Groupe de travail sur la chirurgie

Antoine Touzé

Programme détaillé, version du 14 octobre 2015

Durée des exposés : chaque orateur dispose en théorie de 1h, mais les débordements sont autorisés (1h15-1h30).

Lieu : salle habituelle du séminaire (sauf cas exceptionnel - voir l'exposé 3), Horaire : le vendredi après le séminaire.

Les 7 premiers exposés correspondent à la première partie du groupe de travail : comprendre l'opération de chirurgie sur les variétés et sa relation avec le cobordisme. Une deuxième partie du groupe de travail, au second semestre, étudiera l'application aux structures différentiables sur les variétés (suite exacte de chirurgie).

Exposé 1 : Chirurgie et cobordime

Date : 6 novembre 2015, Orateur : Jacques.

But de l'exposé : décrire la relation entre les opérations de chirurgie et les variétés cobordantes [4, thm 2.2].

Contenu :

1. Définition d'une chirurgie [4, def 2.5], d'un cobordime [4, def 1.1], de la trace d'un chirurgie [4, def 1.4].
2. Rappels sur la théorie de Morse [4, 2.3] et [6].
3. Enoncé et démonstration de [4, thm 2.2].

Exposé 2 : Rappels de topologie algébrique.

Date : 13 novembre 2015, Orateur : James.

But de l'exposé : Rappeler de manière concise les énoncés de base qui permettent de calculer l'homologie, la cohomologie et l'homotopie d'un espace, avec quelques exemples concrets.

Contenu :

1. Axiomes de l'homologie et de la cohomologie. Voir par exemple [1, Chap IV 6] pour les axiomes de l'homologie. Exemple : $H_*(S^n)$, $H^*(S^n)$.
2. Cup produit en cohomologie [2, Chap 3.2]. Exemple : sphères, espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$ à coefficients $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{C}P^n$ à coefficients quelconques, et $\mathbb{H}P^n$ à coefficients quelconques.

3. Définition et propriétés élémentaires des groupes d'homotopie π_n, $n \geq 1$ [1, Chap VI 4].
4. Fibration de Hurewicz, fibration de Serre [1, Def 6.2 p. 450]. Suite exacte longue d'une fibration de Serre [1, Thm 6.7 p. 453].

   Exemples de fibrations : revêtements, espaces fibrés [2, Prop. 4.48 p. 379]. Donner l'exemple des fibrés de Hopf [2, ex 4.45, 4.46, 4.47 p. 379]. Construction : toute application peut être convertie en une fibration, fibre homotopique, suite exacte longue d'une application [2, p. 407].
5. Enoncé du théorème de suspension de Freudenthal [1, p.126]. Définition des groupes d'homotopie stable d'un espace, exemple des groupes d'homotopie stable des sphères [2, p. 384], relation avec les fibrés de Hopf.
6. Relation Homotopie/Homologie : théorème de Hurewicz [1, Cor 10.8 p.479]
7. Notion de CW-complexe, théorème de Whitehead [2, p. 346, p. 367].
8. Si le temps le permet : parler de l'invariant de Hopf [4, Section 5.5]

Exposé 3 : Effets algébriques d'une chirurgie (1)

Date : 20 novembre 2015, Orateur : Najib. Lieu : salle de réunion du M2.

But de l'exposé : Expliquer la relation entre l'homologie et l'homotopie d'une variété M et de la variété obtenue par chirurgie sur M [4, Prop 4.19]. On commencera par faire des rappels sur les propriétés particulières de l'homologie des variétés.

Contenu :

1. Variétés R-orientables, orientables [4, def 4.1(i) et (ii)]. Rappeler pourquoi cette définition correspond aux changements de cartes à Jacobien positif pour les variétés différentiables.
2. Variétés compactes sans bord. Classe fondamentale, théorème de dualité de Poincaré [4, thm 4.4]. Applications : shriek maps (=Umkehr maps) [4, Def 4.14, Prop 4.15], produit d'intersection sur l'homologie [4, Def 4.11].
3. Variétés avec bord, classe fondamentale, Théorème de Poincaré Lefschetz [4, thm 4.8].
4. Enoncé et démonstration de [4, Prop 4.19].
5. Exemples : [4, Ex. 4.21, 4.22,4.23], si le temps le permet parler de [4, Sec 4.3].

Exposé 4 : Effets algébriques d'une chirurgie (2)

Date : 27 novembre 2015, Orateur : Julio

But de l'exposé : Expliquer l'effet d'une chirurgie sur M sur les revêtements de M à l'aide de l'homologie à coefficients locaux [4, Prop 4.68]. On commencera par revoir l'homologie à coefficients locaux, et le revêtement d'orientation d'une variété.

Note technique : Dans [4], le revêtement d'orientation est introduit à l'aide du premier carré de Steenrod. Le point 2 du plan ci-dessous est conçu pour parler des revêtements d'orientation sans parler des opérations de Steenrod.

Contenu :

1. Définition l'homologie et la cohomologie à coefficients locaux [2, 3.H Local coefficients via modules].
2. Définition du revêtement d'orientation comme dans [2, p. 234], propriété du revêtement d'orientation [2, Prop 3.25]. Classification homotopique des revêtements à deux feuillets [4, Paragraphe avant Def 4.44]. Définition du caractère d'orientation d'une variété comme l'élément de $H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1(M), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ déterminé par le revêtement d'orientation.
3. Dualité de Poincaré à coefficients locaux : [4, Prop 4.48, Def 4.50 et Thm 4.51]
4. Revêtement orientés [4, Def 4.56], définition du produit d'intersection [4, Prop 4.58], dualité de Poincaré pour les revêtements orientés [4, Thm 4.65].
5. Enoncé et démonstration de [4, Prop 4.68].

Exposé 5 : Fibrés vectoriels : théorie générale

Date : 4 décembre 2015, Orateur : Thibault

But de l'exposé : Rappeler la théorie basique des fibrés vectoriels.

Contenu :

1. Définitions (sections, trivialisations, fibrés euclidiens), exemples et opérations sur les fibrés vectoriels [5, Chap 2,3].
2. Le théorème du voisinage tubulaire [5, Chap 11] ou [1, Chap II, Thm 11.14]
3. Classification homotopique des fibrés vectoriels [4, Thm 5.23], voir aussi [5, Chap 5].
4. Espace de Thom d'un fibré vectoriel, isomorphisme de Thom. Application aux fibrés orientables et à la classe d'Euler [5, Chap 9,10]
5. Cohomologie des grassmaniennes (énoncé du résultat) et présentation rapide des classes de Stiefel-Whitney et des classes de Chern. [5, Chap 7,8,14].

Exposé 6 : Fibrés vectoriels et chirurgie

Date : 11 décembre 2015, Orateur : Matthieu

But de l'exposé : répondre à la question : étant donné $g : S^n \to M$, peut-on faire une chirurgie pour tuer $[g] \in \pi_n(M)$? Et donner des exemples concrets.

Contenu :

1. Enoncé et démonstration de [4, Thm 5.63, Cor 5.64].
2. Elements de classification des fibrés sur les sphères :
   (a) Prolongement de sections [3, Thm 7.1 (H1)], application aux fibrés vectoriels sur les sphères.
   (b) Description des fibrés vectoriels par des fonctions de transition [3, Chap 5], description des fibrés sur les sphères par une “clutching map’.
3. Traiter les exemples [4, Ex 5.65, 6.66]
4. Enoncé et pruve du théorème [4, Thm 5.67]

Exposé 7 : Cobordisme

Date : 18 décembre 2015, Orateur : Andrea

But de l'exposé : On a vu au premier exposé que les opérations chirurgicales (opération de géodiff) sont étroitement liées au cobordisme. Cet exposé est un exposé de survol (où l'on donnera tout de même un maximum de détails quand c'est possible), expliquant le traitement homotopique du cobordisme, et donnant la description de l'anneau de cobordisme.

Contenu :

1. Cobordisme et transversalité [4, Section 6.1]
2. Definition de l'anneau de cobordisme (non-orienté) [4, 6.22], Thm de Thom [4, 6.3], énoncé du calcul de l'anneau de cobordisme non orienté. La classe de cobordisme d'une variété est déterminée par ses nombres de Stiefel-Whitney [4, p. 133-134], voir aussi [5, p. 50-53]
3. Cobordisme orienté [4, p. 134-135], voir aussi [5, Chap 17]

Références

[1] Bredon, Topology and Geometry

[2] Hatcher, Algebraic topology

[3] Husemoller, Fibre bundles

[4] Ranicki, Algebraic and geometric surgery

[5] Milnor, Characteristic classes

[6] Milnor, Morse Theory