Topologie algébrique.
Notes de Cours

Antoine Touzé

25 janvier 2015

Ceci est un polycopié...

Ce document est le polycopié du cours de topologie algébrique de deuxième année de l'ENS (version 2014-2015). Il contient les énoncés principaux du cours (présentés grosso modo dans le même ordre que dans le cours, mais donnés sans les démonstrations) et un certain nombre d'exemples essentiels et d'exercices basiques, certains traités en cours, d'autres en travaux dirigés.

Contenu du cours

Le cours est une *introduction* à la topologie algébrique. Il ne prétend pas être exhaustif, mais il vise plutôt à présenter un ensemble de techniques basiques de la topologie algébrique (groupe fondamental, revêtements, homologie), applicables à des problèmes de topologie, d'algèbre, ou de géométrie. Dans cette optique, le cours donne un certain nombre d'applications de la topologie algébrique [1] parmi lesquelles on trouve (liste non exhaustive, de nombreuses autres applications sont données dans les exercices de TD) :

- le théorème de D'Alembert-Gauss (algèbre, section 4.4),
- une CNS d'existence du logarithme complexe sur un ouvert (analyse complexe, section 6.1),
- le théorème de Nielsen-Schreier (théorie des groupes, section 6.5),
- le théorème de Brouwer (topologie, sections 4.4 et 11.2A),
- les théorèmes d'invariance du bord, et d'invariance de la dimension (topologie, section 11.2B)
- le théorème de Jordan généralisé et le théorème d'invariance du domaine (topologie, section 11.3B),

1. Pour nous, une application de la topologie algébrique est un théorème dont l'énoncé n'emploie pas de terme de la topologie algébrique, mais dont la démonstration repose sur des techniques de topologie algébrique.

Le cours évoque aussi quelques problèmes historiques ou théorèmes récents en topologie algébrique tels que la conjecture de Poincaré (section 11.2A), la conjecture de triangulation (section 9.2B) ou le calcul de l'homotopie des sphères (section 7.3).

Le cours est principalement basé sur les trois livres de référence suivants (dont le plus accessible pour un débutant est le livre de Félix et Tanré).

- Bredon, Topology and geometry, GTM 139, Springer-Verlag, 1993.
- Félix, Tanré, topologie algébrique, dunod, 2010.
- Hatcher, Algebraic topology, Cambridge University Press, 2002.

Certaines parties (ou exercices de TD) ont également été inspirées par les sources secondaires suivantes.

- Godbillon, Éléments de topologie algébrique, Hermann, 1971.
- Milnor, Differential topology fourty-six years later, notices of the AMS, 2011.
- Moise, Geometric topology in dimension 2 and 3, GTM 47, Springer-Verlag, 1977.
- Munkres, Topology : a first course. Prentice-Hall, 1975.
- Prasolov, Elements of combinatorial and differential topology. Graduate Studies in Mathematics, 74, AMS, 2006.
- Spanier, Algebraic topology. Corrected reprint. Springer-Verlag, 1981.
- Tom Dieck, Algebraic topology. EMS Textbooks in Mathematics, 2008.

Table des matières

Première partie
Topologie et homotopie

1 Rappels/Compléments de topologie

Dans ce cours, un espace topologique sera souvent simplement appelé un *espace*. Dans tout le cours, on utilisera les notations classiques suivantes. On note $\{\mathrm{pt}\}$ l'espace topologique consitué d'un seul point. On note I l'intervalle $[0,1]$, et on appelle chemin d'un espace X une application continue $\gamma : I \to X$. Pour tout $n \geq 1$, on considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. On note :

1. $S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid ||u||_2 = 1\}$ la sphère unité (en particulier S^0 est la réunion disjointe de deux points),
2. $D^n = \{u \in \mathbb{R}^n \mid ||u||_2 \leq 1\}$ le disque unité,
3. $\overset{\circ}{D^n} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid ||u||_2 < 1\}$ l'intérieur du disque unité.

1.1 Espaces topologiques homéomorphes

Définition 1.1. Deux espaces X, Y sont *homéomorphes* s'il existe une bijection continue $f : X \to Y$ d'inverse continu. Une bijection continue d'inverse continu est appelé un *homéomorphisme*.

Deux espaces homéomorphes sont complètement indiscernables du point de vue topologique.

Exemple 1.2. On dispose des exemples classiques suivants (dont certains seront traités en exercice)

1. $\overset{\circ}{D^n}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $x \in S^{n-1}$. Alors $S^{n-1} \setminus \{x\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.
3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni de deux normes distinctes N et N'. Alors les boules ouvertes (resp. fermées) de rayon r pour la norme N sont homéomorphes aux boules ouvertes (resp. fermées) de rayon r pour la norme N'.
4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension n, et K un ensemble convexe, fermé, borné, d'intérieur non vide. Alors K est homéomorphe à D^n, la frontière ∂K est homéomorphe à S^{n-1} et l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ est homéomorphe à $\overset{\circ}{D^n}$.

Dans la définition d'homéomorphisme, il est important que l'inverse de la bijection soit continu. Il y a un critère pratique pour se dispenser de vérifier que l'inverse est continu. Pour cela, on rappelle deux définitions.

Définition 1.3. Un espace X est *compact*[2] si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un recouvrement fini. Un espace X est *séparé* (ou *Hausdorff*) si pour tout couple de points x, y on peut trouver des ouverts U_x et U_y disjoints tels que $x \in U_x$ et $y \in U_y$.

Proposition 1.4 (Critère d'homéomorphie)**.** *Si X est compact et Y est séparé, alors toute bijection continue $f : X \to Y$ est un homéomorphisme.*

Question 1.5. *Trouvez un contre-exemple à la proposition précédente si X n'est pas compact, ou si Y n'est pas séparé.*

La notion d'homéomorphisme permet de définir les variétés topologiques.

Définition 1.6. Une *variété topologique* est un espace séparé X, dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un espace euclidien. Une *variété topologique de dimension n* est un espace séparé X dont tout point possède un voisinage homéomorphe à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Par exemple, S^n, la frontière d'un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^{n+1}$, ou un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sont des variétés topologiques de dimension n. Une variété différentiable de dimension n (cf. le cours de géométrie différentielle) est une variété topologique de dimension n.

Remarque 1.7. La définition de variété topologique fait naturellement surgir les questions suivantes. La dimension d'une variété topologique (non vide) est elle unique ? Une variété topologique connexe (non vide) est-elle automatiquement une variété de dimension n, pour un certain n ? Nous répondrons à ces questions par l'affirmative dans la suite du cours.

1.2 Espaces topologiques quotients

Définition 1.8. Soit X un espace et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble X. On note $X/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence et $q : X \twoheadrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. La *topologie quotient* sur $X/\mathcal{R}$ est la topologie telle que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$ si et seulement si $q^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de X.

Le quotient d'un espace compact est compact. Par contre, le quotient d'un espace séparé peut ne pas être séparé (Exercice : donnez un exemple de ce phénomène).

Proposition 1.9 (Propriété universelle de la topologie quotient)**.** *Soit X un espace muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Pour toute $f : X \to Y$ continue et constante sur les classes d'équivalences, il existe une unique $\overline{f} : X/\mathcal{R} \to Y$*

2. Dans ce cours, nous ne supposons pas que les espaces compacts sont séparés.

continue telle que $f = \overline{f} \circ q$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/\mathcal{R} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Dans la pratique, on utilise souvent la topologie quotient pour construire de nouveaux espaces. Nous donnons ci-dessous trois situations typiques.

A. Écrasement d'un sous-espace

Soit X un espace et $A \subset X$. On note X/A l'espace quotient de X par la relation

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad x, y \in A^2 \text{ ou } x = y \ .$$

Dans l'espace X/A, les éléments de A sont identifiés à un point.

Exemple 1.10. Le quotient D^n/S^{n-1} est homéomorphe à S^n.

Exemple 1.11 (Bouquet d'espaces)**.** Soient $(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces pointés (c'est à dire qu'on distingue un point de chaque espace, $x_\alpha \in X_\alpha$). Le *bouquet* $\bigvee_{\alpha\in E} X_\alpha$ est l'espace obtenu comme quotient de la réunion disjointe [3] $\bigsqcup_{\alpha\in E} X_\alpha$ en écrasant le sous-ensemble $\{x_\alpha \,|\alpha \in E\}$.

Exemple 1.12 (Cone)**.** Le cone d'un espace X est l'espace $CX := X \times [0,1]/X \times \{0\}$. Le cone de S^{n-1} est homéomorphe à D^n.

B. Actions de groupes

Soit X un espace, et G un groupe agissant sur l'ensemble X. On note alors X/G l'espace quotient de X par la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\exists g \in G$, $gx = y$.

Exemple 1.13.

1. Le groupe discret $(\mathbb{Z}^n, +)$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par translations. Le quotient $T^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ s'appelle le tore de dimension n. L'espace T^n est homéomorphe à $(S^1)^{\times n}$.
2. Soit $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le groupe multiplicatif $\Bbbk\setminus\{0\}$ agit par multiplication sur $\Bbbk^{n+1} \setminus \{0\}$. L'espace quotient $\Bbbk^{n+1} \setminus \{0\}/\Bbbk \setminus \{0\}$ s'appelle l'espace projectif de dimension n sur $\Bbbk$, et se note $\Bbbk\mathrm{P}^n$, ou $\mathrm{P}^n(\Bbbk)$.

Exercice 1.14. *Montrez que* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ *est homéomorphe au quotient de* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *par l'action du groupe à deux éléments* $\{\pm 1\}$*, agissant sur* S^n *par multiplication. Montrez que* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ *est homéomorphe au quotient de* $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *par l'action du groupe* S^1 *des unités de* $\mathbb{C}$*, agissant par multiplication.*

3. La réunion disjointe des ensembles X_α est munie de la topologie dont les ouverts sont les réunions disjointes des ouverts des X_α.

Exercice 1.15. *Montrez que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, resp. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est une variété topologique compacte de dimension n, resp. $2n$.*

C. Recollement d'espaces

Soit $f_1 : A \to X_1$ et $f_2 : A \to X_2$ deux applications continues. On note $X_1 \cup_{f_1,f_2} X_2$, ou souvent plus simplement $X_1 \cup_A X_2$, l'espace quotient de la réunion disjointe $X_1 \sqcup X_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $f_1(a)\mathcal{R}f_2(a)$, $a \in A$.

De manière explicite, $x \in X_i$ et $y \in X_j$, $i, j \in \{0, 1\}$ sont équivalents si et seulement s''ils sont connectés par un zig-zag (avec $a_i \in A$ et $x_i \in X_1 \sqcup X_2$)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & a_1 \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_{1-i}"] & & a_2 \arrow[dl, "f_i"'] & \cdots & a_{k-1} \arrow[dr, "f_j"] & & a_k \arrow[dl, "f_{1-j}"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
x & & x_1 & & & & x_{k-1} & & y
\end{tikzcd}$$

Notons $j : X \to X \cup_A X'$ et $j' : X' \to X \cup_A X'$ les applications continues qui envoient un point x sur sa classe d'équivalence dans $X \cup_A X'$.

Proposition 1.16 (Propriété universelle du recollement)**.** *Soient $f : A \to X$ et $f' : A \to X'$ deux applications continues. Pour tout espace Z et toutes $\phi : X \to Z$ et $\phi' : X \to Z'$ continues telles que $\phi \circ f = \phi' \circ f'$, il existe une unique $\Phi : X \cup_A X' \to Z$ telle que $\Phi \circ j = \phi$ et $\Phi \circ j' = \phi'$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "j"] \arrow[ddr, "\phi"] & \\
X' \arrow[r, "j'"] \arrow[drr, "\phi'"'] & X \cup_A X' \arrow[dr, dashed, "\exists!\Phi"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Détaillons une situation importante de recollement, qui sert fréquemment en pratique pour fabriquer des espaces dont on contrôle bien la topologie.

Définition 1.17 (Recollement d'une cellule)**.** Soit X un espace et $f : S^{n-1} \to X$ une application continue. On note $\iota : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ l'inclusion canonique. L'espace quotient $X \cup_{f,\iota} D^n$ est souvent noté $X \cup_f D^n$. On dit que cet espace est obtenu à partir de X en recollant une cellule de dimension n. L'application f s'appelle l'application d'attachement de la cellule.

Exemple 1.18. On dispose des exemples élémentaires suivants (dont certains seront traités en exercice)

1. S^n est homéomorphe à $\{\mathrm{pt}\} \cup_f D^n$, où f est l'application constante
2. S^n est homéomorphe à $D^n \cup_f D^n$, où $f = \iota$ (l'inclusion canonique).

3. $\mathbb{RP}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{RP}^{n-1} \cup_f D^n$, où f est l'application quotient $S^{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$. De même, $\mathbb{CP}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{CP}^{n-1} \cup_f D^{2n}$.

L'exercice suivant fournit une description assez explicite de l'espace obtenu par recollement d'une cellule.

Exercice 1.19. *Soit X un espace et $f : S^{n-1} \to X$ une application continue. On note $j : X \to X \cup_f D^n$ et $j' : D^n \to X \cup_f D^n$ les deux applications canoniques. Vérifier les propriétés suivantes.*

1. *$X \cup_f D^n$ est la réunion des deux sous ensembles $j(X)$ et $j'(\mathring{D}^n)$, qui sont disjoints.*
2. *le sous-ensemble $j(X)$ est un fermé de X et j induit un homéomorphisme de X sur $j(X)$. (On peut donc identifier X à un sous-espace fermé de $X \cup_f D^n$).*
3. *$j' : D^n \to X \cup_f D^n$ induit un homéomorphisme de $\mathring{D}^n$ sur $j'(\mathring{D}^n)$.*
4. *L'espace X est compact (resp. séparé) si et seulement si $X \cup_f D^n$ est compact (resp. séparé).*

2 Quelques éléments de théorie de l'homotopie

2.1 Type d'homotopie

Définition 2.1. Soient $f, g : X \to Y$ des applications continues. On dit que *f est homotope à g* s'il existe une application $H : X \times I \to Y$ continue telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. Une telle application H s'appelle *une homotopie entre f et g*. On note $f \sim g$, ou $f \sim_H g$ lorsque l'on veut préciser l'homotopie.

On note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X vers Y.

Lemme 2.2. *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur $C(X, Y)$.*

Lemme 2.3. *La relation d'homotopie est compatible avec la composition des applications continues (i.e. si $f \sim g$ et $f' \sim g'$ alors $f \circ f' \sim g \circ g'$).*

La notion suivante est plus grossière que la notion d'homéomorphisme, et permet beaucoup plus de souplesse dans la manipulation des espaces topologiques. C'est une notion fondamentale en topologie algébrique.

Définition 2.4. Deux espaces X, Y ont *même type d'homotopie* (on dit aussi que X et Y sont *homotopiquement équivalents*) s'il existe une application $f : X \to Y$ et une application $g : X \to Y$ telles que $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ et $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$. Les applications f et g s'appellent des *équivalences d'homotopies*.

Exercice 2.5. *Soit $f : X \to Y$ continue. On suppose qu'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ et $h : Y \to X$ telle que $f \circ h \sim \mathrm{Id}_Y$. Montrez que f est une équivalence d'homotopie.*

Par exemple, deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie. Mais, comme nous le verrons dans la suite, des espaces relativement différents peuvent avoir le même type d'homotopie.

Définition 2.6. Un espace X est *contractile* s'il a le type d'homotopie de l'espace $\{\mathrm{pt}\}$. De manière équivalente, X est contractile si l'application $\mathrm{Id}_X : X \to X$ est homotope à une application constante.

Exemple 2.7. Si C est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, C est contractile.

Le concept de rétraction par déformation apparaît souvent en pratique pour déterminer le type d'homotopie des espaces.

Définition 2.8. Soit X un espace et $A \subset X$. Une *rétraction par déformation de X sur A* est une application $r : X \times I \to X$, telle que (i) $r(x, 0) = x$ pour tout $x \in X$, (ii) $r(x, 1) \in A$ pour tout $x \in X$, et (iii) $r(a, t) = a$ pout tout $t \in I$.

Lemme 2.9. *S'il existe une rétraction par déformation de X sur A alors l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie.*

Exemple 2.10. Il existe une rétraction par déformation de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur S^{n-1}, donnée par $r(x,t) = (1-t)x + tx/||x||_2$.

2.2 Cofibrations

Définition 2.11. Soit X un espace et $A \subset X$. L'inclusion $\iota : A \hookrightarrow X$ est une *cofibration* si pour tout espace Z et toute application $f : A \times I \cup X \times \{0\} \to Z$ continue, il existe une application $\overline{f} : X \times I \to Z$ qui étend f.

$$\begin{tikzcd} A \times I \cup X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Z \\ X \times I \arrow[ur, dashed, "\exists \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Dans la définition ci-dessus, on ne suppose pas que l'extension $\overline{f}$ est unique. En général, s'il en existe une extension, alors il existe beaucoup d'extensions différentes possibles. Une application utile des cofibrations est l'énoncé suivant.

Theorème 2.12. *Si l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une cofibration et si A est contractile, alors l'application quotient $X \twoheadrightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie.*

L'exercice suivant donne une application de la notion de cofibration au problème d'extension des applications.

Exercice 2.13. *Soit $A \hookrightarrow X$ une cofibration, et $f, g : A \to Y$ deux applications continues homotopes. Montrez que f admet un prolongement par continuité à X tout entier si et seulement si g admet un prolongement par continuité à X tout entier. Trouvez un contre-exemple à cette équivalence si $A \hookrightarrow X$ n'est pas une cofibration.*

Décrivons maintenant plus concrètement les paires (X, A) telles que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une cofibration.

Lemme 2.14. *Soit X un espace séparé et $A \subset X$. Si $A \hookrightarrow X$ est une cofibration, alors A est fermé dans X.*

La condition A fermé dans X n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple $X = I$, $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\ , n \in \mathbb{N}^*\}$, et $f = \mathrm{Id}$. En pratique, on utilise souvent l'énoncé suivant pour produire des cofibrations.

Proposition 2.15. *Soit X un espace métrique et A un fermé de X. On suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de A dans X, et une rétraction par déformation de $\mathcal{U}$ sur A. Alors l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une cofibration.*

Deuxième partie

Les groupes d'homotopie

3 Introduction : le π_0 d'un espace

La topologie algébrique décrit la forme des espaces en associant à chaque espace des objets de nature algébrique (des 'invariants algébriques'), de telle manière que deux espaces ayant le même type d'homotopie aient des invariants isomorphes. L'exemple le plus simple est celui du π_0.

Définition 3.1. Soit X un espace. On note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X, c'est à dire $\pi_0(X) = X/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur X définie par $x\mathcal{R}y$ s'il existe un chemin $\gamma : I \to X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Question 3.2. *Identifiez la topologie sur $\pi_0(X)$ si on munit cet ensemble de la topologie quotient.*

La notion de composante connexe par arcs est plus fine que la notion de composante connexe. Par exemple, l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $\mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est connexe, mais possède deux composantes connexes par arcs. L'exercice suivant fournit une classe d'espaces pour lesquels les deux notions sont équivalentes.

Exercice 3.3. *Soit X un espace* localement connexe par arcs*, c'est à dire que tout point $x \in X$ admet une base de voisinages*[4] *connexes par arcs. Montrez que X est connexe si et seulement si X est connexe par arcs.*

Proposition 3.4. *L'ensemble des composantes connexes par arcs d'un espace topologique vérifie les propriétés suivantes.*

1. *On a une bijection $\pi_0(X \times Y) \simeq \pi_0(X) \times \pi_0(Y)$.*
2. *Une application continue $f : X \to Y$ détermine une application*
$$\begin{array}{rccc} \pi_0(f) : & \pi_0(X) & \to & \pi_0(Y) \\ & [x] & \mapsto & [f(x)] \end{array}$$
et on a $\pi_0(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, et $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$.
3. *Si $f, g : X \to Y$ sont homotopes alors $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.*
4. *Si X et Y ont même type d'homotopie, on a une bijection $\pi_0(X) \simeq \pi_0(Y)$.*

Le but de cette partie du cours est d'introduire le groupe fondamental π_1, puis les groupes d'homotopie supérieurs π_i, $i \geq 2$. Ce sont des invariants plus sophistiqués que le π_0, mais qui sont définis de manière analogue, et qui possèdent des propriétés similaires.

4. Rappelons qu'une base de voisinages d'un point $x \in X$ est un ensemble $\mathcal{B}$ de voisinages de x, tel que tout voisinage de x contient un élément de $\mathcal{B}$.

4 Le groupe fondamental d'un espace

4.1 Opérations sur les chemins

Si X est un espace, on note $C_{a,b}(X)$ l'ensemble des chemins $\gamma : I \to X$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. On introduit d'abord la notion d'homotopie à extrémités fixées entre chemins.

Définition 4.1. Deux chemins $\gamma, \mu \in C_{a,b}(X)$ sont *homotopes à extrémités fixées* s'il existe une application continue $H : I \times I \to X$ telle que

1. $H(0,t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in I$,
2. $H(1,t) = \mu(t)$ pour tout $t \in I$,
3. $H(s,0) = a$ et $H(s,1) = b$ pour tout $s \in I$.

L'application H est une *homotopie à extrémités fixées* entre γ et μ.

Lemme 4.2. *La relation 'être homotope à extrémités fixées' est une relation d'équivalence sur $C_{a,b}(X)$.*

Définition 4.3 (Opérations sur les chemins)**.**

1. Si $\gamma \in C_{a,b}(X)$ et $\mu \in C_{b,c}(X)$, le *chemin composé* $\gamma\mu \in C_{a,c}(X)$ est défini par :
$$(\gamma\mu)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \mu(2t-1) & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases}$$
2. Le *chemin constant* en $a \in X$ est le chemin ϵ_a défini par $\epsilon_a(t) = a$ pout tout $t \in I$.
3. Si $\gamma \in C_{a,b}(X)$, son *inverse* $\gamma^{-1} \in C_{b,a}(X)$ est défini par $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ pour tout $t \in I$.

Lemme 4.4. *La relation d'homotopie à extrémités fixées est compatible avec la composition des chemins.*

Lemme 4.5. *La composition des chemins est*

1. *associative à homotopie près : $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 \sim \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$,*
2. *possède des éléments neutres à homotopie près $\epsilon_a\gamma \sim \gamma$ et $\gamma\epsilon_b \sim \gamma$,*
3. *possède des inverses à homotopie près $\gamma(\gamma^{-1}) \sim \epsilon_a$ et $(\gamma^{-1})\gamma \sim \epsilon_b$.*

4.2 Groupe fondamental

Si $\gamma \in C_{a,b}(X)$, on note $[\gamma]$ sa classe d'équivalence pour la relation d'homotopie à extrémités fixées. Un chemin dont les deux extrémités sont égales au même point a s'appelle un *lacet de X basé en a*.

Définition 4.6. Soit X un espace. Le groupe fondamental en $x \in X$ est l'ensemble des lacets basés en x à homotopie près :

$$\pi_1(X,x) = C_{x,x}(X)/\text{relation d'homotopie à extrémités fixées}\,,$$

muni de la structure de groupe définie par la composition des lacets

$$[\gamma]\cdot[\mu] := [\gamma\mu]\ .$$

Les résultats de compatibilité entre opérations sur les chemins et homotopies énoncés à la section précédente assurent que la définition est bien posée, et que $\pi_1(X,x)$ est bien un groupe. L'inverse est donné par $[\gamma]^{-1} := [\gamma^{-1}]$, et l'élément neutre est $[\epsilon_x]$. On vérifie sans peine la propriété suivante.

Proposition 4.7. *Soient (X,x) et (Y,y) des espaces pointés. On a un isomorphisme de groupes :*

$$\pi_1(X,x)\times\pi_1(Y,y)\simeq\pi_1(X\times Y,(x,y))\ .$$

On étudie maintenant l'effet des applications continues entre espaces sur le groupe fondamental. Nous allons établir les propriétés similaires aux propriétés du π_0 énumérées à la proposition 3.4. La différence technique essentielle est que le groupe fondamental d'un espace X dépend d'un point de base $x \in X$

Proposition 4.8 (Changement de point base)**.** *Soit X un espace, $\gamma \in C_{x,y}(X)$. Alors γ induit un isomorphisme de groupes*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\gamma : & \pi_1(X,x) & \to & \pi_1(X,y)\ . \\ & [\mu] & \mapsto & [(\gamma^{-1})\mu\gamma] \end{array}$$

Définition 4.9. Soit $x \in X$, et $f : X \to Y$ une application continue. Alors f induit un morphisme de groupes $\pi_1(f) : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X, f(x))$, également noté $f_\sharp$, et défini par $f_\sharp([\gamma]) := [f\circ\gamma]$.

Il découle directement de la définition que $\pi_1(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x)}$, et si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont continues, alors $\pi_1(g\circ f) = \pi_1(g)\circ\pi_1(f)$.

Proposition 4.10. *Soient $f, g : X \to Y$ deux applications homotopes via une homotopie $H : X\times I \to Y$. Notons $\gamma \in C_{f(x),g(x)}(Y)$ le chemin défini par $\gamma(t) = H(x,t)$ pour tout $t \in I$. Alors on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x) \arrow[r, "\pi_1(f)"] \arrow[dr, "\pi_1(g)"'] & \pi_1(Y,f(x)) \arrow[d, "\Phi_\gamma"] \\ & \pi_1(Y,g(x)) \end{tikzcd}\ .$$

Comme conséquence de cette proposition, on peut prouver que le groupe fondamental est un invariant du type d'homotopie.

Theorème 4.11. *Soit $f : X \to Y$ une équivalence d'homotopie. Alors pour tout $x \in X$, $\pi_1(f) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ est un isomorphisme de groupes.*

Nous pouvons donc effectuer nos premiers calculs de groupe fondamental.

Définition 4.12. Un espace X est *simplement connexe* si $\pi_0(X) = \{*\}$ et $\pi_1(X, x) = \{*\}$ pour tout $x \in X$.

Exemple 4.13. Un espace contractile est simplement connexe.

Remarque 4.14. Nous verrons plus tard qu'il existe beaucoup d'espaces simplement connexes qui ne sont pas contractiles.

4.3 Revêtements

On commence par introduire la notion de revêtement, qui axiomatise les propriétés topologiques essentielles de la fonction exponentielle :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Exp} : & \mathbb{R} & \to & S^1 \\ & t & \mapsto & e^{2i\pi t} \end{array}.$$

La notion de revêtement (et les théorèmes de relèvement associés) est un outil essentiel pour calculer le groupe fondamental du cercle.

Définition 4.15. Une application continue $p : E \to B$, avec $E \neq \emptyset$, est un *revêtement* si pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de B, un espace discret F_b et un homéomorphisme $\Phi : \mathcal{U} \times F_b \xrightarrow{\simeq} p^{-1}(\mathcal{U})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \times F_b \arrow[rr, "\Phi", "\simeq"'] \arrow[dr, "\mathrm{proj}"'] & & p^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[dl, "p"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}.$$

l'espace E est appelé *espace total* du revêtement, B la *base* du revêtement, $F_b \simeq p^{-1}(b)$ la *fibre au dessus de b*. Les ouverts $\mathcal{U}$ ci-dessus s'appellent des *ouverts trivialisants*. Les ouverts de la forme $\Phi(\mathcal{U} \times \{x\})$ s'appellent les *feuillets* au dessus de $\mathcal{U}$.

Exemple 4.16.

1. Si F est un espace discret et B un espace, la projection $F \times B \to B$ est un revêtement. Les revêtements de ce type sont appelés *revêtements triviaux*.
2. Si $p : E \to B$ est un revêtement, et si $B' \subset B$, alors la restriction : $p : p^{-1}(B') \to B'$ est un revêtement.

3. $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto e^{2i\pi z}$, est un revêtement (donc sa restriction $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ également).
4. Pour $n \geq 1$, l'application $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z \mapsto z^n$, est un revêtement.

Exercice 4.17. *Soit $p : E \to B$ un revêtement de base connexe. Montrez que toutes les fibres ont même cardinal. (un revêtement dont toutes les fibres ont cardinal fini k est appelé revêtement à k feuillets)*

On se fixe un revêtement $p : E \to B$. Si $f : X \to B$ est une application continue, un *relèvement* de f est une application continue $\overline{f} : X \to E$ telle que $p \circ \overline{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Proposition 4.18 (Unicité des relèvements)**.** *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Soit X un espace connexe, et $\overline{f}_0, \overline{f_1} : X \to E$ deux relèvements de $f : X \to B$. Si $\overline{f}_0$ et $\overline{f_1}$ coincident en un point, alors $\overline{f}_0 = \overline{f_1}$.*

Theorème 4.19 (Relèvement des chemins)**.** *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Soit $\gamma : [a, b] \to B$ une application continue. Pour tout $e \in p^{-1}(\gamma(a))$, il existe un (unique) relèvement $\overline{\gamma}$ tel que $\overline{\gamma}(a) = e$.*

Theorème 4.20 (Relèvement des homotopies)**.** *Soit $p : E \to B$ un revêtement, soit $H : X \times I \to B$ une application continue, et soit $\overline{f} : X \times \{0\} \to E$ un relèvement de l'application $f := H_{|X\times\{0\}}$. Alors il existe un (unique) relèvement $\overline{H} : X \times I \to E$ de H tel que $\overline{H}_{|X\times\{0\}} = \overline{f}$.*

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \overline{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Corollaire 4.21. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Pour tout $x \in E$ p induit une injection $\pi_1(p) : \pi_1(E, x) \hookrightarrow \pi_1(B, p(x))$.*

4.4 Le groupe fondamental du cercle

Définition 4.22. Soit $\gamma : I \to S^1$ un lacet de S^1, et soit $\overline{\gamma} : I \to S^1$ un relèvement de γ à travers le revêtement $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$. Alors le nombre $\overline{\gamma}(1) - \overline{\gamma}(0)$ est un nombre entier, qui ne dépend pas du relèvement $\overline{\gamma}$ choisi. On l'appelle le *degré* du lacet γ et on le note $\deg(\gamma)$.

Theorème 4.23. *Le degré induit un isomorphisme de groupes :*

$$\deg : \begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, x) & \to & \mathbb{Z} \\ [\gamma] & \mapsto & \deg(\gamma) \end{array} .$$

Le calcul du groupe fondamental du cercle peut être utilisé pour démontrer les résultats suivants (d'autres applications seront données en TD).

— **Théorème de D'Alembert-Gauss :** tout polynôme complexe admet une racine.

— **Théorème de Brouwer en dimension 2 :** toute application continue $f : D^2 \to D^2$ admet un point fixe.

— **Théorème d'intersection des chemins :** Soient γ et μ deux chemins de I^2. Si γ relie deux cotés opposés du bord de I^2 et μ relie les deux autres cotés, alors $\mathrm{Im}(\gamma) \cap \mathrm{Im}(\mu) \neq \emptyset$.

5 Autour du théorème de van Kampen

5.1 Un peu de théorie des groupes

On rappelle les notions suivantes pour les groupes abéliens. Soit $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$ une famille de groupes abéliens. On note $\bigoplus_{\alpha\in J} A_\alpha$ le sous-groupe de $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ formé des familles d'éléments à support fini. Ce groupe s'appelle la *somme directe des* A_α.Notons $\iota_\alpha : A_\alpha \to \bigoplus_{\alpha\in J} A_\alpha$ le morphisme de groupes défini par $\iota_\alpha(a) = (\dots, 0, a, 0, \dots)$. La somme directe vérifie la propriété universelle suivante. Pour tout groupe abélien B et toute famille de morphismes de groupes $f_\alpha : A_\alpha \to B$ il existe un unique $f : \bigoplus_{\alpha\in J} A_\alpha \to B$ tel que $f \circ \iota_\alpha = f_\alpha$.

Un groupe abélien A est un *groupe abélien libre* de base $(a_\alpha)_{\alpha\in J}$ si tout élément de A s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire (à support fini) d'éléments a_α. La base d'un groupe abélien libre induit un isomorphisme de groupes $\bigoplus_{\alpha\in J} \mathbb{Z}_\alpha \simeq A$. Toutes les bases d'un groupe abélien libre ont même cardinal. En particulier, deux groupes abéliens libres sont isomorphes si et seulement s'ils admettent des bases de même cardinal.

Le but du paragraphe A suivant est de développer des notions similaires pour les groupes généraux. Le paragraphe B présente la notion d'abélianisé d'un groupe, qui permet de comparer les groupes libres et les groupes abéliens libres. Enfin le paragraphe C présente une variation du produit libre, qui nous sera utile pour énoncer le théorème de van Kampen.

A. Produits libres et groupes libres

Définition 5.1. Soit $(G_\alpha)_{\alpha\in J}$ une famille de groupes. On appelle *produit libre* des groupes G_α un groupe G, muni de morphismes de groupes $\iota_\alpha : G_\alpha \to G$, satisfaisant la propriété universelle suivante. Pour tout groupe H et toute famille de morphismes de groupes $f_\alpha : G_\alpha \to H$ il existe un unique morphisme de groupes $f : G \to H$ tel que $f \circ \iota_\alpha = f_\alpha$.

$$
\begin{tikzcd}
G_\alpha \arrow[dr, "\iota_\alpha"'] \arrow[drr, "f_\alpha"] & & \\
& G \arrow[r, dashed, "\exists! f"] & H \\
G_\beta \arrow[ur, "\iota_\beta"] \arrow[urr, "f_\beta"'] & &
\end{tikzcd}
.
$$

On vérifie facilement que les morphismes ι_α sont nécessairement injectifs, et que si le produit libre des groupes G_α existe, il est unique à isomorphisme près. La partie plus difficile est de montrer l'existence de ce produit libre. Nous en esquissons une construction. Soit $(G_\alpha)_{\alpha\in J}$ une famille de groupes.

- On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des mots de longueur finie formés de lettres de l'ensemble $\bigsqcup_{\alpha\in J} G_\alpha$. Le mot vide, de longueur nulle, est noté 1. Parmi ces mots de longueur finie, on considère les *mots réduits*. Ce sont les mots qui ne contiennent pas les lettres 1_{G_α} et dont deux lettres consécutives ne sont pas dans le même ensemble $G_\alpha \setminus \{1_{G_\alpha}\}$ (le mot vide est réduit). Le sous-ensemble des mots réduits est noté

$$*_{\alpha\in J} G_\alpha .$$

- Si $m \in \mathcal{M}$, on peut le réduire de la manière suivante.
  1. On retire tous les lettres 1_{G_α}.
  2. Si n lettres consecutives dans le mot obtenu sont dans le même G_α, alors on les remplace par leur produit.

  On itère les opérations 1 et 2 jusqu'à ce que le mot soit réduit (le processus doit finir car il fait diminuer strictement la longueur du mot si le mot de départ n'est pas réduit). Ce procédé définit une application
  $$\rho : \mathcal{M} \to *_{\alpha\in J} G_\alpha \ .$$
- L'ensemble $*_{\alpha\in J} G_\alpha$ est muni de l'opération produit $m_1 \cdot m_2 = \rho(m_1|m_2)$, où $m_1|m_2$ désigne la concaténation des mots m_1 et m_2.
- l'application $\iota_\alpha : G_\alpha \to *_{\alpha\in J} G_\alpha$ envoie $g \in G_\alpha \setminus \{1_{G_\alpha}\}$ sur le mot composé d'une lettre égale à g, et 1_{G_α} sur le mot vide 1.

Theorème 5.2. *L'ensemble $*_{\alpha\in J} G_\alpha$ est un groupe, les applications ι_α sont des morphismes de groupes, et $(*G_\alpha, \iota_\alpha)$ est un produit libre des groupes G_α.*

Définition 5.3. Un groupe G est dit *libre* s'il existe une famille $(\mathbb{Z}_\alpha)_{\alpha\in J}$ de groupes cycliques infinis et un isomorphisme de groupes $\phi : *_{\alpha\in J}\mathbb{Z}_\alpha \xrightarrow{\simeq} G$. L'ensemble $\{g_\alpha\}_{\alpha\in J}$ d'éléments $g_\alpha = \phi(1_\alpha)$ (où $1_\alpha \in \mathbb{Z}_\alpha$) est appelé une *base de* G. On note $< g_\alpha, \alpha \in J >$ un groupe libre de base $\{g_\alpha\}_{\alpha\in J}$.

Proposition 5.4. *Soit G un groupe libre, et $(g_\alpha)_{\alpha\in J}$ une base de G. Alors pour tout groupe H et toute famille (h_α) d'éléments de H, il existe un unique morphisme de groupes $f : G \to H$ tel que $f(g_\alpha) = h_\alpha$ pour tout $\alpha \in J$.*

On rappelle que si X est une partie d'un groupe G, le *sous-groupe engendré par X* est le plus petit sous-groupe de G contenant X. Concrètement, le sous-groupe engendré par X est composé des produits d'éléments de X et de leurs inverses. De même, le *sous-groupe normal engendré par X* est le plus petit sous-groupe normal de G contenant X. Concrètement, le sous-groupe normal engendré par X est composé des produits de conjugués d'éléments de X et de leurs inverses.

Une présentation d'un groupe G par générateurs et relations est la donnée d'une famille de générateurs $\{g_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de G et d'une famille $\{r_\beta\}_{\beta\in K}$ d'éléments du groupe libre $< g_\alpha, \alpha \in J >$ tel que le sous-groupe *normal* engendré par les r_α est égal au noyau du morphisme canonique $< g_\alpha, \alpha \in J > \twoheadrightarrow G$.

B. Abélianisation

Soit G un groupe. Le groupe des commutateurs $[G,G]$ est le sous-groupe de G engendré par les éléments du type $ghg^{-1}h^{-1}$.

Lemme 5.5. $[G,G]$ *est le plus petit sous-groupe normal* N *de* G *tel que* G/N *est abélien.*

Définition 5.6. Le quotient $G/[G,G]$ est noté G_{ab} et s'appelle l'*abélianisé* de G.

Proposition 5.7. *Si* $f : G \to A$ *est un morphisme de groupe et* A *est abélien, il existe un unique morphisme de groupes* $\overline{f} : G_{\mathrm{ab}} \to A$ *tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"] & A \\ G_{\mathrm{ab}} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Proposition 5.8. *Pour tout ensemble* J *on a un isomorphisme de groupes :*

$$< t_\alpha, \alpha \in J >_{\mathrm{ab}} \simeq \bigoplus_{\alpha \in J} \mathbb{Z}\ .$$

Corollaire 5.9. *Toutes les bases d'un groupe libre ont même cardinal. En particulier, deux groupes libres sont isomorphes si et seulement s'ils admettent des systèmes libres de générateurs de même cardinal.*

C. Somme amalgammée

Définition 5.10. Soient $\phi_1 : K \to G_1$ et $\phi_2 : K \to G_2$ deux morphismes de groupes. La somme amalgammée $G_1 *_K G_2$ est le quotient de $G_1 * G_2$ par le sous-groupe normal engendré par les éléments $\phi_1(k)\phi_2(k)^{-1}$, $k \in K$.

Pour $\ell = 1,2$ on note ι_ℓ la composée $G_\ell \hookrightarrow G_1 * G_2 \twoheadrightarrow G_1 *_K G_2$. La la propriété universelle de la somme amalgammée est une conséquence directe de la propriété universelle des produits libres et de celle des groupes quotients.

Proposition 5.11. *Soient* $\phi_\ell : K \to G_\ell$, $\ell = 1,2$ *deux morphismes de groupes. Pour tout groupe* L *et tous morphismes* $f_\ell : G_\ell \to L$ *tels que* $f_1 \circ \phi_1 = f_2 \circ \phi_2$*, il existe une unique* $f : G_1 *_K G_2 \to L$ *telle que* $f_\ell = f \circ \iota_\ell$ *pour* $\ell = 1,2$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\phi_2"'] & G_1 \arrow[d, "\iota_1"'] \arrow[ddr, "f_1"] & \\ G_2 \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[drr, "f_2"'] & G_1 *_K G_2 \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] & \\ & & L \end{tikzcd}$$

5.2 Théorème de van Kampen

Soit X un espace, et $\mathcal{U},\mathcal{V}$ deux ouverts de X. Soit $x_0 \in \mathcal{U}\cap\mathcal{V}$. On a un carré commutatif de groupes où les différents morphismes sont induits par les inclusions d'espaces :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V},x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\mathcal{U},x_0) \arrow[d] \\
\pi_1(\mathcal{V},x_0) \arrow[r] & \pi_1(X,x_0)
\end{tikzcd}\ .$$

donc, d'après la propriété universelle de la somme amalgammée, un morphisme de groupes

$$\phi : \pi_1(\mathcal{U},x_0) *_{\pi_1(\mathcal{U}\cap\mathcal{V},x_0)} \pi_1(\mathcal{V},x_0) \longrightarrow \pi_1(X,x_0)\ .$$

Theorème 5.12 (Van Kampen)**.** *Si $X = \mathcal{U}\cup\mathcal{V}$, et si $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ sont connexes par arcs, alors ϕ est un isomorphisme de groupes.*

5.3 Applications

Le théorème de van Kampen permet de calculer les groupes fondamentaux dans une grande variété de situations. Nous en donnons quelques unes.

A. Sphères

Proposition 5.13. *Pour $n \geq 2$, la sphère S^n est simplement connexe.*

B. Bouquets d'espaces

Proposition 5.14. *Soient (X,x), (Y,y) deux espaces pointés. On suppose que x (resp. y) admet un voisinage ouvert $\mathcal{U}_x$ (resp. $\mathcal{U}_y$) qui se rétracte par déformation sur x (resp. y). Alors les inclusions $X \hookrightarrow X\vee Y$ et $Y \hookrightarrow X\vee Y$ induisent un isomorphisme :*

$$\pi_1(X) * \pi_1(Y) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X\vee Y)\ .$$

Exemple 5.15. Le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles est un groupe libre à n générateurs. Une base est fournie par les classes des lacets γ_i, $i = 1\dots n$, dès lors que pour tout i, γ_i est un lacet du i-ème facteur du bouquet qui engendre le groupe fondamental de ce facteur.

Remarque 5.16. A partir de l'exemple précédent, on peut obtenir le groupe fondamental d'un bouquet d'un ensemble quelconque de cercles. Le groupe fondamental d'un bouquet d'un ensemble A de cercles est un groupe libre de base A.

C. Recollement d'une cellule

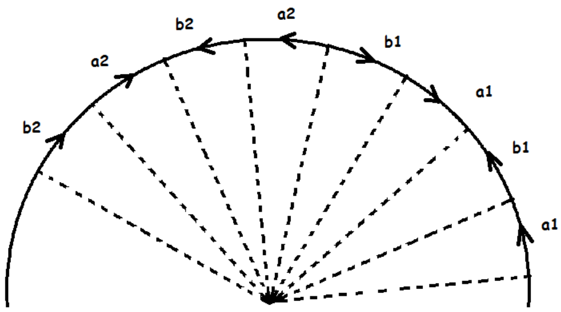
Proposition 5.17. *Soit X un espace connexe par arcs, $f : S^{n-1} \to X$ continue, et $Y = X \cup_f D^n$.*

1. *Si $n \geq 3$, l'injection $X \hookrightarrow Y$ induit un isomorphisme des groupes fondamentaux.*
2. *Si $n = 2$, notons $x_0 \in Y$ l'image du point base de $a_0 \in S_1$ par f. L'injection $X \hookrightarrow Y$ induit une surjection $\pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(Y, x_0)$, dont le noyau est le sous-groupe normal engendré par $f_\sharp \pi_1(S^1, a_0)$.*

Ainsi, on peut calculer que $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n \geq 2$, et que $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est un espace simplement connexe.

D. Groupe fondamental des surfaces

Définition 5.18. Soit $g \in \mathbb{N}^*$. On note S_g le quotient du disque D^2 (le disque unité de $\mathbb{C}$) obtenu en identifiant les points du bord comme indiqué sur le dessin.



De manière formelle, pour tout entier k compris entre 0 et $g-1$, pour tout $\ell \in \{0,1\}$ et pour tout $t \in [0,1]$, on identifie les nombres

$$\exp([4k+\ell+t]i2\pi/4g) \quad \text{et} \quad \exp([4k+\ell+3-t]i2\pi/4g)\ .$$

Exercice 5.19. *Vérifier que l'espace topologique S_g n'est autre que le* tore à g trous. *C'est à dire la surface topologique compacte qu'on peut représenter de la manière suivante :*

Proposition 5.20. *Soit $q : D^2 \twoheadrightarrow S_g$ l'application quotient, et notons C_g le sous-espace de S_g obtenu comme image du bord du disque par q.*

- *Il existe un homéomorphisme $\phi : C_g \to (S^1)^{\vee 2g}$.*
- *L'espace topologique S_g est homéomorphe à l'espace topologique $(S^1)^{\vee 2g} \cup_f D^2$, où f est la composée*

$$S^1 \xrightarrow{q} C_g \xrightarrow{\phi} (S^1)^{\vee 2g} .$$

Corollaire 5.21. *Le groupe fondamental de S_g est un groupe à $2g$ générateurs $\{a_1, \dots, a_g, b_1 \dots, b_g\}$ quotienté par la relation :*

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$$

6 Théorie des revêtements

Dans cette section, nous étudions les propriétés des revêtements, qui ont été introduits à la section 4.3.

6.1 Le théorème de relèvement des applications

Theorème 6.1 (Relèvement des applications). *Soit $p : E \to B$ un revêtement, soit X un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $x_0 \in X$, $e_0 \in E$ et $f : X \to Y$ tel que $f(x_0) = p(e_0) = b_0$.*

Il existe un relèvement $\widetilde{f} : X \to E$ de f tel que $\widetilde{f}(x_0) = e_0$ si et seulement si on a l'inclusion suivante de sous-groupes de $\pi_1(B, b_0)$

$$f_\sharp \pi_1(X, x_0) \subset p_\sharp \pi_1(E, e_0)\ .$$

Remarque 6.2. Si le relèvement existe, il est unique en vertu de la proposition 4.18.

Donnons une application du théorème 6.1. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Une *détermination du logarithme sur $\mathcal{U}$* est une application continue log : $\mathcal{U} \to \mathbb{C}$ telle que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathcal{U} \arrow[ur, "\log"] \arrow[r, hook, "\iota"'] & \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{tikzcd} .$$

Comme la fonction exponentielle est localement développable en série entière, une détermination du logarithme est automatiquement localement développable en série entière (holomorphe). On a :

Proposition 6.3. *Il existe une détermination du logarithme sur $\mathcal{U}$ si et seulement s'il existe $x \in \mathcal{U}$ tel que $\pi_1(\iota) : \pi_1(\mathcal{U}, x) \to \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, x)$ est constante. Deux déterminations du logarithme sont égales à une constante additive $2ki\pi$ près.*

Question 6.4. *Donnez un ouvert non simplement connexe de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur lequel il existe une détermination continue du logarithme.*

6.2 Monodromie d'un revêtement

Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $b \in B$. Si $\gamma \in C_{b,b}(X)$ est un lacet basé en b et $x \in F_b = p^{-1}(b)$, on note $\widetilde{\gamma}_x$ l'unique relèvement de γ tel que $\widetilde{\gamma}_x(0) = x$.

Thm.-Déf. 6.5. Soit $p : E \to B$ un revêtement, et $b \in B$. L'application suivante est bien définie, et c'est une action à droite de $\pi_1(X, b)$ sur l'ensemble F_b. On l'appelle la *monodromie* du revêtement sur la fibre F_b.

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{M} : & F_b \times \pi_1(X,b) & \to & F_b \\ & (x, [\gamma]) & \mapsto & \widetilde{\gamma}_x(1) \end{array} .$$

Les propriétés essentielles de la monodromie d'un revêtement sont résumées dans l'énoncé suivant.

Theorème 6.6. *Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $b \in B$.*

1. *Si $x \in F_b$, le stabilisateur de x pour la monodromie est donné par*
$$\mathrm{Stab}(x) = p_\sharp \pi_1(E, x) \subset \pi_1(B, b) \ .$$
2. *Si E est connexe par arcs :*
   (a) *l'action de monodromie est transitive. (En particulier, $F_b \simeq p_\sharp \pi_1(E, x) \backslash \pi_1(B, b)$ comme $\pi_1(B, b)$-ensemble)*
   (b) *Les groupes* $\mathrm{Stab}(x)$, *$x \in F_b$ forment une classe de conjugaison dans $\pi_1(B, b)$.*

Corollaire 6.7. *Soit $E \to B$ un revêtement, avec E connexe par arcs. Si B est simplement connexe, alors p est un homéomorphisme*

Si V est une variété différentiable (ou même simplement topologique), on peut définir son revêtement d'orientation $p : \widetilde{V} \to V$. C'est un revêtement à deux feuillets, et V est non-orientable si et seulement si $\widetilde{V}$ est connexe par arcs. Le corollaire précédent interdit à $\widetilde{V}$ d'être connexe par arcs si V est simplement connexe. On obtient donc que toute variété simplement connexe est orientable.

6.3 Classification des morphismes de revêtements

Définition 6.8. Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements. Un *morphisme de revêtements* de p vers p' est une application continue $q : E \to E'$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd} .$$

On note $\mathrm{Hom}(p, p')$ l'ensemble des morphismes de revêtements de p vers p'. Un morphisme q est un *isomorphisme* de revêtements s'il existe un morphisme q' de p' vers p tel que $q \circ q' = \mathrm{Id}_{E'}$ et $q' \circ q = \mathrm{Id}_E$. Un isomorphisme de p vers p est appelé un *automorphisme* de p. Les automorphismes d'un revêtement p forment un groupe pour la composition, qu'on note $\mathrm{Aut}(p)$.

On remarque qu'un morphisme de revêtements de p vers p' est la même chose qu'un relèvement de p. La proposition 4.18 d'unicité des relèvements nous assure donc du fait suivant.

Lemme 6.9. *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements. Si E est connexe, alors deux morphismes de revêtements qui coincident en un point sont égaux.*

Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements. Un mophisme de revêtements h de p vers p' induit pour tout $b \in B$ une application

$$h_b : \begin{array}{ccc} p^{-1}(b) & \to & {p'}^{-1}(b) \\ x & \mapsto & h(x) \end{array} .$$

On rappelle que le groupe $\pi_1(B, b)$ agit par monodromie sur les ensembles $p^{-1}(b)$ et ${p'}^{-1}(b)$.

Lemme 6.10. *L'application h_b est $\pi_1(B, b)$-équivariante, c'est à dire que pour tout $x \in p^{-1}(b)$ et tout $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ on a :*

$$h_b(x[\gamma]) = h_b(x)[\gamma] .$$

Pour démontrer l'existence de certains morphismes de revêtements, nous allons utiliser le théorème de relèvement des applications. Ce théorème demande des hypothèses de connexité par arcs, et connexité par arcs locale. Nous allons donc restreindre notre étude à des revêtements satisfaisant ces hypothèses.

Notation 6.11. On dira qu'un revêtement est Connexe par Arcs Localement Connexe par Arcs (CALCA) si sa base et son espace total sont des espaces topologiques connexes par arcs et localement connexes par arcs.

Theorème 6.12 (Classification)**.** *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements CALCA. On a une bijection, où le membre de droite désigne les morphismes $\pi_1(B, b)$-équivariants entre les ensembles $p^{-1}(b)$ et ${p'}^{-1}(b)$ munis de l'action de monodromie :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(p, p') & \xrightarrow{\approx} & \mathrm{Hom}_{\pi_1(B,b)}\left(p^{-1}(b), {p'}^{-1}(b)\right) \\ h & \mapsto & h_b \end{array}$$

Corollaire 6.13. *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements CALCA, soit $b \in B$, $x \in p^{-1}(b)$ et $x' \in {p'}^{-1}(b)$. Il existe un isomorphisme f de p vers p' tel que $f(x) = x'$ si et seulement si $p_\sharp\pi_1(E, x)$ et $p'_\sharp\pi_1(E', x')$ sont égaux comme sous-groupes de $\pi_1(B, b)$.*

6.4 Revêtements galoisiens

Thm.-Déf. 6.14. Soit $p : E \to B$ un revêtement CALCA. On dit que p est *galoisien* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes.

1. Il existe $e \in E$ tel que $p_\sharp\pi_1(E, e)$ est un sous-groupe *normal* de $\pi_1(B, p(e))$.
2. Pour tout $e \in E$, $p_\sharp\pi_1(E, e)$ est un sous-groupe *normal* de $\pi_1(B, p(e))$.
3. Le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ agit *transitivement* sur chaque fibre de p.

Le prototype d'un revêtement galoisien est fourni par une action de groupe sur un espace topologique.

Définition 6.15. Soit G un groupe agissant sur un espace E.

1. Le groupe G agit *par homéomorphismes* [5] si pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto gx$ est un homéomorphisme de E.
2. Le groupe G agit *de façon totalement discontinue* si pour tout $x \in E$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de x tel que l'égalité $\mathcal{U} \cap g\mathcal{U} \neq \emptyset$ implique $g = 1_G$.

Proposition 6.16. *Soit E un espace CALCA, et G un groupe agissant de façon totalement discontinue par homéomorphismes sur E. Alors l'application quotient $q : E \twoheadrightarrow E/G$ est un revêtement galoisien, de groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(q) \simeq G$.

L'exercice suivant explique une relation entre actions totalement discontinues et actions libres.

Exercice 6.17. *Soit G un groupe agissant par homéomorphismes sur un espace E. Montrez les faits suivants.*

1. *Si G agit de façon totalement discontinue, alors l'action est* libre, *c'est à dire que pour tout $x \in E$, le stabilisateur de x est trivial.*
2. *Réciproquement, si G est fini, si E est un espace séparé et localement compact, et si G agit librement sur E alors G agit de façon totalement discontinue.*

La première partie du théorème de structure de revêtements galoisiens nous dit que tous les revêtements galoisiens sont en fait construits par des actions de groupes comme dans la proposition 6.16. La seconde partie est souvent utilisée dans la pratique pour calculer des groupes fondamentaux (en particulier lorsque E est simplement connexe).

Theorème 6.18 (Structure des revêtements galoisiens).

5. De façon équivalente, G agit par homéomorphismes si, en le considérant comme un espace discret, l'action $G \times E \to E$ est une application continue.

1. *Si $p : E \to B$ est un revêtement galoisien, alors* $\mathrm{Aut}(p)$ *agit de façon totalement discontinue sur E, et l'application $\overline{p} : E/\mathrm{Aut}(p) \to B$ obtenue par quotient est un homéomorphisme.*
2. *De plus, pour tout $b \in B$, et pour tout $x \in p^{-1}(b)$, on a un isomorphisme de groupes :*

$$\pi_1(B, b)/p_\sharp \pi_1(E, x) \simeq \mathrm{Aut}(p) .$$

Exemple 6.19. Soit $n \geq 1$. L'espace projectif $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est le quotient de l'action par antipodie de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n. Cette action est totalement discontinue, le revêtement est donc galoisien, de groupe d'automorphismes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $n \geq 2$, S^n est simplement connexe, le théorème de structure des revêtements galoisiens montre que le groupe fondamental de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 6.20. *Construisez une variété de dimension* 3 *dont le groupe fondamental est égal à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

6.5 Classification des revêtements

Définition 6.21. Un revêtement universel est un revêtement CALCA dont l'espace total est simplement connexe.

Exemple 6.22.
1. Le revêtement $\mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \approx (S^1)^{\times n}$ est un revêtement universel du tore de dimension n.
2. Le revêtement $S^n \twoheadrightarrow S^n/\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est un revêtement universel du tore si $n \geq 2$.

Le nom de revêtement universel est justifié par la propriété suivante, qui découle directement du théorème de relèvement des applications.

Proposition 6.23. *Soit $p_u : \widetilde{B} \to B$ un revêtement universel, et $p : E \to B$ un revêtement quelconque. Choisissons un point $b \in B$ et deux points $\widetilde{x} \in p_u^{-1}(b)$ et $x \in p^{-1}(b)$. Alors il existe un unique morphisme de revêtements h de p_u vers p, tel que $h(\widetilde{x}) = x$.*

Comme conséquence formelle de la proposition précédente, le revêtement universel d'un espace B est unique à isomorphisme près. L'existence d'un revêtement universel n'est par contre pas gratuite, et n'est d'ailleurs pas vraie sans hypothèse topologique supplémentaire sur B.

Définition 6.24. Un espace B est *semi-localement simplement connexe* si tout point $b \in B$ admet un voisinage $\mathcal{U}$ telle que l'implication induite par l'inclusion $\pi_1(\mathcal{U}, b) \to \pi_1(B, b)$ est triviale.

Par exemple, les espaces localement contractiles (ex. les variétés topologiques, les espaces obtenus par constructions cellulaires successives) sont semi-localement simplement connexes.

Theorème 6.25. *Soit B un espace CALCA. B admet un revêtement universel si et seulement si B est semi-localement simplement connexe.*

Theorème 6.26 (Classification)**.** *Soit B un espace CALCA, admettant un revêtement universel, et soit $b \in B$. On a une bijection :*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Classes d'isom. de} \\ \textit{revêtements CALCA} \\ \textit{au dessus de } B \end{array} \right\} & \xrightarrow{\simeq} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Classes de conjugaison} \\ \textit{dans } \pi_1(B,b) \end{array} \right\} \\ \left[E \xrightarrow{p} B\right] & \mapsto & \begin{array}{c} [p_\sharp \pi_1(E,x)] \\ (\textit{où } x \textit{ point qcq de } p^{-1}(b)) \end{array} \end{array} .$$

Pour conclure, nous donnons une application de la classification des revêtements en algèbre. La classification permet de démontrer le **théorème de Nielsen-Schreier :** tout sous-groupe d'un groupe libre est libre. Nous indiquons le schéma de la démonstration. La démonstration repose sur les faits préliminaires suivants.

1. Le groupe fondamental d'un bouquet quelconque de cercles est un groupe libre, le cardinal d'une base est égal au cardinal du bouquet. (On le sait pour un nombre fini de cercles d'après Van Kampen. Pour déduire le cas quelconque du cas fini, on utilise que tout compact d'un bouquet quelconque est contenu dans un sous-bouquet fini.)
2. Le groupe fondamental d'un graphe topologique quelconque est un groupe libre. (Si Γ est un graphe, on peut trouver un arbre $A \subset \Gamma$ contenant tous les sommets. Un arbre est contractile et de plus l'inclusion est une cofibration, donc Γ est homotopiquement équivalent à Γ/A qui est un bouquet de cercles)
3. Si $p : E \to B$ est un revêtement dont la base B est un graphe, alors E est également un graphe.

Soit donc G un groupe libre dont une base est de cardinal A et soit H un sous-groupe de G. On forme le bouquet B d'un ensemble de A cercles, c'est un espace de groupe fondamental G. Par la classification des revêtements il existe un revêtement $p : E \to B$ tel que $\pi_1(E,x) \simeq p_\sharp \pi_1(E,x) = H$. Mais E est alors un graphe, donc son groupe fondamental est libre, CQFD.

7 Introduction aux groupes d'homotopie supérieurs

7.1 Paires d'espaces et homotopies

Il est parfois utile d'étudier les *paires d'espaces* c'est à dire les couples (X, A) où X est un espace topologique et A est un sous-espace de X. Une *application de paires d'espaces* $f : (X, A) \to (Y, B)$ est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(A) \subset B$. Les applications de paires d'espaces se composent naturellement : si on a $f : (X, A) \to (Y, B)$ et $g : (Y, B) \to (Z, C)$, alors la composée $g \circ f$ définit une application de paires de (X, A) vers (Z, C).

Définition 7.1. Deux applications de paires d'espaces $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ sont *homotopes* s'il existe une application $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$. On notera $f \sim_{\text{paires}} g$, ou simplement $f \sim g$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

De manière équivalente, une homotopie entre les applications de paires $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ est une homotopie entre les applications $f, g : X \to Y$ dont la restriction à $A \times I$ est une homotopie entre $f_{|A}^{|B}$ et $g_{|A}^{|B}$.

Exemple 7.2.

1. Une homotopie entre les applications de paires $f, g : (X, \emptyset) \to (Y, \emptyset)$ est la même chose qu'une homotopie entre les applications continues $f, g : X \to Y$.
2. Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$. L'application de paires $u : (\mathbb{C}^*, S^1) \to (\mathbb{C}^*, S^1)$ donnée par $u(x) = x/|x|$ est homotope à l'application identité $\mathrm{Id} : (\mathbb{C}^*, S^1) \to (\mathbb{C}^*, S^1)$.
3. Bien que la réflexion orthogonale d'axe $\mathbb{R}$, $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est homotope à l'application identité de $\mathbb{C}$, les applications de paires $r, \mathrm{Id} : (\mathbb{C}, S^1) \to (\mathbb{C}, S^1)$ ne sont pas homotopes.

On note $\mathcal{C}(X, A; Y, B)$ l'ensemble des applications de paires de (X, A) vers (Y, B). Le lemme suivant se démontre exactement comme le lemme 2.2 du cours n°1.

Lemme 7.3. *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur* $\mathcal{C}(X, A; Y, B)$*, compatible à la composition.*

On note $[(X, A), (Y, B)]$ le quotient de $\mathcal{C}(X, A; Y, B)$ par la relation d'homotopie.

Définition 7.4. Une *équivalence d'homotopie de paires* est une application $f : (X, A) \to (Y, B)$ telle qu'il existe $g : (Y, B) \to (X, A)$ et des homotopies d'applications de paires $g \circ f \sim \mathrm{Id}_{(X,A)}$ et $f \circ g \sim \mathrm{Id}_{(Y,B)}$.

Exemple 7.5. Si $r : X \times I \to X$ est une rétraction par déformation de X sur A, alors l'application $x \mapsto r(x, 1)$ définit une équivalence d'homotopie de paires $(X, A) \xrightarrow{\sim} (A, A)$.

Le cas des espaces pointés

On rappelle qu'un espace pointé est une paire (X, x) où X est un espace et $x \in X$. Si (X, x) et (Y, y) sont des espaces pointés, alors pour plus de simplicité les paires $(X, \{x\})$ et $(Y, \{y\})$ seront souvent abusivement notées (X, x) et (Y, y).

Une application de paires $f : (X, x) \to (Y, y)$ est appelée une *application pointée*. Une homotopie de paires entre $f, g : (X, x) \to (Y, y)$ est appelée une *homotopie pointée*. Une équivalence d'homotopie de paires entre (X, x) et (Y, y) s'appelle une *équivalence d'homotopie pointée*.

7.2 Groupes d'homotopie supérieurs

On note I^n le cube de dimension n, et ∂I^n son bord. Si $n = 0$ on a juste $I^0 = \{*\}$ et $\partial I^0 = \emptyset$.

Définition 7.6. Soit (X, x) un espace topologique pointé. Pour tout $n \geq 0$, on note $\pi_n(X, x)$ l'ensemble :

$$\pi_n(X, x) = [(I^n, \partial I^n), (X, x)] \ .$$

Si $n \geq 1$, on définit une opération $+$ sur $\pi_n(X, x)$ par $[f] + [g] = [f + g]$ où :

$$(f+g)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ f(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \text{si } 1/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Cette opération fait de $\pi_n(X, x)$ un groupe, avec pour élément neutre la classe de l'application constante ϵ_x.

Remarque 7.7. Dans les cas $n = 0$ et $n = 1$, la définition 7.6 coincide avec les définitions données antérieurement dans ce cours.

Le lemme suivant donne une autre description des ensembles $\pi_n(X, x)$.

Lemme 7.8. *Pour tout $n \geq 0$, il existe une bijection :*

$$\pi_n(X, x) \simeq [(S^n, *), (X, x)] \ .$$

Le théorème suivant étend aux groupes d'homotopie supérieurs les propriétés connues pour le groupe fondamental.

Theorème 7.9. *Soit n un entier strictement positif.*

1. *On a un isomorphisme*

$$\pi_n(X \times Y, (x, y)) \simeq \pi_n(X, x) \times \pi_n(Y, y)$$

2. *Toute application $f : X \to Y$ définit une application $\pi_n(f)$ (ou $f_\sharp$) :*

$$\begin{array}{rccc} \pi_n(f) : & \pi_n(X,x) & \to & \pi_n(Y,y) \\ & [\tau] & \mapsto & [f \circ \tau] \end{array} .$$

On a $\pi_n(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_n(X,x)}$, $\pi_n(f \circ g) = \pi_n(f) \circ \pi_n(g)$.

3. *Soit γ un chemin de X d'origine x_0 et d'extrémité x_1. Alors γ induit un isomorphisme :*

$$\Phi_\gamma : \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\simeq} \pi_n(X, x_1) .$$

De plus, on a $\Phi_{\epsilon_x} = \mathrm{Id}$, $\Phi_{\gamma\mu} = \Phi_\gamma \circ \Phi_\mu$ et si deux chemins γ et γ' sont homotopes à extrémités fixés on a $\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma'}$.

4. *Si $f, g : X \to Y$ sont homotopes via une homotopie H, et si $\gamma(t) = H(x,t)$ alors on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X,x) \arrow[r, "\pi_n(f)"] \arrow[dr, "\pi_n(g)"] & \pi_n(Y, f(x)) \arrow[d, "\Phi_\gamma", "\simeq"'] \\ & \pi_n(Y, g(x)) \end{tikzcd} .$$

5. *Si $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie alors pour tout $x \in X$, $\pi_n(f) : \pi_n(X,x) \to \pi_n(Y, f(x))$ est un isomorphisme.*

La propriété suivante donne une première différence entre le groupe fondamental et les groupes d'homotopie supérieurs.

Proposition 7.10. *Soit (X,x) un espace pointé. Pour tout $n \geq 2$ les groupes $\pi_n(X,x)$ sont abéliens.*

7.3 Calcul des groupes d'homotopie supérieurs

La proposition 7.10 semble annoncer que les groupes d'homotopie π_n, pour $n \geq 2$ sont plus faciles à manier que le groupe fondamental. Mais ce n'est pas exact. On dispose en effet de peu de moyens pour calculer ces groupes, en particulier on n'a pas de véritable équivalent du théorème de van Kampen. On dispose donc de calculs explicites limités. Hormis le cas de l'espace

$$S^1 = \mathbb{R}P^1 = SO_2(\mathbb{R}) = U_1(\mathbb{C}) \sim GL_1(\mathbb{C})$$

dont les groupes d'homotopie π_n pour $n \geq 2$ sont tous nuls, on ne sait pas calculer complètement les groupes d'homotopie π_n, pour n grand par rapport à k, des espaces classiques suivants :

— les sphères S^k,
— espaces projectifs $\mathbb{C}P^k$ ou $\mathbb{R}P^k$,
— groupes de matrices $SO_k(\mathbb{R})$, $U_k(\mathbb{C})$ ou $GL_k(\mathbb{C})$.

On dispose par contre de résultats qualitatifs (souvent difficiles à obtenir) sur la taille de ces groupes d'homotopie, la torsion de leurs éléments, leur non-nullité etc. Nous mentionnons quelques-uns [6] de ces résultats à titre indicatif (ces théorèmes sont bien sûr hors programme pour l'examen !).

1. On a $\pi_i(S^n) = 0$ pour $i < n$ (ce résultat est démontré dans les feuilles d'exercices du cours) et $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.
2. En 1951 et 1953, Serre publia plusieurs articles [7] démontrant des résultats essentiels sur l'homotopie des sphères (Ces résultats furent récompensés par une médaille Field en 1954). Parmi ces résultats :
   - Les groupes d'homotopie des sphères sont tous finis, à l'exception de $\pi_n(S^n)$ et $\pi_{4n-1}(S^{2n})$.
   - Si p est un nombre premier, les groupes $\pi_i(S^n)$ n'ont pas de p-torsion si $i - n < 2p - 3$.
   - Pour chaque $n \geq 2$, il y a une infinité de groupes d'homotopie $\pi_i(S^n)$ non nuls.
3. Un théorème de James (1957) affirme que les éléments la partie 2-primaire de $\pi_i(S^{2k+1})$ sont tous d'ordre inférieur ou égal à 4^k.
4. Un théorème de Cohen Moore et Neisendorfer (1979) affirme que si p est un nombre premier impair, alors les éléments de la partie p-primaire des groupes d'homotopie $\pi_i(S^{2k+1})$ sont tous d'ordre inférieur ou égal à p^k.

6. Une liste plus complète de résultats est disponible dans le chapitre 0 du livre de Joseph Neisendorfer, Algebraic Methods in Unstable Homotopy Theory, Cambridge University Press 2010

7. J.-P. Serre : *Homologie singuliere des espaces fibrés*, Ann. of Math. (1951) ; *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane*, Comment. Math. Helv. (1953) et *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens* Ann. of Math. (1953).

Troisième partie
Homologie

8 Catégories

Dans cette courte section nous introduisons deux définitions simples : catégories et foncteurs (= morphismes de catégories). Ces notions générales nous fournissent un langage commode et concis pour exprimer certaines des propriétés des invariants algébriques.

Définition 8.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est constituée de :

(i) une classe $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, les *objets* de $\mathcal{C}$,

(ii) pour chaque $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ un ensemble de *morphismes* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$,

(iii) une loi de composition des morphismes, c'est à dire pour chaque triplet d'objets (X, Y, Z), une application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (g, f) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

Ces données satisfont les deux axiomes suivants.

(1) La composition est associative : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(2) Pour chaque objet X, il existe un morphisme $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ tel que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $f \circ \mathrm{Id}_X = f$.

On montre facilement que le morphisme Id_X est uniquement déterminé, on l'appelle le *morphisme identité de* X. Un morphisme $f : X \to Y$ est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g : Y \to X$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Exemple 8.2.

1. La catégorie $\mathcal{E}ns$ dont les objets sont les ensembles, les morphismes sont les applications, et la loi de composition est la loi de composition usuelle des applications.
2. De même, on a la catégorie $\mathcal{G}ps$ des groupes, la catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens, la catégorie R-Mod des modules à gauche sur un anneau R, la catégorie $\mathcal{T}op$ des espaces topologiques…
3. La catégorie $\mathcal{T}op_*$ des espaces topologiques pointés, dont les objets sont les couples (X, x), où X est un espace topologique et $x \in X$, les morphismes $f : (X, x) \to (Y, y)$ sont les applications continues $f : X \to Y$ telles que $f(x) = y$, et la loi de composition est donnée par la composition usuelle des des applications continues.

4. Plus généralement, la catégorie $\mathcal{T}op_2$ des paires d'espaces, dont les objets sont les couples (X, A), où X est un espace topologique et $A \subset X$, les morphismes de paires d'espaces $f : (X, A) \to (Y, B)$ sont les applications continues $f : X \to Y$ telles que $f(A) \subset B$, et la loi de composition est donnée par la composition usuelle des applications continues.

Définition 8.3. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée :

(i) pour chaque objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$,

(ii) pour chaque $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$,

telles que les conditions suivantes sont satisfaites.

(1) F préserve la loi de composition $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

(2) F préserve les morphismes identités $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$.

On prouve facilement qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ transforme un isomorphisme de $\mathcal{C}$ en un isomorphisme de $\mathcal{D}$. On peut composer des foncteurs de la façon évidente : $(G \circ F)(X) := G(F(X))$, $(G \circ F)(f) := G(F(f))$.

Exemple 8.4.

1. Le foncteur d'oubli : $\mathcal{T}op \to \mathcal{E}ns$, qui envoie un espace topologique, resp. une application continue, sur l'ensemble (resp. l'application) sous-jacente.
2. De même on a des foncteurs d'oubli : R-Mod $\to \mathcal{A}b$, $\mathcal{A}b \to \mathcal{G}ps$, $\mathcal{G}ps \to \mathrm{E}ns$,...
3. On a aussi un foncteur $\mathcal{E}ns \to \mathcal{T}op$ qui envoie un ensemble X sur l'espace topologique obtenu en munissant X de la topologie discrète.
4. L'abélianisation d'un groupe définit un foncteur $\mathcal{G}ps \to \mathcal{A}b$.
5. Les invariants π_0 et π_1 et π_n, $n \geq 2$ définissent des foncteurs :

$$\begin{aligned} \pi_0 &: \mathcal{T}op \to \mathcal{E}ns \;, \\ \pi_1 &: \mathcal{T}op_* \to \mathcal{G}ps \;, \\ \pi_n &: \mathcal{T}op_* \to \mathcal{A}b \;. \end{aligned}$$

9 Complexes et homologie

9.1 Définitions

Dans ce paragraphe, R désigne un anneau quelconque. Les R-modules sont implicitement des R-modules à gauche.

Définition 9.1. Un complexe C_* de R-modules est un diagramme de R-modules de la forme suivante :

$$\dots \xrightarrow{d_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} \dots\ ,$$

où les applications R-linéaires d_i vérifient $d_i \circ d_{i+1} = 0$ pour tout i. Les morphismes d_i sont les *différentielles* du complexe, et C_i est le R-module des éléments *de degré* i du complexe.

Définition 9.2. Soient C_* et D_* deux complexes de R-modules, de différentielles respectives d^C et d^D. Un morphisme de complexes $f_* : C_* \to D_*$ est la donnée d'une famille d'applications R-linéaires $f_i : C_i \to D_i$, $i \in \mathbb{Z}$, telles que $f_i \circ d^C_{i+1} = d^D_{i+1} \circ f_{i+1}$ pour tout i.

Définition 9.3. On note $\mathrm{Ch}(R)$ (resp. $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$) la catégorie avec :

- Objets : les complexes de R-modules (resp. tels que $C_i = 0$ pour $i < 0$),
- Morphismes : les morphismes de R-modules,
- Composition : $f \circ g := (f_i \circ g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Définition 9.4. Soit C un complexe de R-modules. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on introduit les R-modules suivants :

- Le R-module Z_i des cycles de degré i : $Z_i := \mathrm{Ker} d_i \subset C_i$.
- Le R-module B_i des bords de degré i : $B_i := \mathrm{Im} d_{i+1} \subset Z_i$.
- Le R-module d'homologie $H_i(C)$ de degré i : $H_i(C) = Z_i/B_i$.

Lemme 9.5. *Un morphisme de complexes $f_* : C_* \to D_*$ détermine pour tout entier i une application*

$$\begin{array}{rccc} H_i(f) : & H_i(C) & \to & H_i(D) \\ & [z] & \mapsto & [f_i(z)] \end{array} .$$

Le i-ème groupe d'homologie définit un foncteur :

$$H_i : \mathrm{Ch}(R) \to R\text{-}Mod\,.$$

9.2 L'exemple historique des chaînes simpliciales

A. Rappels sur les simplexes affines de $\mathbb{R}^n$.

Un ensemble de $d+1$ points $\{x_0, \dots, x_d\}$ de $\mathbb{R}^n$ est *affinement indépendant* si le sous-espace affine engendré par ces points est de dimension d.

On appelle *d-simplexe* de $\mathbb{R}^n$ une partie $S \subset \mathbb{R}^n$ qu'on peut exprimer comme enveloppe convexe de $d+1$ points affinement indépendants $x_0, \dots, x_d$. On note $S =< x_0, \dots, x_d >$. Les points x_i sont appelés les *sommets* du simplexe. On peut les caractériser S comme les points extrémaux de S, c'est à dire les points $x \in S$ tels que si $[a, b]$ est un segment de S contenant x alors $x = a$ ou $x = b$. Les *faces* de S sont les $(d-1)$-simplexes (pour $0 \leq i \leq d$) :

$$\partial_i S :=< x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d >=_{\text{nota.}} < x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_d > \ .$$

Plus généralement, les *facettes* de S sont les convexes $< x_{i_0}, \dots, x_{i_k} >$ pour $k \leq d$. Les facettes de S comprennent donc S lui même, ses faces, les faces de ses faces, etc.

B. Polyèdres et triangulations

Définition 9.6. On appelle *complexe simplicial géométrique* (de dimension finie) un ensemble K de simplexes de $\mathbb{R}^n$, satisfaisant les conditions suivantes.

(i) Si $S \in K$, alors les faces de S sont des éléments de K,

(ii) Si $S, T \in K$ alors $S \cap T$ est soit vide, soit une facette commune à T et S.

(iii) Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ rencontre un nombre fini de simplexes de K.

Si K est un complexe simplicial géométrique, on note $|K|$ le polyèdre associé :

$$|K| := \bigcup_{S \in K} S \ .$$

Une *triangulation* d'un espace X est la donnée d'un complexe simplicial K et d'un homéomorphisme $h : |K| \xrightarrow{\approx} X$.

Remarque 9.7. Si X est un espace triangulable, alors X est séparé et dénombrable à l'infini (réunion croissante d'une suite de compacts). De plus en utilisant (iii), on montre facilement que X est compact si et seulement si K est un complexe simplicial fini.

Exemple 9.8. La donnée d'un homéomorphisme entre S^1 et un polygone régulier de $\mathbb{R}^2$ définit une triangulation de S^1.

C. Complexe simplicial et homologie simpliciale

Soit X un espace muni d'une triangulation $h : |K| \xrightarrow{\approx} X$. A partir de la triangulation de X, on peut définir un complexe de R-modules $C_*^{\mathrm{simpl}}(K,R)$ de la manière suivante.

1. On met un ordre total sur les 0-simplexes de K : on décide que $x < y$ si les coordonnées du sommet x sont inférieures à celles de y pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi chaque simplexe de K peut s'ecrire d'une manière unique sous la forme $< x_0, \dots, x_d >$, avec $x_0 < x_1 < \dots < x_d$.
2. On définit $C_n^{\mathrm{simpl}}(K,R)$ comme le R-module libre de base les n-simplexes de K.
3. On définit $d_n : C_n^{\mathrm{simpl}}(K,R) \to C_{n-1}^{\mathrm{simpl}}(K,R)$ par la formule :

$$d_n < x_0, \dots, x_n > = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i < x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n > \quad .$$

On vérifie que cette définition donne bien un complexe, c'est à dire que $d_n \circ d_{n+1} = 0$. L'homologie du complexe $C_*^{\mathrm{simpl}}(K,R)$ est appelée *l'homologie simpliciale de* X (relative à la triangulation (K,h)).

Exemple 9.9. Soit (K,h) est une triangulation de S^1, alors :

$$H_i^{\mathrm{simpl}}(K,R) \simeq \begin{cases} R & \text{si } i = 0 \text{ ou si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus généralement, si (K,h) est une triangulation d'un bouquet de n cercles, alors

$$H_i^{\mathrm{simpl}}(K,R) \simeq \begin{cases} R & \text{si } i = 0, \\ R^n & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En réfléchissant à l'exemple 9.9 (et à d'autres exemples traités en TD), on comprend que l'homologie simpliciale capture une partie de l'information « géométrique » de l'espace topologique X. Mais l'homologie simpliciale nécessite l'existence d'une triangulation de X. Beaucoup d'espaces de type variété admettent des triangulations, mais pas tous, et le thème des triangulations a une histoire assez riche.

1. Les variétés différentiables sont triangulables. Il existe plusieurs démonstrations de ce fait, par exemple une dûe à Whitehead (1940) et une dûe à Whitney (1957).
2. Pour les variétés topologiques, la situation est plus complexe. Les variétés topologiques (séparées et dénombrables à l'infini) de dimension 2 et 3 sont triangulables, par des théorèmes de Radò (1925, cas de la dimension 2) et Moise (1952, cas de la dimension 3) [8]. On sait de-

8. On pourra trouver des démonstrations dans le livre de Moise, Geometric Topology.

puis les travaux de Freedman (1982, medaille Fields 86) qu'il existe des variétés topologiques de dimension 4 qui sont non triangulables. Une démonstration du fait que pour tout $n \geq 5$, il existe des variétés topologiques non triangulables a été annoncée en 2013 par Manolescu.

9.3 L'exemple fondamental des chaînes singulières

Définition 9.10. Notons $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

- Le *simplexe standard* est l'espace topologique $\Delta^n :=< e_0, \dots, e_n >$.
- Pour $0 \leq i \leq n$, il existe une unique application affine $d^i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ telle que
$$d^i(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{si } k \leq i-1 \\ e_{k+1} & \text{si } k \geq i+1 \end{cases}$$
Cette application d^i induit un isomorphisme affine de Δ^{n-1} sur $\partial_i \Delta^n$.

La définition du complexe des chaînes singulières suit la même idée que celle du complexe des chaînes simpliciales, mais en ne demandant pas de triangulation. Les simplexes de la triangulation sont remplacés par des « simplexes singuliers » , c'est-à-dire des applications continues $\Delta_n \to X$.

Définition 9.11. Soit X un espace, et R un anneau. Le complexe $C_*(X, R)$ des chaînes singulières de X est le complexe de R-modules défini de la façon suivante.

(0) Pour $n < 0$, $C_n(X, R) = 0$.

(1) Pour $n \geq 0$, $C_n(X, R)$ est le R-module libre engendré par l'ensemble des applications continues $\sigma : \Delta_n \to X$. Ces applications σ s'appellent les *simplexes singuliers* de l'espace X.

(2) Pour $n \geq 1$, la différentielle $d_n : C_n(X, R) \to C_{n-1}(X, R)$ est définie en envoyant $\sigma : \Delta^n \to X$ sur la somme :
$$d_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ d^i) \ .$$

On vérifie que cette définition donne bien un complexe, c'est à dire que $d_n \circ d_{n+1} = 0$. On peut expliciter le complexe des chaînes singulières sur certains exemples particuliers.

Exemple 9.12.

1. Le complexe $C_*(\emptyset, R)$ est nul en chaque degré, avec différentielle nulle.
2. Le complexe $C_*(\{*\}, R)$ est un R-module libre de rang un en chaque degré, engendré par l'unique application $\Delta^n \to \{pt\}$. La différentielle d_n vaut l'identité si n est pair et 0 si n est impair.

3. En général $C_*(X,R) = \bigoplus_\alpha C(X_\alpha, R)$ [9], où les X_α désignent les composantes connexes par arcs de X.

Il faut penser au complexe $C_*(X,R)$ comme à un modèle algébrique de l'espace topologique X. Le lemme suivant montre que le passage d'un espace topologique X à son modèle algébrique $C_*(X,R)$ se comporte bien.

Lemme 9.13. *Une application continue $f : X \to Y$ détermine un morphisme de complexes de chaines $f = (f_i) : C_*(X,R) \to C_*(Y,R)$ avec*

$$f_i : \begin{array}{ccc} C_i(X,R) & \to & C_i(Y,R) \\ \sum \lambda_k \sigma_k & \mapsto & \sum \lambda_k (f \circ \sigma_k) \end{array} .$$

Le complexe des chaînes singulières induit un foncteur :

$$\mathcal{T}op \to \mathrm{Ch}_{\geq 0}(R) .$$

Définition 9.14. L'homologie singulière (à coefficients dans R) d'un espace topologique X est l'homologie du complexe $C_*(X,R)$:

$$H_i(X,R) := H_i(C_*(X,R)) .$$

Exemple 9.15.

1. $H_i(\emptyset; R) = 0$ pour tout $i \geq 0$.
2. $H_i(\{*\}; R) \simeq R$ si $i = 0$, et 0 sinon.
3. $H_i(X;R) = \bigoplus_\alpha H_i(X_\alpha; R)$ où les X_α sont les composantes connexes par arcs de X. En particulier $H_0(X)$ est un R-module libre de base $\pi_0(X)$.

En général, pour un espace X quelconque, les R-modules $C_i(X,R)$ sont de dimension infinie, et il est totalement illusoire de vouloir calculer $H_i(X;R)$ directement à partir du complexe $C_*(X,R)$. Nous verrons des techniques de calcul de $H_i(X;R)$ plus tard.

Lemme 9.16. *Le i-ème module d'homologie singulière d'un espace topologique définit un foncteur $\mathcal{T}op \to R$-Mod.*

Remarque 9.17. On montrera dans la suite du cours que l'homologie simpliciale d'un espace est isomorphe à son homologie singulière. Cet énoncé a de nombreuses conséquences pratiques, parmi lesquelles le fait que l'homologie simpliciale ne dépend pas de la triangulation, ou le fait on peut utiliser une donnée combinatoire (une triangulation) pour calculer l'homologie singulière.

9. La somme directe de complexes C_α est le complexe $\bigoplus_\alpha C_\alpha$ qui vaut $\bigoplus_\alpha (C_\alpha)_n$ en degré n, dont la différentielle d_n est déterminée par $d_n(x_\alpha) = d_n^{C_\alpha}(x_\alpha)$ si $x_\alpha \in C_\alpha$.

10 Manipuler les complexes

10.1 Homotopies

Définition 10.1. Deux morphismes de complexes $f_*, g_* : C_* \to D_*$ sont *homotopes* s'il existe une famille $(h_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ d'applications R-linéaires $h_i : C_i \to D_{i+1}$ telles que pour tout i

$$f_i - g_i = d^D_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d^C_i \ .$$

Lemme 10.2. *1. La relation d'homotopie définit une relation d'équivalence sur* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(R)}(C_*, D_*)$.

2. La relation d'homotopie est compatible à la composition.

3. Si $f_*, g_* : C_* \to D_*$ sont homotopes alors $H_i(f) = H_i(g)$ pour tout i.

Le foncteur des chaînes singulières préserve la notion d'homotopie. La notion d'homotopie entre morphismes de complexes est donc une traduction algébrique de la notion topologique d'homotopie.

Theorème 10.3. *Si $f, g : X \to Y$ sont des applications continues homotopes, alors $f_*, g_* : C_*(X,R) \to C_*(Y,R)$ sont homotopes. En particulier $H_i(f) = H_i(g)$ pour tout i. En particulier, une équivalence d'homotopie induit des isomorphismes en homologie singulière.*

10.2 Suites exactes courtes et suites exactes longues

Si $f_* : C_* \to D_*$ est un morphisme de complexes de R-modules, on peut très bien avoir $f_n : C_n \to D_n$ injective (ou surjective) pour tout n sans que $H_n(f) : H_n(C) \to H_n(D)$ soit injective (ou surjective). Pour un exemple de ce phénomène, on peut prendre la situation suivante :

$$\begin{array}{c} C_* \\ \big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ D_* \end{array} \quad := \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & R \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & R \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (\mathcal{D})$$

Ce 'défaut' est une caractéristique fondamentale de l'homologie des complexes. Dans cette section, nous expliquons comment maîtriser ce phénomène.

Définition 10.4. 1. Une suite de morphismes de R-modules :

$$\dots \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \dots$$

est *exacte* si $\mathrm{Im}\, f_{n+1} = \mathrm{Ker}\, f_n$ pour tout i.

2. Une *suite exacte courte de R-modules* est une suite exacte de la forme :
$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0\ .$$
3. Une *suite exacte courte de complexes de chaînes de R-modules* est un diagramme de complexes de chaînes
$$0 \to C'_* \xrightarrow{f_*} C_* \xrightarrow{g_*} C''_* \to 0\ ,$$
tel que pour tout n, le diagramme de R-modules suivant est une suite exacte courte de R-modules.
$$0 \to C'_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} C''_n \to 0\ .$$

Theorème 10.5. *Si* $0 \to C'_* \xrightarrow{f_*} C_* \xrightarrow{g_*} C''_* \to 0$ *est une suite exacte courte de complexes de R-modules, alors il existe une suite exacte (dite* suite exacte longue*) de R-modules*
$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(C') \xrightarrow{H_n(f)} H_n(C) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C'') \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_n(f)} \dots\ .$$

Un *sous-complexe* C_* d'un complexe de R-modules D_* est un complexe tel que pour tout n, C_n est un sous-module de D_n et la différentielle d_n^C de C_* est obtenu par restriction de la différentielle de D_* en une application $C_n \to C_{n-1}$. Le *quotient* de D_* par C_* est le complexe $(D/C)_*$ défini de la manière suivante.

(1) Pour tout n, le R-module $(D/C)_n$ est le quotient de D_n par le sous-module C_n.

(2) La différentielle $d_n : (D/C)_n \to (D/C)_{n-1}$ envoie la classe $[x]$ d'un élément $x \in D_n$ sur la classe $[d_n^D(x)]$.

On a alors une suite exacte courte de complexes :
$$0 \to C_* \to D_* \to (D/C)_* \to 0\ .$$

Le théorème 10.5 nous donne alors une suite exacte longue en homologie, qui nous permet de comparer l'homologie de D_* avec l'homologie du sous-complexe C_* et du complexe quotient $(D/C)_*$:
$$\dots \to H_{n+1}(D/C) \to H_n(C) \to H_n(D) \to H_n(D/C) \to H_{n-1}(C) \to \dots\ .$$

Question 10.6. *Appliquez le théorème 10.5 pour expliquer ce qui se passe dans l'exemple du diagramme ($\mathcal{D}$) plus haut.*

Question 10.7. *Donnez une propriété universelle des complexes quotients.*

Exercice 10.8. *Soit C_* un sous-complexe de D_*.*

1. *Montrez que l'inclusion $\iota_* : C_* \to D_*$ induit des morphismes $H_n(\iota)$ injectifs (resp. surjectifs) pour tout n si et seulement si l'application quotient $q_* : D_* \to (D/C)_*$ induit des morphismes $H_n(q)$ surjectifs (resp. nuls) pour pour tout n.*
2. *Montrez que l'inclusion $\iota_* : C_* \to D_*$ induit des isomorphismes $H_n(\iota)$ pour tout n si et seulement si $H_n(D/C) = 0$ pour tout n.*

Le raffinement suivant du théorème 10.5 joue un rôle important dans certains calculs.

Theorème 10.9. *Si on a un diagramme commutatif dans* $\mathrm{Ch}(R)$*, dont les lignes sont des suites exactes courtes de complexes*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C'_* \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha'_*"] & C_* \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_*"] & C''_* \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''_*"] & 0 , \\ 0 \arrow[r] & D'_* \arrow[r, "h"] & D_* \arrow[r, "k"] & D''_* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

alors les suites exactes longues du théorème 10.5 s'insèrent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(C') \arrow[r, "H_n(f)"] \arrow[d, "H_n(\alpha')"] & H_n(C) \arrow[r, "H_n(g)"] \arrow[d, "H_n(\alpha)"] & H_n(C'') \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(\alpha'')"] & H_{n-1}(C') \arrow[r, "H_{n-1}(f)"] \arrow[d, "H_{n-1}(\alpha')"] & \cdots . \\ \cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(D') \arrow[r, "H_n(h)"] & H_i(D) \arrow[r, "H_n(k)"] & H_n(D'') \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(C') \arrow[r, "H_{n-1}(h)"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Le theorème 10.9 est souvent utilisé conjointement avec le lemme suivant.

Lemme 10.10 ('Lemme des cinq')**.** *Considérons un diagramme commutatif de R-modules, dont les lignes sont des suites exactes :*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] . \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

Si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

L'exercice suivant est un exemple typique d'application du théorème 10.9 et du lemme des cinq.

Exercice 10.11. *Soit $f_* : D_* \to D'_*$ un morphisme de complexes de R-modules, et soit C_*, resp. C'_*, un sous-complexe de D_*, resp. D'_* tel que $f_n(C_n) \subset C'_n$ pour tout n. Vérifiez que f_* induit par passage au quotient un* *morphisme de complexes* $\overline{f}_* : (D/C)_* \to (D'/C')_*$, *puis montrez que si deux des trois applications suivantes*

$$(i)\ H_*(f) : H_*(C) \to H_*(C')$$
$$(ii)\ H_*(f) : H_*(D) \to H_*(D')$$
$$(iii)\ H_*(\overline{f}) : H_*(D/C) \to H_*(D'/C')$$

sont des isomorphismes en tout degré, alors la troisième l'est également.

11 L'homologie singulière et ses outils de calculs

Dans cette section, nous introduisons l'homologie singulière des paires d'espaces (X, A), qui mesure la topologie de l'espace X 'modulo' celle du sous-espace A. L'homologie singulière d'un l'espace X définie à la section précédente correspond à l'homologie de la paire $(X, \emptyset)$. Les propriétés fondamentales de l'homologie (relative) sont numérotées (P0) à (P6) dans la suite [10]. L'utilisation de ces propriétés fondamentales permet de faire un grand nombre de calculs explicites.

Comme récompense de ce travail algébrique, nous obtiendrons des démonstrations faciles de résultats topologiques non triviaux (théorème de Brouwer, invariance du bord, de la dimension, du domaine, théorème de Jordan...).

11.1 Homologie singulière des paires d'espaces

A. Définition

Soit R un anneau. Soit X un espace et $A \subset X$. Alors l'inclusion $\iota : A \hookrightarrow X$ induit un morphisme de complexes de chaînes singulières, injectif en chaque degré :

$$\iota_* : C_*(A, R) \to C_*(X, R) .$$

On peut donc voir $C_*(A, R)$ comme un sous-complexe de $C_*(X, R)$.

Définition 11.1. Le *complexe singulier relatif* $C_*(X, A, R)$ est le quotient du complexe $C_*(X, R)$ par le sous-complexe $C_*(A, R)$. L'homologie du complexe $C_*(X, A, R)$ s'appelle *l'homologie relative de la paire* (X, A), et se note $H_n(X, A, R)$.

On notera souvent plus simplement $C_*(X, A)$ et $H_n(X, A)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur l'anneau des coefficients R.

Proposition 11.2 (Fonctorialité (P0))**.** *Une application de paires $f : (X, A) \to (Y, B)$ induit un morphisme de complexes de chaînes singulières relatives :*

$$f_* : \begin{array}{ccc} C_*(X, A) & \to & C_*(Y, B) \\ [\sum \lambda_i \sigma_i] & \mapsto & [\sum \lambda_i f \circ \sigma_i] \end{array} ,$$

donc des morphismes en homologie relative $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$. En particulier, l'homologie singulière relative définit des foncteurs

$$H_n : \mathcal{T}op_2 \to R\text{-}\mathcal{M}od .$$

10. Nous ne le ferons pas, mais on peut montrer que ces propriétés caractérisent l'homologie singulière.

On a $C_*(X) = C_*(X, \emptyset)$, donc l'homologie singulière relative généralise l'homologie singulière : $H_n(X) = H_n(X, \emptyset)$. On rappelle les deux calculs suivants.

Proposition 11.3 (Homologie du point (P1)).

$$H_n(\{pt\}) = \begin{cases} R & si\ n = 0, \\ 0 & si\ n > 0, \end{cases}$$

Proposition 11.4 (Homologie et composantes connexes par arcs (P2)). *Soit X un espace topologique et X_α ses composantes connexes par arcs, alors*

$$H_n(X) \simeq \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)\ .$$

B. Homotopies

On rappelle que deux applications de paires $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ sont homotopiquement équivalentes (via une homotopie de paires) s'il existe une homotopie $H : X \times I \to Y$ entre f et g, qui peut se retreindre en une homotopie $H : A \times I \to B$ entre les restrictions $f_{|A}^{|B}$ et $g_{|A}^{|B}$.

Proposition 11.5 (Invariance homotopique (P3)). *Deux applications de paires $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotopes par une homotopie de paires induisent la même application en homologie relative.*

Corollaire 11.6. *Deux espaces homotopiquement équivalents ont des homologies singulières isomorphes.*

C. Suites exactes longues

Proposition 11.7 (Suite exacte longue d'une paire (P4)). *Pour toute paire d'espaces (X, A), on a une suite exacte longue (où les applications qui ne sont pas des connectants sont induites par les inclusions de paires) :*

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \to \dots \\ \to H_0(A) \to H_0(X) \to H_0(X, A) \to 0\ . \end{aligned}$$

De plus, une application de paires d'espaces $f : (X, A) \to (Y, B)$ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X, A) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] & \dots\ . \\ \dots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y, B) \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

D. Théorèmes d'excision

Theorème 11.8 (Excision (P5))**.** *Soit (X,A) une paire d'espaces, et $B \subset A$ tel que $\overline{B} \subset \overset{\circ}{A}$. Alors l'inclusion de paires $(X\setminus B, A\setminus B) \hookrightarrow (X,A)$ induit pour tout n un isomorphisme :*

$$H_n(X\setminus B, A\setminus B) \xrightarrow{\simeq} H_n(X,A)\ .$$

Theorème 11.9 (Mayer-Vietoris (P5'))**.** *Soit X un espace, $A, B \subset X$ tels que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$. Alors on a une suite exacte longue en homologie :*

$$\cdots \to H_{n+1}(X) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A\cap B) \xrightarrow{(H_n(\iota^A_{A\cap B}),H_n(\iota^B_{A\cap B}))} H_n(A)\oplus H_n(B)$$
$$\xrightarrow{H_n(\iota^X_A)-H_n(\iota^Y_B)} H_n(X) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A\cap B) \to \dots$$

De plus, si on a une décomposition A', B' d'un espace X' et une application $f : X \to X'$ telle que $f(A) \subset A'$ et $f(B) \subset B'$, alors les suites de Mayer-Vietoris s'inscrivent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(A)\oplus H_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] & \dots\ . \\
\dots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A'\cap B') \arrow[r] & H_n(A')\oplus H_n(B') \arrow[r] & H_n(X') \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(A'\cap B') \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

E. Calcul de H_0 et Homologie réduite

Proposition 11.10. *Soit X un espace. Alors $H_0(X)$ est un R-module libre de base $\pi_0(X)$. De plus, si $f : X \to Y$ est une application continue, alors $H_0(f)$ est l'application R-linéaire égale à $\pi_0(f)$ sur la base.*

L'homologie réduite est une variante mineure de l'homologie singulière qui est pratique à manipuler dans certains calculs. Si X est un espace, il existe une unique application $X \to \{pt\}$. L'homologie réduite $\overline{H}_n(X)$ est définie comme le noyau de l'application $H_n(X) \to H_n(\{pt\})$. On a donc :

$$H_n(X) = \overline{H}_n(X) \text{ si } n > 0,$$
$$H_0(X) = \overline{H}_0(X) \oplus R$$

Les axiomes d'invariance homotopique (P3), de suite exacte longue (P4) et de Mayer Vietoris (P5') ci-dessus restent valables si on remplace les homologies des espaces par les homologie réduites (et on conserve l'homologie relative des paires d'espaces telle quelle). Par exemple la suite exacte longue d'une paire (X,A) peut aussi s'écrire :

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \overline{H}_n(A) \to \overline{H}_n(X) \to H_n(X,A) \xrightarrow{\delta_n} \overline{H}_{n-1}(A) \to \dots$$
$$\to \overline{H}_0(A) \to \overline{H}_0(X) \to H_0(X,A) \to 0\ .$$

11.2 Premiers calculs et applications

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques calculs essentiels d'homologie singulière qui découlent directement des axiomes de calcul (P0)-(P5), et nous donnons des applications en topologie.

A. Homologie des sphères

Theorème 11.11. *Pour tout $d \geq 0$ et tout n on a :*

$$\overline{H}_n(S^d) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } d \neq n, \\ R & \text{si } d = n. \end{cases}$$

Ce résultat montre que bien que les sphères S^n sont simplement connexes si $n \geq 2$, elle ne sont pas contractiles. Ce résultat permet également de démontrer le **Théorème de Brouwer** : si $n \geq 1$, toute application continue $f : D^n \to D^n$ admet un point fixe.

Exercice 11.12. *Construisez un espace semi-localement simplement connexe qui n'est pas localement contractile. (On pourra considérer la boucle d'oreille Hawaienne de dimension* 2*, c'est à dire le fermé de* $\mathbb{R}^3$ *obtenu comme réunion des sphères de centre* $(1/n, 0, 0)$ *et de rayon* $1/n$ *pour* $n > 0$*.)*

Le calcul de l'homologie des sphères (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) est le point de départ de la *théorie du degré*. Le groupe abélien $H_n(S^n, \mathbb{Z})$ est cyclique infini, et les morphismes de groupes cycliques infinis sont exactement les homothéties $x \mapsto \lambda x$ de rapport $\lambda \in \mathbb{Z}$. On introduit la définition suivante.

Définition 11.13. Soit $f : S^n \to S^n$ continue. On appelle *degré de* f l'unique entier relatif $\deg(f)$ tel que $\overline{H}_n(f)$ soit une homothétie de rapport $\deg(f)$.

Proposition 11.14 (Calculs de degrés)**.**

1. *Soit r une réflexion orthogonale de $\mathbb{R}^{n+1}$, et $r_{|S^n}$ sa restriction à la sphère unité. Alors* $\deg(r_{|S^n}) = -1$.
2. *Le degré de l'application antipode de S^n vaut* $(-1)^{n+1}$.

La théorie du degré possède de nombreuses applications topologiques qui seront traitées en exercice.

La conjecture de Poincaré

Nous profitons du calcul de l'homologie des sphères pour donner un mini aperçu historico-scientifique sur la conjecture de Poincaré.

1. **Surfaces et homologie.** On sait classifier complètement les surfaces topologiques compactes (c'est à dire établir leur liste à homéomorphisme près), et calculer leur homologie [11]. On constate que si V est une surface topologique compacte telle que $H_n(V) = H_n(S^2)$, alors V est homéomorphe à la sphère S^2.
2. **Sphère de Poincaré et sphères d'homologie.** La situation est plus compliquée en dimension supérieure. Soit I le sous-groupe de SO_3 formé des symétries de l'icosaèdre. C'est un groupe fini simple isomorphe au groupe alterné A_5. L'espace des orbites
$$\Sigma^3 = SO_3/I$$
est aujourd'hui appelé « la sphère de Poincaré ». En effet, Poincaré a montré que c'est une variété compacte de dimension 3, non simplement connexe (donc non homéomorphe à S^3), qui a même homologie que S^3.
La sphère de Poincaré est un exemple de sphère d'homologie, c'est à dire de variété topologique compacte dont l'homologie est la même que celle de S^n. (L'entier n est la dimension de la sphère d'homologie).
3. **Conjecture de Poincaré (1904).** Poincaré a conjecturé que le groupe fondamental est la seule obstruction pour qu'une sphère d'homologie soit une authentique sphère. Plus précisément :
Soit V une sphère d'homologie simplement connexe de dimension 3. Alors V est homéomorphe à S^3.
Bien sûr, on peut poser la même conjecture en dimension supérieure, c'est à dire si V est une sphère d'homologie de dimension n simplement connexe, alors V est homéomorphe à S^n.
4. **Type d'homotopie des sphères d'homologie.** En combinant deux thèorèmes basiques de topologie algébrique, le théorème de Hurewicz et le théorème de Whitehead, on montre facilement le résultat suivant.
Si V est une sphère d'homologie de dimension n simplement connexe, alors V a le type d'homotopie de S^n.
On est cependant très loin du type d'homéomorphisme de V.
5. **Solutions de la conjecture de Poincaré.** Paradoxalement c'est pour les sphères d'homologie de dimension $n \geq 5$ que la conjecture de Poincaré fut confirmée en premier, par Newman (1966) et Connell (1967). Smale avait auparant démontré en 1961 que pour $n \geq 5$, la conjecture de Poincaré est vraie si on suppose de plus que V est une

11. Ces surfaces comprennent les tores à g-trous et le plan projectif $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Nous aborderons le calcul de l'homologie des surfaces dans le chapitre sur l'homologie cellulaire.

variété différentiable (travaux pour lesquels il reçut la Médaille Fields en 1966)
En dimension 4, la conjecture de Poincaré a été résolue par Freedman (1982, dans des travaux pour lesquels il reçut la médaille Fields en 1986).
Enfin, il fallut attendre 2003 pour que Perelman donne une solution à la conjecture en dimension 3 (il refusa sa médaille Fields en 2006).

B. Homologie locale

On appelle *homologie locale* d'un espace X au point $x \in X$ les R-modules d'homologie $H_n(X, X \setminus \{x\})$.

Theorème 11.15. *Soit X un espace, et x un point fermé de X qui admet un voisinage homéomorphe à $\mathring{D}^d$. Alors*

$$H_n(X, X \setminus \{x\}) \simeq \begin{cases} 0 & si\ n \neq d, \\ R & si\ n = d. \end{cases}$$

Parmi les applications de l'homologie locale, nous donnons les deux théorèmes topologiques importants suivants.

— **Théorème de l'invariance de la dimension :** Soit $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$. Si $\mathcal{U}$ est homéomorphe à V alors $n = m$.
— **Théorème d'invariance du bord :** Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ est un homéomorphisme, alors f envoie le bord $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ homéomorphiquement sur lui-même.

Rappelons que nous avons défini une variété topologique comme un espace topologique qu'on peut recouvrir par des ouverts homéomorphes à des boules euclidiennes. Le théorème de l'invariance de la dimension implique les deux résultats suivants sur la dimension des variétés topologiques.

— **Existence de la dimension** : Si X est une variété topologique connexe, alors il existe un entier n tel que X est une variété topologique de dimension n.
— **Invariance de la dimension** : Si deux variétés topologiques X et Y de dimensions respectives n et m sont homéomorphes, alors $n = m$.

C. Homologie des bouquets

Theorème 11.16. *Soient (X, x) et (Y, y) deux espaces pointés. On suppose que x (resp. y) admet un voisinage $\mathcal{U}_x$ (resp. $\mathcal{U}_y$) qui se rétracte par déformation sur x (resp. y). Alors les inclusions $X \hookrightarrow X \vee Y$ et $Y \hookrightarrow X \vee Y$ induisent pour tout n un isomorphisme :*

$$\overline{H}_n(X) \oplus \overline{H}_n(Y) \xrightarrow{\simeq} \overline{H}_n(X \vee Y)\ .$$

D. Homologie des quotients

Theorème 11.17. *Soit $A \hookrightarrow X$ une cofibration. L'application quotient $q : (X, A) \to (X/A, *)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Exemple 11.18. Le cone d'un espace X est le quotient $(I \times X)/(\{1\} \times X)$. La suspension ΣX de X est le quotient $CX/(\{0\} \times X)$. Comme le cone est contractile, on a pour tout $n \geq 0$ un isomorphisme $\overline{H}_n(X) \simeq \overline{H}_{n+1}(\Sigma X)$.

11.3 Le théorème de Jordan généralisé

A. Homologie singulière d'une union croissante d'espaces

Nous commençons par une propriété supplémentaire de l'homologie singulière. Cette propriété élémentaire est essentielle, et ne peut pas se déduire des axiomes (P0)-(P5).

Proposition 11.19 (P6)**.** *Soit X un espace, et soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite croissante de sous-espaces de X tels que :*

(i) $X = \bigcup_{k\geq 0} X_k$,

(ii) tout sous-ensemble compact K de X est contenu dans un X_k.

Notons $j_{k,\ell} : X_k \hookrightarrow X_\ell$ et $j_k : X_k \hookrightarrow X$ les inclusions de sous-espaces. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a les propriétés suivantes.

(a) Pour tout $c \in H_n(X)$, il existe un entier k et classe $c_k \in H_n(X_k)$ telle que $H_n(j_k)(c_k) = c$.

(b) Pour tout $c_k \in H_n(X)$ on a $H_n(j_k)(c_k) = 0$ si et seulement s'il existe $\ell > k$ tel que $H_n(j_{k,\ell})(c_k) = 0$.

La proposition précédente montre que l'on peut calculer complètement l'homologie de X à partir de l'homologie des espaces X_k et l'effet des applications $j_{k,\ell} : X_k \hookrightarrow X_\ell$ sur l'homologie. En effet, on peut déduire de la proposition que $H_n(X)$ est isomorphe au R-module quotient

$$\left(\bigoplus_{k\geq 0} H_n(X_k)\right)/N\ ,$$

où N est le sous-module de la somme directe engendré par les éléments du type $c_k - H_n(j_{k,\ell})(c_k)$, pour tout $k < \ell$ et tout $c_k \in H_n(X_k)$.

B. Le théorème de Jordan

On rappelle que si X est un espace compact et si Y est un espace topologique séparé, une application continue $f : X \to Y$ est un plongement (c'est à dire induit un homéomorphisme sur son image) si et seulement si elle est continue et injective.

Proposition 11.20. *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé. Soit Y un espace topologique compact satisfaisant la propriété d'annulation suivante. Pour tout plongement $f : Y \to S^n$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\overline{H}_k(S^n \setminus f(Y)) = 0 \ .$$

Alors $Y \times I$ satisfait aussi cette propriété d'annulation.

Le point clé pour démontrer le théorème de Jordan est le corollaire suivant.

Corollaire 11.21. *Soit $f : D^r \to S^n$ un plongement ($n > 0$ et r un entier quelqconque). Alors $\overline{H}_k(S^n \setminus f(D^r)) = 0$ pour tout k.*

Theorème 11.22 (Théorème de Jordan généralisé)**.** *Soit $0 \leq r < n$ et soit $f : S^r \to S^n$ un plongement. Alors pour tout entier k on a*

$$H_k(S^n \setminus f(S^r)) = H_k(S^{n-r-1}) \ .$$

Nous donnons deux applications topologiques importantes du théorème de Jordan généralisé.

1. **Théorème de Jordan :** si $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ est un plongement et $n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1})$ possède deux composantes connexes par arcs.
2. **Théorème de l'invariance du domaine :** soient V et W deux variétés topologiques de dimension n, et $f : V \to W$ une application continue injective. Alors f est un homéomorphisme local.

12 CW-complexes et homologie cellulaire

Le complexe des chaînes singulières d'un espace est beaucoup trop gros : en chaque degré n, c'est un R-module libre de base les applications continues $\Delta^n \to X$, c'est à dire dans la plupart des cas de rang infini non dénombrable. Il faut donc utiliser les propriétés (P0)-(P6) pour pouvoir calculer explicitement $H_*(X)$.

Cependant, on peut souvent remplacer le complexe des chaînes singulières par un complexe plus petit qui a la même homologie, et à partir duquel il est possible de faire des calculs directs.

12.1 CW-complexes

A. Définition et exemples

Définition 12.1. Un *CW-complexe de dimension* n est un espace X, muni d'une suite de sous-espaces :

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n = X \ ,$$

vérifiant les conditions suivantes.

(i) Le sous-espace X_0 est un espace discret.

(ii) Pour tout $k \geq 1$, l'espace X_k s'obtient à partir de X_{k-1} en recollant des cellules de dimension k. Plus précisément, il existe une famille d'applications de paires $f_\alpha : (D^k_\alpha, S^{k-1}_\alpha) \to (X_k, X_{k-1})$ indexée par un ensemble A_k, où les D^k_α (resp. S^{k-1}_α) sont des copies de D^k, resp S^{k-1}, telles que le diagramme commutatif suivant vérifie la propriété universelle des diagrammes de recollement d'espaces :

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{\alpha\in A_k} S^{k-1}_\alpha \arrow[r, "\bigsqcup f_{\partial\alpha}"] \arrow[d, hook] & X_{k-1} \arrow[d, hook] \\ \bigsqcup_{\alpha\in A_k} D^k_\alpha \arrow[r, "\bigsqcup f_\alpha"] & X_k \end{tikzcd} \ . \qquad (\mathcal{D})$$

Terminologie :

- Le sous-espace X_k s'appelle le *k-ième squelette* du CW-complexe.
- On note
$$e^k_\alpha := f_\alpha(\overset{\circ}{D^k_\alpha}) \ \subset \ X_k$$
Les e^k_α sont les *cellules* de X. Chaque e^k_α est homéomorphe à $\overset{\circ}{D^k_\alpha}$, via f_α. Les cellules (resp. de dimension inférieure ou égale à k) forment une partition de X (resp. de X_k).

- L'application $f_\alpha : D^k_\alpha \to X$ s'appelle l'*application caractéristique* de la cellule e^k_α, et sa restriction $f_{\partial\alpha} : S^{k-1}_\alpha \to X_{k-1}$ s'appelle l' *application d'attachement* de e^k_α.

Un même espace topologique peut être vu de plusieurs manières différentes comme un CW-complexe, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 12.2.

1. Choisissons $x_0 \in S^n$. La sphère S^n, $n \geq 1$, admet une structure de CW-complexe avec une 0-cellule $\{x_0\}$ et une n-cellule attachée à $\{x_0\}$ par l'application constante $f : S^{n-1} \to x_0$. Le k-squelette X_k est donc égal à $\{x_0\}$ pour $k < n$ et à S^n pour $k \geq n$.
2. Supposons qu'on a défini une structure de CW-complexe sur S^{n-1}, $n \geq 1$. On considère S^{n-1} comme l'équateur de S^n. Alors on peut définir une structure de CW-complexe sur S^n telle que $X_{n-1} = S^{n-1}$ (et les cellules et les applications d'attachements proviennent de la structure de CW-complexe de S^{n-1}), $X_n = S^n$ et S^n possède deux n-cellules (l'hémisphère nord et l'hémisphère sud), recollée le long de l'application identité $S^{n-1} \to S^{n-1}$.

Beaucoup d'espaces considérés jusqu'ici dans le cours admettent des structures de CW-complexes.

Exemple 12.3.

1. Un **graphe topologique** est un CW-complexe de dimension 1, dont les 0-cellules sont les sommets et les 1-cellules sont les arêtes.
2. Un **bouquet de sphères** de dimension non nulle admet une structure de CW-complexe, avec une 0-cellule, le point de base du bouquet, et une k-cellule pour chaque sphère de dimension k du bouquet, attachée via l'application constante $S^{k-1} \to \{*\}$. Le squelette de dimension k du bouquet est égal au sous-bouquet contenant les sphères de dimension $\leq k$.
3. L'**espace projectif réel** $X = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ admet une structure de CW-complexe avec $X_0 = \{pt\}$, et pour $k \geq 1$, $X_k = \mathbb{R}\mathrm{P}^k$. Rappelons que $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$ peut s'obtenir comme quotient de S^k par l'identification antipodale. Le $k+1$-squelette s'obtient à partir du k-squelette en recollant une cellule de dimension k via l'application quotient $q : S^k \twoheadrightarrow X_k$.
4. L'**espace projectif complexe** $X = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ admet une structure de CW-complexe avec $X_0 = X_1 = \{pt\}$, et pour $k \geq 1$, $X_{2k} = X_{2k+1} = \mathbb{C}\mathrm{P}^k$. Rappelons que $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$ peut s'obtenir comme quotient de $S^{2k+1} \subset \mathbb{C}^{k+1}$ sous l'action du groupe des racines complexes de l'unité. Le $2k+2$-squelette s'obtient à partir du $2k$-squelette en recollant une cellule de dimension $2k$ via l'application quotient $q : S^{2k+1} \twoheadrightarrow X_{2k}$.

5. Le **tore à g-trous** S_g admet une structure de CW-complexe de dimension 2, dont le 1-squelette est homéomorphe à un bouquet de $2g$ cercles, et dont le 2-squelette s'obtient à partir du 1-squelette en recollant une cellule de dimension 2, via une application $S^1 \to (S^1)^{\vee 2g}$ qui correspond au mot $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ du groupe fondamental du bouquet.
6. Un **polyèdre de** $\mathbb{R}^n$ admet une structure de CW-complexe, dont le k-squelette X_k est la réunion des simplexes de dimension $\leq k$. Le $k+1$-ième squelette s'obtient à partir du k-squelette en recollant les simplexes S de dimension $k+1$ via l'inclusion canonique $\partial S \hookrightarrow X_k$.

B. Propriétés topologiques des CW-complexes

Dans ce paragraphe, on se fixe un CW complexe X de dimension n. Le lemme élémentaire suivant est à l'origine de la lettre 'W' du terme CW-complexe.

Lemme 12.4 (Weak topology). *Une partie A est ouverte (resp. fermée) dans X si et seulement si pour tout k et tout α, $f_\alpha^{-1}(A)$ est un ouvert (resp. fermé) de D^k_α.*

Lemme 12.5. *L'espace X est normal*[12]*, et en particulier séparé.*

La partie (ii) du lemme suivant est à l'origine de la lettre 'C' du terme CW-complexe.

Lemme 12.6. *Une partie A est compacte dans X si et seulement si elle est fermée et contenue dans une réunion finie de cellules. En particulier :*

(i) X est compact si et seulement s'il a un nombre fini de cellules.

*(ii) (**Closure finiteness**) L'adhérence d'une cellule $\overline{e^k_\alpha}$ ne rencontre qu'un nombre fini de cellules.*

L'étude de l'homologie des CW-complexes reposera sur le lemme fondamental suivant.

Lemme 12.7. *L'inclusion $X_k \hookrightarrow X_{k+1}$ est une cofibration et on a un homéomorphisme*

$$X_k/X_{k-1} \approx \bigvee_{\alpha \in A_k} D^k_\alpha / S^{k-1}_\alpha = (S^k)^{\vee \operatorname{card}(A_k)} .$$

12. C'est à dire que (i) les points de X sont fermés, et (ii) si F_1 et F_2 sont deux fermés disjoints de X, alors on peut trouver deux ouverts disjoints $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ tels que $F_i \subset \mathcal{U}_i$ pour tout i.

12.2 Homologie cellulaire

Dans ce paragraphe, on se fixe un CW complexe X de dimension n. Nous allons calculer l'homologie singulière de X à partir de sa structure de CW-complexe.

A. Version abstraite du complexe cellulaire

On commence par quelques propriétés homologiques des k-squelettes.

Lemme 12.8. *Soit X un CW-complexe. Alors pour tout $k \geq 0$, la suite exacte longue de la paire (X_k, X_{k-1}) induit des isomorphismes $H_q(X_{k-1}) \xrightarrow{\simeq} H_q(X_k)$ pour $q \neq k, k-1$ et une suite exacte longue :*

$$0 \to H_k(X_k) \to H_k(X_k, X_{k-1}) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(X_{k-1}) \to H_{k-1}(X_k) \to 0\ .$$

En particulier l'application $H_q(X_k) \to H_q(X)$ induite par l'inclusion est un isomorphisme si $q < k$ et une surjection pour $q = k$.

Définition 12.9. Soit X un espace admettant une structure de CW-complexe, et R un anneau. Le complexe des chaînes cellulaires $C_*^{\mathrm{cell}}(X, R)$ est défini de la façon suivante.

(1) Le R-module $C_n^{\mathrm{cell}}(X, R)$ est égal à $H_n(X_n, X_{n-1}, R)$.

(2) La differentielle $\partial_n^{\mathrm{cell}} : C_n^{\mathrm{cell}}(X, R) \to C_{n-1}^{\mathrm{cell}}(X, R)$ est la composée

$$H_n(X_n, X_{n-1}, R) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X_{n-1}, R) \xrightarrow{H_{n-1}(\mathrm{incl})} H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}, R)\ .$$

Theorème 12.10. *L'homologie du complexe des chaînes cellulaires $C_*^{\mathrm{cell}}(X, R)$ est isomorphe à l'homologie singulière de X.*

B. Version concrète du complexe des chaines cellulaires

Pour faire des calculs pratiques, on utilise souvent la reformulation suivante du complexe des chaînes cellulaires.

Proposition 12.11. *Soit X un CW-complexe. Fixons pour tout n un homéomorphisme $D^n/S^{n-1} \approx S^n$. Alors le complexe des chaînes cellulaires de X est isomorphe au complexe C_*, où*

(1) le R-module C_n est libre de base les cellules e_α^n de dimension n,

(2) si $n \geq 2$, la différentielle $d_n : C_n \to C_{n-1}$ est définie par la formule :

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in A_{n-1}} [\alpha : \beta] e_\beta^{n-1}\ ,$$

où le nombre $[\alpha : \beta] \in \mathbb{Z}$ est égal au degré de l'application composée

$$S_\alpha^{n-1} \xrightarrow{f_{\partial\alpha}} X_{n-1} \xrightarrow{p_\beta} S_\beta^{n-1}\ .$$

(3) la différentielle $d_1 : C_1 \to C_0$ est définie par la formule (on remarque que $f_{\partial\beta}(1)$ et $f_{\partial\beta}(-1)$ sont des 0-cellules de X) :

$$d_1(e^1_\beta) = f_{\partial\beta}(1) - f_{\partial\beta}(-1)\ .$$

Nous pouvons ainsi écrire explicitement le complexe des chaînes cellulaires dans de nombreux cas (dont certains seront traités en TD).

Exemple 12.12. 1. Le complexe cellulaire de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est libre de rang 1 en degré $2k, k \leq n$, et nul dans les autres degrés. La différentielle est nulle. Ainsi :

$$H_i(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, R) = \begin{cases} R & i = 2k,\ 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Le complexe cellulaire de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est libre de rang 1 en degré $k \leq n$, et nul dans les autres degrés. La différentielle $d : C_n \to C_{n-1}$ est égale à la multiplication par $1 + (-1)^n$. En particulier on obtient $H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, R) = R$. Si on note ${}_2R$ les éléments de 2-torsion dans R on a pour $0 < i < n$:

$$H_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, R) = \begin{cases} R/2R & \text{si } i \text{ impair,} \\ {}_2R & \text{si } i \text{ pair.} \end{cases}$$

De plus $H_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, R) = 0$ pour $i > n$ et le dernier degré non nul est donné par la formule :

$$H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, R) = \begin{cases} R & \text{si } n \text{ est impair,} \\ {}_2R & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

3. Le complexe cellulaire du tore à g trous S^g est libre de rang 1 en degrés 0 et 2 et libre de rang $2g$ en degré 1. Les différentielles sont nulles. En particulier :

$$H_i(S_g, R) = \begin{cases} R & i = 0, 2, \\ R^{2g} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Si X est un espace muni d'un triangulation (K, h), alors la triangulation définit une structure de CW-complexe sur X.

Proposition 12.13. *Le complexe cellulaire de X coïncide avec le complexe simplicial $C^{\mathrm{simpl}}(K, R)$.*

On en déduit le résultat (un peu surprenant au premier abord) suivant.

Corollaire 12.14. *L'homologie simpliciale définie à partir d'une triangulation (K, h) de X ne dépend pas de la triangulation (K, h) choisie. Plus précisément, l'homologie simpliciale est isomorphe à l'homologie singulière de X.*

13 Compléments sur l'homologie singulière

13.1 Torsion des modules sur les anneaux principaux

A. Produit tensoriel

Définition 13.1. Soit R un anneau *commutatif*[13], et M, N deux R-modules. Le produit tensoriel $M \otimes_R N$ est le R-module quotient

$$M \otimes_R N := L_{M\times N}/S\ ,$$

où $L_{M\times N}$ est le R-module libre de base les symboles $m \otimes n$, pour $(m, n) \in M \times N$, et S est le sous-groupe abélien engendré par les relations suivantes, pour tous $m, m', r, n, n' \in M^2 \times R \times N^2$:

(i) $(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$

(ii) $m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$

(iii) $m \otimes (rn) = (mr) \otimes n$

(iv) $m \otimes (rn) = r(m \otimes n)$

Le produit tensoriel définit des foncteurs :

$$- \otimes_R N : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}\,, \qquad M \otimes_R - : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}.$$

Proposition 13.2 (propriété universelle)**.** *L'application $\pi : M\times N \to M\otimes_R N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$ est R-bilinéaire. Pour toute application R-bilinéaire $f : M \times N \to Z$, il existe une unique application R-linéaire $\overline{f} : M\otimes_R N \to Z$ telle que $\overline{f} \circ \pi = f$.*

Proposition 13.3. *Le produit tensoriel vérifie les propriétés suivantes :*

1. $N \otimes_R M \simeq M \otimes_R N$,
2. $(M \otimes_R N) \otimes_R P \simeq M \otimes_R (N \otimes_R P)$,
3. $M \otimes_R R \simeq M$,
4. $M \otimes_R (\bigoplus_{i\in J} N_i) \simeq \bigoplus_{i\in J} M \otimes_R N_i$.
5. $M \otimes_R 0 \simeq 0$.

Les propriétés ci-dessus sont indépendant de l'anneau R considéré. Le phénomène suivant constitue cependant une différence très importante entre les produits tensoriels sur $\mathbb{Z}$ (ou des anneaux plus généraux) et les produits tensoriels sur un corps.

13. Il est également possible de définir le produit tensoriel lorsque l'anneau n'est pas commutatif. Dans ce cas on prend M un R-module à droite et N un R-module à gauche. Le produit tensoriel $M \otimes_R N$ n'est qu'un groupe abélien en général. Il est défini comme le quotient $L_{M\times N}/S$ où $L_{M\times N}$ est le groupe abélien libre engendré par $M \times N$ et S le sous-groupe abélien correspondant aux relations (i), (ii) et (iii). Un exercice intéressant consiste à montrer que cette nouvelle définition du produit tensoriel coincide avec la définition 13.1 lorsque R est commutatif.

- Sur un corps $\Bbbk$, le produit tensoriel $-\otimes_{\Bbbk} W$ est *exact*, c'est à dire que si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est une suite exacte courte, alors on conserve une suite exacte courte après tensorisation avec W :

$$0 \to V' \otimes_{\Bbbk} W \to V \otimes_{\Bbbk} W \to V'' \otimes_{\Bbbk} W \to 0\ .$$

- Le résultat précédent reste valable sur un anneau R quelconque si l'on considère le produit tensoriel $-\otimes_R L$ par un R-module libre L. En revanche, on peut trouver des applications injectives $f : M \to M'$ qui ne restent pas injectives après tensorisation par un R-module N. Pour $R = \mathbb{Z}$ par exemple, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$ est injective, mais $f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'application nulle.

Une partie seulement de l'exactitude est préservée par le produit tensoriel en général.

Proposition 13.4 (exactitude à droite). *Si $M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte, alors pour tout N on a une suite exacte*

$$M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0\ .$$

Exemple 13.5. Soit A un groupe abélien, T un groupe abélien de torsion, $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique zéro, n et m des entiers. On a :

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq A/nA$,
2. $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} T = 0$,
3. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(m,n)\mathbb{Z}$.

B. Produit de torsion

Soit R un anneau principal. Pour chaque R-module M, on fixe une suite exacte courte

$$0 \to K_M \xrightarrow{f_M} L_M \xrightarrow{g_M} M \to 0\ ,$$

où L_M est un R-module libre. Comme une sous-module d'un R-module libre est libre, K_M est libre.

Définition 13.6. On appelle produit de torsion de M et N le R-module

$$\mathrm{Tor}^R(M,N) := \mathrm{Ker}\ (f_M \otimes_R N : K_M \otimes_R N \to L_M \otimes_R N)\ .$$

Lemme 13.7. *La definition 13.6 ne dépend pas de la suite exacte courte* $(*)$ *choisie. De plus,* $\mathrm{Tor}^R(M,N)$ *est également isomorphe au noyau de l'application*

$$M \otimes_R f_N : M \otimes_R K_N \to M \otimes_R L_N\ .$$

Exemple 13.8.
1. Si L est libre, $\mathrm{Tor}^R(M,L) = 0$ pour tout M.
2. Si $r \in R$, $\mathrm{Tor}^R(M,R/rR) = \{m \in M\ :\ rm = 0\}$.

3. $\mathrm{Tor}^R(M, \bigoplus_{j\in J} N_j) \simeq \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Tor}^R(M, N_j)$.
4. $\mathrm{Tor}^R(M,N) \simeq \mathrm{Tor}^R(N,M)$.
5. Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro, alors $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{K}) = 0$ pour tout groupe abélien A.

Exercice 13.9. *Calculer* $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *pour tout groupe abélien A.*

La propriété suivant montre que la torsion est la bonne notion pour contrôler le défaut d'exactitude du produit tensoriel.

Proposition 13.10. *Toute suite exacte courte de R-modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ induit une suite exacte longue :*

$$\begin{aligned}0 \to \mathrm{Tor}^R(M',N) \to \mathrm{Tor}^R(M,N) \to &\mathrm{Tor}^R(M'',N) \xrightarrow{\partial} M' \otimes_R N \\ &\to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0\ .\end{aligned}$$

13.2 La formule des coefficients universels

Soit R un anneau commutatif, et A une R-algèbre et M un R-module. L'application :

$$\begin{array}{ccc} A \times M \otimes_R A & \to & M \otimes_R A \\ (a, m\otimes b) & \mapsto & m \otimes ab \end{array}$$

définit une structure de A-module sur $M \otimes_R A$. Le produit tensoriel par A définit donc un foncteur dit *d'extension de scalaires* :

$$-\otimes_R A \quad R\text{-Mod} \quad \to \quad A\text{-Mod}.$$

Ainsi, si C_* est un complexe de R-modules, on peut définir un complexe de A-modules $C_* \otimes_R A$ par extension des scalaires. On a une application A-linéaire qui permet de comparer les homologies des deux complexes :

$$\begin{array}{cccc} \phi : & H_i(C) \otimes_R A & \to & H_i(C \otimes_R A) \\ & [c]\otimes a & \mapsto & [c \otimes a] \end{array}.$$

Theorème 13.11 (des coefficients universels)**.** *Soit R un anneau principal, soit C_* un complexe de R-modules libres et soit A une R-algèbre. On a pour tout i une suite exacte courte de A-modules*

$$0 \to H_i(C) \otimes_R A \xrightarrow{\phi} H_i(C \otimes_R A) \to \mathrm{Tor}^R(H_{i-1}(C), A) \to 0\ ,$$

De plus ϕ admet un rétracte, d'où un isomorphisme de A-modules

$$H_i(C \otimes_R A) \simeq H_i(C) \otimes_R A \oplus \mathrm{Tor}^R(H_{i-1}(C), A)\ .$$

Application à l'homologie singulière.

On peut appliquer ce qui précède au complexe des chaînes singulières d'un espace X. En effet, on a $C_*(X,R)\otimes_R A = C_*(X,A)$. On obtient l'énoncé suivant.

Corollaire 13.12. *Soit X un espace topologique, soit R un anneau principal et soit A une R-algèbre. On a des isomorphismes :*

$$\begin{aligned} &H_0(X;A) \simeq H_0(X,R)\otimes_R A\;,\\ &H_1(X;A) \simeq H_1(X,R)\otimes_R A\;,\\ &H_i(X;A) \simeq H_i(X,R)\otimes_R A \oplus \mathrm{Tor}^R(H_{i-1}(X,R),A) \quad \textit{si } i\geq 2. \end{aligned}$$

Deux cas particuliers donnent des formules particulièrement simples.

Corollaire 13.13. *Soit X un espace topologique. Si $\Bbbk$ est un corps et A est une $\Bbbk$-algèbre, alors l'application $\phi : H_n(X;\Bbbk)\otimes_{\Bbbk} A \to H_n(X;A)$ est un isomorphisme pour tout $n\geq 0$.*

Corollaire 13.14. *Soit X un espace topologique. Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique nulle, alors l'application $\phi : H_n(X;\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk \to H_n(X;\Bbbk)$ est un isomorphisme pour tout $n\geq 0$.*

Finalement, nous mentionnons une application de la formule des coefficients universels à la théorie du degré. On rappelle que le degré d'une application continue $f : S^n\to S^n$ est l'entier $\deg(f)\in\mathbb{Z}$ tel que l'application $\overline{H}_n(f) : \overline{H}_n(S^n,\mathbb{Z})\to \overline{H}_n(S^n,\mathbb{Z})$ soit la multiplication par $\deg(f)$.

Corollaire 13.15. *Soit $f : S^n\to S^n$ une application continue. Alors pour tout anneau R, l'application $\overline{H}_n(f) : \overline{H}_n(S^n,R)\to\overline{H}_n(S^n,R)$ coincide avec la multiplication par l'entier* $\deg(f)$.

13.3 Comparaison homotopie/homologie

On se fixe pour chaque entier $n\geq 1$ un générateur de $\gamma_n\in H_n(S^n,\mathbb{Z})$. Soit (X,x) un espace pointé. L'*application de Hurewicz* est définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hur}_n : & \pi_n(X,x) & \to & H_n(X,\mathbb{Z}) \\ & [f] & \mapsto & H_n(f)(\gamma_n) \end{array}$$

Lemme 13.16. *L'application de Hurewicz est un morphisme de groupes.*

Comme application du lemme précédent, on peut montrer que $\pi_n(S^n,*)$ contient un groupe cyclique infini pour tout n. En effet, pour $X=S^n$ l'application identité $\mathrm{Id} : S^n\to S^n$ induit l'identité en homologie de degré n, donc le morphisme de Hurewicz est un morphisme surjectif de groupes

$$\pi_n(S^n,*) \twoheadrightarrow H_n(S^n,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}\;.$$

Le morphisme de Hurewicz permet de relier le π_1 et le H_1 d'un espace.

Theorème 13.17. *Si X est un espace connexe par arcs, le morphisme de Hurewicz induit un isomorphisme : $\pi_1(X,x)_{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\simeq} H_1(X,\mathbb{Z})$.*

Il existe un énoncé pour les degrés supérieurs. Le **théorème de Hurewicz** affirme que si X est un espace connexe par arcs dont les groupes d'homotopie $\pi_i(X,x)$ sont triviaux pour $0 < i \leq n$, alors le morphisme de Hurewicz induit un isomorphisme $\pi_{n+1}(X,x) \simeq H_{n+1}(X,\mathbb{Z})$.

Quatrième partie
Un aperçu de la cohomologie

14 Un aperçu de la cohomologie (hors programme pour l'examen)

L'objectif de cette section finale, hors programme pour l'examen, est de donner un bref aperçu de la cohomologie. Contrairement au matériel présenté dans les autres sections, la plupart des énoncés présentés ici ont été donnés en cours sans démonstration (mais pas sans explication).

14.1 Préliminaires algébriques

A. Foncteurs contravariants

Définition 14.1. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur contravariant* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée :

(i) pour chaque objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$,

(ii) pour chaque $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, d'un morphisme $F(f) : F(Y) \to F(X)$,

telles que les conditions suivantes sont satisfaites.

(1) F préserve la loi de composition $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

(2) F préserve les morphismes identités $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$.

On observe que les foncteurs contravariants ne sont pas des foncteurs au sens de la définition 8.3.

Exemple 14.2. 1. Soit R un anneau commutatif et M un R-module. On a un foncteur contravariant :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Hom}_R(-,M) : & R\text{-Mod} & \to & R\text{-Mod} \\ & N & \mapsto & \mathrm{Hom}_R(N,M) \\ & N \xrightarrow{f} N' & \mapsto & \mathrm{Hom}_R(N',M) \xrightarrow{-\circ f} \mathrm{Hom}_R(N,M) \end{array}.$$

2. Si X est un espace, on note $\mathcal{C}(X)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues $X \to \mathbb{R}$. On a un foncteur contravariant :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{C} : & \mathcal{T}op & \to & \mathbb{R}\text{-Alg} \\ & X & \mapsto & \mathcal{C}(X) \\ & X \xrightarrow{f} Y & \mapsto & \mathcal{C}(Y) \xrightarrow{-\circ f} \mathcal{C}(X) \end{array}.$$

B. Deux conventions pour les complexes

Rappelons qu'un complexe C est un diagramme de R-modules de la forme suivante, dans lequel la composée de deux morphismes consécutifs (appelés différentielles) quelconques est l'application nulle

$$C := \qquad \dots \xrightarrow{j} K \xrightarrow{k} L \xrightarrow{\ell} M \xrightarrow{m} N \xrightarrow{n} \dots .$$

Dans les sections 1 à 13 du cours, nous avons utilisé la **notation homologique** pour les complexes. C'est-à-dire que les objets sont dotés d'un *degré homologique*, noté en indice, tel que la différentielle *diminue* les degrés de 1. Par exemple, si M est en degré 0, alors le complexe C ci-dessus est noté :

$$\dots \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \dots .$$

avec $C_2 = K$, $C_1 = L$, $C_0 = M$, $C_{-1} = N$.

Il existe une autre convention en algèbre homologique, la **notation cohomologique**. Dans cette notation, les objets sont dotés d'un *degré cohomologique*, noté en exposant, tel que la différentielle *augmente* les degrés de 1. Par exemple, si M est en degré zéro, alors le complexe C ci-dessus est noté :

$$\dots \xrightarrow{d^{-3}} C^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \dots .$$

avec $C^{-2} = K$, $C^{-1} = L$, $C^0 = M$, $C^{-1} = N$.

Tous les énoncés et toutes les définitions que nous avons présentés avec les conventions homologiques peuvent être traduits dans les conventions cohomologiques en utilisant les formules :

$$\boxed{C^i = C_{-i} \quad \text{et} \quad H^i(C) = H_{-i}(C)} .$$

Par exemple, une suite exacte courte de complexes

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

induit une suite exacte longue en cohomologie :

$$\dots \to H^{n-1}(C'') \xrightarrow{\delta} H^n(C') \to H^n(C) \to H^n(C'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(C') \to \dots .$$

On remarque qu'avec les conventions homologiques, tous les connectants des suites exactes longues diminuent le degré de 1 (comme les différentielles). Avec les conventions cohomologiques, tous les connectant augmentent donc le degré de 1 (comme les différentielles).

14.2 La cohomologie singulière et ses outils de calculs

A. Définition

Définition 14.3. Soit R un anneau commutatif, et soit (X, A) une paire d'espaces. Le *complexe des cochaînes singulières* est le complexe $C^*(X, A; R)$ dont les objets sont définis par

$$C^n(X, A; R) := \mathrm{Hom}_R(C_n(X, A; R), R)$$

et dont les différentielles $\partial^n : C^n(X, A; R) \to C^{n+1}(X, A; R)$ sont duales des différentielles du complexe des chaînes singulières. Le n-ième R-module de cohomologie du complexe $C^*(X, A; R)$ est noté $H^n(X, A; R)$ et est appelé *n-ième R-module de cohomologie singulière de la paire* (X, A). La cohomologie de la paire $(X, \emptyset)$ est souvent noté plus simplement sous la forme $H^n(X; R)$.

Si X est un ensemble, on note RX le R-module libre de base $(b_x)_{x \in X}$, et si M est un R-module, on note $\mathcal{F}(X, M)$ le R-module des fonctions $f : X \to M$. Si $f : RX \to M$ est une fonction R-linéaire, sa restriction à l'ensemble $X \simeq \{b_x : x \in X\} \subset RX$ définit une fonction $f : X \to M$. On obtient ainsi un isomorphisme de R-modules :

$$\mathrm{Hom}_R(RX, M) \simeq \mathcal{F}(X, M) .$$

Comme les R-modules $C_n(X, R)$ sont les R-modules libres engendré par l'ensemble $\mathrm{Sg}_n(X)$ des n-simplexes singuliers, on peut appliquer l'isomorphisme précédent pour reformuler le complexe des cochaînes singulières.

(i) Le R-module $C^n(X, A; R)$ est le R-modules des fonctions $f : \mathrm{Sg}_n(X) \to R$ qui s'annulent sur le sous-ensemble $\mathrm{Sg}_n(A)$.

(ii) La différentielle d'une fonction f est définie par la formule suivante (dans laquelle σ désigne un $n+1$-simplexe singulier, et $d^i : \Delta^n \hookrightarrow \Delta^{n+1}$ désigne l'inclusion du simplexe standard de dimension n comme la i-ième face du simplexe standard de dimension $n+1$) :

$$(\partial^n f)(\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(\sigma \circ d^i) .$$

B. Propriétés de calcul

Commençons par deux propriétés importantes du foncteur de dualité.

Lemme 14.4. *1. Soit $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ est une suite exacte courte de complexes de R-modules, tels que C'' soit un complexe de R-modules libres. Alors en appliquant le foncteur* $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ *on obtient une suite* exacte *courte de complexes :*

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C'', R) \to \mathrm{Hom}_R(C, R) \to \mathrm{Hom}_R(C', R) \to 0 .$$

2. *Si* $f, g : C \to D$ *sont deux morphismes de complexes homotopes, alors les morphismes de complexes* $\mathrm{Hom}_R(f, R), \mathrm{Hom}_R(g, R) : \mathrm{Hom}_R(D, R) \to \mathrm{Hom}_R(C, R)$ *sont homotopes.*

En utilisant le lemme 14.4, on peut imiter les démonstrations des propriétés de calcul de l'homologie singulière pour obtenir des propriétés analogues pour la cohomologie singulière. Pour être plus précis, la cohomologie singulière vérifie les propriétés fondamentales suivantes.

Fonctorialité (P0). La cohomologie singulière définit des foncteurs contravariants :

$$H^n : \mathcal{T}op_2 \to R\text{-Mod} .$$

Cohomologie du point (P1).

$$H^n(\{pt\}) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Homologie et composantes connexes par arcs (P2). Si X est un espace topologique et X_α ses composantes connexes par arcs, alors

$$H^n(X) \simeq \prod_\alpha H^n(X_\alpha) .$$

Invariance homotopique (P3). Deux applications de paires $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotopes par une homotopie de paires induisent la même application en cohomologie. En particulier une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme en cohomologie singulière.

Suite exacte longue d'une paire (P4). Pour toute paire d'espaces (X, A), on a une suite exacte longue (où les applications qui ne sont pas des connectants sont induites par les inclusions de paires) :

$$\begin{aligned} &0 \to H^0(X, A) \to H^0(X) \to H^0(A) \to \dots \\ &\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(X, A) \to H^n(X) \to H^n(A) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(X, A) \to \dots . \end{aligned}$$

Excision (P5). Soit (X, A) une paire d'espaces, et $B \subset A$ tel que $\overline{B} \subset \overset{\circ}{A}$. Alors l'inclusion de paires $(X \setminus B, A \setminus B) \hookrightarrow (X, A)$ induit pour tout n un isomorphisme :

$$H^n(X, A) \xrightarrow{\simeq} H^n(X \setminus B, A \setminus B) .$$

Mayer-Vietoris (P5'). Soit X un espace, $A, B \subset X$ tels que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$. Alors on a une suite exacte longue :

$$\begin{aligned} \dots \to H^{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(X) \xrightarrow{(H^n(\iota_A^X), H^n(\iota_B^Y))} H_n(A) \oplus H_n(B) \\ \xrightarrow{H^n(\iota^A_{A\cap B}) - H^n(\iota^B_{A\cap B})} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A \cap B) \to \dots \end{aligned}$$

Interprétation de H^0 pour tout espace X, le R-module $H^0(X;R)$ est isomorphe à $\mathcal{F}(\pi_0(X),R)$.

Ces propriétés permettent de calculer la cohomologie d'un espace selon une démarche analogue à celle utilisée pour les calculs d'homologie.

Exemple 14.5.

1. Soit $n>0$. Alors
$$H^i(S^n)=\begin{cases}R & \text{si } i=0 \text{ ou } i=n,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2. Si (X,x) et (Y,y) sont deux espaces pointés, tels que x (resp. y) admet un voisinage $\mathcal{U}_x$ (resp. $\mathcal{U}_y$) qui se rétracte par déformation sur x (resp. y). Alors pour tout $n>0$ on a un isomorphisme :
$$H^n(X\vee Y)\xrightarrow{\simeq} H^n(X)\oplus H^n(Y)\ .$$

C. Le lien avec l'homologie singulière par coefficients universels

Soit R un anneau principal, A une R-algèbre et C un complexe de R-modules. La formule des coefficients universelle exposée dans la section 13.2 explique comment calculer l'homologie du complexe $C\otimes_R A$ en fonction de l'homologie du complexe C et des A-modules de torsion $\mathrm{Tor}^R(A,H_n(C))$.

Il existe un énoncé analogue qui permet de calculer l'homologie du complexe $\mathrm{Hom}_R(C,A)$ à partir de l'homologie du complexe C. Pour cette formule, le rôle des A-modules de torsion est rempli par les A-modules d'extension.

Définition 14.6. Soit R un anneau principal, et M,N deux R-modules. Soit $0\to K\xrightarrow{f} L\to M\to 0$ une suite exacte courte dans laquelle K et L sont deux R-modules libres. Le R-module
$$\mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_R(f,R))=\frac{\mathrm{Hom}_R(K,R)}{\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_R(f,R)}$$
ne dépend pas (à isomorphisme près) de la suite exacte courte choisie. On l'appelle le R-module d'extension de M par N et on le note $\mathrm{Ext}_R(M,N)$.

Comme pour les cas des modules de torsion, on peut facilement calculer $\mathrm{Ext}_R(M,N)$ dans de nombreux cas.

Exemple 14.7.

1. Si $\Bbbk$ est un corps, alors pour tout couple (V,W) d'espaces vectoriels, on a $\mathrm{Ext}^{\Bbbk}(V,W)=0$.
2. Pour tous les R-modules M,M' et N on a :
$$\mathrm{Ext}_R(M\oplus M',N)\simeq \mathrm{Ext}_R(M,N)\oplus\mathrm{Ext}_R(M',N)\ .$$

3. Si $R = \mathbb{Z}$, p et q sont deux entiers strictement positifs

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(p,q)\mathbb{Z} \;,\\ &\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = 0 \;,\\ &\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \;.\end{aligned}$$

Le théorème suivant provient d'une formule de coefficients universels analogue à celle du théorème 13.11.

Theorème 14.8. *Soit X un espace topologique, soit R un anneau principal et soit A une R-algèbre. On a des isomorphismes :*

$$\begin{aligned}&H^0(X;A) \simeq \mathrm{Hom}_R(H_0(X,R),A) \;,\\ &H^1(X;A) \simeq \mathrm{Hom}_R(H_1(X,R),A) \;,\\ &H^i(X;A) \simeq \mathrm{Hom}(H_i(X,R),A) \oplus \mathrm{Ext}_R(H_{i-1}(X,R),A) \quad \textit{si } i \geq 2.\end{aligned}$$

En particulier, si $\Bbbk$ est un corps, on a un isomorphisme :

$$H^i(X;\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H_i(X;\Bbbk),\Bbbk) \;.$$

D. Le lien avec l'homologie singulière par dualité de Poincaré

La section précédente donne un lien algébrique entre l'homologie et la cohomologie d'un espace. La dualité de Poincaré donne un second lien entre homologie et cohomologie, de nature plus géométrique, lorsque l'espace considéré est une variété topologique. Pour parler de dualité de Poincaré, nous devons tout d'abord évoquer certaines propriétés fondamentales de l'homologie des variétés topologiques (rappelons que par définition les variétés topologiques sont séparées).

Theorème 14.9. *Soit M une variété topologique connexe de dimension n.*

1. *Pour $i > n$, $H_i(M;\mathbb{Z}) = 0$.*
2. *Pour $i = n$, on a :*

$$H_n(M;\mathbb{Z}) = \begin{cases}\mathbb{Z} \textit{ ou } 0 & \textit{si } M \textit{ est compacte,}\\ 0 & \textit{si } M \textit{ n'est pas compacte.}\end{cases}$$

Une variété topologique compacte de dimension n est dite *orientable* si $H_n(M;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. En géométrie différentielle, on dispose déjà d'une notion d'orientabilité pour les variétés de dimension n. Plus précisément, une variété différentielle M est orientable si elle possède un atlas $(\mathcal{U}, \phi_U)$ dont les changement de cartes $\psi_V^{-1} \circ \phi_U$ sont des difféomorphismes à jacobien positif.

Theorème 14.10. *Soit M une variété différentielle de dimension n, compacte et connexe. Alors M est orientable au sens de la géométrie différentielle si et seulement si $H_n(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

Si M une variété topologique compacte connexe orientable de dimension n, le groupe abélien $H_n(M;\mathbb{Z})$ possède deux générateurs. La variété est dite *orientée* lorsque l'on choisit un générateur. Le générateur choisi s'appelle la classe fondamentale de M et se note $[M]$.

Soient k et n deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Il existe un accouplement bilinéaire, appelé *cap produit* :

$$\cap : H^\ell(X;\mathbb{Z}) \times H_n(X;\mathbb{Z}) \to H_{n-\ell}(X;\mathbb{Z})$$

Cet accouplement peut être pensé comme une version discrète de l'intégrale des formes différentielles. Notons $\alpha_k : \Delta^k \to \Delta^n$ et $\beta_k : \Delta^{n-k} \to \Delta^n$ les applications affines telles que

$$\begin{cases} \alpha_k(e_i) = e_i & \text{pour } 0 \leq i \leq k, \\ \beta_k(e_i) = e_{i+k} & \text{pour } 0 \leq i \leq n-k. \end{cases}$$

Alors le cap produit $[f] \cap [z] = [f \cap z]$ est défini pour tout cycle $z = \sum \lambda_i \sigma_i \in C_k(X;\mathbb{Z})$ et tout cocycle f par la formule :

$$f \cap \left(\sum \lambda_i \sigma\right) = \sum \lambda_i f(\sigma_i \circ \alpha_\ell) \sigma_i \circ \beta_\ell$$

Theorème 14.11 (Dualité de Poincaré). *Soit M une variété topologique compacte de dimension n, munie d'une classes fondamentale $[M]$. Alors pour tout $k \leq n$ le cap produit avec $[M]$ induit un isomorphisme :*

$$H^k(M;\mathbb{Z}) \xrightarrow[\simeq]{-\cap[M]} H_{n-k}(M;\mathbb{Z}) .$$

14.3 Le cup produit

A. Définition et premières propriétés

Soit R un anneau, et soit X un espace topologique et A, B deux parties de X. Il existe un produit R-bilinéaire, appelé cup produit

$$\cup : H^i(X,A;R) \times H^j(X,B;R) \to H^{i+j}(X, A \cup B; R) .$$

Le cup produit est défini par $[f] \cup [g] = [f \cup g]$ où $f \cup g$ est la forme définie sur les $(i+j)$-simplexes σ par :

$$(f \cup g)(\sigma) = f(\sigma \circ \alpha_i) g(\sigma \circ \beta_i) .$$

On note $H^*(X,A;R)$ le R-module $\bigoplus_{i\geq 0} H^i(X,A;R)$, muni du cup produit. On démontre que c'est une R-algèbre associative, commutative au sens gradué (c'est à dire que si $x \in H^k(X,A;R)$ et $y \in H^\ell(X,A;R)$ alors $x \cup y = (-1)^{k\ell} y \cup x$). De plus, le morphisme $H^*(f) : H^*(Y,B;R) \to H^*(X,A;R)$ induit par une application de paires $f : (X,A) \to (Y,B)$ est un morphisme de R-algèbres. La cohomologie singulière définit donc un foncteur :

$$H^*(-;R) : \mathrm{T}op_2 \to \text{ } R\text{-algèbres graduées commutatives} .$$

B. Applications du cup produit

Le cup produit est d'une grande aide dans les calculs pratiques de cohomologie. Il contient également des informations topologiques sur l'espace X sous-jacent, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 14.12. *Si X est un espace topologique qui possède un recouvrement par n ouverts contractiles, alors quelles que soient les classes $c_1, \ldots, c_n$, on a $c_1 \cup \cdots \cup c_n = 0$.*

Le cup produit permet de distinguer des espaces que la cohomologie singulière seule ne peut pas distinguer.

Exemple 14.13. Soit n un entier strictement positif. Les deux espaces $S^n \times S^n$ et $S^n \vee S^n \vee S^{2n}$ ont des R-modules de cohomologie singulière isomorphes. Plus précisément :

$$H^k(X; R) = \begin{cases} R & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = 2n, \\ R \oplus R & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le cup produit $H^n(X; R) \times H^n(X; R) \to H^{2n}(X; R)$ est nul si $X = S^n \vee S^n \vee S^{2n}$ et est surjectif si $X = S^n \times S^n$.

C. Comparaison avec la cohomologie de De Rham

On note $H^*_{DR}(M)$ la cohomologie de De Rham d'une variété différentielle M. Cette théorie de cohomologie est définie en utilisant la structure differentielle de M. Le théorème suivant montre cependant que cette cohomologie ne dépend pas de la struture différentielle de M, mais seulement de la topologie de M.

Theorème 14.14 (De Rham)**.** *Soit M une variété différentielle de dimension n. On a un isomorphisme d'anneaux gradués :*

$$H^*_{DR}(M) \simeq H^*(M; \mathbb{R}) .$$