Homologie de Poisson de surfaces à une singularité isolée

B. Fresse

Introduction

L'anneau $S = \mathscr{C}[x,y,z]/(f)$ est muni d'une structure de Poisson canonique qui est caractérisée par les identités:

$$[x,y] := f'_z, \quad [y,z] := f'_x, \quad [z,x] := f'_y$$

(cf. [1]). Le but de ces notes est de calculer l'*homologie de Poisson* de cet anneau. La méthode consiste à remplacer S par une “résolution lisse” de la forme $\tilde{S} = \mathscr{C}[x,y,z,\tilde{f}]$ avec $\deg(\tilde{f}) = 1$ et $\delta\tilde{f} = f$ (cf. 1.1). Dans les articles [3] et [9], Burghelea et Vigué utilisent cette même résolution lisse $\tilde{S}$ pour calculer l'homologie cyclique de S. On observe que le crochet de Poisson de S se relève à $\tilde{S}$. Par suite, le calcul de l'homologie de Poisson de S se réduit au calcul de l'*homologie canonique* de $\tilde{S}$ (cf. [4], [5]). On obtient le résultat suivant:

0.1. Théorème
Soit $S = \mathscr{C}[x,y,z]/(f)$ comme ci-dessus. On suppose f de poids homogène, irréductible et à singularité isolée à l'origine. Sous ces hypothèses, on a:

$$H_i^{\mathcal{P}ois}(S,S) = \mathscr{C}[x,y,z]/(f'_x, f'_y, f'_z), \ \forall i > 0.$$

Rappelons aussi que par définition, on a $H_0^{\mathcal{P}ois}(S,S) = S \otimes_{\mathcal{U}_{\mathcal{P}ois}(S)} \Omega^1_{\mathcal{P}ois,S}$.

0.2. *Conventions*
On travaille sur le corps $\mathscr{C}$ des nombres complexes. La lettre P désigne l'algèbre des polynômes $\mathscr{C}[x,y,z]$. On fixe des rationnels α, β et γ représentant le poids des variables x, y et z. On fixe $f \in P$. On suppose f homogène et on note r le poids de f. Dans ces notes, on travaille avec des algèbres avec unité et augmentées. Aussi, par rapport à l'article [5], $H_i^{\mathcal{P}ois}(S,S)$ désigne le groupe d'homologie $H_i^{\mathcal{P}ois}(\bar{S},S)$, où $\bar{S}$ représente l'idéal d'augmentation de S.

§1. Une résolution lisse de S et son homologie

Le but de cette section est de ramener le calcul de l'homologie de Poisson de S à un calcul d'homologie canonique (cf. Lemme 1.4). Dans cette section, on ne fait pas d'hypothèse sur le polynôme f.

1.1. *Construction de la résolution lisse*
Observons d'abord que le crochet de Poisson de S se relève à P. En effet, on a $[x,f] = [y,f] = [z,f] = 0$ et par suite $[p,f] = 0$, $\forall p \in P$.

On ajoute à P un élément de degré 1 pour obtenir une résolution lisse de S. Explicitement, on considère la dg-algèbre $\tilde{S} = \mathscr{C}[x, y, z, \tilde{f}]$ avec $\deg(\tilde{f}) = 1$ et $\delta\tilde{f} = f$. On étend le crochet de Poisson de P à $\tilde{S}$ en posant $[\tilde{f}, \tilde{f}] := 0$ et $[p, \tilde{f}] := 0$, $\forall p \in P$. Ainsi, on obtient bien une dg-algèbre de Poisson et de plus, le morphisme évident $\tilde{S} \longrightarrow S$ est un quasi-isomorphisme d'algèbres de Poisson.

1.2. *Homologie canonique*

On rappelle la définition de l'*homologie canonique* (Gelfand-Dorfman [6], Koszul [8], Brylinski [2], Huebschmann [7]).

Soit X une algèbre de Poisson (eventuellement différentielle graduée). On note Ω^*_X l'algèbre des formes différentielles de Kähler associée à X. Ainsi, Ω^s_X est engendré par les monômes de la forme:

$$f_0 df_1 \cdots df_s, \text{ avec } f_0, \dots, f_s \in X.$$

Rappelons que $\deg(df) = \deg(f) + 1$, $\forall f \in X$. De plus, si $\delta : X \longrightarrow X$ représente la différentielle de X, alors la différentielle de Ω^*_X est caractérisée par l'identité $\delta(df) = (-1) \cdot d(\delta f)$, $\forall f \in X$. Mentionnons que $\delta : \Omega^*_X \longrightarrow \Omega^*_X$ préserve le degré tensoriel.

Soit M une *représentation de Poisson* de X (cf. [4], [5]). (Par exemple, $M = X$ muni de l'action adjointe.) Le complexe canonique est le complexe de modules différentiels gradués $C^{can}_s(X, M) = M \otimes_X \Omega^s_X$ avec la différentielle $\delta^{can} : C^{can}_s(X, M) \longrightarrow C^{can}_{s-1}(X, M)$ définie par la formule:

$$\begin{aligned}\delta^{can}(m df_1 \cdots df_s) = \sum\nolimits_{1 \leq i \leq s} &\pm [m, f_i] df_1 \cdots \widehat{df_i} \cdots df_s \\ &- \sum\nolimits_{1 \leq i < j \leq s} \pm m df_1 \cdots d[f_i, f_j] \cdots \widehat{df_j} \cdots df_s.\end{aligned}$$

Insistons sur le fait que le complexe canonique est un complexe de modules différentiels gradués. De façon équivalente, $C^{can}_s(X, M)$ forme un bicomplexe. De ce point de vue, C^{can} est muni de la différentielle canonique $\delta^{can} : C^{can}_s(X, M)_{s+t} \longrightarrow C^{can}_{s-1}(X, M)_{s+t-1}$ d'une part et de la différentielle interne $\delta : C^{can}_s(X, M)_{s+t} \longrightarrow C^{can}_s(X, M)_{s+t-1}$ d'autre part ($C^{can}_s(X, M)_{s+t}$ désignant la composante de $C^{can}_s(X, M)$ de degré total $s+t$). L'homologie de ce bicomplexe est l'homologie canonique de X.

On note $\bar{C}^{can}_*(X, M)$ le complexe canonique réduit et $\bar{H}^{can}_*(X, M)$ l'homologie canonique réduite. Rappelons que le complexe réduit est défini par $\bar{C}^{can}_s(X, M) = 0$ si $s = 0$ et $\bar{C}^{can}_s(X, M) = C^{can}_s(X, M)$ si $s > 0$.

1.3. *Homologie de Poisson*

Rappelons que l'*homologie de Poisson* est caractérisée par les propriétés suivantes (cf. [5]):

1) L'homologie de Poisson est invariante par quasi-isomorphisme. Plus explicitement, soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme d'algèbres de Poisson différentielles graduées. Soit M une représentation de Y. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un quasi-isomorphisme, alors f induit un isomorphisme en homologie de Poisson: $f_* : H^{\mathcal{P}ois}_*(X, M) \xrightarrow{\simeq} H^{\mathcal{P}ois}_*(Y, M)$.

2) Soit X une algèbre de Poisson différentielle graduée. Soit M une représentation de X. Si X vérifie le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg, alors on a $H^{\mathcal{P}ois}_*(X, M) = \bar{H}^{can}_{*+1}(X, M)$.

Dans le cas qui nous occupe, on obtient $H_*^{\mathcal{P}ois}(S,M) = H_*^{\mathcal{P}ois}(\tilde{S},M)$. De plus, comme l'algèbre $\tilde{S}$ est commutative libre (donc vérifie le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg), on a $H_*^{\mathcal{P}ois}(\tilde{S},M) = \bar{H}_{*+1}^{can}(\tilde{S},M)$. Finalement, à un décalage en degré près, l'homologie de Poisson de S est l'homologie du bicomplexe $\bar{C}_*^{can}(\tilde{S},M)$.

1.4. *L'homologie canonique de $\tilde{S}$*

On explicite maintenant ce bicomplexe $C_*^{can}(\tilde{S},M)$. On a clairement

$$C_s^{can}(\tilde{S},M)_{s+t} = \oplus M \otimes dx^{\epsilon_1} dy^{\epsilon_2} dz^{\epsilon_3} d\tilde{f}^s.$$

(On somme sur les triplets d'entiers ϵ_i tels que $\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3 = s-t$.) Comme le crochet par $\tilde{f}$ est nul, le produit par $d\tilde{f}$ commute à la différentielle canonique. Donc le produit par $d\tilde{f}^s$ fournit un isomorphisme du complexe $(C_{s-t}^{can}(P,M),\delta^{can})$ dans le complexe "horizontal" $(C_s^{can}(\tilde{S},M)_{s+t},\delta^{can})$. D'autre part, on a $\delta(d\tilde{f}^t) = tdfd\tilde{f}^{t-1}$. Par suite, via l'isomorphisme $C_s^{can}(\tilde{S},M)_{s+t} \simeq C_{s-t}^{can}(P,M) = M\otimes_P \Omega_P^{s-t}$, l'action de la différentielle "verticale" δ s'identifie au produit par df.

En conclusion, on a obtenu le résultat suivant:

1.5. Lemme

L'homologie de Poisson $H_*^{\mathcal{P}ois}(S,M)$ s'identifie à l'homologie du bicomplexe:

$$\begin{tikzcd}
 & {} & {} & {} & {} \arrow[d, "\cdot df"'] & {} \arrow[d, "\cdot df"'] & \\
t & {} & {} & C_0^{can} \arrow[d, "\cdot df"'] & C_1^{can} \arrow[l, "\delta^{can}"'] \arrow[d, "\cdot df"'] & C_2^{can} \arrow[l, "\delta^{can}"'] \arrow[d, "\cdot df"'] & {} \arrow[l, "\delta^{can}"'] \\
2 & {} & C_0^{can} \arrow[d, "\cdot df"'] & C_1^{can} \arrow[l, "\delta^{can}"'] \arrow[d, "\cdot df"'] & C_2^{can} \arrow[l, "\delta^{can}"'] \arrow[d, "\cdot df"'] & C_3^{can} \arrow[l, "\delta^{can}"'] & {} \\
1 & C_0^{can} \arrow[d, "\cdot df"'] & C_1^{can} \arrow[l, "\delta^{can}"'] \arrow[d, "\cdot df"'] & C_2^{can} \arrow[l, "\delta^{can}"'] \arrow[d, "\cdot df"'] & C_3^{can} \arrow[l, "\delta^{can}"'] & {} & {} \\
0 & C_1^{can} & C_2^{can} \arrow[l, "\delta^{can}"'] & C_3^{can} \arrow[l, "\delta^{can}"'] & {} & {} & {} \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & s &
\end{tikzcd}$$

où $C_i^{can} = C_i^{can}(P,M) = M\otimes_P \Omega_P^i$. (Avec le décalage en degré, la diagonale $s+t = i+1$ correspond au groupe d'homologie $H_i^{\mathcal{P}ois}$.) $\square$

§2. Calcul de l'homologie de Hochschild de $\tilde{S}$

On fixe $M = S$. Le but de cette section est de calculer les groupes d'homologie du complexe:

$$C_3^{can} \xleftarrow{\cdot df} C_2^{can} \xleftarrow{\cdot df} C_1^{can} \xleftarrow{\cdot df} C_0^{can}.$$

Dans la suite, ces groupes d'homologie sont noté H_i, $i = 0, 1, 2, 3$. En fait, ce calcul détermine l'homologie de Hochschild de S à coefficients dans S. Aussi, on reprend les calculs de Burghelea et Vigué, avec la différence mineure suivante: on ne remplace pas le module de coefficients $M = S$ par la résolution $\tilde{S}$.

A partir de maintenant, on suppose f homogène, irréductible et avec une singularité isolée en 0. En conséquence, les polynômes f'_x, f'_y, f'_z forment une suite régulière et le complexe de Koszul associé est exact. En particulier:

2.1. Fait: *Soient $u, v, w \in P$. Si on a $uf'_x + vf'_y + wf'_z = 0$ dans P, alors il existe des polynômes $a, b, c \in P$ tels que $u = bf'_z - cf'_y$, $v = cf'_x - af'_z$ et $w = af'_y - bf'_x$.*

2.2. Fait: *Soient $a, b, c \in P$. Si on a $bf'_z - cf'_y = cf'_x - af'_z = af'_y - bf'_x = 0$ dans P, alors il existe un polynôme $h \in P$ tel que $a = hf'_x$, $b = hf'_y$ et $c = hf'_z$.*

2.3. Affirmation: *On a $H_0 = 0$.*

Preuve: Soit $h \in P$. On a $hdf = hf'_x dx + hf'_y dy + hf'_z dz$. Donc si $hdf \equiv 0 \pmod f$, alors f divise hf'_x, hf'_y et hf'_z. Comme f est irréductible, on en déduit $h \equiv 0 \pmod f$. □

2.4. Affirmation: *On a $H_1 = 0$.*

Preuve: Soit $\lambda = adx + bdy + cdz \in \Omega^1_P$. On obtient:

$$\lambda \cdot df = (bf'_z - cf'_y)dydz + (cf'_x - af'_z)dzdx + (af'_y - bf'_x)dxdy.$$

Donc, si $\lambda \cdot df \equiv 0 \pmod f$, alors on a

$$\begin{cases} bf'_z - cf'_y &= uf, \qquad (1) \\ cf'_x - af'_z &= vf, \qquad (2) \\ af'_y - bf'_x &= wf, \qquad (3) \end{cases}$$

pour quelques polynômes $u, v, w \in P$. En effectuant la combinaison linéaire $f'_x(1) + f'_y(2) + f'_z(3)$ des équations ci-dessus, on obtient l'équation:

$$uf'_x + vf'_y + wf'_z = 0.$$

D'où (exactitude du complexe de Koszul en degré 1, cf. Fait 2.1):

$$u = b_0 f'_z - c_0 f'_y,\ v = c_0 f'_x - a_0 f'_z \text{ et } w = a_0 f'_y - b_0 f'_x,$$

pour quelques polynômes $a_0, b_0, c_0 \in P$. En posant $a_1 = a - a_0 f$, $b_1 = b - b_0 f$ et $c_1 = c - c_0 f$, on trouve que les équations (1), (2), (3) sont équivalentes à

$$b_1 f'_z - c_1 f'_y = c_1 f'_x - a_1 f'_z = a_1 f'_y - b_1 f'_x = 0.$$

Par suite (exactitude du complexe de Koszul en degré 2, cf. Fait 2.2), il existe un polynôme $h \in P$ tel que:

$$a = hf'_x + a_0 f,\ b = hf'_y + b_0 f \text{ et } c = hf'_z + c_0 f.$$

En conséquence, on obtient:

$$\lambda \equiv h df \,(\text{mod } f)$$

et le résultat s'ensuit. □

2.5. Affirmation: *Soit $\sigma := \alpha x dydz + \beta y dzdx + \gamma z dxdy$. On a $\sigma \cdot df \equiv 0$. De plus, si $[\sigma]$ désigne la classe d'homologie de σ, alors on a $H_2 = P/(f'_x, f'_y, f'_z) \cdot [\sigma]$.*

Preuve:

1) Soit $\omega = udydz + vdzdx + wdxdy \in \Omega^2_P$. On a $\omega \cdot df = (uf'_x + vf'_y + wf'_z)dxdydz$. En particulier, pour $\omega = \sigma$, on obtient:

$$\sigma \cdot df = (\alpha x f'_x + \beta y f'_y + \gamma z f'_z)dxdydz = rf dxdydz.$$

Donc σ définit bien une classe de H_2.

2) En général, si $\omega \cdot df \equiv 0 \,(\text{mod } f)$, alors $uf'_x + vf'_y + wf'_z = rhf$, pour un certain $h \in P$. En utilisant l'identité d'Euler $rf = \alpha x f'_x + \beta y f'_y + \gamma z f'_z$, on obtient l'équation:

$$(u - \alpha x h)f'_x + (v - \beta y h)f'_y + (w - \gamma z h)f'_z = 0.$$

D'où (exactitude du complexe de Koszul en degré 1):

$$u = bf'_z - cf'_y + \alpha x h,\ v = cf'_x - af'_z + \beta y h \text{ et } w = af'_y - bf'_x + \gamma z f'_z,$$

pour quelques polynômes $a, b, c \in P$. Par suite, on a $\omega = \lambda df + h\sigma$, avec $\lambda = adx + bdy + cdz$. Finalement, toute classe de H_2 est de la forme $[h\sigma]$, pour $h \in P$.

3) Reste à prouver que $[h\sigma]$ est nul dans H_2 si et seulement si $h \in (f'_x, f'_y, f'_z)$. Si $h = uf'_x + vf'_y + wf'_z$, alors en utilisant l'identité d'Euler pour f, on obtient:

$$(\alpha x h - ruf)f'_x + (\beta y h - rvf)f'_y + (\gamma z h - rwf)f'_z = 0.$$

D'où (exactitude du complexe de Koszul en degré 1):

$$\begin{cases} \alpha x h &= bf'_z - cf'_y + ruf, \qquad (1) \\ \beta y h &= cf'_x - af'_z + rvf, \qquad (2) \\ \gamma z h &= af'_y - bf'_x + rwf, \qquad (3) \end{cases}$$

pour quelques polynômes $a, b, c \in P$. Comme ci-dessus, on en déduit $h\sigma \equiv \lambda df \,(\text{mod } f)$. Donc $[h\sigma]$ est nul dans H_2.

Réciproquement, si $h\sigma \equiv \lambda df \,(\text{mod } f)$, alors en effectuant la combinaison linéaire $f'_x(1) + f'_y(2) + f'_z(3)$ des équations ci-dessus, avec l'identité d'Euler pour f, on obtient:

$$rfh = rf(af'_x + bf'_y + cf'_z).$$

D'où $h \in (f'_x, f'_y, f'_z)$. □

2.6. Affirmation: *Soit $\tau := dxdydz$. On a $H_3 = P/(f'_x, f'_y, f'_z) \cdot [\tau]$.*

Preuve: immédiat. $\square$

Au terme de ces calculs, le terme E^1 de la suite spectrale s'écrit:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & | & & | & & | & & | & & | \\
t & \text{——} & & \text{——} & & \text{——} & 0 & \xleftarrow{\delta^{can}} & 0 & \xleftarrow{\delta^{can}} & H_2 & \xleftarrow{\delta^{can}} \\
 & & | & & | & & | & & | & & | \\
2 & \text{——} & & \text{——} & 0 & \xleftarrow{\delta^{can}} & 0 & \xleftarrow{\delta^{can}} & H_2 & \xleftarrow{\delta^{can}} & H_3 & \text{——} \\
 & & | & & | & & | & & | & & | \\
1 & \text{——} & 0 & \xleftarrow{\delta^{can}} & 0 & \xleftarrow{\delta^{can}} & H_2 & \xleftarrow{\delta^{can}} & H_3 & \text{——} & & \text{——} \\
 & & | & & | & & | & & | & & | \\
0 & \text{——} & Q_1 & \xleftarrow{\delta^{can}} & Q_2 & \xleftarrow{\delta^{can}} & H_3 & \text{——} & & \text{——} & & \text{——} \\
 & & | & & | & & | & & | & & | \\
 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & s
\end{array}
$$

avec $Q_1 = C_1^{can}/C_0^{can} \cdot df$, $Q_2 = C_2^{can}/C_1^{can} \cdot df$, $H_2 = P/(f'_x, f'_y, f'_z) \cdot [\sigma]$ et $H_3 = P/(f'_x, f'_y, f'_z) \cdot [\tau]$. Donc notre suite spectrale dégénère à partir du terme E^2.

§3. Calcul de l'homologie canonique de $\tilde{S}$

Dans cette section, on complète le calcul de la suite spectrale en en déterminant le terme E^2. On achève ainsi la preuve du théorème 0.1.

3.1. Lemme

La différentielle $\delta^{can} : H_3 \longrightarrow H_2$ est nulle.

Cette assertion est une conséquence directe de l'affirmation 3.3 ci-dessous:

3.2. Affirmation: *Dans $C_2^{can}(P,P) = \Omega_P^2$, on a $\delta^{can}\tau = 0$.*

Preuve: En effet, par définition, on a

$$\delta^{can}\tau = -d[x,y]\, dz + dx\, d[y,z] + d[x,z]\, dy = -df'_x\, dx - df'_y\, dy - df'_z\, dz$$

et donc $\delta^{can}\tau = -d(df) = 0$. $\square$

3.3. Affirmation:

Soit $h \in P$. Dans $C_2^{can}(P,P) = \Omega_P^2$, on a l'identité $\delta^{can}(h\tau) = dhdf$.

Preuve: On a $\delta^{can}(h\tau) = h\delta^{can}\tau + [h,\tau]$. Donc, d'après l'affirmation précédente, on obtient $\delta^{can}(h\tau) = [h,\tau]$. Maintenant, on vérifie facilement qu'on a l'identité $[h,\tau] = dhdf$. $\square$

Le lemme précédent entraine $H_i^{\mathcal{P}ois}(S,S) = P/(f'_x, f'_y, f'_z)$ pour $i > 1$. Il nous reste à déterminer le terme $H_1^{\mathcal{P}ois}(S,S)$ en calculant l'homologie du complexe:

$$C_1^{can}/C_0^{can} \cdot df \xleftarrow{\delta^{can}} C_2^{can}/C_1^{can} \cdot df \xleftarrow{\delta^{can}} H_3.$$

En fait, d'après l'affirmation précédente, on a $\delta^{can}(C_3^{can}) \subseteq C_1^{can} \cdot df$. Aussi, il s'agit finalement de déterminer le noyau de l'application:

$$\delta^{can} : C_2^{can}/C_1^{can} \cdot df \longrightarrow C_1^{can}/C_0^{can} \cdot df.$$

On obtient:

3.4. Lemme

Toute classe du noyau de l'application

$$\delta^{can} : C_2^{can}/C_1^{can} \cdot df \longrightarrow C_1^{can}/C_0^{can} \cdot df$$

s'écrit de façon unique sous la forme $h\sigma$, avec $h \in P/(f'_x, f'_y, f'_z)$.

On commence par expliciter la différentielle $\delta^{can} : C_2^{can} \longrightarrow C_1^{can}$:

3.5. Affirmation: *Soit $\omega = udydz + vdzdx + wdxdy \in \Omega_P^2$. Dans $C_1^{can}(P,P) = \Omega_P^1$, on a $\delta^{can}\omega = (u'_x + v'_y + w'_z)df - d(uf'_x + vf'_y + wf'_z)$.*

Preuve: vérification directe. $\square$

Maintenant, on montre que la classe de $h\sigma \in C_2^{can}$ est un cocycle pour la différentielle $\delta^{can} : C_2^{can}/C_1^{can} \cdot df \longrightarrow C_1^{can}/C_0^{can} \cdot df$:

3.6. Affirmation: *Soit $h \in P$ homogène de poids n. Dans $C_1^{can} = S \otimes_P \Omega_P^1$, on a l'identité $\delta^{can}(h\sigma) \equiv (n + \alpha + \beta + \gamma - r)hdf$.*

Preuve: D'après le lemme précédent, on a

$$\delta^{can}(h\sigma) = (\alpha x h'_x + \beta y h'_y + \gamma z h'_z)df + (\alpha + \beta + \gamma)hdf - d(\alpha x h f'_x + \beta y h f'_y + \gamma z h f'_z)$$

En utilisant l'identité d'Euler pour h et pour f, on en déduit immédiatement:

$$\delta^{can}(h\sigma) = (n + \alpha + \beta + \gamma)hdf - d(rhf) \equiv (n + \alpha + \beta + \gamma - r)hdf \pmod f. \ \square$$

Les deux affirmations suivantes complètent la preuve du lemme 3.4:

3.7. Affirmation: *Soit $h \in P$. Il existe $\lambda \in \Omega_P^1$ tel que $h\sigma \equiv \lambda df \pmod f$ si et seulement si $h \in (f'_x, f'_y, f'_z)$.*

Preuve: Supposons que $h \in (f'_x, f'_y, f'_z)$. Soit $h = uf'_x + vf'_y + wf'_z$ où $u, v, w \in P$. On a alors $(\alpha xh - ruf)f'_x + (\beta yh - rvf)f'_y + (\gamma zh - rwf)f'_z = 0$. D'où il existe $a, b, c \in P$ tels que

$$\alpha xh = bf'_z - cf'_y + ruf,\ \beta yh = cf'_x - af'_z + rvf \text{ et } \gamma zh = af'_z - bf'_y + rwf.$$

On vérifie que $\lambda = adx + bdy + cdz$ est solution de l'équation $h\sigma = \lambda df$. L'assertion réciproque se montre en remontant les identités que nous avons utilisées. $\square$

3.8. Affirmation: *Soit* $\omega = udydz + vdzdx + wdxdy \in \Omega^2_P$. *Si* $\delta^{can}(\omega) \in C_0^{can} \cdot df$, *alors on a* $\omega \equiv h\sigma \pmod{C_1^{can} \cdot df}$ *pour un certain polynôme* $h \in P$.

Preuve: On peut supposer que ω est homogène de poids n. On a $\delta^{can}(\omega) \equiv d(uf'_x + vf'_y + wf'_z) \pmod{C_0^{can} \cdot df}$. Donc $\delta^{can}(\omega) \in C_0^{can} \cdot df$ entraine

$$d(uf'_x + vf'_y + wf'_z) \equiv h_0 df \equiv d(h_0 f) \pmod{f},$$

pour un polynôme $h_0 \in P$ homogène. Maintenant, si p est un polynôme homogène de poids $m > 0$, alors en utilisant l'identité d'Euler pour p, on montre que $dp \equiv 0 \pmod{f}$ entraine $p \equiv 0 \pmod{f}$. Par suite, on a $uf'_x + vf'_y + wf'_z = rhf$, pour un certain $h \in P$. Donc, en utilisant l'identité d'Euler pour f, on obtient:

$$(u - \alpha xh)f'_x + (v - \beta yh)f'_y + (w - \gamma zh)f'_z = 0.$$

D'où (exactitude du complexe de Koszul en degré 1):

$$u = bf'_z - cf'_y + \alpha xh,\ v = cf'_x - af'_z + \beta yh \text{ et } w = af'_z - bf'_y + \gamma zh,$$

pour quelques polynômes $a, b, c \in P$. On en déduit:

$$\omega = \lambda df + h\sigma$$

avec $\lambda = adx + bdy + cdz$. $\square$

Références

1. J. Alev, T. Lambre, *Comparaison de l'homologie de Hochschild et de l'homologie de Poisson pour une déformation des surfaces de Klein*, prépublication, Orsay (1997).
2. J.-L. Brylinski, *A differential complex for Poisson manifolds*, J. Differ. Geom. **28** (1988), 93-114.
3. D. Burghelea, M. Vigué-Poirrier, *Cyclic homology of commutative algebras*, Lect. Notes in Math. **1318**, Springer-Verlag (1988), 51-72.
4. B. Fresse, *Homologie de Quillen pour les algèbres de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), 1053-1058.
5. B. Fresse, *Homologie de Quillen pour les algèbres de Poisson*, prépublication (1998).

6. I.M. Gelfand, I.Y. Dorfman, *Hamiltonian operators and the classical Yang-Baxter equation*, Funkts. Anal. Prilozh. **16** (1982), 1-9 (in Russian). Funct. Anal. Appl. **16** (1983), 241-248 (English translation).
7. J. Huebschmann, *Poisson cohomology and quantization*, J. Reine Angew. Math. **408** (1990), 57-113.
8. J.-L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, in "Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui", Astérisque hors série (1985), 257-271.
9. M. Vigué-Poirrier, *Cyclic homology of algebraic hypersurfaces*, J. Pure Appl. Algebra **72** (1991), 95-108.

Adresse: Benoit Fresse, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 02 (France).

E-mail: fresse@math.unice.fr