Topologie algébrique.

Antoine Touzé

6 février 2014

Ceci est un polycopié...

Ce document est le polycopié du cours de topologie algébrique de deuxième année de l'ENS (version 2013-2014). Il contient les énoncés principaux du cours (présentés grosso modo dans le même ordre que dans le cours, mais donnés sans les démonstrations) et un certain nombre d'exemples essentiels et d'exercices basiques, certains traités en cours, d'autres en travaux dirigés.

Contenu du cours

Le cours est une *introduction* à la topologie algébrique. Il ne prétend pas être exhaustif sur tel ou tel aspect de la topologie algébrique, mais il vise plutôt à présenter un ensemble de techniques basiques de la topologie algébrique (groupe fondamental, revêtements, homologie), applicables à des problèmes de topologie, d'algèbre, ou de géométrie. Dans cette optique, le cours présente un certain nombre d'applications de la topologie algébrique[1] parmi lesquelles on trouve des théorèmes aussi divers que (liste non exhaustive) :

- le théorème de D'Alembert-Gauss (algèbre),
- une CNS d'existence du logarithme complexe sur un ouvert (analyse complexe),
- le théorème de Nielsen-Schreier (théorie des groupes),
- le théorème de Brouwer (topologie),
- les théorèmes d'invariance du bord, de la dimension, et du domaine (topologie),
- le théorème de Jordan généralisé (topologie),

Le cours évoque aussi quelques problèmes actuels ou théorèmes récents en topologie algébrique tels que la conjecture de Poincaré (5.3E), la conjecture de triangulation (section 10.1) ou l'homotopie des sphères (dernière section).

[1]Pour nous, une application de la topologie algébrique est un théorème dont l'énoncé n'emploie pas de terme de la topologie algébrique, mais dont la démonstration repose sur des techniques de topologie algébrique.

Le cours est principalement basé sur trois livres de référence suivants (dont le plus accessible pour un débutant est le livre de Félix et Tanré).

- Bredon, Topology and geometry, GTM 139, Springer-Verlag, 1993.
- Félix, Tanré, topologie algébrique, dunod, 2010.
- Hatcher, Algebraic topology, Cambridge University Press, 2002.

Certaines parties (ou exercices de TD) ont également été inspirées par les sources secondaires suivantes.

- Godbillon, Éléments de topologie algébrique, Hermann, 1971.
- Milnor, Differential topology fourty-six years later, notices of the AMS, 2011.
- Moise, Geometric topology in dimension 2 and 3, GTM 47, Springer-Verlag, 1977.
- Munkres, Topology : a first course. Prentice-Hall, 1975.
- Prasolov, Elements of combinatorial and differential topology. Graduate Studies in Mathematics, 74, AMS, 2006.
- Spanier, Algebraic topology. Corrected reprint. Springer-Verlag, 1981.
- Tom Dieck, Algebraic topology. EMS Textbooks in Mathematics, 2008.

Table des matières

Première partie

Topologie et homotopie

1 Rappels/Compléments de topologie

Dans ce cours, un espace topologique sera souvent simplement appelé un *espace*. Dans tout le cours, on utilisera les notations classiques suivantes. On note $\{\mathrm{pt}\}$ l'espace topologique consitué d'un seul point. On note I l'intervalle $[0,1]$, et on appelle chemin d'un espace X une application continue $\gamma : I \to X$. Pour tout $n \geq 1$, on considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. On note :

1. $S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid ||u||_2 = 1\}$ la sphère unité (en particulier S^0 est la réunion disjointe de deux points),
2. $D^n = \{u \in \mathbb{R}^n \mid ||u||_2 \leq 1\}$ le disque unité,
3. $\overset{\circ}{D^n} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid ||u||_2 < 1\}$ l'intérieur du disque unité.

1.1 Espaces topologiques homéomorphes

Définition 1.1. Deux espaces X, Y sont *homéomorphes* s'il existe une bijection continue $f : X \to Y$ d'inverse continu. Une bijection continue d'inverse continu est appelé un *homéomorphisme*.

Deux espaces homéomorphes sont complètement indiscernables du point de vue topologique.

Exemple 1.2. On dispose des exemples classiques suivants (dont certains seront traités en exercice)

1. $\overset{\circ}{D^n}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $x \in S^{n-1}$. Alors $S^{n-1} \setminus \{x\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.
3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni de deux normes distinctes N et N'. Alors les boules ouvertes (resp. fermées) de rayon r pour la norme N sont homéomorphes aux boules ouvertes (resp. fermées) de rayon r pour la norme N'.
4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension n, et K un ensemble convexe, fermé, borné, d'intérieur non vide. Alors K est homéomorphe à D^n, la frontière ∂K est homéomorphe à S^{n-1} et l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ est homéomorphe à $\overset{\circ}{D^n}$.

Dans la définition d'homéomorphisme, il est important que l'inverse de la bijection soit continu. Il existe un critère d'homéomorphie pratique pour se dispenser de vérifier qu'un espace que l'inverse est continu. Pour cela, on rappelle deux définitions.

Définition 1.3. Un espace X est *compact*[2] si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un recouvrement fini. Un espace X est *séparé* (ou *Hausdorff*) si pour tout couple de points x, y on peut trouver des ouverts U_x et U_y disjoints tels que $x \in U_x$ et $y \in U_y$.

Proposition 1.4 (Critère d'homéomorphie)**.** *Si X est compact et Y est séparé, alors toute bijection continue $f : X \to Y$ est un homéomorphisme.*

Question 1.5. *Trouvez un contre-exemple à la proposition précédente si X n'est pas compact, ou si Y n'est pas séparé.*

La notion d'homéomorphisme permet de définir les variétés topologiques.

Définition 1.6. On appelle *variété topologique de dimension n* un espace X dont tout point possède un voisinage homéomorphe a l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Par exemple, S^n, la frontière d'un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^{n+1}$, ou un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sont des variétés topologiques de dimension n. Une variété différentielle de dimension n (cf. le cours de géométrie différentielle) est une variété topologique de dimension n.

Remarque 1.7. Nous démontrerons dans la suite du cours que la dimension d'une variété topologique est unique, c'est à dire que si M est à la fois une variété topologique de dimension n et de dimension k alors $n = k$.

1.2 Espaces topologiques quotients

Définition 1.8. Soit X un espace et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble X. On note $X/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence et $q : X \twoheadrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. La *topologie quotient* sur $X/\mathcal{R}$ est la topologie telle que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$ si et seulement si $q^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de X.

Le quotient d'un espace compact est compact. Par contre, le quotient d'un espace séparé peut ne pas être séparé (Exercice : donnez un exemple de ce phénomène).

Proposition 1.9 (Propriété universelle de la topologie quotient)**.** *Soit X un espace muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Pour toute $f : X \to Y$ continue et constante sur les classes d'équivalences, il existe une unique $\overline{f} : X/\mathcal{R} \to Y$ continue telle que $f = \overline{f} \circ q$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/\mathcal{R} \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Dans la pratique, on utilise souvent la topologie quotient pour construire de nouveaux espaces. Nous donnons ci-dessous trois situations typiques.

[2] Dans ce cours, nous ne supposons pas que les espaces compacts sont séparés.

A. Écrasement d'un sous-espace

Soit X un espace et $A \subset X$. On note X/A l'espace quotient de X par la relation

$$x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad x, y \in A^2 \text{ ou } x = y\ .$$

Dans l'espace X/A, les éléments de A sont identifiés à un point.

Exemple 1.10. Le quotient D^n/S^{n-1} est homéomorphe à S^n.

Exemple 1.11 (Bouquet d'espaces)**.** Soient $(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces pointés (c'est à dire qu'on distingue un point de chaque espace, $x_\alpha \in X_\alpha$). Le *bouquet* $\bigvee_{\alpha\in E} X_\alpha$ est l'espace obtenu comme quotient de la réunion disjointe[3] $\bigsqcup_{\alpha\in E} X_\alpha$ en écrasant le sous-ensemble $\{x_\alpha\ |\alpha \in E\}$.

Exemple 1.12 (Cone)**.** Le cone d'un espace X est l'espace $CX := X \times [0,1]/X \times \{0\}$. Le cone de S^{n-1} est homéomorphe à D^n.

B. Actions de groupes

Soit X un espace, et G un groupe agissant sur l'ensemble X. On note alors X/G l'espace quotient de X par la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\exists g \in G$, $gx = y$.

Exemple 1.13.

1. Le groupe discret $(\mathbb{Z}^n, +)$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par translations. Le quotient $T^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ s'appelle le tore de dimension n. L'espace T^n est homéomorphe à $(S^1)^{\times n}$.
2. Soit $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le groupe multiplicatif $\Bbbk \setminus \{0\}$ agit par multiplication sur $\Bbbk^{n+1} \setminus \{0\}$. L'espace quotient $\Bbbk^{n+1} \setminus \{0\}/\Bbbk \setminus \{0\}$ s'appelle l'espace projectif de dimension n sur $\Bbbk$, et se note $\Bbbk\mathrm{P}^n$, ou $\mathrm{P}^n(\Bbbk)$.

Exercice 1.14. *Montrez que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est homéomorphe au quotient de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ par l'action du groupe à deux éléments $\{\pm 1\}$, agissant sur S^n par multiplication. Montrez que $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est homéomorphe au quotient de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par l'action du groupe S^1 des unités de $\mathbb{C}$, agissant par multiplication.*

Exercice 1.15. *Montrez que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, resp. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est une variété topologique séparée et compacte de dimension n, resp. $2n$.*

[3] La réunion disjointe des ensembles X_α est munie de la topologie dont les ouverts sont les réunions disjointes des ouverts des X_α.

C. Recollement d'espaces

Soit $f_1 : A \to X_1$ et $f_2 : A \to X_2$ deux applications continues. On note $X_1 \cup_{f_1,f_2} X_2$, ou souvent plus simplement $X_1 \cup_A X_2$, l'espace quotient de la réunion disjointe $X_1 \sqcup X_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $f_1(a)\mathcal{R}f_2(a)$, $a \in A$.

De manière explicite, $x \in X_i$ et $y \in X_j$, $i, j \in \{1, 2\}$ sont équivalents si et seulement s"il existe un zig-zag (avec $a_i \in A$ et $x_i \in X_1 \sqcup X_2$)

$$\begin{tikzcd}
& a_1 \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_{1-i}"] & & a_2 \arrow[dl, "f_i"'] & \cdots & a_{k-1} \arrow[dr, "f_j"] & & a_k \arrow[dl, "f_{1-j}"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
x & & x_1 & & & & x_{k-1} & & y
\end{tikzcd}$$

Notons $j : X \to X \cup_A X'$ et $j' : X' \to X \cup_A X'$ les applications continues qui envoient un point x sur sa classe d'équivalence dans $X \sqcup X'$.

Proposition 1.16 (Propriété universelle du recollement)**.** *Soient $f : A \to X$ et $f' : A \to X'$ deux applications continues. Pour tout espace Z et toutes $\phi : X \to Z$ et $\phi' : X \to Z'$ continues telles que $\phi \circ f = \phi' \circ f'$, il existe une unique $\Phi : X \cup_A X' \to Z$ telle que $\Phi \circ j = \phi$ et $\Phi \circ j' = \phi'$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "j"] \arrow[ddr, "\phi"] & \\
X' \arrow[r, "j'"] \arrow[drr, "\phi'"'] & X \cup_A X' \arrow[dr, dashed, "\exists!\Phi"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Détaillons une situation importante de recollement, qui sert fréquemment en pratique pour fabriquer des espaces dont on contrôle bien la topologie.

Définition 1.17 (Recollement d'une cellule)**.** Soit X un espace et $f : S^{n-1} \to X$ une application continue. On note $\iota : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ l'inclusion canonique. L'espace quotient $X \cup_{f,\iota} D^n$ est souvent noté $X \cup_f D^n$. On dit que cet espace est obtenu à partir de X en recollant une cellule de dimension n. L'application f s'appelle l'application d'attachement de la cellule.

Exemple 1.18. On dispose des exemples élémentaires suivants

1. S^n est homéomorphe à $\{\mathrm{pt}\} \cup_f D^n$, où f est l'application constante
2. S^n est homéomorphe à $D^n \cup_f D^n$, où $f = \iota$ (l'inclusion canonique).
3. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \cup_f D^n$, où f est l'application quotient $S^{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. De même, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \cup_f D^{2n}$.

L'exercice suivant fournit une description assez explicite de l'espace obtenu par recollement d'une cellule.

Exercice 1.19. *Soit X un espace et $f : S^{n-1} \to X$ une application continue. On note $j : X \to X \cup_f D^n$ et $j' : D^n \to X \cup_f D^n$ les deux applications canoniques. Vérifier les propriétés suivantes.*

1. *$X \cup_f D^n$ est la réunion des deux sous ensembles $j(X)$ et $j'(\overset{\circ}{D^n})$, qui sont disjoints.*
2. *le sous-ensemble $j(X)$ est un fermé de X et j induit un homéomorphisme de X sur $j(X)$. (On peut donc identifier X à un sous-espace fermé de $X \cup_f D^n$).*
3. *$j' : D^n \to X \cup_f D^n$ induit un homéomorphisme de $\overset{\circ}{D^n}$ sur $j'(\overset{\circ}{D^n})$.*
4. *L'espace X est compact (resp. séparé) si et seulement si $X \cup_f D^n$ est compact (resp. séparé).*

2 Homotopie

2.1 Type d'homotopie

Définition 2.1. Soient $f, g : X \to Y$ des applications continues. On dit que *f est homotope à g* s'il existe une application $H : X \times I \to Y$ continue telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. Une telle application H s'appelle *une homotopie entre f et g*. On note $f \sim g$, ou $f \sim_H g$ lorsque l'on veut préciser l'homotopie.

On note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X vers Y.

Lemme 2.2. *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur $C(X, Y)$.*

Lemme 2.3. *La relation d'homotopie est compatible avec la composition des applications continues (i.e. si $f \sim g$ et $f' \sim g'$ alors $f \circ f' \sim g \circ g'$).*

La notion suivante est plus grossière que la notion d'homéomorphisme, et permet beaucoup plus de souplesse dans la manipulation des espaces topologiques. C'est une notion fondamentale en topologie algébrique.

Définition 2.4. Deux espaces X, Y ont *même type d'homotopie* (on dit aussi que X et Y sont *homotopiquement équivalents*) s'il existe une application $f : X \to Y$ et une application $g : X \to Y$ telles que $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ et $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$. Les applications f et g s'appellent des *équivalences d'homotopies.*

Exercice 2.5. *Soit $f : X \to Y$ continue. On suppose qu'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ et $h : Y \to X$ telle que $f \circ h \sim \mathrm{Id}_Y$. Montrez que f est une équivalence d'homotopie.*

Par exemple, deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie. Mais, comme nous le verrons dans la suite, des espaces relativement différents peuvent avoir le même type d'homotopie.

Définition 2.6. Un espace X est *contractile* s'il a le type d'homotopie de l'espace $\{\mathrm{pt}\}$. De manière équivalente, X est contractile si l'application $\mathrm{Id}_X : X \to X$ est homotope à une application constante.

Exemple 2.7. Si C est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, C est contractile.

Le concept de rétraction par déformation apparaît souvent en pratique pour déterminer le type d'homotopie des espaces.

Définition 2.8. Soit X un espace et $A \subset X$. Une *rétraction par déformation de X sur A* est une application $r : X \times I \to X$, telle que (i) $r(x, 0) = x$ pour tout $x \in X$, (ii) $r(x, 1) \in A$ pour tout $x \in X$, et (iii) $r(a, t) = a$ pout tout $t \in I$.

Lemme 2.9. *S'il existe une rétraction par déformation de X sur A alors l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie.*

Exemple 2.10. Il existe une rétraction par déformation de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur S^{n-1}, donnée par $r(x, t) = (1 - t)x + tx/||x||_2$.

2.2 Cofibrations

Définition 2.11. Soit X un espace et $A \subset X$. L'inclusion $\iota : A \hookrightarrow X$ est une *cofibration* si pour tout espace Z et toute application $f : A \times I \cup X \times \{0\} \to Z$ continue, il existe une application $\overline{f} : X \times I \to Z$ qui étend f.

$$\begin{tikzcd} A \times I \cup X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Z \\ X \times I \arrow[ur, dashed, "\exists \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Dans la définition ci-dessus, on ne suppose pas que l'extension $\overline{f}$ est unique. En général, s'il en existe une extension, alors il existe beaucoup d'extensions différentes possibles. Une application utile des cofibrations est l'énoncé suivant.

Theorème 2.12. *Si l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une cofibration et si A est contractile, alors l'application quotient $X \twoheadrightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie.*

L'exercice suivant donne une application de la notion de cofibration au problème d'extension des applications.

Exercice 2.13. *Soit $A \hookrightarrow X$ une cofibration, et $f, g : A \to Y$ deux applications continues homotopes. Montrez que f admet un prolongement par continuité à X tout entier si et seulement si g admet un prolongement par continuité à X tout entier. Trouvez un contre-exemple à cette équivalence si $A \hookrightarrow X$ n'est pas une cofibration.*

Décrivons maintenant plus concrètement les paires (X, A) telles que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une cofibration.

Lemme 2.14. *Soit X un espace séparé et $A \subset X$. Si $A \hookrightarrow X$ est une cofibration, alors A est fermé dans X.*

La condition A fermé dans X n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple $X = I$, $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\ , n \in \mathbb{N}^*\}$, et $f = \mathrm{Id}$. En pratique, on utilise souvent l'énoncé suivant pour produire des cofibrations.

Proposition 2.15. *Soit X un espace métrique et A un fermé de X. On suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de A dans X, et une rétraction par déformation de $\mathcal{U}$ sur A. Alors l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une cofibration.*

Deuxième partie

Le groupe fondamental

3 Introduction : invariants du type d'homotopie

La topologie algébrique décrit la forme des espaces en associant à chaque espace des objets de nature algébrique (des 'invariants algébriques'), de telle manière que deux espaces ayant le même type d'homotopie aient des invariants isomorphes. Donnons un exemple simple, celui du π_0.

Définition 3.1. Soit X un espace. On note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X, c'est à dire $\pi_0(X) = X/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur X définie par $x\mathcal{R}y$ s'il existe un chemin $\gamma : I \to X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Question 3.2. *Identifiez la topologie sur $\pi_0(X)$ si on munit cet ensemble de la topologie quotient.*

La notion de composante connexe par arcs est plus fine que la notion de composante connexe. Par exemple, l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est connexe, mais possède deux composantes connexes par arcs. L'exercice suivant fournit une classe d'espaces pour lesquels les deux notions sont équivalentes.

Exercice 3.3. *Soit X un espace* localement connexe par arcs*, c'est à dire que tout point $x \in X$ admet une base de voisinages*[4] *connexes par arcs. Montrez que X est connexe si et seulement si X est connexe par arcs.*

Proposition 3.4. *L'ensemble des composantes connexes par arcs d'un espace topologique vérifie les propriétés suivantes.*

1. *On a une bijection $\pi_0(X \times Y) \simeq \pi_0(X) \times \pi_0(Y)$.*
2. *Une application continue $f : X \to Y$ détermine une application*
$$\begin{array}{rccc} \pi_0(f) : & \pi_0(X) & \to & \pi_0(Y) \\ & [x] & \mapsto & [f(x)] \end{array}$$
et on a $\pi_0(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, et $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$.
3. *Si $f, g : X \to Y$ sont homotopes alors $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.*
4. *Si X et Y ont même type d'homotopie, on a une bijection $\pi_0(X) \simeq \pi_0(Y)$.*

Le but de cette partie du cours est d'introduire le groupe fondamental, un invariant plus sophistiqué que le π_0, mais qui possède des propriétés analogues.

[4] Rappelons qu'une base de voisinages d'un point $x \in X$ est un ensemble $\mathcal{B}$ de voisinages de x, tel que tout voisinage de x contient un élément de $\mathcal{B}$.

4 Groupe fondamental d'un espace

4.1 Opérations sur les chemins

Si X est un espace, on note $C_{a,b}(X)$ l'ensemble des chemins $\gamma : I \to X$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. On introduit d'abord la notion d'homotopie à extrémités fixées entre chemins.

Définition 4.1. Deux chemins $\gamma, \mu \in C_{a,b}(X)$ sont *homotopes à extrémités fixées* s'il existe une application continue $H : I \times I \to X$ telle que

1. $H(0,t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in I$,
2. $H(1,t) = \mu(t)$ pour tout $t \in I$,
3. $H(s,0) = a$ et $H(s,1) = b$ pour tout $s \in I$.

L'application H est une *homotopie à extrémités fixées* entre γ et μ.

Lemme 4.2. *La relation 'être homotope à extrémités fixées' est une relation d'équivalence sur $C_{a,b}(X)$.*

Définition 4.3 (Opérations sur les chemins)**.**

1. Si $\gamma \in C_{a,b}(X)$ et $\mu \in C_{b,c}(X)$, le *chemin composé* $\gamma\mu \in C_{a,c}(X)$ est défini par :
$$(\gamma\mu)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \mu(2t-1) & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases}$$
2. Le *chemin constant* en $a \in X$ est le chemin ϵ_a défini par $\epsilon_a(t) = a$ pout tout $t \in I$.
3. Si $\gamma \in C_{a,b}(X)$, son *inverse* $\gamma^{-1} \in C_{b,a}(X)$ est défini par $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ pour tout $t \in I$.

Lemme 4.4. *La relation d'homotopie à extrémités fixées est compatible avec la composition des chemins.*

Lemme 4.5. *La composition des chemins est*

1. *associative à homotopie près :* $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 \sim \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$*,*
2. *possède des éléments neutres à homotopie près* $\epsilon_a\gamma \sim \gamma$ *et* $\gamma\epsilon_b \sim \gamma$*,*
3. *possède des inverses à homotopie près* $\gamma(\gamma^{-1}) \sim \epsilon_a$ *et* $(\gamma^{-1})\gamma \sim \epsilon_b$*.*

4.2 Groupe fondamental

Si $\gamma \in C_{a,b}(X)$, on note $[\gamma]$ sa classe d'équivalence pour la relation d'homotopie à extrémités fixées. Un chemin dont les deux extrémités sont égales au même point a s'appelle un *lacet de X basé en a*.

Définition 4.6. Soit X un espace. Le groupe fondamental en $x \in X$ est l'ensemble des lacets basés en x à homotopie près :

$$\pi_1(X,x) = C_{x,x}(X)/\text{relation d'homotopie à extrémités fixées}\,,$$

muni de la structure de groupe définie par la composition des lacets

$$[\gamma]\cdot[\mu] := [\gamma\mu]\;.$$

Les résultats de compatibilité entre opérations sur les chemins et homotopies énoncés à la section précédente assurent que la définition est bien posée, et que $\pi_1(X,x)$ est bien un groupe. L'inverse est donné par $[\gamma]^{-1} := [\gamma^{-1}]$, et l'élément neutre est $[\epsilon_x]$. On vérifie sans peine la propriété suivante.

Proposition 4.7. *Soient (X,x) et (Y,y) des espaces pointés. On a un isomorphisme de groupes :*

$$\pi_1(X,x)\times\pi_1(Y,y) \simeq \pi_1(X\times Y,(x,y))\;.$$

On étudie maintenant l'effet des applications continues entre espaces sur le groupe fondamental. Nous allons établir les propriétés similaires aux propriétés du π_0 énumérées à la proposition 3.4. La différence technique essentielle est que le groupe fondamental d'un espace X dépend d'un point de base $x \in X$.

Proposition 4.8 (Changement de point base)**.** *Soit X un espace, $\gamma \in C_{x,y}(X)$. Alors γ induit un isomorphisme de groupes*

$$\begin{array}{cccc}\Phi_\gamma: & \pi_1(X,x) & \to & \pi_1(X,y)\;. \\ & [\mu] & \mapsto & [(\gamma^{-1})\mu\gamma]\end{array}$$

Définition 4.9. Soit $x \in X$, et $f : X \to Y$ une application continue. Alors f induit un morphisme de groupes $\pi_1(f) : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,f(x))$, également noté $f_\sharp$, et défini par $f_\sharp([\gamma]) := [f\circ\gamma]$.

Il découle directement de la définition que $\pi_1(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x)}$, et si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont continues, alors $\pi_1(g\circ f) = \pi_1(g)\circ\pi_1(f)$.

Proposition 4.10. *Soient $f,g : X \to Y$ deux applications homotopes via une homotopie $H : X\times I \to Y$. Notons $\gamma \in C_{f(x),g(x)}(Y)$ le chemin défini par $\gamma(t) = H(x,t)$ pour tout $t \in I$. Alors on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x) \arrow[r, "\pi_1(f)"] \arrow[dr, "\pi_1(g)"'] & \pi_1(Y,f(x)) \arrow[d, "\Phi_\gamma"] \\ & \pi_1(Y,g(x)) \end{tikzcd}\;.$$

Comme conséquence de cette proposition, on peut prouver que le groupe fondamental est un invariant du type d'homotopie.

Theorème 4.11. *Soit $f : X \to Y$ une équivalence d'homotopie. Alors pour tout $x \in X$, $\pi_1(f) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ est un isomorphisme de groupes.*

Nous pouvons donc effectuer nos premiers calculs de groupe fondamental.

Définition 4.12. Un espace X est *simplement connexe* si $\pi_0(X) = \{*\}$ et $\pi_1(X, x) = \{*\}$ pour tout $x \in X$.

Exemple 4.13. Un espace contractile est simplement connexe.

Remarque 4.14. Nous verrons plus tard qu'il existe beaucoup d'espaces simplement connexes qui ne sont pas contractiles.

4.3 Revêtements

On commence par introduire la notion de revêtement, qui axiomatise les propriétés topologiques essentielles de la fonction exponentielle :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Exp} : & \mathbb{R} & \to & S^1 \\ & t & \mapsto & e^{2i\pi t} \end{array}.$$

La notion de revêtement (et les théorèmes de relèvement associés) est un outil essentiel pour calculer le groupe fondamental du cercle.

Définition 4.15. Une application continue $p : E \to B$, avec $E \neq \emptyset$, est un *revêtement* si pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de B, un espace discret F_b et un homéomorphisme $\Phi : \mathcal{U} \times F_b \xrightarrow{\simeq} p^{-1}(\mathcal{U})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \times F_b \arrow[rr, "\Phi", "\simeq"'] \arrow[dr, "\mathrm{proj}"'] & & p^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[dl, "p"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}.$$

l'espace E est appelé *espace total* du revêtement, B la *base* du revêtement, $F_b \simeq p^{-1}(b)$ la *fibre au dessus de b*. Les ouverts $\mathcal{U}$ ci-dessus s'appellent des *ouverts trivialisants*. Les parties $\Phi(\mathcal{U} \times \{x\})$ de $p^{-1}(\mathcal{U})$ s'appellent les *feuillets* de $p^{-1}(\mathcal{U})$.

Exemple 4.16.

1. Si F est un espace discret et B un espace, la projection $F \times B \to B$ est un revêtement. Les revêtements de ce type sont appelés *revêtements triviaux*.
2. Si $p : E \to B$ est un revêtement, et si $B' \subset B$, alors la restriction : $p : p^{-1}(B') \to B'$ est un revêtement.

3. $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto e^{2i\pi z}$, est un revêtement (donc sa restriction $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ également).
4. Pour $n \geq 1$, l'application $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z \mapsto z^n$, est un revêtement.

Exercice 4.17. *Soit $p : E \to B$ un revêtement de base connexe. Montrez que toutes les fibres ont même cardinal (un revêtement dont toutes les fibres ont cardinal fini k est appelé revêtement à k feuillets). En particulier, p est surjectif.*

On se fixe un revêtement $p : E \to B$. Si $f : X \to B$ est une application continue, un *relèvement* de f est une application continue $\overline{f} : X \to E$ telle que $p \circ \overline{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Le problème du relèvement consiste à étudier l'existence éventuelle de relèvement(s) d'une application f donnée.

Proposition 4.18 (Unicité des relèvements)**.** *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Soit X un espace connexe, et $\overline{f}_0, \overline{f_1} : X \to X$ deux relèvements de $f : X \to B$. Si $\overline{f}_0$ et $\overline{f_1}$ coincident en un point, alors $\overline{f}_0 = \overline{f_1}$.*

Theorême 4.19 (Relèvement des chemins)**.** *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Soit $\gamma : [a, b] \to B$ une application continue. Pour tout $e \in p^{-1}(\gamma(a))$, il existe un (unique) relèvement $\overline{\gamma}$ tel que $\overline{\gamma}(a) = e$.*

Theorême 4.20 (Relèvement des homotopies)**.** *Soit $p : E \to B$ un revêtement, soit $H : X \times I \to B$ une application continue, et soit $\overline{f} : X \times \{0\} \to E$ un relèvement de l'application $f := H_{|X\times\{0\}}$. Alors il existe un (unique) relèvement $\overline{H} : X \times I \to E$ de H tel que $\overline{H}_{|X\times\{0\}} = \overline{f}$.*

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \overline{H}"] & B \end{tikzcd}$$

L'outil principal pour la démonstration des trois résultats précédents est le lemme de Lebesgue.

Lemme 4.21 (Lebesgue)**.** *Soit X un espace métrique compact et $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de X. Alors il existe un $\epsilon > 0$, appelé* nombre de Lebesgue du recouvrement*, tel que chaque boule $B(x, \epsilon)$ de X est incluse dans un certain ouvert du recouvrement.*

L'exercice suivant est une application élémentaire mais importante du théorème de relèvement des homotopies.

Exercice 4.22. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Pour tout $x \in E$ p induit une injection $\pi_1(p) : \pi_1(E, x) \hookrightarrow \pi_1(B, p(x))$.*

4.4 Le groupe fondamental du cercle

Définition 4.23. Soit $\gamma : I \to S^1$ un lacet de S^1, et soit $\overline{\gamma} : I \to S^1$ un relèvement de γ à travers le revêtement Exp : $\mathbb{R} \to S^1$. Alors le nombre $\overline{\gamma}(1) - \overline{\gamma}(0)$ est un nombre entier, qui ne dépend pas du relèvement $\overline{\gamma}$ choisi. On l'appelle le *degré* du lacet γ et on le note $\deg(\gamma)$.

Theorème 4.24. *Le degré induit un isomorphisme de groupes :*

$$\begin{array}{rccc} \deg : & \pi_1(S^1, x) & \to & \mathbb{Z} \\ & [\gamma] & \mapsto & \deg(\gamma) \end{array} .$$

Le calcul du groupe fondamental du cercle peut être utilisé pour démontrer les résultats suivants (d'autres applications seront données en TD).

- **Théorème de D'Alembert-Gauss :** tout polynôme complexe admet une racine.
- **Théorème de Brouwer en dimension 2 :** toute application continue $f : D^2 \to D^2$ admet un point fixe.
- **Théorème d'intersection des chemins :** Soient γ et μ deux chemins de I^2. Si γ relie deux cotés opposés du bord de I^2 et μ relie les deux autres cotés, alors $\mathrm{Im}(\gamma) \cap \mathrm{Im}(\mu) \neq \emptyset$.

5 Autour du théorème de van Kampen

5.1 Un peu de théorie des groupes

On rappelle les notions suivantes pour les groupes abéliens. Soit $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$ une famille de groupes abéliens. On note $\bigoplus_{\alpha\in J} A_\alpha$ le sous-groupe de $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ formé des familles d'éléments à support fini. Ce groupe s'appelle la *somme directe des* A_α.Notons $\iota_\alpha : A_\alpha \to \bigoplus_{\alpha\in J} A_\alpha$ le morphisme de groupes défini par $\iota_\alpha(a) = (\dots, 0, a, 0, \dots)$. La somme directe vérifie la propriété universelle suivante. Pour tout groupe abélien B et toute famille de morphismes de groupes $f_\alpha : A_\alpha \to B$ il existe un unique $f : \bigoplus_{\alpha\in J} A_\alpha \to B$ tel que $f \circ \iota_\alpha = f_\alpha$.

Un groupe abélien A est un *groupe abélien libre* de base $(a_\alpha)_{\alpha\in J}$ si tout élément de A s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire (à support fini) d'éléments a_α. La base d'un groupe abélien libre induit un isomorphisme de groupes $\bigoplus_{\alpha\in J} \mathbb{Z}_\alpha \simeq A$. Toutes les bases d'un groupe abélien libre ont même cardinal. En particulier, deux groupes abéliens libres sont isomorphes si et seulement s'ils admettent des bases de même cardinal.

Le but du paragraphe A suivant est de développer des notions similaires pour les groupes généraux. Le paragraphe B présente la notion d'abélianisé d'un groupe, qui permet de comparer les groupes libres et les groupes abéliens libres. Enfin le paragraphe C présente une variation du produit libre, qui nous sera utile pour énoncer le théorème de van Kampen.

A. Produits libres et groupes libres

Définition 5.1. Soit $(G_\alpha)_{\alpha\in J}$ une famille de groupes. On appelle *produit libre* des groupes G_α un groupe G, muni de morphismes de groupes $\iota_\alpha : G_\alpha \to G$, satisfaisant la propriété universelle suivante. Pour tout groupe H et toute famille de morphismes de groupes $f_\alpha : G_\alpha \to H$ il existe un unique morphisme de groupes $f : G \to H$ tel que $f \circ \iota_\alpha = f_\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha \arrow[dr, "\iota_\alpha"'] \arrow[drr, "f_\alpha"] & & \\
& G \arrow[r, dashed, "\exists! f"] & H \\
G_\beta \arrow[ur, "\iota_\beta"] \arrow[urr, "f_\beta"'] & &
\end{tikzcd} .$$

On vérifie facilement que les morphismes ι_α sont nécessairement injectifs, et que si le produit libre des groupes G_α existe, il est unique à isomorphisme près. La partie plus difficile est de montrer l'existence de ce produit libre. Nous en esquissons une construction. Soit $(G_\alpha)_{\alpha\in J}$ une famille de groupes.

- On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des mots de longueur finie formés de lettres de l'ensemble $\bigsqcup_{\alpha\in J} G_\alpha$. Le mot vide, de longueur nulle, est noté 1.

Parmi ces mots de longueur finie, on considère les *mots réduits*. Ce sont les mots qui ne contiennent pas les lettres 1_{G_α} et dont deux lettres consécutives ne sont pas dans le même ensemble $G_\alpha \setminus \{1_{G_\alpha}\}$ (le mot vide est réduit). Le sous-ensemble des mots réduits est noté

$$*_{\alpha\in J} G_\alpha .$$

- Si $m \in \mathcal{M}$, on peut le réduire de la manière suivante.
  1. On retire tous les lettres 1_{G_α}.
  2. Si n lettres consecutives dans le mot obtenu sont dans le même G_α, alors on les remplace par leur produit.

  On itère les opérations 1 et 2 jusqu'à ce que le mot soit réduit (le processus doit finir car il fait diminuer strictement la longueur du mot si le mot de départ n'est pas réduit). Ce procédé définit une application

$$\rho : \mathcal{M} \to *_{\alpha\in J} G_\alpha \ .$$

- L'ensemble $*_{\alpha\in J} G_\alpha$ est muni de l'opération produit $m_1 \cdot m_2 = \rho(m_1|m_2)$, où $m_1|m_2$ désigne la concaténation des mots m_1 et m_2.
- l'application $\iota_\alpha : G_\alpha \to *_{\alpha\in J} G_\alpha$ envoie $g \in G_\alpha \setminus \{1_{G_\alpha}\}$ sur le mot composé d'une lettre égale à g, et 1_{G_α} sur le mot vide 1.

Theorème 5.2. *L'ensemble $*_{\alpha\in J} G_\alpha$ est un groupe, les applications ι_α sont des morphismes de groupes, et $(*G_\alpha, \iota_\alpha)$ est un produit libre des groupes G_α.*

Définition 5.3. Un groupe G est dit *libre* s'il existe une famille $(\mathbb{Z}_\alpha)_{\alpha\in J}$ de groupes cycliques infinis et un isomorphisme de groupes $\phi : *_{\alpha\in J}\mathbb{Z}_\alpha \xrightarrow{\simeq} G$. L'ensemble $\{g_\alpha\}_{\alpha\in J}$ d'éléments $g_\alpha = \phi(1_\alpha)$ (où $1_\alpha \in \mathbb{Z}_\alpha$) est appelé une *base de G*. On note $< g_\alpha, \alpha \in J >$ un groupe libre de base $\{g_\alpha\}_{\alpha\in J}$.

Proposition 5.4. *Soit G un groupe libre, et $(g_\alpha)_{\alpha\in J}$ une base de G. Alors pour tout groupe H et toute famille (h_α) d'éléments de H, il existe un unique morphisme de groupes $f : G \to H$ tel que $f(g_\alpha) = h_\alpha$ pour tout $\alpha \in J$.*

On rappelle que si X est une partie d'un groupe G, le *sous-groupe engendré par X* est le plus petit sous-groupe de G contenant X. Concrètement, le sous-groupe engendré par X est composé des produits d'éléments de X et de leurs inverses. De même, le *sous-groupe normal engendré par X* est le plus petit sous-groupe normal de G contenant X. Concrètement, le sous-groupe normal engendré par X est composé des produits de conjugués d'éléments de X et de leurs inverses.

Une présentation d'un groupe G par générateurs et relations est la donnée d'une famille de générateurs $\{g_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de G et d'une famille $\{r_\beta\}_{\beta\in K}$ d'éléments du groupe libre $< g_\alpha, \alpha \in J >$ tel que le sous-groupe *normal* engendré par les r_α est égal au noyau du morphisme canonique $< g_\alpha, \alpha \in J > \twoheadrightarrow G$.

B. Abélianisation

Soit G un groupe. Le groupe des commutateurs $[G,G]$ est le sous-groupe de G engendré par les éléments du type $ghg^{-1}h^{-1}$.

Lemme 5.5. $[G,G]$ *est le plus petit sous-groupe normal* N *de* G *tel que* G/N *est abélien.*

Définition 5.6. Le quotient $G/[G,G]$ est noté G_{ab} et s'appelle l'*abélianisé* de G.

Proposition 5.7. *Si* $f : G \to A$ *est un morphisme de groupe et* A *est abélien, il existe un unique morphisme de groupes* $\overline{f} : G_{\mathrm{ab}} \to A$ *tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"] & A \\ G_{\mathrm{ab}} \arrow[ur, dashed, "\exists ! \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Proposition 5.8. *Pour tout ensemble* J *on a un isomorphisme de groupes :*

$$< t_\alpha, \alpha \in J >_{\mathrm{ab}} \simeq \bigoplus_{\alpha \in J} \mathbb{Z} \;.$$

Corollaire 5.9. *Toutes les bases d'un groupe libre ont même cardinal. En particulier, deux groupes libres sont isomorphes si et seulement s'ils admettent des systèmes libres de générateurs de même cardinal.*

C. Somme amalgammée

Définition 5.10. Soient $\phi_1 : K \to G_1$ et $\phi_2 : K \to G_2$ deux morphismes de groupes. La somme amalgammée $G_1 *_K G_2$ est le quotient de $G_1 * G_2$ par le sous-groupe normal engendré par les éléments $\phi_1(k)\phi_2(k)^{-1}$, $k \in K$.

Pour $\ell = 1,2$ on note ι_ℓ la composée $G_\ell \hookrightarrow G_1 * G_2 \twoheadrightarrow G_1 *_K G_2$. La la propriété universelle de la somme amalgammée est une conséquence directe de la propriété universelle des produits libres et de celle des groupes quotients.

Proposition 5.11. *Soient* $\phi_\ell : K \to G_\ell$, $\ell = 1,2$ *deux morphismes de groupes. Pour tout groupe* L *et tous morphismes* $f_\ell : G_\ell \to L$ *tels que* $f_1 \circ \phi_1 = f_2 \circ \phi_2$, *il existe une unique* $f : G_1 *_K G_2 \to L$ *telle que* $f_\ell = f \circ \iota_\ell$ *pour*

$\ell = 1, 2$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\phi_2"'] & G_1 \arrow[d, "\iota_1"'] \arrow[ddr, "f_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[drr, "f_2"'] & G_1 *_K G_2 \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] & \\
& & L
\end{tikzcd}$$

5.2 Théorème de van Kampen

Soit X un espace, et $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux ouverts de X. Soit $x_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. On a un carré commutatif de groupes où les différents morphismes sont induits par les inclusions d'espaces :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\mathcal{U}, x_0) \arrow[d] \\
\pi_1(\mathcal{V}, x_0) \arrow[r] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd} .$$

donc, d'après la propriété universelle de la somme amalgammée, un morphisme de groupes

$$\phi : \pi_1(\mathcal{U}, x_0) *_{\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x_0)} \pi_1(\mathcal{V}, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) .$$

Theorème 5.12 (Van Kampen)**.** *Si $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, et si $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ sont connexes par arcs, alors ϕ est un isomorphisme de groupes.*

5.3 Applications

Le théorème de van Kampen permet de calculer les groupes fondamentaux dans une grande variété de situations. Nous en donnons quelques unes.

A. Sphères

Proposition 5.13. *Pour $n \geq 2$, la sphère S^n est simplement connexe.*

B. Bouquets d'espaces

Proposition 5.14. *Soient (X, x), (Y, y) deux espaces pointés. On suppose que x (resp. y) admet un voisinage $\mathcal{U}_x$ (resp. $\mathcal{U}_y$) qui se rétracte par déformation sur x (resp. y). Alors les inclusions $X \hookrightarrow X \vee Y$ et $Y \hookrightarrow X \vee Y$ induisent un isomorphisme :*

$$\pi_1(X) * \pi_1(Y) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X \vee Y) .$$

Exemple 5.15. Le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles est un groupe libre à n générateurs. Une base est fournie par les classes des lacets γ_i, $i = 1 \dots n$, dès lors que pour tout i, γ_i est un lacet du i-ème facteur du bouquet qui engendre le groupe fondamental de ce facteur.

Remarque 5.16. A partir de l'exemple précédent, on peut obtenir le groupe fondamental d'un bouquet d'un ensemble quelconque de cercles. Le groupe fondamental d'un bouquet d'un ensemble A de cercles est un groupe libre de base A.

C. Recollement d'une cellule

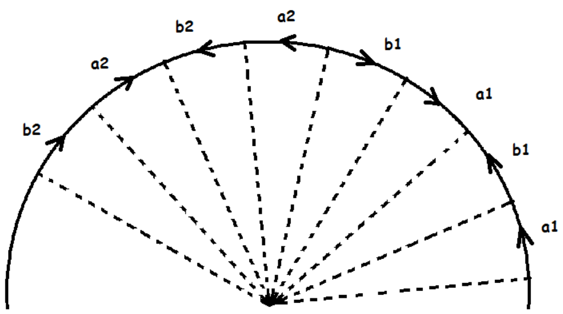
Proposition 5.17. *Soit X un espace connexe par arcs, $f : S^{n-1} \to X$ continue, et $Y = X \cup_f D^n$.*

1. *Si $n \geq 3$, l'injection $X \hookrightarrow Y$ induit un isomorphisme des groupes fondamentaux.*
2. *Si $n = 2$, l'injection $X \hookrightarrow Y$ induit une surjection $\pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(Y, x_0)$, dont le noyau est le sous-groupe normal engendré par $[f]$.*

Ainsi, on peut calculer que $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n \geq 2$, et que $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est un espace simplement connexe.

D. Groupe fondamental des surfaces

Définition 5.18. Soit $g \in \mathbb{N}^*$. On note S_g le quotient du disque D^2 (le disque unité de $\mathbb{C}$) obtenu en identifiant les points du bord comme indiqué sur le dessin.



De manière formelle, pour tout entier k compris entre 0 et $g-1$, pour tout $\ell \in \{0,1\}$ et pour tout $t \in [0,1]$, on identifie les nombres

$$\exp([4k + \ell + t]i2\pi/4g) \quad \text{et} \quad \exp([4k + \ell + 3 - t]i2\pi/4g)\ .$$

Exercice 5.19. *Vérifier que l'espace topologique S_g n'est autre que le* tore à g trous. *C'est à dire la surface topologique compacte qu'on peut représenter de la manière suivante :*

Proposition 5.20. *Soit $q : D^2 \twoheadrightarrow S_g$ l'application quotient, et notons C_g le sous-espace de S_g obtenu comme image du bord du disque par q.*

- *Il existe un homéomorphisme $\phi : C_g \to (S^1)^{\vee 2g}$.*
- *L'espace topologique S_g est homéomorphe à l'espace topologique $(S^1)^{\vee 2g} \cup_f D^2$, où f est la composée*

$$S^1 \xrightarrow{q} C_g \xrightarrow{\phi} (S^1)^{\vee 2g} .$$

Corollaire 5.21. *Le groupe fondamental de S_g est un groupe à $2g$ générateurs $\{a_1, \ldots, a_g, b_1 \ldots, b_g\}$ quotienté par la relation :*

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$$

Corollaire 5.22. *Si $g \neq g'$ alors S_g et $S_{g'}$ n'ont pas le même type d'homotopie*

E. Classification des variétés, conjecture de Poincaré

Profitons du calcul du groupe fondamental des tores à g trous pour donner un mini aperçu historico-scientifique sur la classification des variétés topologiques, le groupe fondamental et la conjecture de Poincaré.

1. **Classification des surfaces.** Les tores à g trous sont des exemples de surfaces compactes séparées. Il en existe d'autres, par exemple le plan projectif $\mathbb{RP}^2$. On peut montrer que deux surfaces compactes séparées sont homéomorphes si et seulement si elles ont des groupes fondamentaux isomorphes. En particulier toute surface compacte séparée simplement connexe est homéomorphe à la sphère S^2.
2. **Classification des variétés de dimension 3.**
En dimension 3, un nouveau phénomène apparaît : il existe des variétés de dimension 3 qui ont même type d'homotopie (en particulier des groupes fondamentaux isomorphes) mais qui ne sont pas homéomorphes. Cela résulte de la classification des variétés lenticulaires à homéomorphisme près par Brody (1960).

La fameuse **conjecture de Poincaré**, énoncée par Poincaré en 1904 et démontrée par Perelman en 2003, affirme que toute variété topologique compacte séparée de dimension 3 simplement connexe est homéomorphe à la sphère S^3.

3. **En dimension supérieure ou égale à** 4**.**

   Pour des variétés topologiques de dimension supérieure ou égale à 4, le groupe fondamental ne permet pas de caractériser la sphère. Par exemple, S^4 et $S^2 \times S^2$ sont simplement connexes mais ne sont pas homéomorphes (cf. la partie du cours sur l'homologie singulière).

   La **conjecture de Poincaré généralisée** affirme que toute variété de dimension n (compacte, séparée) qui a le type d'homotopie de la sphère S^n est homéomorphe à la sphère. Elle a été démontrée en dimension $n \geq 5$ par Newman (1966) et Connell (1967) et en dimension 4 par Freedman (en 1982, travaux pour lesquels il reçut la médaille Fields en 1986).

6 Théorie des revêtements

Dans cette section, nous étudions les propriétés des revêtements, qui ont été introduits à la section 4.3.

6.1 Le théorème de relèvement des applications

Theorème 6.1 (Relèvement des applications)**.** *Soit $p : E \to B$ un revêtement, soit X un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $x_0 \in X$, $e_0 \in E$ et $f : X \to Y$ tel que $f(x_0) = p(e_0) = b_0$.*

Il existe un relèvement $\widetilde{f} : X \to E$ de f tel que $\widetilde{f}(x_0) = e_0$ si et seulement si on a l'inclusion suivante de sous-groupes de $\pi_1(B, b_0)$

$$f_\sharp \pi_1(X, x_0) \subset p_\sharp \pi_1(E, e_0)\ .$$

Remarque 6.2. Si le relèvement existe, il est unique en vertu de la proposition 4.18.

Donnons une application du théorème 6.1. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Une *détermination du logarithme sur $\mathcal{U}$* est une application continue log : $\mathcal{U} \to \mathbb{C}$ telle que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathcal{U} \arrow[ur, "\log"] \arrow[r, hook, "\iota"'] & \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{tikzcd} .$$

Comme la fonction exponentielle est localement développable en série entière, une détermination du logarithme est automatiquement localement développable en série entière (holomorphe). On a :

Proposition 6.3. *Il existe une détermination du logarithme sur $\mathcal{U}$ si et seulement s'il existe $x \in \mathcal{U}$ tel que $\pi_1(\iota) : \pi_1(\mathcal{U}, x) \to \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, x)$ est constante. Deux déterminations du logarithme sont égales à une constante additive $2ki\pi$ près.*

Question 6.4. *Donnez un ouvert non simplement connexe de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur lequel il existe une détermination continue du logarithme.*

6.2 Monodromie d'un revêtement

Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $b \in B$. Si $\gamma \in C_{b,b}(X)$ est un lacet basé en b et $x \in F_b = p^{-1}(b)$, on note $\widetilde{\gamma}_x$ l'unique relèvement de γ tel que $\widetilde{\gamma}_x(0) = x$.

Thm.-Déf. 6.5. Soit $p : E \to B$ un revêtement, et $b \in B$. L'application suivante est bien définie, et c'est une action à droite de $\pi_1(X, b)$ sur l'ensemble F_b. On l'appelle la *monodromie* du revêtement sur la fibre F_b.

$$\mathcal{M} : \begin{array}{ccc} F_b \times \pi_1(X,b) & \to & F_b \\ (x, [\gamma]) & \mapsto & \widetilde{\gamma}_x(1) \end{array} .$$

Les propriétés essentielles de la monodromie d'un revêtement sont résumées dans l'énoncé suivant.

Theorème 6.6. *Soit $p : E \to B$ un revêtement, et soit $b \in B$.*

1. *Si $x \in F_b$, le stabilisateur de x pour la monodromie est donné par*

$$\mathrm{Stab}(x) = p_\sharp \pi_1(E, x) \subset \pi_1(B, b) .$$

2. *Si E est connexe par arcs :*
   (a) *l'action de monodromie est transitive. (En particulier, $F_b \simeq p_\sharp\pi_1(E,x)\backslash\pi_1(B,b)$ comme $\pi_1(B,b)$-ensemble)*
   (b) *Les groupes* $\mathrm{Stab}(x)$*, $x \in F_b$ forment une classe de conjugaison dans $\pi_1(B, b)$.*

Corollaire 6.7. *Soit $E \to B$ un revêtement, avec E connexe par arcs. Si B est simplement connexe, alors p est un homéomorphisme*

Si V est une variété différentielle (ou même simplement topologique), on peut définir son revêtement d'orientation $p : \widetilde{V} \to V$. C'est un revêtement à deux feuillets, et V est non-orientable si et seulement si $\widetilde{V}$ est connexe par arcs. Le corollaire précédent interdit à $\widetilde{V}$ d'être connexe par arcs si V est simplement connexe. On obtient donc que toute variété simplement connexe est orientable.

6.3 Classification des morphismes de revêtements

Définition 6.8. Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements. Un *morphisme de revêtements* de p vers p' est une application continue $q : E \to E'$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd} .$$

On note $\mathrm{Hom}(p, p')$ l'ensemble des morphismes de revêtements de p vers p'. Un morphisme q est un *isomorphisme* de revêtements s'il existe un morphisme q' de p' vers p tel que $q \circ q' = \mathrm{Id}_{E'}$ et $q' \circ q = \mathrm{Id}_E$. Un isomorphisme de p vers p est appelé un *automorphisme* de p. Les automorphismes d'un revêtement p forment un groupe pour la composition, qu'on note $\mathrm{Aut}(p)$.

On remarque qu'un morphisme de revêtements de p vers p' est la même chose qu'un relèvement de p. La proposition 4.18 d'unicité des relèvements nous assure donc du fait suivant.

Lemme 6.9. *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements. Si E est connexe, alors deux morphismes de revêtements qui coincident en un point sont égaux.*

Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements. Un mophisme de revêtements h de p vers p' induit pour tout $b \in B$ une application

$$\begin{array}{cccc} h_b : & p^{-1}(b) & \to & p'^{-1}(b) \\ & x & \mapsto & h(x) \end{array} .$$

On rappelle que le groupe $\pi_1(B, b)$ agit par monodromie sur les ensembles $p^{-1}(b)$ et $p'^{-1}(b)$.

Lemme 6.10. *L'application h_b est $\pi_1(B, b)$-équivariante, c'est à dire que pour tout $x \in p^{-1}(b)$ et tout $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ on a :*

$$h_b(x[\gamma]) = h_b(x)[\gamma] .$$

Pour démontrer l'existence de certains morphismes de revêtements, nous allons utiliser le théorème de relèvement des applications. Ce théorème demande des hypothèses de connexité par arcs, et connexité par arcs locale. Nous allons donc nous restreindre notre étude à des revêtements satisfaisant ces hypothèses.

Notation 6.11. On dira qu'un revêtement est Connexe par Arcs Localement Connexe par Arcs (CALCA) si sa base et son espace total sont des espaces topologiques connexes par arcs et localement connexes par arcs.

Theorême 6.12 (Classification)**.** *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements CALCA. On a une bijection, où le membre de droite désigne les morphismes $\pi_1(B, b)$-équivariants entre les ensembles $p^{-1}(b)$ et $p'^{-1}(b)$ munis de l'action de monodromie :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(p, p') & \xrightarrow{\approx} & \mathrm{Hom}_{\pi_1(B,b)}\left(p^{-1}(b), p'^{-1}(b)\right) \\ h & \mapsto & h_b \end{array}$$

Corollaire 6.13. *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des revêtements CALCA, soit $b \in B$, $x \in p^{-1}(b)$ et $x' \in p'^{-1}(b)$. Il existe un isomorphisme f de p vers p' tel que $f(x) = x'$ si et seulement si $p_\sharp\pi_1(E, x)$ et $p'_\sharp\pi_1(E', x')$ sont égaux comme sous-groupes de $\pi_1(B, b)$.*

6.4 Revêtements galoisiens

Thm.-Déf. 6.14. Soit $p : E \to B$ un revêtement CALCA. On dit que p est *galoisien* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes.

1. Il existe $e \in E$ tel que $p_\sharp\pi_1(E, e)$ est un sous-groupe *normal* de $\pi_1(B, p(e))$.
2. Pour tout $e \in E$, $p_\sharp\pi_1(E, e)$ est un sous-groupe *normal* de $\pi_1(B, p(e))$.
3. Le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ agit *transitivement* sur chaque fibre de p.

Le prototype d'un revêtement galoisien est fourni par une action de groupe sur un espace topologique.

Définition 6.15. Soit G un groupe agissant sur un espace E.

1. Le groupe G agit *par homéomorphismes*[5] si pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto gx$ est un homéomorphisme de E.
2. Le groupe G agit *de façon totalement discontinue* si pour tout $x \in E$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de x tel que l'égalité $\mathcal{U} \cap g\mathcal{U} \neq \emptyset$ implique $g = 1_G$.

Proposition 6.16. *Soit E un espace CALCA, et G un groupe agissant de façon totalement discontinue par homéomorphismes sur E. Alors l'application quotient $q : E \twoheadrightarrow E/G$ est un revêtement galoisien, de groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(q) \simeq G$.

L'exercice suivant explique une relation entre actions totalement discontinues et actions libres.

Exercice 6.17. *Soit G un groupe agissant par homéomorphismes sur un espace E. Montrez les faits suivants.*

1. *Si G agit de façon totalement discontinue, alors l'action est* libre*, c'est à dire que pour tout $x \in E$, le stabilisateur de x est trivial.*
2. *Réciproquement, si G est fini, si E est un espace séparé et localement compact, et si G agit librement sur E alors G agit de façon totalement discontinue.*

La première partie du théorème de structure de revêtements galoisiens nous dit que tous les revêtements galoisiens sont en fait construits par des actions de groupes comme dans la proposition 6.16. La seconde partie est souvent utilisée dans la pratique pour calculer des groupes fondamentaux (en particulier lorsque E est simplement connexe).

Theorème 6.18 (Structure des revêtements galoisiens)**.**

[5] De façon équivalente, G agit par homéomorphismes si, en le considérant comme un espace discret, l'action $G \times E \to E$ est une application continue.

1. *Si $p : E \to B$ est un revêtement galoisien, alors* $\mathrm{Aut}(p)$ *agit de façon totalement discontinue sur E, et l'application $\overline{p} : E/\mathrm{Aut}(p) \to B$ obtenue par quotient est un homéomorphisme.*
2. *De plus, pour tout $b \in B$, et pour tout $x \in p^{-1}(b)$, on a un isomorphisme de groupes :*

$$\pi_1(B,b)/p_\sharp\pi_1(E,x) \simeq \mathrm{Aut}(p)\ .$$

Exemple 6.19. Soit $n \geq 1$. L'espace projectif $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est le quotient de l'action par antipodie de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n. Cette action est totalement discontinue, le revêtement est donc galoisien, de groupe d'automorphismes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $n \geq 2$, S^n est simplement connexe, le théorème de structure des revêtements galoisiens montre que le groupe fondamental de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 6.20. *Construisez une variété de dimension* 3 *dont le groupe fondamental est égal à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

6.5 Classification des revêtements

Définition 6.21. Un revêtement universel est un revêtement CALCA dont l'espace total est simplement connexe.

Exemple 6.22.
1. Le revêtement $\mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \approx (S^1)^{\times n}$ est un revêtement universel du tore de dimension n.
2. Le revêtement $S^n \twoheadrightarrow S^n/\,(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est un revêtement universel du tore si $n \geq 2$.

Le nom de revêtement universel est justifié par la propriété suivante, qui découle directement du théorème de relèvement des applications.

Proposition 6.23. *Soit $p_u : \widetilde{B} \to B$ un revêtement universel, et $p : E \to B$ un revêtement quelconque. Choisissons un point $b \in B$ et deux points $\widetilde{x} \in p_u^{-1}(b)$ et $x \in p^{-1}(b)$. Alors il existe un unique morphisme de revêtements h de p_u vers p, tel que $h(\widetilde{x}) = x$.*

Comme conséquence formelle de la proposition précédente, le revêtement universel d'un espace B est unique à isomorphisme près. L'existence d'un revêtement universel n'est par contre pas gratuite, et n'est d'ailleurs pas vraie sans hypothèse topologique supplémentaire sur B.

Définition 6.24. Un espace B est *semi-localement simplement connexe* si tout point $b \in B$ admet un voisinage $\mathcal{U}$ telle que l'implication induite par l'inclusion $\pi_1(\mathcal{U},b) \to \pi_1(B,b)$ est triviale.

Par exemple, les espaces localement contractiles (ex. les variétés topologiques, les espaces obtenus par constructions cellulaires successives) sont semi-localement simplement connexes.

Theorème 6.25. *Soit B un espace CALCA. B admet un revêtement universel si et seulement si B est semi-localement simplement connexe.*

Theorème 6.26 (Classification)**.** *Soit B un espace CALCA, admettant un revêtement universel, et soit $b \in B$. On a une bijection :*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Classes d'isom. de} \\ \textit{revêtements CALCA} \\ \textit{au dessus de } B \end{array} \right\} & \xrightarrow{\simeq} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Classes de conjugaison} \\ \textit{dans } \pi_1(B,b) \end{array} \right\} \\ \left[E \xrightarrow{p} B\right] & \mapsto & [p_\sharp \pi_1(E,x)] \\ & & (\textit{où } x \textit{ point qcq de } p^{-1}(b)) \end{array}.$$

Pour conclure, nous donnons une application de la classification des revêtements en algèbre. La classification permet de démontrer le **théorème de Nielsen-Schreier :** tout sous-groupe d'un groupe libre est libre. Nous indiquons le schéma de la démonstration. La démonstration repose sur les faits préliminaires suivants.

1. Le groupe fondamental d'un bouquet quelconque de cercles est un groupe libre, le cardinal d'une base est égal au cardinal du bouquet. (On le sait pour un nombre fini de cercles d'après Van Kampen. Pour déduire le cas quelconque du cas fini, on utilise que tout compact d'un bouquet quelconque est contenu dans un sous-bouquet fini.)
2. Le groupe fondamental d'un graphe topologique quelconque est un groupe libre. (Si Γ est un graphe, on peut trouver un arbre $A \subset \Gamma$ contenant tous les sommets. Un arbre est contractile et de plus l'inclusion est une cofibration, donc Γ est homotopiquement équivalent à Γ/A qui est un bouquet de cercles)
3. Si $p : E \to B$ est un revêtement dont la base B est un graphe, alors E est également un graphe.

Soit donc G un groupe libre dont une base est de cardinal A et soit H un sous-groupe de G. On forme le bouquet B d'un ensemble de A cercles, c'est un espace de groupe fondamental G. Par la classification des revêtements il existe un revêtement $p : E \to B$ tel que $\pi_1(E,x) \simeq p_\sharp \pi_1(E,x) = H$. Mais E est alors un graphe, donc son groupe fondamental est libre, CQFD.

Troisième partie
Homologie

7 Catégories

Dans cette courte section nous introduisons deux définitions simples : catégories et foncteurs (= morphismes de catégories). Ces notions générales nous fournissent un langage commode et concis pour exprimer certaines des propriétés des invariants algébriques.

Définition 7.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est constituée de :

(i) une classe $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, les *objets* de $\mathcal{C}$,

(ii) pour chaque $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ un ensemble de *morphismes* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$,

(iii) une loi de composition des morphismes, c'est à dire pour chaque triplet d'objets (X, Y, Z), une application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (g,f) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

Ces données satisfont les deux axiomes suivants.

(1) La composition est associative : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(2) Pour chaque objet X, il existe un morphisme $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ tel que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $f \circ \mathrm{Id}_X = f$.

On montre facilement que le morphisme Id_X est uniquement déterminé, on l'appelle le *morphisme identité de* X. Un morphisme $f : X \to Y$ est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g : Y \to X$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Exemple 7.2.

1. La catégorie $\mathcal{E}ns$ dont les objets sont les ensembles, les morphismes sont les applications, et la loi de composition est la loi de composition usuelle des applications.
2. De même, on a la catégorie $\mathcal{G}ps$ des groupes, la catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens, la catégorie R-Mod des modules à gauche sur un anneau R, la catégorie $\mathcal{T}op$ des espaces topologiques...
3. La catégorie $\mathcal{T}op_*$ des espaces topologiques pointés, dont les objets sont les couples (X, x), où X est un espace topologique et $x \in X$, les morphismes $f : (X, x) \to (Y, y)$ sont les applications continues $f : X \to Y$ telles que $f(x) = y$, et la loi de composition est donnée par la composition usuelle des des applications continues.

4. Plus généralement, la catégorie $\mathcal{T}op_2$ des paires d'espaces, dont les objets sont les couples (X, A), où X est un espace topologique et $A \subset X$, les morphismes de paires d'espaces $f : (X, A) \to (Y, B)$ sont les applications continues $f : X \to Y$ telles que $f(A) \subset B$, et la loi de composition est donnée par la composition usuelle des applications continues.

Définition 7.3. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée :

(i) pour chaque objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, d'un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$,

(ii) pour chaque $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$,

telles que les conditions suivantes sont satisfaites.

(1) F préserve la loi de composition $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

(2) F préserve les morphismes identités $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$.

On prouve facilement qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ transforme un isomorphisme de $\mathcal{C}$ en un isomorphisme de $\mathcal{D}$. On peut composer des foncteurs de la façon évidente : $(G \circ F)(X) := G(F(X))$, $(G \circ F)(f) := G(F(f))$.

Exemple 7.4.

1. Le foncteur d'oubli : $\mathcal{T}op \to \mathcal{E}ns$, qui envoie un espace topologique, resp. une application continue, sur l'ensemble (resp. l'application) sous-jacente.
2. De même on a des foncteurs d'oubli : R-Mod $\to \mathcal{A}b$, $\mathcal{A}b \to \mathcal{G}ps$, $\mathcal{G}ps \to$ Ens,...
3. On a aussi un foncteur $\mathcal{E}ns \to \mathcal{T}op$ qui envoie un ensemble X sur l'espace topologique obtenu en munissant X de la topologie discrète.
4. L'abélianisation d'un groupe définit un foncteur $\mathcal{G}ps \to \mathcal{A}b$.
5. Les invariants π_0 et π_1 définissent des foncteurs :

$$\pi_0 : \mathcal{T}op \to \mathcal{E}ns \;,$$
$$\pi_1 : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{G}ps \;.$$

8 Complexes et homologie

8.1 Définitions

Dans ce paragraphe, R désigne un anneau quelconque. Les R-modules sont implicitement des R-modules à gauche.

Définition 8.1. Un complexe C_* de R-modules est un diagramme de R-modules de la forme suivante :

$$\dots \xrightarrow{d_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} \dots ,$$

où les applications R-linéaires d_i vérifient $d_i \circ d_{i+1} = 0$ pour tout i. Les morphismes d_i sont les *différentielles* du complexe, et C_i est le R-module des éléments *de degré i* du complexe.

Définition 8.2. Soient C_* et D_* deux complexes de R-modules, de différentielles respectives d^C et d^D. Un morphisme de complexes $f_* : C_* \to D_*$ est la donnée d'une famille d'applications R-linéaires $f_i : C_i \to D_i$, $i \in \mathbb{Z}$, telles que $f_i \circ d^C_{i+1} = d^D_{i+1} \circ f_{i+1}$ pour tout i.

Définition 8.3. On note $\mathrm{Ch}(R)$ (resp. $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$) la catégorie avec :

- Objets : les complexes de R-modules (resp. tels que $C_i = 0$ pour $i < 0$),
- Morphismes : les morphismes de R-modules,
- Composition : $f \circ g := (f_i \circ g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Définition 8.4. Soit C un complexe de R-modules. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on introduit les R-modules suivants :

- Le R-module Z_i des cycles de degré i : $Z_i := \mathrm{Ker} d_i \subset C_i$.
- Le R-module B_i des bords de degré i : $B_i := \mathrm{Im} d_{i+1} \subset Z_i$.
- Le R-module d'homologie $H_i(C)$ de degré i : $H_i(C) = Z_i / B_i$.

Lemme 8.5. *Un morphisme de complexes $f_* : C_* \to D_*$ détermine pour tout entier i une application*

$$\begin{array}{rccc} H_i(f) : & H_i(C) & \to & H_i(D) \\ & [z] & \mapsto & [f_i(z)] \end{array} .$$

Le i-ème groupe d'homologie définit un foncteur :

$$H_i : \mathrm{Ch}(R) \to R\text{-}Mod\,.$$

Définition 8.6. Deux morphismes de complexes $f_*, g_* : C_* \to D_*$ sont *homotopes* s'il existe une famille $(h_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ d'applications R-linéaires $h_i : C_i \to D_{i+1}$ telles que pour tout i

$$f_i - g_i = d^D_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d^C_i \,.$$

Lemme 8.7. *1. La relation d'homotopie définit une relation d'équivalence sur* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(R)}(C_*, D_*)$.

2. La relation d'homotopie est compatible à la composition.

3. Si $f_*, g_* : C_* \to D_*$ *sont homotopes alors* $H_i(f) = H_i(g)$ *pour tout* i.

8.2 L'exemple des chaînes singulières d'un espace

Nous présentons maintenant un complexe de R-modules fondamental : le complexe des chaînes singulières d'un espace topologique.

A. Définition.

Définition 8.8. Notons $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

- Le *simplexe standard* est l'espace topologique $\Delta^n :=< e_0, \dots, e_n >$.
- Le simplexe $< e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n >$ est noté $\partial_i \Delta^n$. On l'appelle *la i-ème face* de Δ^n.
- Pour $0 \leq i \leq n$, il existe une unique application affine $d^i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ telle que

$$d^i(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{si } k \leq i-1 \\ e_{k+1} & \text{si } k \geq i+1 \end{cases}$$

Cette application d^i induit un isomorphisme affine de Δ^{n-1} sur $\partial_i \Delta^n$.

Lemme 8.9. *Si* $i < j$ *alors les applications composées* $\Delta^{n-1} \xrightarrow{d^i} \Delta^n \xrightarrow{d^j} \Delta^{n+1}$ *et* $\Delta^{n-1} \xrightarrow{d^{j-1}} \Delta^n \xrightarrow{d^i} \Delta^{n+1}$ *sont égales.*

Définition 8.10. Soit X un espace, et R un anneau. Le complexe $C_*(X, R)$ des chaînes singulières de X est le complexe de R-modules défini de la façon suivante.

(0) Pour $n < 0$, $C_n(X, R) = 0$.

(1) Pour $n \geq 0$, $C_n(X, R)$ est le R-module libre engendré par l'ensemble des applications continues $\sigma : \Delta_n \to X$. Ces applications σ s'appellent les *simplexes singuliers* de l'espace X.

(2) Pour $n \geq 1$, la différentielle $d_n : C_n(X, R) \to C_{n-1}(X, R)$ est définie en envoyant $\sigma : \Delta^n \to X$ sur la somme :

$$d_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ d^i) \ .$$

On vérifie que cette définition donne bien un complexe, c'est à dire que $d_n \circ d_{n+1} = 0$. On peut expliciter le complexe des chaines singulières sur certains exemples particuliers.

Exemple 8.11. 1. Le complexe $C_*(\emptyset, R)$ est nul en chaque degré, avec différentielle nulle.

2. Le complexe $C_*(\{*\}, R)$ est un R-module libre de rang un en chaque degré, engendré par l'unique application $\Delta^n \to \{pt\}$. La différentielle d_n vaut l'identité si n est pair et 0 si n est impair.
3. En général $C_*(X,R) = \bigoplus_\alpha C(X_\alpha, R)$[6], où les X_α désignent les composantes connexes par arcs de X.

Il faut penser au complexe $C_*(X,R)$ comme à un modèle algébrique de l'espace topologique X. Le lemme suivant montre que le passage d'un espace topologique X à son modèle algébrique $C_*(X,R)$ se comporte bien.

Lemme 8.12. *Une application continue $f : X \to Y$ détermine un morphisme de complexes de chaines $f = (f_i) : C_*(X,R) \to C_*(Y,R)$ avec*

$$\begin{array}{rccc} f_i : & C_i(X,R) & \to & C_i(Y,R) \\ & \sum \lambda_k \sigma_k & \mapsto & \sum \lambda_k (f \circ \sigma_k) \end{array} .$$

Le complexe des chaînes singulières induit un foncteur :

$$\mathcal{T}op \to \mathrm{Ch}_{\geq 0}(R) .$$

B. Homologie singulière.

Définition 8.13. L'homologie singulière (à coefficients dans R) d'un espace topologique X est l'homologie du complexe $C_*(X,R)$:

$$H_i(X,R) := H_i(C_*(X,R)) .$$

Exemple 8.14. 1. $H_i(\emptyset; R) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

2. $H_i(\{*\}; R) \simeq R$ si $i = 0$, et 0 sinon.
3. $H_i(X;R) = \bigoplus_\alpha H_i(X_\alpha; R)$ où les X_α sont les composantes connexes par arcs de X. En particulier $H_0(X)$ est un R-module libre de base $\pi_0(X)$.

En général, pour un espace X quelconque, les R-modules $C_i(X,R)$ sont de dimension infinie, et il est totalement illusoire de vouloir calculer $H_i(X;R)$ directement à partir du complexe $C_*(X,R)$. Nous verrons des techniques de calcul de $H_i(X;R)$ plus tard.

Lemme 8.15. *Le i-ème module d'homologie singulière d'un espace topologique définit un foncteur $\mathcal{T}op \to R$-Mod.*

[6]La somme directe de complexes C_α est le complexe $\bigoplus_\alpha C_\alpha$ qui vaut $\bigoplus_\alpha (C_\alpha)_n$ en degré n, dont la différentielle d_n est déterminée par $d_n(x_\alpha) = d_n^{C_\alpha}(x_\alpha)$ si $x_\alpha \in C_\alpha$.

C. Homotopies.

Theorème 8.16. *Si $f, g : X \to Y$ sont des applications continues homotopes, alors $f_*, g_* : C_*(X, R) \to C_*(Y, R)$ sont homotopes. En particulier $H_i(f) = H_i(g)$ pour tout i. En particulier, une équivalence d'homotopie induit des isomorphismes en homologie singulière.*

8.3 Suites exactes courtes et suites exactes longues

Si $f_* : C_* \to D_*$ est un morphisme de complexes de R-modules, on peut très bien avoir $f_n : C_n \to D_n$ injective (ou surjective) pour tout n sans que $H_n(f) : H_n(C) \to H_n(D)$ soit injective (ou surjective). Pour un exemple de ce phénomène, on peut prendre la situation suivante :

$$\begin{array}{c} C_* \\ \downarrow f_* \\ D_* \end{array} \quad := \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & R \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & R \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (\mathcal{D})$$

Ce 'défaut' est une caractéristique fondamentale de l'homologie des complexes. Dans cette section, nous expliquons comment maîtriser ce phénomène.

Définition 8.17. 1. Une suite de morphismes de R-modules :

$$\dots \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \dots$$

est *exacte* si $\operatorname{Im} f_{n+1} = \operatorname{Ker} f_n$ pour tout i.

2. Une *suite exacte courte de R-modules* est une suite exacte de la forme :

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 .$$

3. Une *suite exacte courte de complexes de chaînes de R-modules* est un diagramme de complexes de chaînes

$$0 \to C'_* \xrightarrow{f_*} C_* \xrightarrow{g_*} C''_* \to 0 ,$$

tel que pour tout n, le diagramme de R-modules suivant est une suite exacte courte de R-modules.

$$0 \to C'_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} C''_n \to 0 .$$

Theorème 8.18. *Si $0 \to C'_* \xrightarrow{f_*} C_* \xrightarrow{g_*} C''_* \to 0$ est une suite exacte courte de complexes de R-modules, alors il existe une suite exacte (dite* suite exacte longue*) de R-modules*

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(C') \xrightarrow{H_n(f)} H_n(C) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C'') \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_n(f)} \dots .$$

Un *sous-complexe* C_* d'un complexe de R-modules D_* est un complexe tel que pour tout n, C_n est un sous-module de D_n et la différentielle d_n^C de C_* est obtenu par restriction de la différentielle de D_* en une application $C_n \to C_{n-1}$. Le *quotient* de D_* par C_* est le complexe $(D/C)_*$ défini de la manière suivante.

(1) Pour tout n, le R-module $(D/C)_n$ est le quotient de D_n par le sous-module C_n.

(2) La différentielle $d_n : (D/C)_n \to (D/C)_{n-1}$ envoie la classe $[x]$ d'un élément $x \in D_n$ sur la classe $[d_n^D(x)]$.

On a alors une suite exacte courte de complexes :

$$0 \to C_* \to D_* \to (D/C)_* \to 0\ .$$

Le théorème 8.18 nous donne alors une suite exacte longue en homologie, qui nous permet de comparer l'homologie de D_* avec l'homologie du sous-complexe C_* et du complexe quotient $(D/C)_*$:

$$\cdots \to H_{n+1}(D/C) \to H_n(C) \to H_n(D) \to H_n(D/C) \to H_{n-1}(C) \to \cdots\ .$$

Question 8.19. *Appliquez le théorème 8.18 pour expliquer ce qui se passe dans l'exemple du diagramme $(\mathcal{D})$ plus haut.*

Question 8.20. *Donnez une propriété universelle des complexes quotients.*

Exercice 8.21. *Soit C_* un sous-complexe de D_*.*

1. *Montrez que l'inclusion $\iota_* : C_* \to D_*$ induit des morphismes $H_n(\iota)$ injectifs (resp. surjectifs) pour tout n si et seulement si l'application quotient $q_* : D_* \to (D/C)_*$ induit des morphismes $H_n(q)$ surjectifs (resp. nuls) pour pour tout n.*
2. *Montrez que l'inclusion $\iota_* : C_* \to D_*$ induit des isomorphismes $H_n(\iota)$ pour tout n si et seulement si $H_n(D/C) = 0$ pour tout n.*

Le raffinement suivant du théorème 8.18 joue un rôle important dans certains calculs.

Theorème 8.22. *Si on a un diagramme commutatif dans $\mathrm{Ch}(R)$, dont les lignes sont des suites exactes courtes de complexes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_* \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha'_*"] & C_* \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_*"] & C''_* \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''_*"] & 0\ , \\
0 \arrow[r] & D'_* \arrow[r, "h"] & D_* \arrow[r, "k"] & D''_* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

alors les suites exactes longues du théorème 8.18 s'insèrent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(C') \arrow[r, "H_n(f)"] \arrow[d, "H_n(\alpha')"] & H_n(C) \arrow[r, "H_n(g)"] \arrow[d, "H_n(\alpha)"] & H_n(C'') \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(\alpha'')"] & H_{n-1}(C') \arrow[r, "H_{n-1}(f)"] \arrow[d, "H_{n-1}(\alpha')"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(D') \arrow[r, "H_n(h)"] & H_i(D) \arrow[r, "H_n(k)"] & H_n(D'') \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(C') \arrow[r, "H_{n-1}(h)"] & \cdots
\end{tikzcd} .$$

Le theorème 8.22 est souvent utilisé conjointement avec le lemme suivant.

Lemme 8.23 ('Lemme des cinq')**.** *Considérons un diagramme commutatif de R-modules, dont les lignes sont des suites exactes :*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd} .$$

Si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

L'exercice suivant est un exemple typique d'application du théorème 8.22 et du lemme des cinq.

Exercice 8.24. *Soit $f_* : D_* \to D'_*$ un morphisme de complexes de R-modules, et soit C_*, resp. C'_*, un sous-complexe de D_*, resp. D'_* tel que $f_n(C_n) \subset C'_n$ pour tout n. Vérifiez que f_* induit par passage au quotient un morphisme de complexes $\overline{f}_* : (D/C)_* \to (D'/C')_*$, puis montrez que si deux des trois applications suivantes*

$$\begin{aligned}
(i)\ & H_*(f) : H_*(C) \to H_*(C') \\
(ii)\ & H_*(f) : H_*(D) \to H_*(D') \\
(iii)\ & H_*(\overline{f}) : H_*(D/C) \to H_*(D'/C')
\end{aligned}$$

sont des isomorphismes en tout degré, alors la troisième l'est également.

9 L'homologie singulière et ses outils de calculs

Dans cette section, nous introduisons l'homologie singulière des paires d'espaces (X, A), qui mesure la topologie de l'espace X 'modulo' celle du sous-espace A. L'homologie l'homologie singulière d'un l'espace X définie à la section précédente correspond à l'homologie de la paire $(X, \emptyset)$. Les propriétés fondamentales de l'homologie (relative) sont numérotées (P0), (P1)... dans la suite. L'utilisation de ces propriétés fondamentales permet de faire un grand nombre de calculs explicites.

Comme récompense de ce travail algébrique, nous obtiendrons des démonstrations faciles de résultats topologiques non triviaux (théorème de Brouwer, invariance du bord, de la dimension, du domaine, théorème de Jordan...).

9.1 Homologie singulière des paires d'espaces

A. Définition

Soit R un anneau. Soit X un espace et $A \subset X$. Alors l'inclusion $\iota : A \hookrightarrow X$ induit un morphisme de complexes de chaînes singulières, injectif en chaque degré :

$$\iota_* : C_*(A, R) \to C_*(X, R) .$$

On peut donc voir $C_*(A, R)$ comme un sous-complexe de $C_*(X, R)$.

Définition 9.1. Le *complexe singulier relatif* $C_*(X, A, R)$ est le quotient du complexe $C_*(X, R)$ par le sous-complexe $C_*(A, R)$. L'homologie du complexe $C_*(X, A, R)$ s'appelle *l'homologie relative de la paire* (X, A), et se note $H_n(X, A, R)$.

On notera souvent plus simplement $C_*(X, A)$ et $H_n(X, A)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur l'anneau des coefficients R.

Proposition 9.2 (Fonctorialité (P0))**.** *Une application de paires $f : (X, A) \to (Y, B)$ induit un morphisme de complexes de chaînes d'homologie relative :*

$$\begin{array}{rccc} f_* : & C_*(X, A) & \to & C_*(Y, B) \\ & [\sum \lambda_i \sigma_i] & \mapsto & [\sum \lambda_i f \circ \sigma_i] \end{array} ,$$

donc des morphismes en homologie relative $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$. En particulier, l'homologie singulière relative définit des foncteurs

$$H_n : \mathcal{T}op_2 \to R\text{-}\mathit{Mod} .$$

On a $C_*(X) = C_*(X, \emptyset)$, donc l'homologie singulière relative généralise l'homologie singulière : $H_n(X) = H_n(X, \emptyset)$. On rappelle que l'on a

$$H_n(\{pt\}) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n > 0, \end{cases} \qquad (P1)$$

et si les X_α sont les composantes connexes par arcs de X :

$$H_n(X) \simeq \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)\ . \qquad (P2)$$

En particulier $H_0(X)$ est un R-module libre de base $\pi_0(X)$.

Question 9.3. *Soit $f : X \to Y$ une application continue. Décrivez $H_0(f) : H_0(X) \to H_0(Y)$ en fonction de $\pi_0(f)$.*

B. Homotopies

Définition 9.4. Deux applications de paires d'espaces $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ sont *homotopes* s'il existe une application $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$[7]. On notera $f \sim_{\text{paires}} g$, ou simplement $f \sim g$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

Exemple 9.5. Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$.

1. L'application de paires $u : (\mathbb{C}^*, S^1) \to (\mathbb{C}^*, S^{n-1})$ donnée par $u(x) = x/|x|$ est homotope à l'application identité $\mathrm{Id} : (\mathbb{C}^*, S^1) \to (\mathbb{C}^*, S^1)$.
2. Bien que la réflexion orthogonale d'axe $\mathbb{R}$, $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est homotope à l'application identité de $\mathbb{C}$, les applications de paires $r, \mathrm{Id} : (\mathbb{C}, S^1) \to (\mathbb{C}, S^1)$ ne sont pas homotopes.

Lemme 9.6. *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_2}((X, A), (Y, B))$, compatible à la composition.*

Proposition 9.7 (Invariance homotopique (P3))**.** *Deux aplications de paires $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotopes induisent la même application en homologie relative.*

C. Suites exactes longues

Proposition 9.8 (Suite exacte longue d'une paire (P4))**.** *Pour toute paire d'espaces (X, A), on a une suite exacte longue (où les applications qui ne sont pas des connectants sont induites par les inclusions de paires) :*

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \to \dots \\ \to H_0(A) \to H_0(X) \to H_0(X, A) \to 0\ . \end{aligned}$$

De plus, une application de paires d'espaces $f : (X, A) \to (Y, B)$ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X, A) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y, B) \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} .$$

[7]De manière équivalente, $H : X \times I \to Y$ est une homotopie entre f et g dont la restriction à $A \times I$ induit une homotopie entre $f_{|A}^{|B}$ et $g_{|A}^{|B}$.

D. Théorèmes d'excision

Theorème 9.9 (Excision (P5)). *Soit (X, A) une paire d'espaces, et $B \subset A$ tel que $\overline{B} \subset \mathring{A}$. Alors l'inclusion de paires $(X \setminus B, A \setminus B) \hookrightarrow (X, A)$ induit pour tout n un isomorphisme :*

$$H_n(X \setminus B, A \setminus B) \xrightarrow{\simeq} H_n(X, A) .$$

Theorème 9.10 (Mayer-Vietoris (P5')). *Soit X un espace, $A, B \subset X$ tels que $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$. Alors on a une suite exacte longue en homologie :*

$$\begin{aligned} \cdots \to H_{n+1}(X) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A \cap B) &\xrightarrow{(H_n(\iota^A_{A\cap B}), H_n(\iota^B_{A\cap B}))} H_n(A) \oplus H_n(B) \\ &\xrightarrow{H_n(\iota^X_A) - H_n(\iota^Y_B)} H_n(X) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \to \ldots \end{aligned}$$

De plus, si on a une décomposition A', B' d'un espace X' et une application $f : X \to X'$ telle que $f(A) \subset A'$ et $f(B) \subset B'$, alors les suites de Mayer-Vietoris s'inscrivent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A \cap B) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(A) \oplus H_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A \cap B) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A' \cap B') \arrow[r] & H_n(A') \oplus H_n(B') \arrow[r] & H_n(X') \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(A' \cap B') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} .$$

E. Homologie réduite

L'homologie réduite est une variante mineure de l'homologie singulière qui est pratique à manipuler dans certains calculs. Si X est un espace, il existe une unique application $X \to \{pt\}$. L'homologie réduite $\overline{H}_n(X)$ est définie comme le noyau de l'application $H_n(X) \to H_n(\{pt\})$. On a donc :

$$\begin{aligned} H_n(X) &= \overline{H}_n(X) \text{ si } n > 0, \\ H_0(X) &= \overline{H}_0(X) \oplus R \end{aligned}$$

Les axiomes d'invariance homotopique (P3), de suite exacte longue (P4) et de Mayer Vietoris (P5') ci-dessus restent valables si on remplace les homologies des espaces par les homologie réduites (et on conserve l'homologie relative des paires d'espaces telle quelle). Par exemple la suite exacte longue d'une paire (X, A) peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \ldots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \overline{H}_n(A) \to \overline{H}_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} \overline{H}_{n-1}(A) \to \ldots \\ \to \overline{H}_0(A) \to \overline{H}_0(X) \to H_0(X, A) \to 0 . \end{aligned}$$

9.2 Premiers calculs et applications

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques calculs essentiels d'homologie singulière qui découlent directement des axiomes de calcul (P0)-(P5), et nous donnons des applications en topologie.

A. Homologie des sphères

Theorème 9.11. *Pour tout $d \geq 0$ et tout n on a :*

$$\overline{H}_n(S^d) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } d \neq n, \\ R & \text{si } d = n. \end{cases}$$

Ce résultat montre que bien que les sphères S^n sont simplement connexes si $n \geq 2$, elle ne sont pas contractiles. Ce résultat permet également de démontrer le **Théorème de Brouwer** : si $n \geq 1$, toute application continue $f : D^n \to D^n$ admet un point fixe.

Exercice 9.12. *Construisez un espace semi-localement simplement connexe qui n'est pas localement contractile. (On pourra considérer la boucle d'oreille Hawaienne de dimension 2, c'est à dire le fermé de $\mathbb{R}^3$ obtenu comme réunion des sphères de centre $(1/n, 0, 0)$ et de rayon $1/n$ pour $n > 0$.)*

Le calcul de l'homologie des sphères (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) est le point de départ de la *théorie du degré*. Le groupe abélien $H_n(S^n, \mathbb{Z})$ est cyclique infini, et les morphismes de groupes cycliques infinis sont exactement les homothéties $x \mapsto \lambda x$ de rapport $\lambda \in \mathbb{Z}$. On introduit la définition suivante.

Définition 9.13. Soit $f : S^n \to S^n$ continue. On appelle *degré de f* l'unique entier relatif $\deg(f)$ tel que $H_n(f)$ soit une homothétie de rapport $\deg(f)$.

Proposition 9.14 (Calculs de degrés)**.**

1. *Soit r une réflexion orthogonale de $\mathbb{R}^{n+1}$, et $r_{|S^n}$ sa restriction à la sphère unité. Alors $\deg(r_{|S^n}) = -1$.*
2. *Le degré de l'application antipode de S^n vaut $(-1)^{n+1}$.*

La théorie du degré possède de nombreuses applications topologiques qui seront traitées en exercice.

B. Homologie locale

On appelle *homologie locale* d'un espace X au point $x \in X$ les R-modules d'homologie $H_n(X, X \setminus \{x\})$.

Theorème 9.15. *Soit X un espace, et x un point fermé de X qui admet un voisinage homéomorphe à $\mathring{D}^d$. Alors*

$$H_n(X, X \setminus \{x\}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq d, \\ R & \text{si } n = d. \end{cases}$$

Parmi les applications de l'homologie locale, nous donnons les deux théorèmes topologiques importants suivants.

- **Théorème de l'invariance de la dimension :** Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Si $\mathcal{U}$ est homéomorphe à V alors $n = m$.
- **Théorème d'invariance du bord :** Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ est un homéomorphisme, alors f envoie le bord $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ homéomorphiquement sur lui-même.

Le théorème de l'invariance de la dimension implique que si deux variétés topologiques X et Y de dimensions n et m sont homéomorphes, alors $n = m$.

C. Homologie des bouquets

Theorème 9.16. *Soient (X, x) et (Y, y) deux espaces pointés. On suppose que x (resp. y) admet un voisinage $\mathcal{U}_x$ (resp. $\mathcal{U}_y$) qui se rétracte par déformation sur x (resp. y). Alors les inclusions $X \hookrightarrow X \vee Y$ et $Y \hookrightarrow X \vee Y$ induisent pour tout n un isomorphisme :*

$$\overline{H}_n(X) \oplus \overline{H}_n(Y) \xrightarrow{\simeq} \overline{H}_n(X \vee Y) .$$

D. Homologie des quotients

Theorème 9.17. *Soit $A \hookrightarrow X$ une cofibration. L'application quotient $q : (X, A) \to (X/A, *)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Exemple 9.18. Le cone d'un espace X est le quotient $(I \times X)/(\{1\} \times X)$. La suspension ΣX de X est le quotient $CX/(\{0\} \times X)$. Comme le cone est contractile, on a pour tout $n \geq 0$ un isomorphisme $\overline{H}_n(X) \simeq \overline{H}_{n+1}(\Sigma X)$.

9.3 Le théorème de Jordan généralisé

A. Homologie singulière d'une union croissante d'espaces

Nous commençons par une propriété supplémentaire de l'homologie singulière. Cette propriété élémentaire est essentielle, et ne peut pas se déduire des axiomes (P0)-(P5).

Proposition 9.19 (P6). *Soit X un espace, et soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite croissante de sous-espaces de X tels que :*

(i) $X = \bigcup_{k\geq 0} X_k$,

(ii) tout sous-ensemble compact K de X est contenu dans un X_k.

Notons $j_{k,\ell} : X_k \hookrightarrow X_\ell$ et $j_k : X_k \hookrightarrow X$ les inclusions de sous-espaces. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a les propriétés suivantes.

(a) Pour tout $c \in H_n(X)$, il existe un entier k et classe $c_k \in H_n(X_k)$ telle que $H_n(j_k)(c_k) = c$.

(b) Pour tout $c_k \in H_n(X)$ on a $H_n(j_k)(c_k) = 0$ si et seulement s'il existe $\ell > k$ tel que $H_n(j_{k,\ell})(c_k) = 0$.

La proposition précédente montre que l'on peut calculer complètement l'homologie de X à partir de l'homologie des espaces X_k et l'effet des applications $j_{k,\ell} : X_k \hookrightarrow X_\ell$ sur l'homologie. En effet, on peut déduire de la proposition que $H_n(X)$ est isomorphe au R-module quotient

$$\left(\bigoplus_{k\geq 0} H_n(X_k)\right)/N \ ,$$

où N est le sous-module de la somme directe engendré par les éléments du type $c_k - H_n(j_{k,\ell})(c_k)$, pour tout $k < \ell$ et tout $c_k \in H_n(X_k)$.

B. Le théorème de Jordan

On rappelle que si X est un espace compact et si Y est un espace topologique séparé, une application continue $f : X \to Y$ est un plongement (c'est à dire induit un homéomorphisme sur son image) si et seulement si elle est continue et injective.

Proposition 9.20. *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé. Soit Y un espace topologique compact satisfaisant la propriété d'annulation suivante. Pour tout plongement $f : Y \to S^n$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\overline{H}_k(S^n \setminus f(Y)) = 0 \ .$$

Alors $Y \times I$ satisfait aussi cette propriété d'annulation.

Le point clé pour démontrer le théorème de Jordan est le corollaire suivant.

Corollaire 9.21. *Soit $f : D^r \to S^n$ un plongement ($n > 0$ et r un entier quelqconque). Alors $\overline{H}_k(S^n \setminus f(D^r)) = 0$ pour tout k.*

Theorème 9.22 (Théorème de Jordan généralisé)**.** *Soit $0 \leq r < n$ et soit $f : S^r \to S^n$ un plongement. Alors pour tout entier k on a*

$$H_k(S^n \setminus f(S^r)) = H_k(S^{n-r-1}) \ .$$

Nous donnons deux applications topologiques importantes du théorème de Jordan généralisé.

1. **Théorème de Jordan :** si $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ est un plongement et $n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1})$ possède deux composantes connexes par arcs.
2. **Théorème de l'invariance du domaine :** soient V et W deux variétés topologiques de dimension n, et $f : V \to W$ une application continue injective. Alors f est un homéomorphisme local.

10 Triangulations et CW-complexes

Le complexe des chaînes singulières d'un espace est beaucoup trop gros : en chaque degré n, c'est un R-module libre de base les applications continues $\Delta^n \to X$, c'est à dire dans la plupart des cas de rang infini non dénombrable. Il faut donc utiliser les propriétés (P0)-(P6) pour pouvoir calculer explicitement $H_*(X)$.

Cependant, on peut souvent remplacer le complexe des chaînes singulières par un complexe plus petit qui a la même homologie, mais à partir duquel il est possible de faire des calculs directs. L'objet de cette section est de présenter deux situations où l'on dispose d'un petit complexe pour faire des calculs. La situation où l'espace X est triangulable, et la situation (plus générale) où l'espace X admet une structure de CW-complexe.

10.1 Triangulations et homologie simpliciale

Un ensemble de $d+1$ points $\{x_0, \dots, x_d\}$ de $\mathbb{R}^n$ est *affinement indépendant* si le sous-espace affine engendré par ces points est de dimension d.

On appelle *d-simplexe* de $\mathbb{R}^n$ une partie $S \subset \mathbb{R}^n$ qu'on peut exprimer comme enveloppe convexe de $d+1$ points affinement indépendants $x_0, \dots, x_d$. On note $S =< x_0, \dots, x_d >$. Les points x_i sont appelés les *sommets* du simplexe. On peut les caractériser S comme les points extrémaux de S, c'est à dire les points $x \in S$ tels que si $[a, b]$ est un segment de S contenant x alors $x = a$ ou $x = b$. Les $d-1$-simplexes $\partial_i S :=< x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_d >$, $0 \le i \le d$, sont appelées les *faces* de S. Plus généralement, les *facettes* de S sont les ensembles convexes $< x_{i_0}, \dots, x_{i_k} >$ pour $k \le d$. Les facettes de S comprennent donc S lui même, ses faces, les faces de ses faces, etc.

Définition 10.1. On appelle *complexe simplicial géométrique* (de dimension finie) un ensemble K de simplexes de $\mathbb{R}^n$, satisfaisant les conditions suivantes.

(i) Si $S \in K$, alors les faces de S sont des éléments de K,

(ii) Si $S, T \in K$ alors $S \cap T$ est soit vide, soit une facette commune à T et S.

(iii) Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ rencontre un nombre fini de simplexes de K.

Si K est un complexe simplicial géométrique, on note $|K|$ le polyèdre associé :

$$|K| := \bigcup_{S \in K} S \ .$$

Une *triangulation* d'un espace X est la donnée d'un complexe simplicial K et d'un homéomorphisme $h : |K| \xrightarrow{\approx} X$.

Remarque 10.2. Si X est un espace triangulable, alors X est séparé et dénombrable à l'infini (réunion croissante d'une suite de compacts). De plus en utilisant (iii), on montre facilement que X est compact si et seulement si K est un complexe simplicial fini.

Exemple 10.3.
1. Les polyèdres de $\mathbb{R}^n$ sont des espaces triangulables (par définition).
2. Les variétés différentielles sont triangulables (Whitehead (1940), Whitney (1957)) .
3. Pour les variétés topologiques, la situation est plus complexe. Les variétés topologiques (séparées et dénombrables à l'infini) de dimension 2 et 3 sont triangulables, par des théorèmes de Radò (1925, cas de la dimension 2) et Moise (1952, cas de la dimension 3)[8]. On sait depuis les travaux de Freedman (1982, medaille Fields 86) qu'il existe des variétés topologiques de dimension 4 qui sont non triangulables. Une démonstration du fait que pour tout $n \geq 5$, il existe des variétés topologiques non triangulables a été annoncée en 2013 par Manolescu.

Soit X un espace muni d'une triangulation $h : |K| \xrightarrow{\approx} X$. A partir de la triangulation de X, on peut définir un complexe de R-modules $C_*^{\mathrm{simpl}}(K,R)$ de la manière suivante.

1. On met un ordre total sur les 0-simplexes de K : on décide que $x < y$ si les coordonnées du sommet x sont inférieures à celles de y pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^n$.) Ainsi chaque simplexe de K peut s'ecrire d'une manière unique sous la forme $< x_0, \dots, x_d >$, avec $x_0 < x_1 < \dots < x_d$.
2. On définit $C_n^{\mathrm{simpl}}(K,R)$ comme le R-module libre de base les n-simplexes de K.
3. On définit $d_n : C_n^{\mathrm{simpl}}(K,R) \to C_{n-1}^{\mathrm{simpl}}(K,R)$ par la formule :

$$d_n < x_0, \dots, x_n > = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i < x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n > \ .$$

Remarque 10.4. On peut identifier $C_*^{\mathrm{simpl}}(K,R)$ à un sous-complexe du complexe des chaînes singulières de X. De manière explicite on a un morphisme injectif $\Phi_* : C_*^{\mathrm{simpl}}(K,R) \to C_*(X,R)$ qui envoie un simplexe $< x_0, \dots, x_n >$ sur le simplexe singulier $\sum t_i e_i \mapsto h(\sum t_i x_i)$.

Définition 10.5. Le complexe $C_*^{\mathrm{simpl}}(K,R)$ s'appelle le *complexe des chaînes simpliciales de X* (relativement à la triangulation (K,h)). Son homologie s'appelle *l'homologie simpliciale de X*.

Nous obtiendrons le résultat suivant comme une conséquence du théorème 10.17 ci-après dans l'exercice 10.20. (Une démonstration directe sera proposée en TD).

Theorème 10.6. *L'homologie simpliciale de X est isomorphe à l'homologie singulière de X*

[8] On pourra trouver des démonstrations dans le livre de Moise, Geometric Topology.

Une première conséquence du théorème 10.6 est que l'homologie du complexe $C_*^{\mathrm{simpl}}(K,R)$ est indépendante de la triangulation (K,h) utilisée. Le théorème 10.6 montre aussi que si R est un anneau noethérien, alors les groupes d'homologie singulière d'un polyèdre compact X sont des R-modules de type fini. L'exercice suivant donne une application à l'homologie des variétés.

Exercice 10.7. *Soit X une variété topologique de dimension n munie d'une triangulation (K,h). Montrez que $|K|$ est égal à la réunion des simplexes de dimension n de K. Déduisez-en que $H_i(X,R)=0$ si $i>n$.*

10.2 CW-complexes et homologie cellulaire

A. Définitions

Définition 10.8. Une *structure de CW-complexe* sur un espace X est la donnée suivante.

(1) Une famille croissante de sous-espaces de $(X_k)_{k\geq 0}$ telle que (i) X_0 est un espace discret, (ii) $X=\bigcup_{k\geq 0} X_k$, et (iii) $\mathcal{U}$ est un ouvert de X si et seulement si $\mathcal{U}\cap X_n$ est un ouvert de X_n pour tout n.

(2) Pour tout $k\geq 1$, une famille d'applications de paires $f_\alpha:(D^k_\alpha,S^{k-1}_\alpha)\to(X_k,X_{k-1})$, $\alpha\in A_k$, où les D^k_α (resp. S^{k-1}_α) sont des copies de D^k, resp S^{k-1}, telles que le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{\alpha\in A_k} S^{k-1}_\alpha \arrow[r, "\sqcup f_{\partial\alpha}"] \arrow[d, hook] & X_{k-1} \arrow[d, hook] \\ \bigsqcup_{\alpha\in A_k} D^k_\alpha \arrow[r, "\sqcup f_\alpha"] & X_k \end{tikzcd} \qquad (\mathcal{D})$$

vérifie la propriété universelle des diagrammes de recollement d'espaces. En d'autres termes, X_k s'obtient à partir de X_{k-1} en recollant des cellules de dimension k.

Terminologie :

- Le sous-espace X_k s'appelle le *k-ième squelette* du CW-complexe. Si $X_n=X$, on dit que X est un CW-complexe de dimension n.
- On note
$$e^k_\alpha := f_\alpha(\overset{\circ}{D^k_\alpha}) \subset X_k$$
Les e^k_α sont les *cellules* de X. Chaque e^k_α est homéomorphe à $\overset{\circ}{D^k_\alpha}$, via f_α. De plus, les cellules (resp. de dimension inférieure ou égale à k) forment une partition de X (resp. de X_k).
- L'application $f_\alpha:D^k_\alpha\to X$ s'appelle l'*application caractéristique* de la cellule e^k_α, et sa restriction $f_{\partial\alpha}:S^{k-1}_\alpha\to X_{k-1}$ s'appelle l' *application d'attachement* de e^k_α.

Un même espace peut posséder plusieurs structures de CW-complexe différentes, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 10.9. 1. Choisissons $x_0 \in S^n$. La sphère S^n, $n \geq 1$, admet une structure de CW-complexe avec une 0-cellule $\{x_0\}$ et une n-cellule attachée à $\{x_0\}$ par l'application constante $f : S^{n-1} \to x_0$. Le k-squelette X_k est donc égal à $\{x_0\}$ pour $k < n$ et à S^n pour $k \geq n$.

2. Supposons qu'on a défini une structure de CW-complexe sur S^{n-1}, $n \geq 1$. On considère S^{n-1} comme l'équateur de S^n. Alors on peut définir une structure de CW-complexe sur S^n telle que $X_{n-1} = S^{n-1}$ (et les cellules et les applications d'attachements proviennent de la structure de CW-complexe de S^{n-1}), $X_n = S^n$ et S^n possède deux n-cellules (l'hémisphère nord et l'hémisphère sud), recollée le long de l'application identité $S^{n-1} \to S^{n-1}$.

Beaucoup d'espaces considérés jusqu'ici dans le cours admettent des structures de CW-complexes.

Exemple 10.10. 1. Un **graphe topologique** admet un structure de CW-complexe de dimension 1, dont les 0-cellules sont les sommets et les 1-cellules sont les arêtes.

2. Un **bouquet de sphères** de dimension non nulle admet une structure de CW-complexe, avec une 0-cellule, le point de base du bouquet, et une k-cellule pour chaque sphère de dimension k du bouquet, attachée via l'application constante $S^{k-1} \to \{*\}$. Le squelette de dimension k du bouquet est égal au sous-bouquet contenant les sphères de dimension $\leq k$.

3. L'**espace projectif réel** $X = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ admet une structure de CW-complexe avec $X_0 = \{pt\}$, et pour $k \geq 1$, $X_k = \mathbb{R}\mathrm{P}^k$. Rappelons que $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$ peut s'obtenir comme quotient de S^k par l'identification antipodale. Le $k+1$-squelette s'obtient à partir du k-squelette en recollant une cellule de dimension k via l'application quotient $q : S^k \twoheadrightarrow X_k$.

4. L'**espace projectif complexe** $X = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ admet une structure de CW-complexe avec $X_0 = X_1 = \{pt\}$, et pour $k \geq 1$, $X_{2k} = X_{2k+1} = \mathbb{C}\mathrm{P}^k$. Rappelons que $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$ peut s'obtenir comme quotient de $S^{2k+1} \subset \mathbb{C}^{k+1}$ sous l'action du groupe des racines complexes de l'unité. Le $2k+2$-squelette s'obtient à partir du $2k$-squelette en recollant une cellule de dimension $2k$ via l'application quotient $q : S^{2k+1} \twoheadrightarrow X_{2k}$.

5. Le **tore à g-trous** S_g admet une structure de CW-complexe de dimension 2, dont le 1-squelette est homéomorphe à un bouquet de $2g$ cercles, et dont le 2-squelette s'obtient à partir du 1-squelette en recollant une cellule de dimension 2, via une application $S^1 \to (S^1)^{\vee 2g}$ qui correspond au mot $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ du groupe fondamental du bouquet.

6. Un **polyèdre de** $\mathbb{R}^n$ admet une structure de CW-complexe, dont le k-squelette X_k est la réunion des simplexes de dimension $\leq k$. Le $k+1$-ième squelette s'obtient à partir du k-squelette en recollant les simplexes S de dimension $k+1$ via l'inclusion canonique $\partial S \hookrightarrow X_k$.

B. Propriétés topologiques des CW-complexes

Dans ce paragraphe, on se fixe un espace X muni d'une structure de CW-complexe $((X_k)_{k\geq 0}, (f_\alpha))$. Nous allons étudier les propriétés topologiques de X qui découlent de la structure de CW-complexe. Le lemme élémentaire suivant est à l'origine de la lettre 'W' du terme CW-complexe.

Lemme 10.11 (Weak topology). *Une partie A est ouverte (resp. fermée) dans X si et seulement si pour tout k et tout α, $f_\alpha^{-1}(A)$ est un ouvert (resp. fermé) de D^k_α.*

Lemme 10.12. *L'espace X est normal* [9]*, et en particulier séparé.*

La partie (iii) du lemme suivant est à l'origine de la lettre 'C' du terme CW-complexe.

Lemme 10.13. *Une partie A est compacte dans X si et seulement si elle est fermée et contenue dans une réunion finie de cellules. En particulier :*

(i) X est compact si et seulement s'il a un nombre fini de cellules.

(ii) Si A est un compact de X, alors il existe n tel que $A \subset X_n$.

*(iii) (**Closure finiteness**) L'adhérence d'une cellule $\overline{e^k_\alpha}$ ne rencontre qu'un nombre fini de cellules.*

L'étude de l'homologie des CW-complexes reposera sur la propriété (ii) du lemme 10.13, ainsi que sur le lemme fondamental suivant.

Lemme 10.14. *L'inclusion $X_k \hookrightarrow X_{k+1}$ est une cofibration et on a un homéomorphisme*

$$X_k/X_{k-1} \approx \bigvee_{\alpha\in A_k} D^k_\alpha/S^{k-1}_\alpha \approx (S^k)^{\vee\,\mathrm{card}(A_k)}\ .$$

C. Homologie des CW-complexes

Dans ce paragraphe, on se fixe un espace X muni d'une structure de CW-complexe $((X_k)_{k\geq 0}, (f_\alpha))$. Nous allons calculer l'homologie singulière de X à partir de sa structure de CW-complexe. On commence par quelques propriétés homologiques des k-squelettes.

[9] C'est à dire que (i) les points de X sont fermés, et (ii) si F_1 et F_2 sont deux fermés disjoints de X, alors on peut trouver deux ouverts disjoints $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ tels que $F_i \subset \mathcal{U}_i$ pour tout i.

Proposition 10.15. *Soit X un CW-complexe. Alors pour tout $k \geq 0$ on a (avec la convention $X_{-1} = \emptyset$) :*

1. *La suite exacte longue de la paire (X_k, X_{k-1}) induit des isomorphismes $H_q(X_{k-1}) \xrightarrow{\cong} H_q(X_k)$ pour $q \neq k, k-1$ et une suite exacte longue :*
$$0 \to H_k(X_k) \to H_k(X_k, X_{k-1}) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(X_{k-1}) \to H_{k-1}(X_k) \to 0 \; .$$
2. *On a $H_q(X_k) = 0$ pour $q > k$.*
3. *L'inclusion $X_k \hookrightarrow X$ induit une surjection $H_k(X_k) \twoheadrightarrow H_k(X)$ et un isomorphisme $H_q(X_k) \xrightarrow{\cong} H_q(X)$ pour $q < k$.*

Définition 10.16. Soit X un espace admettant une structure de CW-complexe, et R un anneau. Le complexe des chaînes cellulaires $C_*^{\mathrm{cell}}(X, R)$ est défini de la façon suivante (avec la convention $X_{-1} = \emptyset$).

(1) Le R-module $C_n^{\mathrm{cell}}(X, R)$ est égal à $H_n(X_n, X_{n-1}, R)$.

(2) La differentielle $\partial_n^{\mathrm{cell}} : C_n^{\mathrm{cell}}(X, R) \to C_{n-1}^{\mathrm{cell}}(X, R)$ est la composée
$$H_n(X_n, X_{n-1}, R) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X_{n-1}, R) \xrightarrow{H_{n-1}(\mathrm{incl})} H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}, R) \; .$$

Theorème 10.17. *L'homologie du complexe des chaînes cellulaires $C_*^{\mathrm{cell}}(X, R)$ est isomorphe à l'homologie singulière de X.*

Pour faire des calculs pratiques, on utilise souvent la reformulation suivante du complexe des chaînes cellulaires.

Proposition 10.18. *Soit X un CW-complexe. Fixons pour tout n un homéomorphisme $\gamma_n : D^n/S^{n-1} \approx S^n$. Alors le complexe des chaînes cellulaires de X est isomorphe au complexe C_*, où*

(1) le R-module C_n est libre de base les cellules e_α^n de dimension n,

(2) la différentielle $d_1 : C_1 \to C_0$ est définie par la formule
$$d_1(e_\alpha^1) = f_{\partial\alpha}(1) - f_{\partial\alpha}(-1) \; ,$$
où $f_{\partial\alpha} : \{\pm 1\} = S^0 \to X_0$ est l'application d'attachement de e_α^1,

(3) pour $n \geq 2$ la différentielle $d_n : C_n \to C_{n-1}$ est définie par la formule :
$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in A_{n-1}} [\alpha : \beta] e_\beta^{n-1} \; ,$$
où le nombre $[\alpha : \beta] \in \mathbb{Z}$ est égal au degré de l'application composée
$$S_\alpha^{n-1} \xrightarrow{f_{\partial\alpha}} X_{n-1} \xrightarrow{p_\beta} S_\beta^{n-1} \; ,$$

*où p_β est l'*unique *application continue qui est constante sur $X_{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}$ et telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} D_\beta^{n-1} \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d, "p_\beta"] \\ D_\beta^{n-1}/S_\beta^{n-2} \arrow[r, "\gamma_{n-1}"] & S_\beta^{n-1} \end{tikzcd} .$$

Nous pouvons ainsi écrire explicitement le complexe des chaînes cellulaires dans de nombreux cas (dont certains seront traités en TD).

Exemple 10.19. 1. Le complexe cellulaire de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est libre de rang 1 en degré $2k, k \leq n$, et nul dans les autres degrés. La différentielle est nulle. Ainsi :

$$H_i(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, R) = \begin{cases} R & i = 2k,\ 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

2. Le complexe cellulaire de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est libre de rang 1 en degré $k \leq n$, et nul dans les autres degrés. La différentielle $d : C_n \to C_{n-1}$ est égale à la multiplication par $1 + (-1)^n$. En particulier on obtient $H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, R) = R$. Si on note ${}_2R$ les éléments de 2-torsion dans R on a pour $0 < i < n$:

$$H_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, R) = \begin{cases} R/2R & \text{si } i \text{ impair,} \\ {}_2R & \text{si } i \text{ pair.} \end{cases}$$

De plus $H_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, R) = 0$ pour $i > n$ et le dernier degré non nul est donné par la formule :

$$H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, R) = \begin{cases} R & \text{si } n \text{ est impair,} \\ {}_2R & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

3. Le complexe cellulaire du tore à g trous S^g est libre de rang 1 en degrés 0 et 2 et libre de rang $2g$ en degré 1. Les différentielles sont nulles. En particulier :

$$H_i(S_g, R) = \begin{cases} R & i = 0, 2, \\ R^{2g} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} .$$

L'exercice suivant propose une application du complexe cellulaire à l'homologie simpliciale.

Exercice 10.20. *Si la structure de CW-complexe de X est donnée par une triangulation, montrez que le complexe des chaînes cellulaires est isomorphe au complexe des chaînes simpliciales. Déduisez-en une démonstration du théorème 10.6.*

11 Compléments sur l'homologie singulière

11.1 Torsion des modules sur les anneaux principaux

A. Produit tensoriel

Définition 11.1. Soit R un anneau *commutatif*[10], et M, N deux R-modules. Le produit tensoriel $M \otimes_R N$ est le R-module quotient

$$M \otimes_R N := L_{M\times N}/S\ ,$$

où $L_{M\times N}$ est le R-module libre de base les symboles $m \otimes n$, pour $(m,n) \in M \times N$, et S est le sous-groupe abélien engendré par les relations suivantes, pour tous $m, m', r, n, n' \in M^2 \times R \times N^2$:

(i) $(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$

(ii) $m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$

(iii) $m \otimes (rn) = (mr) \otimes n$

(iv) $m \otimes (rn) = r(m \otimes n)$

Le produit tensoriel définit des foncteurs :

$$-\otimes_R N : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}\,, \qquad M \otimes_R - : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}.$$

Proposition 11.2 (propriété universelle)**.** *L'application $\pi : M\times N \to M\otimes_R N$, $(m,n) \mapsto m \otimes n$ est* R-bilinéaire. *Pour toute application R-bilinéaire $f : M \times N \to Z$, il existe une unique application R-linéaire $\overline{f} : M \otimes_R N \to Z$ telle que $\overline{f} \circ \pi = f$.*

Proposition 11.3. *Le produit tensoriel vérifie les propriétés suivantes :*

1. $N \otimes_R M \simeq M \otimes_R N$,
2. $(M \otimes_R N) \otimes_R P \simeq M \otimes_R (N \otimes_R P)$,
3. $M \otimes_R R \simeq M$,
4. $M \otimes_R (\bigoplus_{i\in J} N_i) \simeq \bigoplus_{i\in J} M \otimes_R N_i$.
5. $M \otimes_R 0 \simeq 0$.

Les propriétés ci-dessus sont indépendant de l'anneau R considéré. Le phénomène suivant constitue cependant une différence très importante entre les produits tensoriels sur $\mathbb{Z}$ (ou des anneaux plus généraux) et les produits tensoriels sur un corps.

[10] Il est également possible de définir le produit tensoriel lorsque l'anneau n'est pas commutatif. Dans ce cas on prend M un R-module à droite et N un R-module à gauche. Le produit tensoriel $M \otimes_R N$ n'est qu'un groupe abélien en général. Il est défini comme le quotient $L_{M\times N}/S$ où $L_{M\times N}$ est le groupe abélien libre engendré par $M \times N$ et S le sous-groupe abélien correspondant aux relations (i), (ii) et (iii). Un exercice intéressant consiste à montrer que cette nouvelle définition du produit tensoriel coincide avec la définition 11.1 lorsque R est commutatif.

- Sur un corps $\Bbbk$, le produit tensoriel $-\otimes_{\Bbbk} W$ est *exact*, c'est à dire que si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est une suite exacte courte, alors on conserve une suite exacte courte après tensorisation avec W :
$$0 \to V' \otimes_{\Bbbk} W \to V \otimes_{\Bbbk} W \to V'' \otimes_{\Bbbk} W \to 0 \ .$$
- Le résultat précédent reste valable sur un anneau R quelconque si l'on considère le produit tensoriel $-\otimes_R L$ par un R-module libre L. En revanche, on peut trouver des applications injectives $f : M \to M'$ qui ne restent pas injectives après tensorisation par un R-module N. Pour $R = \mathbb{Z}$ par exemple, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$ est injective, mais $f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'application nulle.

Une partie seulement de l'exactitude est préservée par le produit tensoriel en général.

Proposition 11.4 (exactitude à droite)**.** *Si $M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte, alors pour tout N on a une suite exacte*
$$M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0 \ .$$

Exemple 11.5. Soit A un groupe abélien, T un groupe abélien de torsion, $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique zéro, n et m des entiers. On a :

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq A/nA$,
2. $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} T = 0$,
3. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(m,n)\mathbb{Z}$.

B. Produit de torsion

Soit R un anneau principal. Pour chaque R-module M, on fixe une suite exacte courte
$$0 \to K_M \xrightarrow{f_M} L_M \xrightarrow{g_M} M \to 0 \ ,$$
où L_M est un R-module libre. Comme une sous-module d'un R-module libre est libre, K_M est libre.

Définition 11.6. On appelle produit de torsion de M et N le R-module
$$\mathrm{Tor}^R(M,N) := \mathrm{Ker}\ (f_M \otimes_R N : K_M \otimes_R N \to L_M \otimes_R N) \ .$$

Lemme 11.7. *La definition 11.6 ne dépend pas de la suite exacte courte* $(*)$ *choisie. De plus,* $\mathrm{Tor}^R(M,N)$ *est également isomorphe au noyau de l'application*
$$M \otimes_R f_N : M \otimes_R K_N \to M \otimes_R L_N \ .$$

Exemple 11.8.
1. Si L est libre, $\mathrm{Tor}^R(M,L) = 0$ pour tout M.
2. Si $r \in R$, $\mathrm{Tor}^R(M,R/rR) = M/rM$.

3. $\mathrm{Tor}^R(M, \bigoplus_{j\in J} N_j) \simeq \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Tor}^R(M, N_j)$.
4. $\mathrm{Tor}^R(M,N) \simeq \mathrm{Tor}^R(N,M)$.
5. Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro, alors $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{K}) = 0$ pour tout groupe abélien A.

Exercice 11.9. *Calculer* $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *pour tout groupe abélien* A.

La propriété suivant montre que la torsion est la bonne notion pour contrôler le défaut d'exactitude du produit tensoriel.

Proposition 11.10. *Toute suite exacte courte de* R*-modules* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *induit une suite exacte longue :*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Tor}^R(M',N) \to \mathrm{Tor}^R(M,N) \to &\mathrm{Tor}^R(M'',N) \xrightarrow{\partial} M' \otimes_R N \\ &\to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0 \;. \end{aligned}$$

11.2 La formule des coefficients universels

Soit R un anneau commutatif, et A une R-algèbre et M un R-module. L'application :

$$\begin{array}{ccc} A \times M \otimes_R A & \to & M \otimes_R A \\ (a, m \otimes b) & \mapsto & m \otimes ab \end{array}$$

définit une structure de A-module sur $M \otimes_R A$. Le produit tensoriel par A définit donc un foncteur dit *d'extension de scalaires* :

$$- \otimes_R A \quad R\text{-Mod} \quad \to \quad A\text{-Mod}.$$

Ainsi, si C_* est un complexe de R-modules, on peut définir un complexe de A-modules $C_* \otimes_R A$ par extension des scalaires. On a une application A-linéaire qui permet de comparer les homologies des deux complexes :

$$\phi: \begin{array}{ccc} H_i(C) \otimes_R A & \to & H_i(C \otimes_R A) \\ [c] \otimes a & \mapsto & [c \otimes a] \end{array} .$$

Theorème 11.11 (des coefficients universels)**.** *Soit* R *un anneau principal, soit* C_* *un complexe de* R*-modules libres et soit* A *une* R*-algèbre. On a pour tout* i *une suite exacte courte de* A*-modules*

$$0 \to H_i(C) \otimes_R A \xrightarrow{\phi} H_i(C \otimes_R A) \to \mathrm{Tor}^R(H_{i-1}(C), A) \to 0 \;,$$

De plus ϕ *admet un rétracte, d'où un isomorphisme de* A*-modules*

$$H_i(C \otimes_R A) \simeq H_i(C) \otimes_R A \oplus \mathrm{Tor}^R(H_{i-1}(C), A) \;.$$

En particulier, on peut appliquer ce qui précède au complexe des chaînes singulières d'un espace X. En effet, on a $C_*(X,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} A = C_*(X,A)$. On obtient donc des isomorphismes

$$\begin{cases} H_0(X,A)\simeq H_0(X,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} A \\ H_1(X,A)\simeq H_1(X,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} A \\ H_i(X,A)\simeq H_i(X,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} A\oplus \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(X,\mathbb{Z}),A) \quad \text{si } i\geq 2. \end{cases}$$

Le cas où A est un corps de caractéristique 0 est particulièrement sympathique, en effet dans ce cas le terme de torsion est nul, donc l'application ϕ induit un isomorphisme $H_i(X,A)\simeq H_i(X,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} A$ en tout degré.

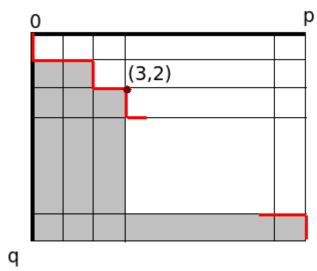
11.3 Deux autres théorèmes importants (et hors programme pour l'examen)

Nous donnons dans ce paragraphe deux théorèmes supplémentaires concernant l'homologie singulière, sur lesquels nous passons rapidement et sans démonstration, faute de temps. Le premier est le théorème de Künneth, qui permet de calculer l'homologie d'un produit de deux espaces. Le second est le théorème de De Rham, qui permet de comparer l'homologie singulière et la cohomologie de De Rham des variétés différentielles.

A. La formule de Künneth

Soit X,Y deux espaces. Soit $\sigma:\Delta^p\to X$ un simplexe singulier de X et $\tau:\Delta^q\to Y$ un simplexe de Y. L'application $\sigma\times\tau:\Delta^p\times\Delta^q\to X\times Y$ n'est pas un simplexe singulier de $X\times Y$ car sa source n'est pas un simplexe standard.

Cependant, on peut découper $\Delta^p\times\Delta^q$ en simplexes de la facon suivante. Notons $(v_0,\dots,v_p)$ les sommets de Δ^p et $(w_0,\dots,w_q)$ les sommets de Δ^q. Les sommets de $\Delta_p\times\Delta_q$sont donc le couples (v_i,w_j) pour $0\leq i\leq p$ et $0\leq j\leq q$. On regarde ces couples comme les sommets de la grille suivante :



On considère les chemins ν dans la grille reliant le point en haut à gauche $(0,0)$ au point en bas à droite (p,q) (comme le chemin en rouge). Chacun de ces chemins est formé de $p+q$ arêtes, et passe par $p+q+1$ sommets qu'on numérote dans l'ordre de parcours : le 0-ième sommet est le point $(0,0)$ correspondant au sommet (v_0, w_0) de $\Delta^p \times \Delta^q$, et le $p+q$-ième sommet est le point (p,q) correspondant au sommet (v_p, w_q). A chaque chemin ν, on associe une application affine : $\ell_\nu : \Delta_{p+q} \to \Delta_p \times \Delta_q$, qui envoie le sommet e_i du simplexe standard sur Δ_{p+q} sur le i-ème sommet de ν. On note $|\nu|$ le nombre de cases situées sous le chemin ν (en grisé sur le schéma).

Exercice 11.12. *Montrez qu'on a un bijection entre l'ensemble des chemins considérés et l'ensembles des (p,q)-battages (les permutations de $\{1,\dots,p+q\}$ qui préservent l'ordre des p premiers éléments d'une part et l'odre des q derniers éléments d'autre part). Montrez que la signature d'un (p,q)-battage est égale à $(-1)^{|\nu|}$.*

On définit alors une application R-linéaire :

$$\begin{array}{cccc} \times & C_p(X,R)\otimes_R C_q(X,R) & \to & C_{p+q}(X,R) \\ & \sigma\otimes\tau & \mapsto & \sum_\nu (-1)^{|\nu|}(\sigma\times\tau)\circ\ell_\nu \end{array} .$$

On peut vérifier que cette application induit en homologie une application appelée *cross-produit* :

$$\times : H_p(X,R)\otimes_R H_q(Y,R) \to H_{p+q}(X\times Y,R) .$$

Theorème 11.13. *Soit R un anneau principal. Le cross-produit s'insère dans une suite exacte courte de R-modules (l'homologie étant prise à coefficients dans R) :*

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H_i(X)\otimes_R H_j(Y) \to H_n(X\times Y) \to \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}^R(H_i(X),H_j(Y)) \to 0 .$$

Cette suite exacte courte admet une section et $H_n(X\times Y)$ est donc isomorphe au R-module

$$\bigoplus_{i+j=n} H_i(X)\otimes_R H_j(Y) \oplus \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}^R(H_i(X),H_j(Y)) .$$

B. Le théorème de De Rham

Soit V une variété différentielle. Un simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \to V$ est dit *lisse* s'il peut se prolonger en une application lisse $\mathcal{U} \to V$, où $\mathcal{U}$ est un voisinage ouvert de Δ^p dans le sous-espace affine engendré par Δ^p. On note $C_*^{\mathrm{lisse}}(V;R)$ le sous complexe du complexe des chaînes singulières formé des combinaisons linéaires de simplexes lisses.

Theorème 11.14. *L'inclusion de complexes $C_*^{\mathrm{lisse}}(V;R) \hookrightarrow C_*(V;R)$ induit un isomorphisme en homologie.*

On peut alors définir une application $\mathbb{R}$-linéaire Ψ qui relie la cohomologie de De Rham $H^n_{DR}(V)$ au dual de la homologie singulière.

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & H^n_{DR}(V) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H_n(V,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \\ & [w] & \mapsto & \int_\bullet w \end{array}$$

où $\int_\bullet w$ est la forme linéaire sur $H_n(V,\mathbb{R})$ qui envoie une classe c représentée par un cycle lisse $\sum \lambda_i \sigma_i$ sur l'intégrale $\sum \lambda_i \int_{\Delta^n} \sigma_i^* w$. Pour vérifier que Ψ est bien définie, il faut vérifier que

- si $\sum \lambda_i \sigma_i$ est un bord alors $\sum \lambda_i \int_{\Delta^n} \sigma_i^* w = 0$,
- si w est un bord alors pour tout cycle $\sum \lambda_i \sigma_i$ on a $\sum \lambda_i \int_{\Delta^n} \sigma_i^* w = 0$.

Ces deux propriétés découlent du théorème de Stokes.

Theorême 11.15 (De Rham)**.** *L'application Ψ est un isomorphisme.*

Le théorème de De Rham signifie que les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de cohomologie de De Rham $H^n_{DR}(V,\mathbb{R})$ caturent la même information sur V que l'homologie singulière à coefficients dans $\mathbb{R}$. Cela a deux conséquences :

1. La cohomologie de De Rham (en dépit de sa définition en termes différentiels) ne dépend pas de la structure différentielle de V, seulement de sa topologie, ou plus précisément du type d'homotopie de V.
2. La cohomologie de De Rham ne voit pas la torsion homologique des variétés. Le cas des espaces projectifs de dimension paire illustre cela.

$$H^n_{DR}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2d}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Pourtant, les espaces projectifs sont loin d'avoir les mêmes propriétés topologiques que le point, comme le montre l'homologie singulière modulo 2 de ces espaces

$$H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2d}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } n > 2d, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n \leq 2d. \end{cases}$$

Quatrième partie
Groupes d'homotopie supérieurs

12 Définition et premières propriétés

12.1 Définition

On fixe un point de base $* \in S^n$, et on note q l'application de paire obtenue comme la composée suivante (où les applications de gauche et de droite sont des homéomorphismes fixés)

$$(I^n, \partial I^n) \twoheadrightarrow (I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n) \xrightarrow{\approx} (S^n, *) \ .$$

Pour toutes paires d'espaces (X, A) et (Y, B) on note $[(X, A), (Y, B)]$ l'ensemble des classes d'homotopies de paires correspondantes, cf. definition 9.4 :

$$[(X, A), (Y, B)] := \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_2}((X, A), (Y, B)) \,/\sim$$

Lorsque A et B sont réduits à un point, ces classes d'homotopies sont souvent appelées *classes d'homotopies pointées*.

Définition 12.1. Soit (X, x) un espace topologique pointé. Pour tout $n \geq 0$, on note $\pi_n(X, x)$ l'ensemble :

$$\pi_n(X, x) = [(S^n, *), (X, x)] \simeq [(I^n, \partial I^n), (X, x)] \ .$$

Si $n \geq 1$, on définit une opération $+$ sur $\pi_n(X, x)$ par $[f] + [g] = [f + g]$ où :

$$(f+g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ f(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } 1/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Cette opération fait de $\pi_n(X, x)$ un groupe, avec élément neutre la classe de l'application constante ϵ_x.

Pour $n = 0$, $\pi_0(X, x)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des composantes connexes par arcs de X (le point base ne joue aucun rôle), et pour $n = 1$, on retrouve la définition du groupe fondamental de X en x.

Remarque 12.2. La définition ci-dessus utilise la description $\pi_n(X, x) = [(I^n, \partial I^n), (X, x)]$. Si on décrit $\pi_n(X, x)$ comme $[(S^n, *), (X, x)]$, alors le produit $[f] + [g]$ est la classe d'homotopie de la composée

$$S^n \xrightarrow{\mathrm{pin}} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X$$

où pin est l'application de pincement, c'est à dire l'application obtenue en écrasant l'équateur de S^n sur un point.

Exercice 12.3. *Montrez que les projection* $X \times Y \to X$ *et* $X \times Y \to Y$ *induisent un isomorphisme de groupes :*

$$\pi_n(X \times Y, (x, y)) \simeq \pi_n(X, x) \times \pi_n(Y, y) \ .$$

Lorsque $n \geq 2$, on dispose d'opérations supplémentaires sur $\pi_n(X, x)$ et en conséquence ce groupe est abélien.

Proposition 12.4. *Soit* $n \geq 2$*. Pour* $1 \leq i \leq n$*, on définit une loi* $+_i$ *sur* $\pi_n(X, x)$ *par* $[f] +_i [g] = [f +_i g]$ *où :*

$$(f + g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) & si\ 0 \leq t_i \leq 1/2 \\ f(t_1, \dots, 2t_i - 1, \dots, t_n) & si\ 1/2 \leq t_i \leq 1 \end{cases}$$

Les lois $+_i$ *verifient*

$$(f +_i g) +_j (h +_i k) = (f +_j h) +_i (g +_j k) \ .$$

En particulier, toutes les lois $+_i$ *définissent la même structure de groupe et cette structure de groupe est abélienne.*

Si $f : X \to Y$ est une application continue, elle induit un morphisme de groupes

$$\begin{array}{cccc} \pi_n(f) & \pi_n(X, x) & \to & \pi_n(Y, f(x)) \\ & [\alpha] & \mapsto & [f \circ \alpha] \end{array} .$$

Pour $n \geq 2$, le n-ième groupe d'homotopie induit donc un foncteur de la catégorie des espaces topologiques pointés dans la catégorie des groupes abéliens :

$$\pi_n : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{A}b.$$

12.2 Changement de point base

Comme le groupe fondamental d'un espace, les groupes d'homotopie supérieure dépendent d'un point de base, ce qui induit quelques complications techniques qui sont traitées dans ce paragraphe. Notons $c = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in I^n$ le centre de I^n. Si X est un espace on note $C_{x,y}(X)$ l'ensemble des chemins de X d'origine x et d'extrémité Y. Pour $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x)$ et $\gamma \in C_{x,y}(X)$ on introduit l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi_\gamma(f) : & (I^n, \partial I^n) & \to & (X, y) \\ & s & \mapsto & \begin{cases} f(2(s - c) + c) & \text{si } ||s - c||_\infty \leq 1/4, \\ \gamma(4||s - c||_\infty - 1) & \text{si } ||s - c||_\infty \geq 1/4. \end{cases} \end{array}$$

Proposition 12.5. *L'application* $\begin{array}{cccc} \Phi_\gamma : & \pi_n(X, x) & \to & \pi_n(X, y) \\ & [f] & \mapsto & [\phi_\gamma(f)] \end{array}$ *vérifie :*

1. Φ_γ *est bien définie.*

2. *Φ_γ ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixées de γ.*
3. *$\Phi_{\epsilon_x} = \mathrm{Id}$ et $\Phi_{\gamma\mu} = \Phi_\mu \circ \Phi_\gamma$.*
4. *Φ_γ est un morphisme de groupes.*

Corollaire 12.6 (Changement de point base)**.** *Soit X un espace et γ un chemin de X d'origine x et d'extrémité y. Alors pour tout $n \geq 1$, $\Phi_\gamma : \pi_n(X,x) \to \pi_n(X,y)$ est un isomorphisme de groupes, d'inverse $\Phi_{\gamma^{-1}}$.*

Proposition 12.7. *Soient $f,g : X \to Y$ deux applications homotopes via une homotopie $H : X \times I \to Y$. Notons $\gamma \in C_{f(x),g(x)}(Y)$ le chemin défini par $\gamma(t) = H(x,t)$ pour tout $t \in I$. Alors on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X,x) \arrow[r, "\pi_n(f)"] \arrow[dr, "\pi_n(g)"'] & \pi_n(Y,f(x)) \arrow[d, "\Phi_\gamma"] \\ & \pi_n(Y,g(x)) \end{tikzcd} .$$

Corollaire 12.8. *Soit $f : X \to Y$ une équivalence d'homotopie. Alors pour tout $x \in X$, et tout $n \geq 1$, $\pi_n(f) : \pi_n(X,x) \to \pi_n(Y,f(x))$ est un isomorphisme de groupes.*

12.3 Espaces n-connexes

Définition 12.9. Un espace X est n-connexe s'il est connexe par arcs et si pour tout x et tout $1 \leq k \leq n$, $\pi_k(X,x)$ est trivial.

Les espaces simplement connexes sont les espaces 1-connexes. Les espaces contractiles sont n-connexes pour tout n. La proposition suivante propose une application de la n-connexité au problème de prolongement des applications.

Proposition 12.10. *Soit X un CW-complexe de dimension $\leq n$ et soit Y un espace n-connexe. Soit $f : X_k \to Y$ une application continue définie sur le k-squelette de X. Alors il existe une extension $\overline{f} : X \to Y$ de f. De plus, deux telles extensions sont homotopes.*

En particulier, les groupes d'homotopie détectent les espaces contractiles.

Corollaire 12.11. *Soit X un CW-complexe, et $x \in X$. Alors X est contractile si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\pi_k(X,x) = \{1\}$.*

En fait on a beaucoup mieux. Le **théorème de Whitehead** affirme que si X et Y sont deux CW-complexes, alors une application continue $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie si et seulement si pour tout $x \in X$ et tout $k \in \mathbb{N}$ $\pi_k(f) : \pi_k(X,x) \to \pi_k(Y,f(x))$ est un isomorphisme.

12.4 Le morphisme de Hurewicz

On se fixe pour chaque entier $n \geq 1$ un générateur de $\gamma_n \in H_n(S^n, \mathbb{Z})$. Soit (X, x) un espace pointé. L'*application de Hurewicz* est définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hur}_n : & \pi_n(X,x) & \to & H_n(X,\mathbb{Z}) \\ & [f] & \mapsto & H_n(f)(\gamma_n) \end{array}$$

Lemme 12.12. *L'application de Hurewicz est un morphisme de groupes.*

Comme application du lemme précédent, on peut montrer que $\pi_n(S^n, *)$ contient un groupe cyclique infini pour tout n. En effet, pour $X = S^n$ l'application identité $\mathrm{Id} : S^n \to S^n$ induit l'identité en homologie de degré n, donc le morphisme de Hurewicz est un morphisme surjectif de groupes

$$\pi_n(S^n, *) \twoheadrightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \ .$$

Le morphisme de Hurewicz permet d'identifier le H_1 d'un espace.

Theorème 12.13. *Si X est un espace connexe par arcs, le morphisme de Hurewicz induit un isomorphisme :* $\pi_1(X, x)_{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\simeq} H_1(X, \mathbb{Z})$.

Il existe un énoncé pour les degrés supérieurs. Le **théorème de Hurewicz** affirme que si X est un espace n-connexe, pour $n \geq 1$, alors le morphisme de Hurewicz induit un isomorphisme $\pi_{n+1}(X, x) \simeq H_{n+1}(X, \mathbb{Z})$.

13 Calcul des groupes d'homotopie

Le calcul des groupes d'homotopie $\pi_n(X, x)$ d'un espace est difficile en général pour $n \geq 2$. L'une des raisons est qu'il n'y a pas d'analogue du théorème de Mayer Vietoris (ou de van Kampen) pour les groupes d'homotopie supérieurs. Le cas des sphères est emblématique. Par exemple on ne connait les groupes d'homotopie $\pi_n(S^2, *)$ que pour des petites valeurs de n.

On connait quand même un certain nombre de résultats qualitatifs importants sur ces groupes d'homotopie supérieurs. En voici quelques-uns parmi les plus simples.

- Un théorème de Serre (1953) affirme que si X est un CW-complexe simplement connexe, avec un nombre fini de cellules en chaque degré, alors ses groupes d'homotopie sont des groupes abéliens de type fini.
- Un théorème de Freudenthal (1938) affirme que si X est un CW-complexe n-connexe, alors ΣX est $n+1$ connexe et on a un isomorphisme :
$$\pi_i(X) \simeq \pi_{i+1}(\Sigma X)$$
pour $n \leq i \leq 2n$. Il existe des techniques spécifiques pour calculer les groupes d'homotopie dans ces degrés. Cela fait partie de la branche de la topologie algébrique qu'on appelle l'*homotopie stable*.

- On peut aussi s'intéresser uniquement à la partie libre des groupes d'homotopie, ou de manière équivalente s'intéresser aux $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\pi_n(X,x)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Ils sont considérablement plus simples que les groupes d'homotopie, par exemple les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels

  $$\pi_n(S^d)\otimes\mathbb{Q}$$

  sont tous nuls, sauf si $n=d$, auquel cas $\pi_d(S^d)\otimes\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$ et si d est pair et $n=2d-1$, auquel cas $\pi_{2d-1}(S^d)\otimes\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$.

  En général les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\pi_n(X,x)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ sont très accessibles au calcul, et il se trouve qu'ils contiennent encore suffisamment d'information topologique intéressante pour de nombreuses applications. Les techniques spécifiques de calcul de ces groupes font partie de la branche de la topologie algébrique qu'on appelle l'*homotopie rationnelle*.