cdot \beta) = (\partial\alpha) \cdot \beta + \pm \alpha \cdot (\partial\beta),$$

pour tout couple d'élément composables  $\alpha \in \tilde{\Theta}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_u$ ,  $\beta \in \tilde{\Theta}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\theta})_v$ , le signe  $\pm$  provenant de la commutation de l'homomorphisme  $\partial$  avec l'élément  $\beta$ . On note que la relation (\*) entraîne automatiquement que les éléments unités  $1 \in \tilde{\Theta}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\mathcal{I}})_{id}$  sont annulés par  $\partial$ .

On dit qu'une dérivation constituée d'homomorphismes de torsion  $\partial : \tilde{\Theta}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\sigma})_u \rightarrow \tilde{\Theta}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\sigma})_u$  est une dérivation de torsion de  $\tilde{\Theta}$ . La relation de dérivation (\*) entraîne que les morphismes de compositions et les morphismes d'identités de  $\tilde{\Theta}$  induisent des morphismes de dg-modules sur les dg-modules tordus  $(\tilde{\Theta}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\sigma})_u, \partial)$ . Par conséquent, la collection de dg-modules tordus associée à une dérivation de torsion  $(\tilde{\Theta}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\sigma})_u, \partial)$ , que l'on désignera par la donné du couple  $(\tilde{\Theta}, \partial)$ , hérite d'une structure de dg-catégorie scindée.

**5.3. Sur les dg-catégories scindées quasi-libres.** — On a défini §1.7 la catégorie scindée libre  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  associée à un graphe scindé  $\tilde{\Gamma}$ . Une dg-catégorie scindée quasi-libre est une dg-catégorie tordue  $(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial)$  associée à une dg-catégorie scindée libre  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$ .

La dg-catégorie scindée libre  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  est, d'après la définition du §1.7, engendrée comme dg-module par des tenseurs

$$(*) \quad \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m \in \tilde{\Gamma}(\underline{\mathcal{I}}_1, \underline{\mathcal{I}}_0)_{u_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{\Gamma}(\underline{\mathcal{I}}_m, \underline{\mathcal{I}}_{m-1})_{u_m}.$$

Le dg-graphe  $\tilde{\Gamma}$  s'identifie au facteur direct de  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  engendré par les tenseurs d'ordre 1. Le morphisme d'inclusion  $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  s'identifie au morphisme universel de la catégorie libre. Les tenseurs (\*) représentent en fait la composition des éléments  $\alpha_i$  dans  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$ . Les tenseurs (\*) d'ordre  $m > 1$  engendrent le dg-graphe  $Dec \tilde{F}(\tilde{\Gamma}) \subset \tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  des éléments décomposables de  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$ .

Une dérivation de torsion sur une dg-catégorie scindée libre  $\partial : \tilde{F}(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  est donc déterminée par sa restriction au dg-graphe  $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  puisque la relation de dérivation du §5.2 entraîne que l'on a l'identité

$$\partial(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m) = \sum_{i=1}^m \pm \alpha_1 \cdot \dots \cdot \partial(\alpha_i) \cdot \dots \cdot \alpha_m$$

pour une telle composition d'éléments.

Le morphisme de dg-catégories scindées  $\phi_f : \tilde{F}(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \tilde{\Theta}$  associé à un morphisme de dg-graphes  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Theta}$  par la relation d'adjonction de la Proposition 1.8 se détermine par la formule

$$\phi_f(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m) = \sum \pm f(\alpha_1) \cdot \dots \cdot f(\alpha_m)$$

pour un élément composé de  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$ . Le morphisme  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Theta}$  représente en fait la restriction de  $\phi_f$  au dg-graphe  $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{F}(\tilde{\Gamma})$ .

On étend la définition de  $\phi_f$  aux homomorphismes  $f$  de degré 0 pour construire les morphismes sur une dg-catégorie scindée quasi-libre. On constate aisément que l'homomorphisme  $\phi_f : (\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) \rightarrow \tilde{\Theta}$  associé à un homomorphisme de dg-graphes  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Theta}$  (de degré 0) définit un morphisme de dg-catégories scindées si et seulement si on a la relation

$$(**) \quad \delta f(\alpha) - f(\delta\alpha) = \phi_f(\partial(\alpha))$$

pour tout générateur  $\alpha \in \tilde{\Gamma}$ .

On suppose généralement que la dérivation de torsion d'une dg-catégorie scindée quasi-libre vérifie  $\partial(\tilde{\Gamma}) \subset \text{Dec } \tilde{F}(\tilde{\Gamma})$ . Cette hypothèse nous permet d'assurer le résultat suivant :

**Proposition 5.4.** — *Une dg-catégorie scindée quasi-libre  $(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial)$  munie d'une dérivation de torsion telle que  $\partial(\tilde{\Gamma}) \subset \text{Dec } \tilde{F}(\tilde{\Gamma})$  définit automatiquement un objet cofibrant de la catégorie des dg-catégories scindées sur  $\Omega_n^{epi}$ .*

(On suppose tacitement que le dg-graphe scindé  $\tilde{\Gamma}$  est cofibrant.)

Cette proposition généralise la caractérisation des objets cofibrants dans la catégorie des dg-algèbres associatives (voir [19, 14]).

*Démonstration.* — On utilise la graduation de  $\Omega_n^{epi}$  pour munir le dg-graphe  $\tilde{\Gamma}$  d'une filtration telle que

$$\text{sk}_d \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = \begin{cases} \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u, & \text{si } \deg(u) \leq d, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on forme la suite emboîtée de dg-catégories scindées libres

$$* = \tilde{F}(\text{sk}_0 \tilde{\Gamma}) \subset \cdots \subset \tilde{F}(\text{sk}_d \tilde{\Gamma}) \subset \cdots \subset \text{colim}_d \tilde{F}(\text{sk}_d \tilde{\Gamma}) = \tilde{F}(\tilde{\Gamma}).$$

On constate aisément que, sous l'hypothèse de la proposition, la dérivation de torsion de la dg-catégorie scindée quasi-libre  $(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial)$  préserve cette filtration, de sorte que l'on a une suite emboîtée de dg-catégories scindées quasi-libres

$$* = \text{sk}_0(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) \subset \cdots \subset \text{sk}_d(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) \subset \cdots \subset \text{colim}_d \text{sk}_d(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) = (\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial)$$

telles que

$$\text{sk}_d(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) = (\tilde{F}(\text{sk}_d \tilde{\Gamma}), \partial).$$

En fait, l'hypothèse de la proposition entraîne la relation d'inclusion :

$$\partial(\text{sk}_d \tilde{\Gamma}) \subset \tilde{F}(\text{sk}_{d-1} \tilde{\Gamma}).$$

On observe que, dans cette situation, chaque morphisme d'inclusion

$$\text{sk}_{d-1}(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) \hookrightarrow \text{sk}_d(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial)$$



s'inscrit dans un diagramme cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}(C \otimes \text{cl}_d \tilde{\Gamma}) & \xrightarrow{f} & \text{sk}_{d-1}(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) \\ \tilde{F}(i \otimes \text{cl}_d \tilde{\Gamma}) \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{F}(D \otimes \text{cl}_d \tilde{\Gamma}) & \xrightarrow{g} & \text{sk}_d(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) \end{array}$$

où :

- la notation  $D$  désigne le dg-module librement engendré par un élément  $e$  de degré 0, un élément  $b$  de degré  $-1$ , avec la différentielle telle que  $\delta(e) = b$  ; l'objet  $C$  est le sous-module de  $D$  engendré par  $b$  et  $i : C \rightarrow D$  est le morphisme d'inclusion de  $C$  dans  $D$  ;
- l'objet  $\text{cl}_d \tilde{\Gamma}$ , est le dg-graphe tel que

$$\text{cl}_d \tilde{\Gamma}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\sigma})_u = \begin{cases} \tilde{\Gamma}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\sigma})_u, & \text{si } \deg(u) = d, \\ 0, & \text{sinon ;} \end{cases}$$

le produit tensoriel  $i \otimes \text{cl}_d \tilde{\Gamma}$  est le produit tensoriel composante par composante du morphisme de dg-modules  $i : C \rightarrow D$  avec le dg-graphe  $\text{cl}_d \tilde{\Gamma}$  ;

- le morphisme d'attachement  $f$  applique un élément générateur  $b \otimes \gamma \in C \otimes \text{cl}_d \tilde{\Gamma}$  de la dg-catégorie libre  $\tilde{F}(C \otimes \text{cl}_d \tilde{\Gamma})$  sur l'image de  $\gamma$  par la dérivation de torsion

$$f(b \otimes \gamma) = \partial \gamma \in \tilde{F}(C \otimes \text{sk}_{d-1} \tilde{\Gamma}),$$

et l'extension de ce morphisme à  $\tilde{F}(D \otimes \text{cl}_d \tilde{\Gamma})$  est donnée par  $g(e \otimes \gamma) = \gamma$ .

La propriété de diagramme cocartésien s'établit aisément à partir de la caractérisation des morphismes sur une dg-catégorie scindée quasi-libre.

La morphisme  $i \otimes \text{cl}_d \tilde{\Gamma}$  forme clairement une cofibration de dg-graphes scindés et le morphisme de dg-catégories scindées libres associé  $\tilde{F}(i \otimes \text{cl}_d \tilde{\Gamma})$  forme, par adjonction, une cofibration de dg-catégories scindées. On utilise que les cofibrations dans une catégorie modèle sont stables par pushout et composition pour conclure que le morphisme initial  $* \rightarrow (\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial)$  est une cofibration de dg-catégories scindées, ce qui termine la démonstration du lemme.  $\square$

**5.5. La construction cobar appliquée aux dg-catégories scindées.** — On définit une dg-cocatégorie scindée sur  $\Omega_n^{epi}$  comme la donnée d'un dg-graphe scindé sur  $\Omega_n^{epi}$ , soit  $\tilde{\Gamma}$ , muni de morphismes de diagonale

$$\tilde{\Gamma}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\sigma})_u \xrightarrow{\nu} \bigoplus_{u=vw} \tilde{\Gamma}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_v \otimes \tilde{\Gamma}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\theta})_w$$

et de morphismes d'augmentations

$$\tilde{\Gamma}(\underline{\mathcal{I}}, \underline{\mathcal{I}})_{\text{id}} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{k}$$

satisfaisant les duals naturels des relations d'associativité et d'unité des dg-catégories scindées.

On supposera pour simplifier que  $\tilde{\Gamma}(\mathcal{T}, \mathcal{T})_{\text{id}} = \mathbb{k}$ . On forme alors le dg-graphe  $\tilde{\Gamma}_+$  tel que :

$$\tilde{\Gamma}_+(\mathcal{T}, \underline{\sigma})_u = \begin{cases} 0, & \text{pour un morphisme } u = \text{id}, \\ \tilde{\Gamma}(\mathcal{T}, \underline{\sigma})_u & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On doit dans une construction plus générale supposer que  $\tilde{\Gamma}$  est coaugmentée sur une dg-cocatégorie scindée unité

$$\tilde{\mathbf{1}}(\mathcal{T}, \underline{\sigma})_u = \begin{cases} \mathbb{k}, & \text{si } u = \text{id}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le dg-graphe  $\tilde{\Gamma}_+$  est alors défini comme un conoyau de coaugmentation.

La diagonale de  $\tilde{\Gamma}$  induit un morphisme de degré  $-1$

$$\Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}_+(\mathcal{T}, \underline{\sigma})_u \xrightarrow{\nu} \bigoplus_{u=vw} \Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}_+(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_v \otimes \Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}_+(\mathcal{T}, \underline{\theta})_w \subset \tilde{F}(\Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}_+)(\mathcal{T}, \underline{\sigma})_u$$

qui détermine une dérivation  $\partial$  sur la dg-catégorie libre  $\tilde{F}(\Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}_+)$ . On montre aisément que cette dérivation est une dérivation de torsion (on a en fait  $\delta(\partial) = 0$  et  $\partial^2 = 0$ ).

La construction cobar de  $\tilde{\Gamma}$  est la dg-catégorie quasi-libre

$$\tilde{B}^c(\tilde{\Gamma}) = (\tilde{F}(\Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}_+), \partial)$$

associée à la dérivation de torsion ainsi définie.

La construction cobar définit clairement un foncteur sur la catégorie des cocatégories scindées  $\tilde{\Gamma}$  telles que  $\tilde{\Gamma}(\mathcal{T}, \mathcal{T})_{\text{id}} = \mathbb{k}$ . De plus :

**Proposition 5.6.** — *Le morphisme de dg-catégories scindées*

$$\tilde{B}^c(f) : \tilde{B}^c(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \tilde{B}^c(\tilde{\Delta})$$

*induit par une équivalence faible de cocatégories scindées  $f : \tilde{\Gamma} \xrightarrow{\sim} \tilde{\Delta}$  est une équivalence faible.*

On suppose tacitement, en appliquant la convention de l'introduction, que les dg-cocatégories  $\tilde{\Gamma}$  et  $\tilde{\Delta}$  sont dg-cofibrantes (forment des objets cofibrants lorsqu'on oublie leur structure comultiplicatives).

Si l'hypothèse  $\tilde{\Gamma}(\mathcal{T}, \mathcal{T})_{\text{id}} = \mathbb{k}$  faite au §5.5 pour simplifier la définition de la construction cobar  $\tilde{B}^c(\tilde{\Gamma})$  n'est pas satisfaite, alors on doit ajouter des hypothèses de convergence pour assurer le résultat de cette proposition.

*Démonstration.* — Toute dg-catégorie scindée quasi-libre  $(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial)$  est munie d'une filtration naturelle

$$\cdots \subset F_s(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) \subset \cdots \subset F_0(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) = (\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial)$$

donnant lieu à suite spectrale du second quadrant

$$E^r(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) \Rightarrow H_*(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial).$$

Le  $s$ -ième terme de la filtration est simplement défini par la somme

$$F_s(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) = \bigoplus_{\substack{u=u_1 \cdots u_m \\ m \geq s}} \tilde{\Gamma}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_0)_{u_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{\Gamma}(\mathcal{T}_m, \mathcal{T}_{m-1})_{u_m} ;$$

sur les tenseurs d'ordre  $m \geq s$  dans le développement de la dg-catégorie scindée libre  $\tilde{F}(\tilde{\Gamma})$ .

On observe, en utilisant la graduation des morphismes de  $\Omega_n^{epi}$ , que la filtration est bornée sur chaque composante  $\tilde{B}^c(\tilde{\Gamma})(\mathcal{T}, \underline{\sigma})_u$ . Ceci entraîne que notre suite spectrale converge fortement. De plus, on constate que la dérivation de torsion de la construction cobar vérifie :

$$\partial F_s(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial) \subset F_{s+1}(\tilde{F}(\tilde{\Gamma}), \partial).$$

Par suite, on a les identités :

$$E^1(\tilde{B}^c(\tilde{\Gamma})) = H_*(\tilde{F}(\Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}_+)) \simeq \tilde{F}(H_*(\tilde{\Gamma}_+)).$$

Maintenant, le morphisme  $\tilde{B}^c(f)$  associé à un morphisme de cocatégories scindées  $f : \tilde{\Gamma} \xrightarrow{\sim} \tilde{\Delta}$  préserve clairement la filtration de la construction cobar et induit un morphisme de suites spectrales

$$E^r(\tilde{B}^c(\tilde{\Gamma})) \xrightarrow{E^r(\tilde{B}^c(f))} E^r(\tilde{B}^c(\tilde{\Delta}))$$

qui, d'après l'observation précédente, est un isomorphisme à partir du rang  $E^1$  lorsque  $f$  est une équivalence faible. La conclusion s'ensuit.  $\square$

**5.7. La construction bar appliquée aux dg-catégories scindées.** — La construction bar d'une dg-catégorie scindée sur  $\Omega_n^{epi}$ , soit  $\tilde{\Theta}$ , est un dg-graphe  $\tilde{B}(\tilde{\Theta})$  défini les produits tensoriels de dg-modules

$$\tilde{B}(\tilde{\Theta})(\mathcal{T}, \underline{\sigma})_u = \bigoplus_{\substack{u=u_1 \cdots u_d \\ u_i \neq \text{id}, i=1, \dots, d \\ d \geq 1}} \Sigma \tilde{\Theta}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_0)_{u_1} \otimes \cdots \otimes \Sigma \tilde{\Theta}(\mathcal{T}_d, \mathcal{T}_{d-1})_{u_d}$$

muni d'un certain homomorphisme de torsion  $\partial$ . La somme s'étend sur les décompositions réduites  $u = u_1 \cdots u_d$ ,  $u_i \neq \text{id}$ . On prend par convention  $\tilde{B}(\tilde{\Theta})(\mathcal{T}, \mathcal{T})_{\text{id}} = \mathbb{k}$  pour les composantes associées à un morphisme identité.

La différentielle de  $\tilde{B}(\tilde{\Theta})$  est la somme de la différentielle naturelle des tenseurs, induite par la différentielle interne de  $\tilde{\Theta}$ , et de l'homomorphisme de torsion

$$\partial : \tilde{B}(\tilde{\Theta})(\mathcal{T}, \underline{\sigma})_u \rightarrow \tilde{B}(\tilde{\Theta})(\mathcal{T}, \underline{\sigma})_u$$

tel que

$$\partial(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_d) = \sum_{i=1}^{d-1} \pm \{\alpha_1 \otimes \cdots \otimes (\alpha_i \cdot \alpha_{i+1}) \otimes \cdots \otimes \alpha_d\},$$

pour un tenseur  $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_d \in \Sigma \tilde{\Theta}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_0)_{u_1} \otimes \cdots \otimes \Sigma \tilde{\Theta}(\mathcal{T}_d, \mathcal{T}_{d-1})_{u_d}$ . Le signe  $\pm$  est déterminé par la commutation, avec les facteurs  $\alpha_k \in \Sigma \tilde{\Theta}(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_{k-1})_{u_k}$ ,  $k < i$ , du morphisme de composition de  $\tilde{\Theta}$  qui, par suspension, est équivalent à un homomorphisme

de degré  $-1$  :

$$\Sigma\tilde{\Theta}(\mathcal{I}_{i+1}, \mathcal{I}_i)_{u_i} \otimes \Sigma\tilde{\Theta}(\mathcal{I}_{i+2}, \mathcal{I}_{i+1})_{u_{i+1}} \xrightarrow{\mu} \Sigma\tilde{\Theta}(\mathcal{I}_{i+2}, \mathcal{I}_i)_{u_i u_{i+1}}.$$

**5.8. La construction cobar-bar appliquée aux dg-catégories scindées.** —

La construction bar d'une dg-catégorie scindée  $\tilde{B}(\tilde{\Theta})$  hérite d'une diagonale

$$\tilde{B}(\tilde{\Theta})(\mathcal{I}, \sigma)_u \xrightarrow{\Delta} \bigoplus_{u=vw} \tilde{B}(\tilde{\Theta})(\ell, \sigma)_v \otimes \tilde{B}(\tilde{\Theta})(\mathcal{I}, \theta)_w$$

définie composante par composante par les morphismes de déconcaténations

$$\begin{aligned} & \underbrace{\{\Sigma\tilde{\Theta}(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_0)_{u_1} \otimes \cdots \otimes \Sigma\tilde{\Theta}(\mathcal{I}_d, \mathcal{I}_{d-1})_{u_d}\}}_{\subset \tilde{B}(\tilde{\Theta})} \\ & \rightarrow \underbrace{\{\Sigma\tilde{\Theta}(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_0)_{u_1} \otimes \cdots \otimes \Sigma\tilde{\Theta}(\mathcal{I}_c, \mathcal{I}_{c-1})_{u_c}\}}_{\subset \tilde{B}(\tilde{\Theta})} \\ & \quad \otimes \underbrace{\{\Sigma\tilde{\Theta}(\mathcal{I}_{c+1}, \mathcal{I}_c)_{u_{c+1}} \otimes \cdots \otimes \Sigma\tilde{\Theta}(\mathcal{I}_d, \mathcal{I}_{d-1})_{u_d}\}}_{\subset \tilde{B}(\tilde{\Theta})}. \end{aligned}$$

L'identité  $\tilde{B}(\tilde{\Theta})(\mathcal{I}, \mathcal{I})_{\text{id}} = \mathbb{k}$  nous donne aussi un morphisme de counité sur  $\tilde{B}(\tilde{\Theta})$ , de sorte que le dg-graphe scindé  $\tilde{B}(\tilde{\Theta})$  forme une dg-cocatégorie scindée sur  $\Omega_n^{\text{epi}}$ .

On forme la construction cobar associée à  $\tilde{B}(\tilde{\Theta})$ . On a alors la proposition suivante :

**Proposition 5.9.** —

- (a) L'homomorphisme de dg-graphes  $\epsilon : \tilde{B}_+(\tilde{\Theta}) \rightarrow \tilde{\Theta}$  défini par les projections sur les composantes tensorielles d'ordre  $d = 1$  de  $\tilde{B}_+(\tilde{\Theta})$  induit un morphisme de dg-catégories scindées :

$$\tilde{B}^c(\tilde{B}(\tilde{\Theta})) = (\tilde{F}(\Sigma^{-1}\tilde{B}_+(\tilde{\Theta})), \partial) \xrightarrow{\epsilon} \tilde{\Theta}.$$

- (b) Et le morphisme d'augmentation  $\epsilon : \tilde{B}^c(\tilde{B}(\tilde{\Theta})) \rightarrow \tilde{\Theta}$  ainsi défini est une équivalence faible.

*Démonstration.* — La démonstration de l'assertion (a) se réduit à une vérification facile, laissée en exercice, de la relation (\*\*) du §5.3).

On renvoie à [13, II §4] pour une démonstration de l'assertion (b) pour la construction cobar-bar d'une dg-algèbre. On constate que cette démonstration s'applique formellement aux dg-catégories scindées.  $\square$

On peut montrer que la construction bar  $\tilde{B}(\tilde{\Theta})$  forme un dg-graphe scindé cofibrant (en supposant tacitement que la dg-catégorie scindée  $\tilde{\Theta}$  est un objet dg-cofibrant). Par conséquent, on déduit de la Proposition 5.9 :

**Proposition 5.10.** — La construction cobar-bar  $\tilde{B}^c(\tilde{B}(\tilde{\Theta}))$  définit un remplacement cofibrant naturel de  $\tilde{\Theta}$  dans la catégorie des dg-catégories scindées sur  $\Omega_n^{\text{epi}}$ .  $\square$

**5.11. Le complexe à coefficients associé à une construction cobar.** — On revient à la construction cobar  $\tilde{B}^c(\tilde{\Gamma})$  associée à une cocatégorie scindée quelconque  $\tilde{\Gamma}$ . Soit  $B^c(\Gamma) = u\tilde{B}^c(\tilde{\Gamma})$  la dg-catégorie associée à  $\tilde{B}^c(\tilde{\Gamma})$ .

Une structure de  $B^c(\Gamma)$ -diagramme covariant sur une collection  $T(\underline{\tau})$ ,  $\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , est, d'après la Proposition 3.A, donnée par un morphisme de dg-catégories  $\psi : B^c(\Gamma) \rightarrow \text{End}_T$ , équivalent par adjonction à un morphisme de dg-catégories scindées  $\psi : \tilde{B}^c(\tilde{\Gamma}) \rightarrow {}_c\text{End}_T$ , où  ${}_c\text{End}_T$  est la dg-catégorie scindée constante associée à la dg-catégorie des endomorphismes de  $T$ , définie §3. Les observations du §5.3 montrent que ce morphisme  $\psi = \psi_g$  est déterminé par sa restriction  $g$  au dg-graphe  $\Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}_+$ , associant un homomorphisme de dg-modules  $\alpha_* : T(\underline{\tau}) \rightarrow T(\underline{\sigma})$  de degré  $d-1$  à chaque morphisme générateur  $\alpha \in \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$  de degré  $d$  sur une composante  $u \neq \text{id}$ . L'homomorphisme  $g : \Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}_+ \rightarrow \text{End}_T$  est par adjonction équivalent à une collection d'homomorphismes  $\tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \otimes T(\underline{\tau}) \xrightarrow{g^\#} T(\underline{\sigma})$  de degré  $-1$ .

On a une observation analogue pour les  $B^c(\Gamma)$ -diagrammes contravariants car on constate que la catégorie scindée sous-jacente à  $B^c(\Gamma)^{op}$  s'identifie à la construction cobar  $\tilde{B}^c(\tilde{\Gamma}^{op})$  sur le diagramme scindé  $\tilde{\Gamma}^{op}$  tel que  $\tilde{\Gamma}^{op}(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) = \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ . Une structure de  $B^c(\Gamma)$ -diagramme contravariant sur une collection  $S(\underline{\sigma})$ ,  $\underline{\sigma} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , est donc donnée par un morphisme de dg-catégories scindées  $\phi : \tilde{B}^c(\tilde{\Gamma}^{op}) \rightarrow {}_c\text{End}_S$ . L'homomorphisme  $f : \Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}^{op} \rightarrow \text{End}_S$  déterminant ce morphisme  $\phi = \phi_f$  est par adjonction équivalent à une collection d'homomorphismes  $\tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \otimes S(\underline{\sigma}) \xrightarrow{f^\#} S(\underline{\tau})$  de degré  $-1$ .

Observons que le produit tensoriel

$$S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T = \bigoplus_{u: \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}} S(\underline{\sigma}) \otimes \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \otimes T(\underline{\tau})$$

est muni d'un homomorphisme de torsion naturel

$$\partial : S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T \rightarrow S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T$$

défini composante par composante, pour tout couple de  $B^c(\Gamma)$ -diagrammes  $(S, T)$ , par l'homomorphisme composé

$$\begin{aligned} & S(\underline{\sigma}) \otimes \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \otimes T(\underline{\tau}) \\ & \xrightarrow{\nu_*} \bigoplus_{u=vw} S(\underline{\sigma}) \otimes \tilde{\Gamma}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_v \otimes \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\theta})_w \otimes T(\underline{\tau}) \\ & \xrightarrow{(f_*^\#, g_*^\#)} \left\{ \bigoplus_w S(\underline{\theta}) \otimes \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\theta})_w \otimes T(\underline{\tau}) \right\} \oplus \left\{ \bigoplus_v S(\underline{\sigma}) \otimes \tilde{\Gamma}(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_v \otimes T(\underline{\theta}) \right\}, \end{aligned}$$

déterminé par la diagonale de  $\tilde{\Gamma}$  et l'action de  $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{B}^c(\tilde{\Gamma})$  sur  $S$  et  $T$ . La relation des homomorphismes de torsion  $\delta(\partial) + \partial^2$  se déduit aisément des équations du §5.3 pour les morphismes  $\phi_f$  et  $\phi_g$ . Par conséquent, on a un dg-module tordu bien défini

$$(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T, \partial)$$

naturellement associé à tout couple de  $B^c(\Gamma)$ -diagrammes  $(S, T)$ .

On observe en outre :

**Proposition 5.12.** — *Le morphisme de dg-modules*

$$f_* : (P \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T, \partial) \rightarrow (Q \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T, \partial)$$

induit par une équivalence faible de  $B^c(\Gamma)$ -diagrammes contravariants  $f : P \xrightarrow{\sim} Q$  est une équivalence faible, et de même pour le morphisme de dg-modules

$$g_* : (S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} P, \partial) \rightarrow (S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} Q, \partial)$$

induit par une équivalence faible de  $B^c(\Gamma)$ -diagrammes covariants  $g : P \xrightarrow{\sim} Q$ .

*Démonstration.* — On utilise la graduation de la catégorie des arbres élagués pour munir le dg-module tordu  $(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T, \partial)$  d'une filtration naturelle, laquelle est définie au niveau du produit tensoriel  $S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T$  par la relation :

$$F_s(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T) = \bigoplus_{\deg(u) \leq s} S(\underline{\sigma}) \otimes \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \otimes T(\underline{\tau}).$$

On constate que l'homomorphisme de torsion applique  $F_s(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T)$  dans  $F_{s-1}(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T)$ . Par conséquent, on a une suite spectrale naturelle

$$E^r(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T, \partial) \Rightarrow H_*(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T, \partial)$$

dont le terme  $E^1$  est donné par l'homologie du produit tensoriel  $S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T$  par rapport aux seules différentielles internes

$$E^1(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T, \partial) = H_*(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T),$$

On observe simplement qu'une équivalence faible  $f : P \rightarrow Q$  de  $B^c(\Gamma)$ -diagrammes contravariants induit un morphisme de suite spectrale

$$E^r(P \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T, \partial) \xrightarrow{f_*} E^r(Q \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T, \partial)$$

qui est un isomorphisme au niveau  $E^1$  pour en conclure que  $f_*$  est une équivalence faible comme demandé. L'argument est le même pour une équivalence faible de  $B^c(\Gamma)$ -diagrammes covariants.  $\square$

On se donne maintenant un morphisme de dg-cocatégories scindées  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Delta}$ . Un couple de diagrammes sur  $B^c(\Delta) = u\tilde{B}^c(\tilde{\Delta})$ , soit  $(S, T)$ , forme naturellement un couple de diagrammes sur  $B^c(\Gamma) = u\tilde{B}^c(\tilde{\Gamma})$  par restriction de structure. On constate aisément que les morphismes

$$S(\underline{\sigma}) \otimes f \otimes T(\underline{\tau}) : S(\underline{\sigma}) \otimes \tilde{\Gamma}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \otimes T(\underline{\tau}) \rightarrow S(\underline{\sigma}) \otimes \tilde{\Delta}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \otimes T(\underline{\tau})$$

induit par  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Delta}$  définissent un morphisme de dg-modules

$$f_* : (S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T, \partial) \rightarrow (S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{\Delta} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T, \partial)$$

entre les complexes tordus associés à  $\tilde{\Gamma}$  et  $\tilde{\Delta}$ . On a de plus :

**Proposition 5.13.** — *Le morphisme de dg-modules*

$$f_* : (S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} T, \partial) \rightarrow (S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} \tilde{\Delta} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} T, \partial)$$

induit par une équivalence faible de dg-cocatégories scindées  $f : \tilde{\Gamma} \xrightarrow{\sim} \tilde{\Delta}$  est une équivalence faible, pour tout couple de  $B^c(\Delta)$ -diagrammes  $(S, T)$ .

*Démonstration.* — On utilise la suite spectrale naturelle

$$E^r(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} T, \partial) \Rightarrow H_*(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} T, \partial)$$

introduite dans la démonstration du Lemme 5.12.

On observe simplement que notre équivalence faible de dg-cocatégories  $f : \tilde{\Gamma} \xrightarrow{\sim} \tilde{\Delta}$  induit un morphisme de suites spectrales

$$E^r(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} \tilde{\Gamma} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} T, \partial) \xrightarrow{f_*} E^r(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} \tilde{\Delta} \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} T, \partial)$$

qui est un isomorphisme au niveau  $E^1$ . La conclusion s'ensuit.  $\square$

Supposons maintenant que  $\tilde{\Gamma} = \tilde{B}(\tilde{\Theta})$  est la construction bar d'une dg-catégorie enrichie scindée  $\tilde{\Theta}$ . On a défini au §4 une construction bar à coefficients  $B(S, \Theta, T)$  lorsque  $(S, T)$  sont des diagrammes sur la dg-catégorie  $\Theta = u\tilde{\Theta}$ . Par restriction de structure via l'augmentation  $\epsilon : B^c(B(\Theta)) \rightarrow \Theta$ , on obtient que  $(S, T)$  forment des diagrammes sur  $B^c(B(\Theta)) = u\tilde{B}^c(\tilde{B}(\tilde{\Theta}))$ . On constate aisément en revenant aux définitions :

**Observation 5.14.** — *Le complexe bar  $B(S, \Theta, T)$  défini au §4 s'identifie, pour tout couple de  $\Theta$ -diagrammes  $(S, T)$ , au complexe tordu*

$$(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} \tilde{B}(\tilde{\Theta}) \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} T, \partial)$$

associé à la construction bar  $\tilde{\Gamma} = \tilde{B}(\tilde{\Theta})$ .

On peut donc utiliser la notation  $B(S, \Theta, T)$  de façon cohérente pour désigner le complexe tordu

$$(S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} \tilde{B}(\tilde{\Theta}) \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} T, \partial)$$

associé à tout couple de diagrammes sur la construction cobar-bar  $B^c(B(\Theta))$ . La Proposition 4.16 et la Proposition 4.19 nous donnent une relation

$$H_*(B(S, \Theta, T)) = \text{Tor}_*^{\Theta}(S, T) = \text{Tor}_*^{B^c(B(\Theta))}(S, T),$$

pour tout couple de  $\Theta$ -diagrammes  $(S, T)$ . Observons que :

**Proposition 5.15.** — *On a l'identité*

$$\text{Tor}_*^{B^c(B(\Theta))}(S, T) = H_*(B(S, \Theta, T))$$

pour tout couple de  $B^c(B(\Theta))$ -diagrammes  $(S, T)$  et pas seulement pour les couples de  $\Theta$ -diagrammes.

*Démonstration.* — Soit  $P \xrightarrow{\sim} S$  un remplacement cofibrant de  $S$  dans la catégorie des  $B^c(B(\Theta))$ -diagrammes contravariants. Soit  $Q \xrightarrow{\sim} T$  un remplacement cofibrant de  $T$  dans la catégorie des  $B^c(B(\Theta))$ -diagrammes covariants. On utilise que les foncteurs d'extension et de restriction de structure associés au morphisme d'augmentation  $\epsilon : B^c(B(\Theta)) \xrightarrow{\sim} \Theta$  définissent une équivalence de Quillen (Proposition 4.17), ce qui implique que l'unité d'adjonction  $P \rightarrow \epsilon^* \epsilon_! P$  (respectivement,  $Q \rightarrow \epsilon^* \epsilon_! Q$ ) est une équivalence faible de  $B^c(B(\Theta))$ -diagrammes. On a alors les relations

$$\mathrm{Tor}_*^{B^c(B(\Theta))}(S, T) = \mathrm{Tor}_*^{B^c(B(\Theta))}(P, Q) = \mathrm{Tor}_*^{B^c(B(\Theta))}(\epsilon^* \epsilon_! P, \epsilon^* \epsilon_! Q)$$

au niveau du foncteur  $\mathrm{Tor}$  et les relations parallèles

$$H_*(B(S, \Theta, T)) = H_*(B(P, \Theta, Q)) = H_*(B(\epsilon^* \epsilon_! P, \Theta, \epsilon^* \epsilon_! Q))$$

au niveau du complexe de Koszul, lesquelles, d'après la Proposition 4.16, aboutissent à l'identité

$$H_*(B(S, \Theta, T)) = H_*(B(\epsilon_! P, \Theta, \epsilon_! Q)) = \mathrm{Tor}_*^\Theta(\epsilon_! P, \epsilon_! Q).$$

La Proposition 4.18 donne alors l'identité

$$\mathrm{Tor}_*^{B^c(B(\Theta))}(\epsilon^* \epsilon_! P, \epsilon^* \epsilon_! Q) = \mathrm{Tor}_*^\Theta(\epsilon_! P, \epsilon_! Q)$$

qui boucle cette chaîne de relations.  $\square$

## 6. La Construction de Koszul de la dg-catégorie scindée des arbres élagués

On applique maintenant les constructions de la section précédente à la dg-catégorie scindée des arbres élagués  $\tilde{\Omega}_n^{epi}$ , dont les composantes sont concentrées en degré 0 et munies d'une différentielle interne triviale. Le dg-module  $\tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$  de la construction bar est alors défini par la somme directe

$$\tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = \bigoplus_{u=u_1 \cdots u_d} \mathbb{k}\{\tau_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \tau_d\},$$

pour des générateurs de degré

$$\mathrm{deg}\{\tau_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \tau_d\} = d,$$

avec la différentielle donnée par la formule

$$\partial\{\tau_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \tau_d\} = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^i \{\tau_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_{i-1} u_i} \cdots \xleftarrow{u_d} \tau_d\}.$$

Le but principal de cette section est de construire une sous-cocatégorie de  $\tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$ , la construction de Koszul  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$ , telle que le morphisme d'inclusion  $\iota : \tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) \rightarrow \tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  définit une équivalence faible de dg-cocatégories scindées. On appliquera ensuite les résultats généraux de la section précédente pour produire :

- un remplacement cofibrant  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) = \tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}))$  de  $\tilde{\Omega}_n^{epi}$  dans la catégorie des dg-catégories scindées sur  $\Omega_n^{epi}$ , ainsi qu'un remplacement cofibrant  $R(\Omega_n^{epi}) = u\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  de  $\Omega_n^{epi}$  dans la catégorie des dg-catégories ;



- un complexe de Koszul  $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$  calculant les foncteurs  $\text{Tor}_*^{R(\Omega_n^{epi})}(S, T)$ , ainsi que les foncteurs  $\text{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(S, T)$  lorsque  $(S, T)$  sont des  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes.

On observera que le complexe  $C_*(T)$  défini dans [17, Proposition-Définition 3.6] s'identifie au complexe de Koszul  $K(b_n, \Omega_n^{epi}, T)$  associé à un certain  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme  $b_n$ .

On utilise, comme dans la théorie classique de la dualité de Koszul des algèbres [20], la graduation de  $\Omega_n^{epi}$  pour définir la construction de Koszul  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$ . On commence par réviser la structure des morphismes de degré 1 de  $\Omega_n^{epi}$ .

**6.1. Les morphismes d'arbres élagués de degré 1.** — Les observations de [17, Lemme 3.4] impliquent que les morphismes de degré 1 de  $\Omega_n^{epi}$  sont donnés par des diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 \mathfrak{t}_0 & \xrightarrow{\tau_1} & \cdots & \xrightarrow{\tau_{k-1}} & \mathfrak{t}_{k-1} & \xrightarrow{\tau_k} & \mathfrak{t}_k & \xrightarrow{\tau_{k+1}} & \mathfrak{t}_{k+1} & \xrightarrow{\tau_{k+2}} & \cdots & \xrightarrow{\tau_n} & \mathfrak{t}_n \\
 sh_0 \downarrow & & & & sh_{k-1} \downarrow & & d_a \downarrow & & \text{id} \downarrow & & & & \text{id} \downarrow \\
 \mathfrak{t}_0 & \xrightarrow{\sigma_1} & \cdots & \xrightarrow{\sigma_{k-1}} & \mathfrak{t}_{k-1} & \xrightarrow{\sigma_k} & \mathfrak{s}_k - 1 & \xrightarrow{\sigma_{k+1}} & \mathfrak{t}_{k+1} & \xrightarrow{\sigma_{k+2}} & \cdots & \xrightarrow{\sigma_n} & \mathfrak{t}_n
 \end{array}$$

et que l'on construit de la façon suivante :

- (1) l'application  $u : \mathfrak{t}_i \rightarrow \mathfrak{s}_i$  est l'identité pour  $i > k$ , ce qui suppose alors  $\sigma_i = \tau_i$  ;
- (2) l'application  $d_a$  identifie deux sommets consécutifs  $(a, a+1)$  d'une fibre  $\tau_{k+1}^{-1}(b)$  au niveau  $k$ , de sorte que l'on a

$$d_a(x) = \begin{cases} x, & \text{pour } x = 1, \dots, a, \\ x - 1, & \text{pour } x = a + 1, \dots, s_k, \end{cases}$$

$$\text{et nécessairement } \sigma_{k+1}(x) = \begin{cases} \tau_{k+1}(x), & \text{pour } x = 1, \dots, a, \\ \tau_{k+1}(x + 1), & \text{pour } x = a + 1, \dots, s_k - 1 ; \end{cases}$$

- (3) puis, lorsque  $k > 0$ , on a nécessairement

$$\sigma_k^{-1}(x) = \begin{cases} \tau_k^{-1}(x), & \text{pour } x = 1, \dots, a - 1, \\ \tau_k^{-1}(a) \cup \tau_k^{-1}(a + 1), & \text{pour } x = a, \\ \tau_k^{-1}(x), & \text{pour } x = a + 2, \dots, s_{k+1}, \end{cases}$$

ce qui détermine  $\sigma_k$  ; l'application  $sh_{k-1}$  au niveau  $k - 1$  est la juxtaposition des applications identiques sur les fibres  $\tau_k^{-1}(x)$ ,  $x \neq a, a + 1$ , avec une bijection

$$\tau_k^{-1}(a) \amalg \tau_k^{-1}(a + 1) \xrightarrow{\cong} \sigma_k^{-1}(a)$$

préservant l'ordre entre les éléments de  $\tau_k^{-1}(a)$  et  $\tau_k^{-1}(a + 1)$  (en d'autres termes, cette application est une permutation de battage) ;

- (4) les applications  $\sigma_i : \mathfrak{t}_{i-1} \rightarrow \mathfrak{t}_i$  et les bijections  $sh_{i-1} : \mathfrak{t}_{i-1} \rightarrow \mathfrak{t}_{i-1}$  sont ensuite déterminées inductivement ; d'abord  $\sigma_i$ , par les relations  $\sigma_i^{-1}(x) = \tau_i^{-1}(sh_i^{-1}(x))$ ,  $x \in \mathfrak{t}_i$  ; puis  $sh_{i-1}$ , par la relation  $\sigma_i sh_{i-1} = sh_i \tau_i$  et la propriété de croissance sur les fibres  $\tau_i^{-1}(x)$ ,  $x \in \mathfrak{t}_i$ .

Un morphisme de degré 1 est donc entièrement déterminé, à partir de son domaine  $\underline{\tau}$ , par la fusion de deux sommets consécutifs  $(a, a+1)$  sur une fibre  $\tau_{k+1}^{-1}(b)$  de l'arbre  $\underline{\tau}$  et, lorsque  $k > 0$ , par une bijection

$$sh_{k-1} : \tau_k^{-1}(a) \amalg \tau_k^{-1}(a+1) \xrightarrow{\cong} \sigma_k^{-1}(a)$$

mélangeant les fibres de ces sommets.

La Figure 5 donne la représentation graphique schématique d'un morphisme de degré 1. La notation  $\alpha$  (respectivement  $\beta$ ) représente l'ensemble du sous-arbre au dessus du sommet fusionné  $a$  (respectivement,  $b = a+1$ ). L'observation (4) de la construction formelle donnée dans ce paragraphe signifie graphiquement que l'ensemble du sous-arbre au dessus d'un sommet  $x \in \tau_k^{-1}(a) \cup \tau_k^{-1}(b)$  est déplacé avec  $x$ . Le morphisme se comprend donc globalement comme une fusion des sommets  $a$  et  $b = a+1$  et d'une permutation de battage des sous-arbres au dessus des sommets  $x \in \tau_k^{-1}(a) \cup \tau_k^{-1}(b)$ , que représente l'expression  $sh(\alpha, \beta)$  dans la figure.

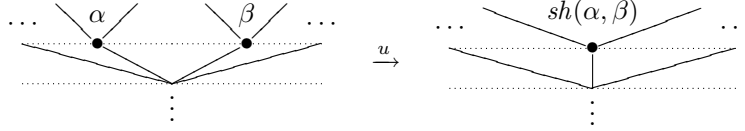


FIGURE 5.

On observe dans [8, 17] que les morphismes de degré 1, avec un signe  $\text{sgn}(u)$  associé à chaque morphisme  $u$ , déterminent les termes de la différentielle du complexe bar  $n$ -itéré  $B^n(A)$  d'une algèbre commutative  $A$ . On utilise alors le  $\Omega_n^{\text{epi}}$ -diagramme  $\underline{B}^n(A)$  associé à une algèbre commutative  $A$  dont la définition est revue §3. On a  $B^n(A) = \bigoplus_{\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{\text{epi}}} A^{In \underline{\tau}}$  et la différentielle de  $B^n(A)$  s'identifie, sur chaque composante  $A^{In \underline{\tau}}$ , à la somme des morphismes

$$u_* : A^{In \underline{\tau}} \rightarrow A^{In \underline{\sigma}}$$

induits par morphismes de degré 1 de  $\Omega_n^{\text{epi}}$ , tordus par le signe  $\text{sgn}(u)$  qui leur est associé.

Les morphismes de degré 1 sont équivalents, dans le formalisme de [8], aux relations de recouvrement du poset  $\underline{e}/\Omega_n^{\text{epi}}$  (voir [8, §A.7]). Le signe  $\text{sgn}(u)$  est défini, de façon graphique, dans la Proposition A.10 de cette référence. Observons que cette définition possède une généralisation naturelle lorsque les entrées  $e \in \underline{e}$  sont munies d'un degré de sorte qu'une permutation  $(e, f) \leftrightarrow (f, e)$  produit un signe  $\pm$  déterminé par les règles usuelles de l'algèbre différentielle graduée. Cette observation interviendra dans les arguments de §8.

**6.2. La construction de Koszul associée à la catégorie  $\tilde{\Omega}_n^{\text{epi}}$ .** — On forme le dg-graphe  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{\text{epi}})$  tel que :

$$\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{\text{epi}})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = \mathbb{k}\{u\},$$

avec la graduation déduite de la graduation de  $\Omega_n^{\text{epi}}$

$$\deg\{u\} = \deg(u)$$

et une différentielle évidemment triviale. On appelle ce dg-graphe la construction de Koszul de  $\tilde{\Omega}_n^{epi}$ . Observons que les dg-modules  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$  sont évidemment cofibrants, de sorte que le dg-graphe  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  satisfait aux hypothèses tacites de la section précédente.

On considère l'application

$$\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \xrightarrow{\iota} \tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$$

qui applique le générateur  $\{u\}$  de  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$  sur la somme

$$\iota\{u\} = \sum_{\substack{u=u_1 \cdots u_d \\ \deg u_1 = \cdots = \deg u_d = 1}} \underbrace{\text{sgn}(u_1) \cdots \text{sgn}(u_d)}_{\pm} \cdot \{\tau_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \tau_d\}$$

s'étendant sur l'ensemble des décompositions de  $u$  en morphismes de degré 1 dans la catégorie  $\Omega_n^{epi}$ . On observe que :

**Proposition 6.3.** — *On a  $\partial\iota\{u\} = 0$  dans  $\tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$ , de sorte que notre application définit un morphisme de dg-modules*

$$\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \xrightarrow{\iota} \tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u.$$

*Démonstration.* — On prouve que tout morphisme de degré 2

$$\underline{\tau} \xrightarrow{u} \underline{\sigma}$$

possède exactement deux décompositions

$$\begin{array}{ccc} & \theta_1 & \\ w_1 \nearrow & & \searrow v_1 \\ \underline{\tau} & \xrightarrow{u} & \underline{\sigma} \\ w_2 \searrow & & \nearrow v_2 \\ & \theta_2 & \end{array}$$

avec  $\deg v_1 = \deg v_2 = \deg w_1 = \deg w_2 = 1$ , puis on constate que les signes

$$\text{sgn}(v_1) \text{sgn}(w_1) \quad \text{et} \quad \text{sgn}(v_2) \text{sgn}(w_2)$$

associés à ces décompositions sont opposés, et ceci montrera que les termes du développement

$$\partial\iota\{u\} = \sum_{\substack{u=u_1 \cdots u_d \\ \deg u_1 = \cdots = \deg u_d = 1 \\ 1 \leq i \leq d-1}} \underbrace{\text{sgn}(u_1) \cdots \text{sgn}(u_d)}_{\pm} \cdot \{\tau_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_i u_{i+1}} \cdots \xleftarrow{u_d} \tau_d\}$$

s'annulent deux à deux.

On généralise l'analyse du §6.1 pour déterminer un morphisme de degré 2 à partir de son domaine  $\underline{\tau}$  et des sommets de  $\underline{\tau}$  identifiés par  $u$ . On distingue trois cas.

On suppose d'abord que  $u$  fusionne trois sommets consécutifs  $a, b = a+1, c = a+2$  sur une même fibre  $\tau_k^{-1}(x)$ . La Figure 6 donne la représentation schématique de ce morphisme et ses deux décompositions. L'expression  $sh(\alpha, \beta, \gamma)$  représente une

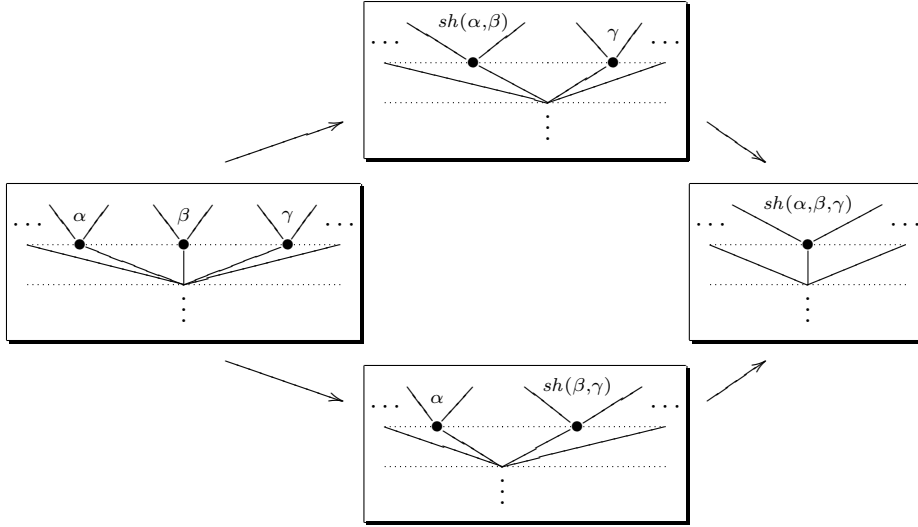


FIGURE 6.

permutation de battage des sous-arbres  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . L'existence des deux décompositions résulte de l'existence d'uniques permutations de battages à deux composantes telles qu'on a la relation

$$sh(\alpha \cup \beta, \gamma) \cdot sh(\alpha, \beta) = sh(\alpha, \beta, \gamma) = sh(\alpha, \beta \cup \gamma) \cdot sh(\beta, \gamma)$$

dans le groupe des permutations de l'alphabet  $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ .

On suppose maintenant que  $u$  fusionne un couple de sommets consécutifs  $a, b = a + 1$ , sur une même fibre  $\tau_k^{-1}(x)$ , et un couple disjoint de sommets consécutifs  $c, d = c + 1$ , sur une fibre  $\tau_l^{-1}(y)$  avec éventuellement  $x \neq y$  et  $k \neq l$ . La représentation schématique de ce morphisme et de ses décompositions est donnée Figure 7.

Un dernier cas correspond à la fusion d'un couple de sommets consécutifs  $a, b = a + 1$ , sur une même fibre  $\tau_k^{-1}(x)$ , et d'un couple de sommets  $c$  et  $d$  tels que  $c \in \tau_k^{-1}(a)$  et  $d \in \tau_k^{-1}(b)$ . La représentation schématique de ce morphisme et de ses décompositions est donnée Figure 8.

On constate aisément qu'il n'y a pas d'autres possibilités que ces trois configurations.

Les décompositions  $u = vw$  d'un morphisme  $u$  de degré 2 donnent, dans la représentation rappelée au §6.1, les composantes

$$A^{\otimes} \text{In } \tau \xrightarrow{v_* w_*} A^{\otimes} \text{In } \sigma$$

du carré  $\partial^2$  de la différentielle de la construction bar  $n$ -itérée d'une algèbre commutative. La représentation du complexe  $B^n(A)$  par un module sur l'opérade commutative dans [8] permet de séparer les composantes associées aux morphismes  $u -$

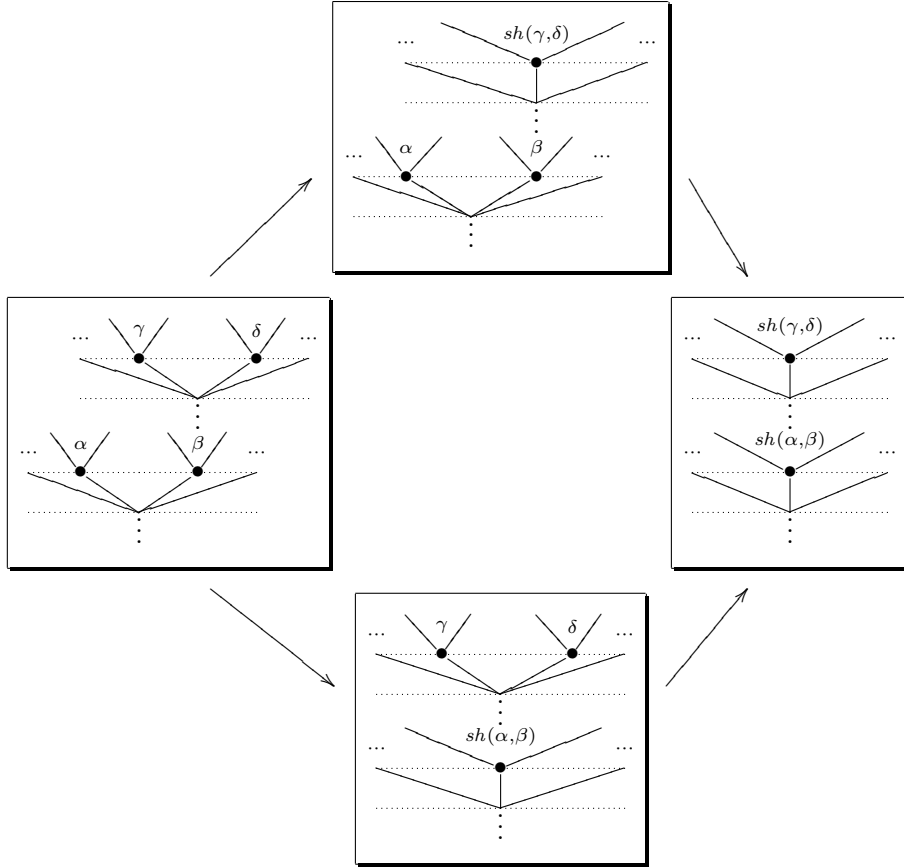


FIGURE 7.

voir la description de ce module dans [8, Proposition A.10]. C'est pourquoi la relation d'annulation  $\partial^2 = 0$  entraîne l'opposition entre les signes associés aux deux décompositions  $u = v_1 w_1 = v_2 w_2$  d'un morphisme de degré 2.  $\square$

**6.4. La construction cobar appliquée à la construction de Koszul de  $\tilde{\Omega}_n^{epi}$ .**

— Le dg-graphe  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  est muni, à l'instar de la construction bar  $\tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$ , d'une diagonale coassociative

$$\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\mathcal{I}, \underline{\sigma})_u \xrightarrow{\Delta} \bigoplus_{u=vw} \tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_v \otimes \tilde{K}(\tilde{\Theta})(\mathcal{I}, \underline{\theta})_w,$$

qui est simplement définie par la formule

$$\Delta\{u\} = \sum_{u=vw} \{v\} \otimes \{w\}$$

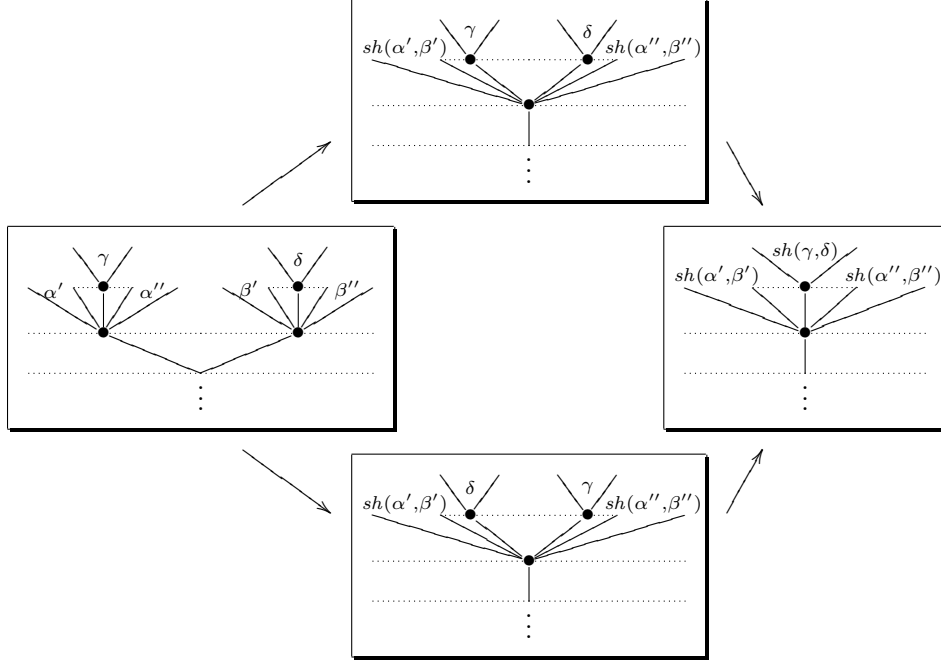


FIGURE 8.

pour l'élément générateur  $\{u\}$  de  $\tilde{K}(\tilde{\Theta})(\mathcal{T}, \underline{\sigma})_u$ . On a aussi l'identité  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\mathcal{T}, \underline{\tau})_{\text{id}} = \mathbb{k}$ , pour tout  $\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ .

La construction de Koszul  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  forme ainsi une dg-cocatégorie scindée sur  $\Omega_n^{epi}$ . On peut donc lui appliquer la construction cobar pour obtenir une dg-catégorie quasi-libre

$$\tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})) = (\tilde{F}(\Sigma^{-1} \tilde{K}_+(\tilde{\Omega}_n^{epi})), \partial)$$

associée à  $\tilde{\Omega}_n^{epi}$ . La dérivation de torsion de  $\tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}))$  est donnée par la formule

$$\partial\{u\} = \sum_{u=vw} (-1)^{\deg v} \cdot \{v\} \otimes \{w\},$$

pour tout élément générateur  $\{u\} \in \tilde{K}(\tilde{\Theta})(\mathcal{T}, \underline{\sigma})_u$ . Le signe additionnel  $\pm = (-1)^{\deg v}$  provient de la commutation implicite d'une désuspension  $\Sigma^{-1}$  avec le facteur  $\{v\} \in \tilde{K}_+(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_v$  dans la définition catégorique de  $\partial$  au §5.5.

On constate immédiatement que :

**Observation 6.5.** — *Le morphisme de dg-graphes  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) \xrightarrow{L} \tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  défini par la Proposition 6.3 est un morphisme de dg-cocatégories scindées.*

**6.6. L'augmentation de la construction de Koszul.** — On a donc, par functorialité de la construction cobar, un morphisme de dg-catégories scindées

$$\tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})) \xrightarrow{\tilde{B}^c(\iota)} \tilde{B}^c(\tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi}))$$

induit par  $\iota$  qui, par composition avec l'augmentation de  $\tilde{B}^c(\tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi}))$ , munit la dg-catégorie  $\tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}))$  d'une augmentation sur  $\tilde{\Omega}_n^{epi}$ . On obtient, par inspection des constructions, que le morphisme d'augmentation

$$\epsilon : \tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})) \xrightarrow{\sim} \tilde{\Omega}_n^{epi}$$

est défini sur les générateurs du dg-graphe  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  par :

$$\epsilon\{u\} = \begin{cases} \text{sgn}(u) \cdot \{u\}, & \text{si } \deg u = 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le premier objectif de cette section, qui sera atteint au Théorème 6.A, est de montrer que ce morphisme d'augmentation est une équivalence faible et, par suite, que la dg-catégorie scindée

$$\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) = \tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}))$$

définit un remplacement cofibrant de la dg-catégorie scindée des arbres élagués.

On s'intéresse pour le moment aux diagrammes sur la dg-catégorie

$$R(\Omega_n^{epi}) = u\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$$

associée à  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$ . On peut observer que  $R(\Omega_n^{epi})$  forme un objet quasi-libre dans la catégorie des dg-catégories

$$R(\Omega_n^{epi}) = (F(\Sigma^{-1}K_+(\Omega_n^{epi})), \partial),$$

lequel s'interprète aussi comme une construction cobar

$$R(\Omega_n^{epi}) = B^c(K(\Omega_n^{epi}))$$

sur le dg-graphe  $K(\Omega_n^{epi}) = u\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$ , cependant c'est seulement la représentation de la dg-catégorie scindée sous-jacente comme objet quasi-libre qui nous sera essentielle.

Une application de la caractérisation des morphismes sur une dg-catégories scindée quasi-libre, dans l'esprit du §5.11, nous donne le résultat suivant :

**Proposition 6.7.** —

- (a) *Munir une collection d'objets  $T(\underline{\tau})$ ,  $\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , d'une structure de diagramme covariant sur  $R(\Omega_n^{epi}) = B^c(K(\Omega_n^{epi}))$  revient à associer à tout morphisme  $u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$  un homomorphisme de dg-modules de degré  $\deg(u) - 1$*

$$u_* : T(\underline{\tau}) \rightarrow T(\underline{\sigma})$$

de telle sorte que les équations

$$\delta(u_*) = \sum_{u=vw} (-1)^{\deg v} \cdot v_* w_*$$

sont satisfaites dans  $\text{Hom}_{\text{dg-}\mathbb{k}\text{-Mod}}(T(\underline{\tau}), T(\underline{\sigma}))$ , la somme s'étendant sur l'ensemble des décompositions  $u = vw$  dans la catégorie  $\Omega_n^{epi}$ .

- (b) *Symétriquement, munir une collection d'objets  $S(\underline{\tau})$ ,  $\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , d'une structure de diagramme contravariant sur  $R(\Omega_n^{epi})$  revient à associer à tout morphisme  $u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$  un homomorphisme de dg-modules de degré  $\deg(u) - 1$*

$$u^* : S(\underline{\sigma}) \rightarrow S(\underline{\tau})$$

de telle sorte que les équations

$$\delta(u^*) = \sum_{u=vw} (-1)^{\deg v} \cdot w^* v^*$$

sont satisfaites dans  $\text{Hom}_{dg \text{ k Mod}}(S(\underline{\sigma}), S(\underline{\tau}))$ .  $\square$

**6.8. La construction de Koszul à coefficients.** — La construction du §5.11, appliquée à la construction de Koszul  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$ , donne un complexe

$$K(S, \Omega_n^{epi}, T) = (S \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} \tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) \otimes_{\text{Ob } \Omega_n^{epi}} T)$$

associé à tout couple de  $R(\Omega_n^{epi})$ -diagrammes  $(S, T)$ .

On obtient en appliquant la définition du §5.11 :

$$\begin{aligned} K(S, \Omega_n^{epi}, T) &= \left( \bigoplus_{u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}} S(\underline{\sigma}) \otimes \tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \otimes T(\underline{\tau}), \partial \right) \\ &= \left( \bigoplus_{u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}} S(\underline{\sigma}) \otimes \{u\} \otimes T(\underline{\tau}), \partial \right). \end{aligned}$$

L'homomorphisme de torsion est donné par la formule :

$$\partial(x \otimes \{u\} \otimes y) = \sum_{u=vw} (v^*(x) \otimes \{w\} \otimes y + x \otimes \{v\} \otimes w_*(y)),$$

pour tout  $x \in S(\underline{\sigma})$ ,  $y \in T(\underline{\tau})$ , et tout morphisme  $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$ .

Le morphisme de dg-cocatégories  $\iota : \tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) \rightarrow \tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  induit, par produit tensoriel avec  $(S, T)$ , un morphisme de dg-modules

$$\iota : K(S, \Omega_n^{epi}, T) \rightarrow B(S, \Omega_n^{epi}, T)$$

pour tout couple de  $B^c(B(\Omega_n^{epi}))$ -diagrammes  $(S, T)$ . Le second objectif de cette section consiste à montrer que ce morphisme est une équivalence faible. On conclura de ce résultat que le complexe  $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$  calcule les foncteurs Tor sur  $R(\Omega_n^{epi}) = B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ , pour tout couple de  $R(\Omega_n^{epi})$ -diagrammes  $(S, T)$ .

On va maintenant procéder à la démonstration de nos affirmations. On considère les diagrammes de Yoneda  $\Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -)$  et les diagrammes ponctuels  $b_{\underline{\sigma}}$  tels que

$$b_{\underline{\sigma}}(\underline{\theta}) = \begin{cases} \mathbb{k}, & \text{si } \underline{\theta} = \underline{\sigma}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On forme le complexe  $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -))$  associé à un tel couple de diagrammes. On observe, comme au §4.11 pour la construction bar à coefficients, que les produits de composition

$$\Omega_n^{epi}(\underline{\psi}, \underline{\phi}) \otimes \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -) \rightarrow \Omega_n^{epi}(\underline{\psi}, -)$$

induisent des morphismes

$$\Omega_n^{epi}(\underline{\psi}, \underline{\phi}) \otimes K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -)) \rightarrow K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\psi}, -))$$



qui font de la collection  $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -))$ ,  $\underline{\phi} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , un  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme contravariant  $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$  associé à  $b_{\underline{\sigma}}$ . On a aussi un morphisme de  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes

$$\epsilon : K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \rightarrow b_{\underline{\sigma}},$$

qui est l'identité de  $b_{\underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) = \mathbb{k}$  sur la composante de  $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})(\underline{\sigma})$ , et qui nul sur les composantes de  $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$  associées à un objet  $\underline{\phi} \neq \underline{\sigma}$ .

On montre :

**Lemme 6.9.** — *Les dg-modules  $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -))$ , associés aux objets  $\underline{\phi} \neq \underline{\sigma}$  sont acycliques de sorte que le morphisme d'augmentation*

$$\epsilon : K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \rightarrow b_{\underline{\sigma}}$$

définit une équivalence faible de  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes contravariants, pour tout  $\underline{\sigma} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ .

*Démonstration.* — La démonstration de ce lemme, point clé de notre construction, est renvoyée à la dernière section de l'article.  $\square$

On a de plus :

**Lemme 6.10.** — *Le  $\Theta$ -diagramme  $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$  est un objet cofibrant de la catégorie des  $\Theta$ -diagrammes contravariants.*

*Démonstration.* — Exercice standard : on a une filtration

$$\begin{aligned} 0 = \text{sk}_0 K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) &\subset \cdots \subset \text{sk}_d K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \subset \cdots \\ &\cdots \subset \text{colim}_d \text{sk}_d K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) = K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \end{aligned}$$

telle que

$$\text{sk}_d K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})(\underline{\phi}) = \left( \bigoplus_{\substack{u: \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma} \\ \text{deg}(u) \leq d}} \mathbb{k}\{u\} \otimes \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, \underline{\tau}), \partial \right);$$

on observe aisément que les morphismes d'inclusions de cette filtration s'identifie à des extensions de cobases de morphismes de la forme

$$\bigoplus_{\substack{u: \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma} \\ \text{deg}(u)=d}} \left\{ C \otimes \Omega_n^{epi}(-, \underline{\tau}) \right\} \xrightarrow{\bigoplus_u \{i \otimes \Omega_n^{epi}(-, \underline{\tau})\}} \bigoplus_{\substack{u: \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma} \\ \text{deg}(u)=d}} \left\{ D \otimes \Omega_n^{epi}(-, \underline{\tau}) \right\},$$

où  $i : C \rightarrow D$  est une cofibration génératrice de la catégorie des dg-modules ; la conclusion s'ensuit puisque les morphismes  $i \otimes \Omega_n^{epi}(-, \underline{\tau})$  sont, par construction, les cofibrations génératrices de la catégorie des  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes contravariants.  $\square$

Le morphisme naturel du §6.8, appliqué aux couples de diagrammes

$$(S, T) = (b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -)),$$

définit un morphisme de  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes contravariants

$$K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \xrightarrow{\iota} B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}).$$

Ce morphisme commute clairement aux augmentations ce qui entraîne que notre morphisme  $\iota$ , s'inscrivant dans un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \\ & \searrow \sim & \swarrow \sim \\ & & b_{\underline{\sigma}} \end{array}$$

définit lui-même une équivalence faible de  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes. On a observé, Lemme 4.15 que l'on a un isomorphisme naturel  $B(S, \Theta, \Theta) \otimes_{\Theta} T \xrightarrow{\cong} B(S, \Theta, T)$  pour la construction bar à coefficients. On obtient de même :

**Lemme 6.11.** — *On a un isomorphisme naturel  $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \otimes_{\Omega_n^{epi}} T \xrightarrow{\cong} K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, T)$ , pour tout  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme  $T$ .*  $\square$

On applique ce résultat aux  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes ponctuels  $T = b_{\underline{\tau}}$ . Observons que :

**Observation 6.12.** — *On a des identités*

$$\begin{aligned} K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, b_{\underline{\tau}}) &= K(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) = \bigoplus_{u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})} \tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \\ \text{et } B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, b_{\underline{\tau}}) &= B(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) = \bigoplus_{u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})} \tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u, \end{aligned}$$

pour tout couple d'objets  $(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) \in \text{Ob } \Omega_n^{epi} \times \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ .

On obtient alors :

**Lemme 6.13.** — *Le morphisme  $\iota : \tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \rightarrow \tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$  défini dans la Proposition 6.3 est une équivalence faible de dg-modules, pour tout  $u \in \text{Mor } \Omega_n^{epi}$ .*

*Démonstration.* — Le morphisme  $\iota : K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \xrightarrow{\iota} B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$  induit par produit tensoriel  $- \otimes_{\Omega_n^{epi}} b_{\underline{\tau}}$  une équivalence faible de dg-modules

$$\underbrace{K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \otimes_{\Omega_n^{epi}} b_{\underline{\tau}}}_{=K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, b_{\underline{\tau}})} \xrightarrow{\sim} \underbrace{B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \otimes_{\Omega_n^{epi}} b_{\underline{\tau}}}_{=B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, b_{\underline{\tau}})}$$

puisque  $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$  et  $B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$  sont des  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes cofibrants. Ceci entraîne, d'après l'observation précédente, la conclusion du lemme.  $\square$

Ce qui, d'après la Proposition 5.6, entraîne :

**Lemme 6.14.** — *Le morphisme de dg-cocatégories  $\iota : \tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) \rightarrow \tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  induit une équivalence faible au niveau des constructions cobar*

$$\iota_* : \tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})) \xrightarrow{\sim} \tilde{B}^c(\tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})).$$

Et, d'après la Proposition 5.12 :

**Lemme 6.15.** — *Le morphisme de dg-cocatégories  $\iota : \tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) \rightarrow \tilde{B}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  induit une équivalence faible sur les complexes à coefficients*

$$\iota : K(S, \Omega_n^{epi}, T) \xrightarrow{\sim} B(S, \Omega_n^{epi}, T)$$

pour tout couple de  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes  $(S, T)$ .

**Remarque.** — Le résultat du Lemme 6.10 se généralise à tout complexe  $K(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$  associé à un  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme contravariant  $S$ . Le lemme précédent nous permet alors de montrer que  $K(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$  définit un remplacement cofibrant de  $S$  dans la catégorie des  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes contravariants. On a un résultat symétrique pour les  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes covariants.

Pour un diagramme sur  $R(\Omega_n^{epi}) = B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ , on peut montrer que  $K(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$  représente l'image de  $S$  par le foncteur dérivé du foncteur d'extension de structure  $\epsilon_! : \mathcal{C}^{R(\Omega_n^{epi})^{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{(\Omega_n^{epi})^{op}}$  associé à l'augmentation  $\epsilon : R(\Omega_n^{epi}) \rightarrow \Omega_n^{epi}$ , et de même pour les  $R(\Omega_n^{epi})$ -diagrammes covariants.

On conclut du Lemme 6.14 et de la Proposition 5.9 :

**Théorème 6.A.** — *La construction  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) = \tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}))$  retourne un remplacement cofibrant de  $\tilde{\Omega}_n^{epi}$  dans la catégorie des dg-catégories scindées sur  $\Omega_n^{epi}$ .*

La dg-catégorie  $R(\Omega_n^{epi}) = B^c(K(\Omega_n^{epi}))$  associée à  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  forme donc, d'après la Proposition 1.11, un remplacement cofibrant de  $\Omega_n^{epi}$ . Ce remplacement cofibrant  $R(\Omega_n^{epi}) = B^c(K(\Omega_n^{epi}))$  définit un modèle quasi-libre minimal de  $\Omega_n^{epi}$  au sens que le dg-graphe  $K(\Omega_n^{epi}) = u\tilde{\Omega}_n^{epi}$  est muni d'une différentielle interne triviale et la différentielle de la construction cobar  $B^c(K(\Omega_n^{epi})) = u(\tilde{F}(\Sigma^{-1}\tilde{K}_+(\tilde{\Omega}_n^{epi})), \partial)$  applique les éléments générateurs sur des éléments décomposables.

On sait que  $\Omega_n^{epi}$  est engendrée comme catégorie par les morphismes de degré 1. La relation  $H_0(B^c(K(\Omega_n^{epi}))) = \Omega_n^{epi}$  entraîne la propriété supplémentaire suivante qui n'est pas apparente dans la définition du §0.1 :

**Corollaire.** — *Les relations entre morphismes de degré 1 de  $\Omega_n^{epi}$  sont engendrées par les identités quadratiques définies par les diagrammes des figures 6, 7, 8.*

Cette assertion, démontrée au niveau des  $\mathbb{k}$ -modules, reste valable pour la catégorie ensembliste  $\Omega_n^{epi}$  puisque la version enrichie en  $\mathbb{k}$ -modules de  $\Omega_n^{epi}$  est définie par les  $\mathbb{k}$ -modules librement engendrés par les morphismes ensemblistes de  $\Omega_n^{epi}$ .

On a donc, en corollaire du Théorème 6.A, une présentation par générateurs et relations de  $\Omega_n^{epi}$ . Le résultat de ce corollaire peut également se déduire, dans l'esprit de [4], d'une identification de  $\Omega_n^{epi}$  avec un produit en couronne itéré de catégories.

La Lemme 6.15 entraîne, avec la Proposition 4.16, que l'on a une identité

$$H_*(K(S, \Omega_n^{epi}, T)) = H_*(B(S, \Omega_n^{epi}, T)) = \mathrm{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(S, T),$$

pour tout couple de  $\Omega_n^{epi}$ -diagrammes. On démontre par les mêmes arguments que dans la Proposition 5.15 :

**Théorème 6.B.** — *On a l'identité*

$$\mathrm{Tor}_*^{B^c(K(\Omega_n^{epi}))}(S, T) = H_*(K(S, \Omega_n^{epi}, T)),$$

pour tout couple de  $B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ -diagrammes  $(S, T)$ .  $\square$

On suppose tacitement, comme expliqué dans l'introduction de §5, que les diagrammes  $S$  et  $T$  sont dg-cofibrants.

**6.16. Relations avec le résultat de [17].** — Notons  $i_n$  l'objet de  $\Omega_n^{epi}$  représenté par l'arbre-tronc



On considère après [17] le  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme ponctuel  $b_n = b_{i_n}$  tel que

$$b_n(\sigma) = \begin{cases} \mathbb{k}, & \text{si } \sigma = i_n \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'arbre tronc  $i_n$  définit en fait l'objet final de  $\Omega_n^{epi}$ . Par suite, on obtient que le complexe de Koszul à coefficient dans  $b_n$  possède un développement de la forme :

$$K(b_n, \Omega_n^{epi}, T) = \left( \bigoplus_{\mathcal{T} \in \mathrm{Ob} \Omega_n^{epi}} T(\mathcal{T}, \partial) \right),$$

avec l'homomorphisme de torsion donné composante par composante par l'action des éléments générateurs  $\{u\}$  de  $R(\Omega_n^{epi}) = B^c(K(\Omega_n^{epi}))$  sur le diagramme  $T$ .

Lorsque  $T$  est un  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme, seuls les éléments  $\{u\}$  de degré  $\deg(u) = 1$  agissent non-trivialement sur  $T$ , puisque, d'après le Théorème 6.A, l'augmentation de  $R(\Omega_n^{epi}) = u\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  annulent les éléments générateurs de  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi})$  de degré  $> 1$ . Dans ce cas, le complexe de Koszul  $K(b_n, \Omega_n^{epi}, T)$  s'identifie en fait au complexe  $C_*(T)$  défini dans [17, Proposition-Définition 3.6]. Le Théorème 6.B donne donc une généralisation de l'identité

$$\mathrm{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(b_n, T) = H_*(C_*(T))$$

démontrée par les auteurs de [17].

## 7. Applications aux complexes bar itérés

Le complexe bar  $n$ -itéré  $B^n(A)$  d'une algèbre commutative  $A$  s'identifie, dans l'idée de [17], au complexe  $C_*(\underline{B}^n(A))$  du diagramme  $\underline{B}^n(A)$  dont la définition est rappelée §3. D'après les explications du §6.16, ce complexe est le complexe de Koszul  $K(b_n, \Omega_n^{epi}, \underline{B}^n(A))$  associé à un  $\Omega_n^{epi}$ -diagramme contravariant  $b_n$ . On a donc l'identité

$$B^n(A) = K(b_n, \Omega_n^{epi}, \underline{B}^n(A)).$$

Le propos de cette section est de réviser la construction de [8] pour constater que cette identité se généralise lorsque  $A$  est une algèbre sur une  $E_n$ -opérade. Pour établir la relation entre la définition de [8] et la structure d'un  $R(\Omega_n^{epi})$ -diagramme,

où  $R(\Omega_n^{epi}) = B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ , on utilise l'interprétation, exposée au §0.2, d'un morphisme  $u : \tau \rightarrow \sigma$  comme une relation d'ordre dans le poset  $In \tau / \Omega_n^{epi}$ .

On suppose que  $\mathbf{E}$  est une  $\mathcal{K}$ -opérate cellulaire au sens de §2.7 et on considère l'opérate  $\mathbf{E}_n$  déduite de la filtration naturelle de  $\mathbf{E}$  (voir §2). On utilise la décomposition

$$B^n(A) = \bigoplus_{\sigma} A^{\otimes In \sigma}.$$

La différentielle de  $B^n(A)$ , dans la construction de [8], est définie par un homomorphisme de torsion  $\partial_\epsilon : B^n(A) \rightarrow B^n(A)$  dont les composantes

$$\partial_\epsilon : A^{\otimes In \tau} \rightarrow A^{\otimes In \sigma}$$

sont, d'après les explications de [8, §A.13], données par l'action sur  $A$  de produit tensoriels d'opérations

$$\epsilon_*\{u\} \in \bigotimes_{j \in In \sigma} E(\mu(\tau)_{u^{-1}(j)}, \text{id}_{u^{-1}(j)})$$

associées aux morphismes  $u : \tau \rightarrow \sigma$ , comme dans la définition de la catégorie universelle  $\tilde{\mathbf{Y}}_n^{\mathbf{E}}$  au §3.

On donne aussi dans [8, §A.13] une interprétation de la relation

$$\delta(\partial_\epsilon) + \partial_\epsilon \partial_\epsilon = 0$$

pour l'homomorphisme de torsion  $\partial_\epsilon : B^n(A) \rightarrow B^n(A)$  en termes des applications  $\epsilon_* : \{u\} \mapsto \epsilon_*\{u\}$  et d'une opération de composition  $\smile$  sur ces applications. Cette opération  $\smile$  s'identifie en fait à l'opération de composition de  $\tilde{\Omega}_n^{\mathbf{E}}$ . Par suite, l'équation de [8, §A.13] s'interprète comme la relation

$$\delta(\epsilon_*\{u\}) = \sum_{u=vw} \pm \epsilon_*\{v\} \cdot \epsilon_*\{w\}$$

dans  $\tilde{\Omega}_n^{\mathbf{E}}$ .

En appliquant la caractérisation des morphismes sur la dg-catégorie scindée quasi-libre  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) = \tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}))$ , on obtient alors :

**Observation.** — L'application  $\epsilon_* : \{u\} \mapsto \epsilon_*\{u\}$  considérée dans [8, §A.13] définit un morphisme de dg-catégories scindées sur  $\Omega_n^{epi}$

$$\epsilon_* : \tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) \rightarrow \tilde{\Omega}_n^{epi},$$

où  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) = \tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}))$ .

Dans la construction de [8], l'image des tenseurs d'opérations  $\epsilon_*\{u\}$  par le morphisme d'augmentation  $\epsilon : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{C}$  de la  $\mathcal{K}$ -opérate  $\mathbf{E}$  se réduit aux opérations déterminant la différentielle du complexe bar  $n$ -itéré des algèbres commutatives, de sorte que l'homomorphisme de torsion  $\partial_\epsilon : B^n(A) \rightarrow B^n(A)$  se réduit à cette différentielle usuelle lorsque  $A$  est une algèbre commutative. Cette contrainte s'interprète comme suit en terme du morphisme  $\epsilon_*$  défini dans l'observation précédente :

**Observation.** — Le morphisme  $\epsilon_*$  déduit de la construction de [8, §A.13] fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\Omega}_n^E . \\ & \epsilon_* \swarrow \text{dotted} & \downarrow \\ \tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) & \longrightarrow & \tilde{\Omega}_n^{epi} \xrightarrow{=} \tilde{\Omega}_n^C \end{array}$$

Cette observation donne une nouvelle démonstration, indirecte, du résultat de §3.

Maintenant, le complexe  $B^n(A)$  associé à une  $E_n$ -algèbre, tel qu'il est défini dans [8], s'identifie clairement au complexe de Koszul  $K(b_n, \Omega_n^{epi}, \underline{B}^n(A))$ , pour la structure de  $R(\Omega_n^{epi})$ -diagramme déduite de ces observations. C'est pourquoi on obtient :

**Théorème 7.A.** — On a les identités :

$$H_*(B^n(A)) = H_*(K(b_n, \Omega_n^{epi}, \underline{B}^n(A))) = \text{Tor}_*^{B^c(K(\Omega_n^{epi}))}(b_n, \underline{B}^n(A))$$

pour toute  $E_n$ -algèbre  $A$  qui est cofibrante comme dg-module.  $\square$

Ce qui est le théorème annoncé dans l'introduction.

On déduit ensuite du théorème principal de [8] :

**Théorème 7.B.** — On a l'identité :

$$H_*^{E_n}(A) = \text{Tor}_*^{B^c(K(\Omega_n^{epi}))}(b_n, \underline{B}^n(A))$$

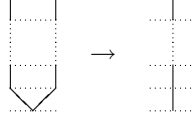
pour toute  $E_n$ -algèbre  $A$  qui est cofibrante comme dg-module.  $\square$

**Remarque.** — On conjecture que ce dernier résultat reste valable pour une  $E_n$ -algèbre dans la catégorie des espaces topologiques (des espaces simpliciaux). On remplace alors l'homologie des dg-modules par l'homotopie des espaces dans la définition du foncteur  $\text{Tor}$ . On applique une définition de l'homologie  $H_*^{E_n}(A)$  comme un foncteur  $\text{Tor}$  opéradique

$$H_*^{E_n}(A) = \text{Tor}_*^{E_n}(I, A)$$

où  $I$  est un  $\Sigma_*$ -objet unité vu comme un module à droite trivial sur  $E_n$  (voir [8]). L'idée pour obtenir la généralisation du Théorème 7.B consiste à observer que nos constructions s'étendent dans le cadre des modules sur les opérades, comme dans [8], et que le complexe bar catégorique  $B(b_n, \Omega_n^{epi}, \underline{B}^n(E_n))$  associé à l'opérade  $E_n$ , vu comme une algèbre sur elle-même dans la catégorie des modules à droite sur elle-même, définit un remplacement cofibrant de  $I$  dans la catégorie des  $E_n$ -modules à droites. Puis on observe suivant les idées de [7] que le complexe bar catégorique  $B(b_n, \Omega_n^{epi}, \underline{B}^n(A))$  d'une  $E_n$ -algèbre  $A$  est déterminé par un foncteur sur la catégorie des  $E_n$ -algèbres associé à ce  $E_n$ -module à droite  $B(b_n, \Omega_n^{epi}, \underline{B}^n(E_n))$ .

**Remarque.** — La relation du Théorème 7.B suppose que le foncteur Tor s’annule en degré  $* > 0$  lorsque  $A$  est une  $E_n$ -algèbre libre  $A = E_n(C)$ . La démonstration de l’acyclicité de  $B^n(E_n(C))$  dans [8, §8] fait appel à une opération de Browder intervenant dans la composante  $\partial : A^{\otimes In} \underline{y}_n \rightarrow A^{\otimes In} \underline{i}_n$  de la différentielle de  $B^n(A)$  associée au morphisme :



(les notations  $\underline{y}_n$  et  $\underline{i}_n$  reprennent la forme de ces arbres). Ce morphisme doit donc agir par une opération de degré  $* > 0$  dans la catégorie universelle du §3 pour que le diagramme  $B^n(A)$  construit dans le théorème 3.B donne le bon résultat. Ceci donne une obstruction à avoir une action stricte de la catégorie  $\Omega^n$  sur la collection  $A^{\otimes In} \underline{\tau}$ ,  $\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ , lorsqu’on étend la construction aux algèbres sur une  $E_n$ -opéade.

## 8. Appendice : la propriété d’acyclicité du complexe de Koszul

Le but de cet appendice est d’établir la propriété suivante dont on avait reporté la démonstration au §6 :

**Lemme 8.A (affirmation du Lemme 6.9).** — *Le dg-module*

$$K_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) = K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, -))$$

associé au diagramme ponctuel  $b_{\underline{\sigma}}$  et au diagramme de Yoneda  $\Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, -)$  est acyclique lorsque  $\underline{\tau} \neq \underline{\sigma}$ .

On étend essentiellement des arguments de [17]. On commence par reprendre les définitions pour analyser la structure de ce dg-module  $K_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})$ .

**8.1. La définition du complexe  $K_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})$ .** — Le dg-module

$$K_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) = K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, -))$$

s’identifie à un complexe de la forme

$$K_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) = (\bigoplus_{\underline{\sigma} \leftarrow \underline{\theta} \leftarrow \underline{\tau}} \mathbb{k}\{v\} \otimes \mathbb{k}\{w\}, \partial),$$

muni de la graduation telle que

$$\deg\{v\} \otimes \{w\} = \deg v,$$

le facteur  $\{v\}$  représentant le générateur de  $\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\underline{\theta}, \underline{\sigma})_v$  dans la définition du §6.8 et le facteur  $\{w\}$  un élément du diagramme de Yoneda  $\Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, -)$ . La différentielle de  $K_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})$  est donnée par la formule

$$\partial(\{v\} \otimes \{w\}) = \sum_{\substack{v=ab \\ \deg b=1}} \text{sgn}(b) \cdot \{a\} \otimes \{bw\}.$$

La somme s’étend sur l’ensemble des décomposition  $v = ab$  avec  $\deg b = 1$  puisque le morphisme d’augmentation de  $\tilde{R}(\tilde{\Omega}_n^{epi}) = \tilde{B}^c(\tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi}))$ , par lequel les éléments

$\{b\} \in \tilde{K}(\tilde{\Omega}_n^{epi})(\theta, \underline{\sigma})_v$  agissent sur le diagramme de Yoneda  $\Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, -)$ , annule les générateurs de degré  $> 1$ . Le signe  $\text{sgn}(b)$  provient de la définition de ce morphisme au §6.6.

On utilisera dans les arguments de cette section une généralisation de la construction  $K_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})$  lorsque les éléments de l'ensemble source  $\underline{e} = \text{In } \underline{\tau}$  sont munis d'un degré. On applique alors simplement la généralisation, mentionnée au §6.1, de la définition du signe  $\text{sgn}(b)$  associé à un morphisme de degré 1 dans la formule de la différentielle de  $K_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})$ .

Le complexe  $K_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})$  possède, à l'instar d'un dg-graphe scindé, un scindage naturel

$$K_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) = \bigoplus_{u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\tau})} \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u$$

pour des sous-complexes  $\tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u$ ,  $u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\tau})$ , constitués par les facteurs  $\mathbb{k}\{v\} \otimes \mathbb{k}\{w\}$  tels que  $vw = u$ .

**8.2. Une suite spectrale.** — L'idée consiste à munir  $\tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u$  de la filtration

$$0 = F_0 \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u \subset \cdots \subset F_d \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u \subset \cdots \subset \text{colim}_d F_d \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u = \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u$$

dont le terme  $F_d \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u$  est constitué des facteurs  $\mathbb{k}\{v\} \otimes \mathbb{k}\{w\}$  associés à un objet milieu  $\theta = \{\underline{d}_0 \xrightarrow{\theta_1} \cdots \xleftarrow{\theta_n} \underline{d}_n\}$  tel que  $d_1 + \cdots + d_{n-1} \leq d$ .

La différentielle  $d^0$  de la suite spectrale définie par cette filtration se réduit aux termes

$$d^0(\{v\} \otimes \{w\}) = \sum_{v=ab_0} \text{sgn}(b_0) \cdot \{a\} \otimes \{b_0 w\}$$

associés aux décompositions  $v = ab_0$  telles que, dans la représentation graphique des objets de  $\Omega_n^{epi}$ , le morphisme  $b_0 : \theta \rightarrow \rho$  fixe le nombre d'arêtes de niveau  $i > 0$ . Dans la description du §6.1, ces morphismes  $b_0$  sont donnés par la fusion de deux sommets consécutifs de niveau 0, représentée schématiquement dans Figure 9. L'étiquetage des feuilles nous permet, comme au §0.2, de représenter l'application  $b_0 : \text{In } \theta \rightarrow \text{In } \rho$  induite par  $b_0$  sur les ensembles sources des arbres.

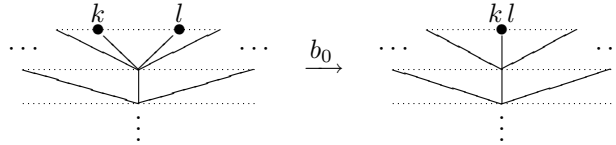


FIGURE 9.

**8.3. Une construction de cycles au niveau  $E^0$  de la suite spectrale.** — On dit qu'un morphisme

$$\{\underline{t}_0 \xrightarrow{\tau_1} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n\} \xrightarrow{u} \{\sigma_0 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{s}_n\}$$



est injectif fibre à fibre au niveau 0 si l'application

$$\tau_1^{-1}(k) \xrightarrow{u|_{\tau_1^{-1}(k)}} \sigma_1^{-1}(u(k))$$

induite par  $u : \mathfrak{t}_0 \rightarrow \mathfrak{s}_0$  est injective pour tout  $k \in \mathfrak{t}_1$ . La Figure 10 donne un exemple de tel morphisme. Rappelons que l'étiquetage des feuilles permet, d'après les observations du §0.2, de déterminer complètement le morphisme  $u$  par sa représentation graphique.

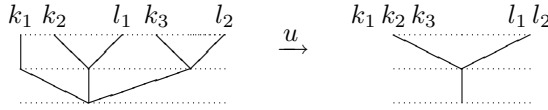


FIGURE 10.

On considère, comme dans [17, Proposition 4.7], le foncteur de troncature  $tr : \Omega_n^{epi} \rightarrow \Omega_{n-1}$  défini sur les objets par l'opération

$$tr\{\mathfrak{t}_0 \xrightarrow{\tau_1} \mathfrak{t}_1 \xrightarrow{\tau_2} \dots \xrightarrow{\tau_n} \mathfrak{t}_n\} = \{\mathfrak{t}_1 \xrightarrow{\tau_2} \dots \xrightarrow{\tau_n} \mathfrak{t}_n\}.$$

On se donne, sans nécessairement supposer  $u$  injectif fibre à fibre au niveau 0, une décomposition  $tr u = vw$  du morphisme  $tr u$  dans la catégorie  $\Omega_{n-1}$ . Cette décomposition est définie par le squelette solide d'un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{t}_0 & \xrightarrow{\tau_1} & \mathfrak{t}_1 & \xrightarrow{\tau_2} & \dots & \xrightarrow{\tau_n} & \mathfrak{t}_n \quad . \\ & \searrow^{sh_0} & \downarrow w & & & \downarrow w & \\ & \mathfrak{t}_0 & \xrightarrow{w\tau_1} & \mathfrak{d}_1 & \xrightarrow{\theta_2} & \dots & \xrightarrow{\theta_n} & \mathfrak{d}_n \\ & \downarrow u & \downarrow v & & & \downarrow v & & \\ \mathfrak{s}_0 & \xrightarrow{\sigma_1} & \mathfrak{s}_1 & \xrightarrow{\sigma_2} & \dots & \xrightarrow{\sigma_n} & \mathfrak{s}_n \end{array}$$

On considère l'ensemble des morphismes pointillés qui peuvent compléter un tel diagramme définissant alors une décomposition  $u = \hat{v} \hat{w}$  du morphisme  $u$  dans  $\Omega_n^{epi}$ . Ce remplissage est entièrement déterminé par la donnée de l'application  $sh_0 : \mathfrak{t}_0 \rightarrow \mathfrak{t}_0$  laquelle forme nécessairement une bijection puisque l'on suppose que la source de l'objet intermédiaire  $\underline{\theta} = \{\mathfrak{t}_0 \xrightarrow{w\tau_1} \mathfrak{d}_1 \xrightarrow{\theta_2} \dots \xrightarrow{\theta_n} \mathfrak{d}_n\}$  a même cardinal que la source de  $\underline{\tau}$ .

L'application  $w\tau_1$  regroupe les composantes  $\tau_1^{-1}(j) \subset \mathfrak{t}_0$  associées aux éléments  $j \in w^{-1}(i)$  de la fibre d'un point  $i \in \mathfrak{d}_1$ . La bijection  $sh_0 : \mathfrak{t}_0 \rightarrow \mathfrak{t}_0$  est définie par une permutation de battage

$$sh_0 : \coprod_{j \in w^{-1}(i)} \tau_1^{-1}(j) \xrightarrow{\sim} \coprod_{j \in w^{-1}(i)} \tau_1^{-1}(j)$$

sur chaque groupe de composantes associée à un élément  $i \in \mathfrak{d}_1$ . Comme les applications  $v$  sont supposées croissantes sur les fibres, l'existence d'une factorisation

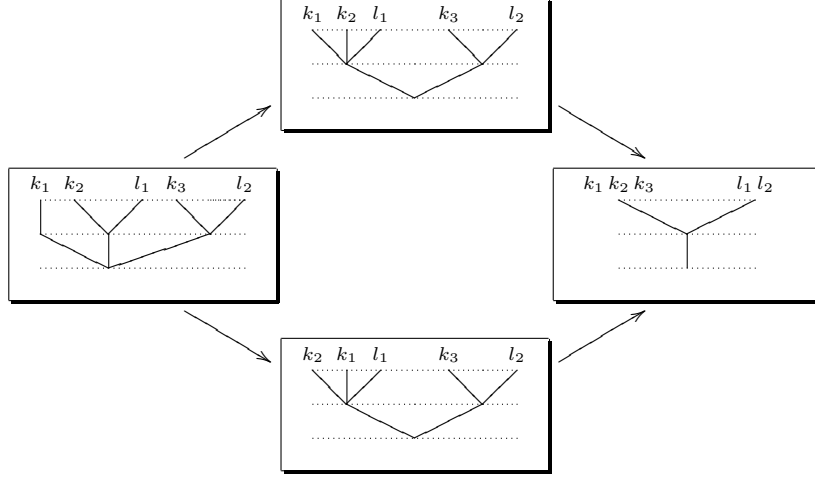


FIGURE 11.

$u = v sh_0$  impose la relation supplémentaire

$$u(k) < u(l) \Rightarrow sh_0(k) < sh_0(l)$$

pour chaque paire d'éléments  $\{k, l\}$  sur un même groupe de composantes  $\coprod_{j \in w^{-1}(i)} \tau_1^{-1}(j)$ . Finalement, la bijection  $sh_0 : \underline{\mathfrak{t}}_0 \rightarrow \underline{\mathfrak{t}}_0$  est uniquement déterminée par des permutations des éléments de  $\coprod_{j \in w^{-1}(i)} \tau_1^{-1}(j)$  sur une même fibre  $u^{-1}(x)$ ,  $x \in \underline{\mathfrak{s}}_0$ , avec la seule contrainte

$$(\{k < l\} \subset \tau_1^{-1}(j) \text{ pour un certain } j \in \underline{\mathfrak{t}}_1) \Rightarrow (sh_0(k) < sh_0(l))$$

lorsque le morphisme  $u$  n'est pas injectif fibre à fibre au niveau 0. La bijection  $sh_0$  ordonne ensuite ces blocs de permutations, associés aux ensembles  $u^{-1}(x) \cap \coprod_{j \in w^{-1}(i)} \tau_1^{-1}(j)$ , selon l'ordre des éléments  $x \in \underline{\mathfrak{s}}_0$ .

Cette analyse est une généralisation directe de l'argumentation de [17, Proposition 4.2].

La Figure 11 donne l'ensemble des décompositions  $u = \hat{v} \hat{w}$  associées à une décomposition  $tr u = vw$  de la troncature du morphisme de la Figure 10.

On constate aisément que :

**Observation 8.4.** — La somme

$$z(\{v\} \otimes \{w\}) = \sum_{u=\hat{v}\hat{w}} \pm \{\hat{v}\} \otimes \{\hat{w}\}$$

sur l'ensemble des décompositions  $u = \hat{v} \hat{w}$  associée à une décomposition  $tr u = vw$  dans  $\Omega_{n-1}$  définit un cycle dans  $\tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u$  lorsque le morphisme  $u$  est injectif fibre à fibre au niveau 0. (Le signe  $\pm$  est déterminé par la permutation  $sh_0$  qui intervient dans la construction de  $\hat{w}$ .)

Et on montre :

**Lemme 8.5.** — *L'application  $z : \{v\} \otimes \{w\} \mapsto z(\{v\} \otimes \{w\})$  définit un isomorphisme de dg-modules*

$$\tilde{K}_{n-1}(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_{tr u} \xrightarrow{\cong} (E^1 \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u, d^1)$$

*lorsque le morphisme  $u$  est injectif fibre à fibre au niveau 0. On a*

$$E^1 \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u = 0$$

*lorsque cette condition n'est pas satisfaite.*

Les entrées de  $tr u$  correspondent aux fibres  $\tau_0^{-1}(j)$ ,  $j \in \underline{\mathfrak{t}}_1$ , de la première surjection de  $u = \{\underline{\mathfrak{t}}_0 \xrightarrow{\tau_1} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\mathfrak{t}}_n\}$ . On associe à chaque entrée de  $tr u$  associée à une partie  $\tau_0^{-1}(j)$ ,  $j \in \underline{\mathfrak{t}}_1$ , le degré défini par la somme

$$\deg \tau_0^{-1}(j) = \#\tau_0^{-1}(j) + \sum_{k \in \tau_0^{-1}(j)} \deg(k)$$

pour que les signes de  $\tilde{K}_{n-1}(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_{tr u}$  correspondent aux signes de la différentielle  $d^1$ . Le nombre  $\#\tau_0^{-1}(j)$ , qui désigne le cardinal de l'ensemble  $\tau_0^{-1}(j)$ , correspond au nombre d'arêtes  $\tau_0 : k \mapsto j$  qui, dans la représentation de [8, Proposition A.10], sont associées à des suspensions dans la construction bar  $n$ -itéré.

*Démonstration.* — La différentielle  $d^0$  préservant la structure aux niveaux  $> 0$ , le module  $\tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_{tr u=vw}$  engendré par les termes  $\{\hat{v}\} \otimes \{\hat{w}\}$  tels que  $u = \hat{v} \hat{w}$  couvre une décomposition tronquée donnée  $tr u = vw$ . définit un sous-complexe de  $E^0 \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u$ , de sorte que  $E^0 \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u$  admet un scindage :

$$E^0 \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u = \bigoplus_{tr u=vw} (\tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_{tr u=vw}, d^0).$$

L'analyse du §8.3 se généralise pour déterminer l'ensemble des décompositions  $u = \hat{v} \hat{w}$  couvrant une décomposition tronquée  $tr u = vw$ . La permutation de battage  $sh_0$  est remplacée dans le cas général par une application  $p_0 sh_0 : \underline{\mathfrak{t}}_0 \rightarrow \underline{\mathfrak{d}}_0$  combinant une permutation de battage de la forme du §8.3 et une surjection  $p_0 : \underline{\mathfrak{t}}_0 \rightarrow \underline{\mathfrak{d}}_0$  identifiant certains éléments dans les intersections  $u^{-1}(x) \cap \prod_{j \in w^{-1}(i)} \tau_1^{-1}(j)$ ,  $x \in \underline{\mathfrak{s}}_0$ . Une généralisation directe des arguments de [17, §§4.2-4.7] montre alors que l'homologie du complexe  $(\tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_{tr u=vw}, d^0)$  est triviale si  $u$  n'est pas injectif fibre à fibre au niveau 0, est engendrée par le cycle  $z(\{v\} \otimes \{w\})$  sinon.

La construction d'un représentant explicite des classes d'homologie de  $E^0 \tilde{K}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tau})_u$  permet de déterminer la différentielle  $d^1$  de la suite spectrale ce qui donne le résultat du lemme.  $\square$

Une récurrence immédiate nous permet alors de conclure la démonstration du Lemme 8.A et donc de boucler la preuve des résultats de §6.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] M. A. Batanin, *The Eckmann-Hilton argument and higher operads*, Adv. Math. **217** (2008), 334–385.
- [2] M. Barratt, P. Eccles, *On  $\Gamma_+$ -structures. I. A free group functor for stable homotopy theory*, Topology **13** (1974), 25–45.
- [3] C. Berger, *Opérades cellulaires et espaces de lacets itérés*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996), 1125–1157.
- [4] C. Berger, *Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces*, Adv. Math. **213** (2007), 230–270.
- [5] A. Björner, M.L. Wachs, *On lexicographically shellable posets*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 323–341.
- [6] W. Dwyer, D. Kan, *Simplicial localizations of categories*, J. Pure Appl. Algebra **17** (1980), 267–284.
- [7] B. Fresse, *Modules over operads and functors*, Lecture Notes in Mathematics **1967**, Springer-Verlag, 2009.
- [8] ———, *Iterated bar complexes of  $E$ -infinity algebras and homology theories*, prépublication arXiv:0810.5147 (2008).
- [9] ———, *Koszul duality of  $E_n$ -operads*, prépublication arXiv:0904.3123 (2009).
- [10] P. Hirschhorn, *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs **99**, American Mathematical Society, 2003.
- [11] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs **63**, American Mathematical Society, 1999.
- [12] ———, *Monoidal model categories*, preprint arXiv:math.AT/9803002 (1998).
- [13] D. Husemoller, J.C. Moore, J. Stasheff, *Differential homological algebra and homogeneous spaces*, J. Pure Appl. Algebra **5** (1974), 113–185.
- [14] J. F. Jardine, *A closed model category structure for differential graded algebras*, in “Cyclic cohomology and noncommutative geometry (Waterloo, ON, 1995)”, Fields Institute Communications **17**, American Mathematical Society (1997), 55–58.
- [15] B. Keller, *On differential graded categories*, in “International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006), Vol. II”, Eur. Math. Soc. (2006), 151–190.
- [16] G.M. Kelly, *Basic concepts of enriched category theory, Reprint of the 1982 original*, Reprints in Theory and Applications of Categories **10**, Theory and Applications of Categories, 2005.
- [17] M. Livernet, B. Richter, *An interpretation of  $E_n$ -homology as functor homology*, prépublication arXiv:0907.1283 (2009).
- [18] J.C. Moore, *Differential homological algebra*, in “Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1”, Gauthier-Villars (1971), 335–339.
- [19] H.J. Munkholm, *DGA algebras as a Quillen model category. Relations to shm maps*, J. Pure Appl. Algebra **13** (1978), 221–232.
- [20] S.B. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 39–60.
- [21] S. Schwede, B. Shipley, *Algebras and modules in monoidal model categories*, Proc. London Math. Soc. **80** (2000), 491–511.

---

*27 août 2009 (mises à jour de la bibliographie, des notations et des terminologies le 10 septembre 2009)*

BENOIT FRESSE, UMR 8524 du CNRS et de l'Université de Lille 1 -  
Sciences et Technologies, Cité Scientifique – Bâtiment M2, F-59655 Villeneuve  
d'Ascq Cédex (France) • *E-mail* : `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`  
*Url* : `http://math.univ-lille1.fr/~fresse`